第１章

ベクトル

まず、「数ベクトル」から説明しよう……
……そして「幾何ベクトル」へ……

「図形」を「計算する」
のだ

「数を1列に並べてセットにしたもの」を「ベクトル」という

「ベクトル」は「数学」として高校ではじめて学ぶ内容ではあるが，小学校以来「理科」では「力の作用」，「天気図の風力表示」など，「数学」でも「数直線上における正，負の向き」，「図形の平行移動」など，**「方向（向き）をもつ量」**として，ある程度は接触する機会のあったことがらである．

このような「ベクトル」の概念を，人々がいつ，どこで，どのようにして獲得したかについては，われわれとしては正確に知る由（よし）もなく，それは遠い昔，「星の運動」，あるいは「船の位置や航路」などの研究から生まれたものであろうくらいに想像するしかないが，現在ではこれが「数ベクトル」や「行列」などを含む，より一般的な**「線形空間の理論」**へと発展し，「数学」や「物理学」などの「自然科学」だけでなく，「経済学」などの分野にも広く応用されるようになってきていることは，諸君がこの先，それぞれの分野に立ち合うことで自然に了解されることがらである．

高校数学ではこの「ベクトル」について「矢印」をつけた**「有向線分」**で表す**「幾何ベクトル」**からはいって，その**「成分表示」**である**「数ベクトル」**を考えるという立場をとる教科書が多い．しかし，「数ベクトル」からはいって，その「図形的表現」として「幾何ベクトル」を説明する組立て方もあり，それぞれ一長一短である．本書では後者の立場をとり，「数ベクトル」からはいることにする．

(i)　**「ベクトル」とは何か**———まず「数ベクトル」から説明する．

(ii)　**「ベクトル」の「演算法則」について**———「数ベクトル」に**「加(減)法」**，**「実数(スカラー)倍」**の演算を定義し，「有向線分」に同様の演算を定義して「幾何ベクトル」を誘導する．そのあとで**「内積」**を定義する．

(iii)　**「図形問題」への応用**———「ベクトル」に「演算」を定義したことの威力をここで確かめることになる———**やっかいな「図形問題」が「計算」で処理される「ありがたさ」**を確認したい．

いずれにしてもこの章では，「ベクトル」を用いて「図形問題」を解決するための技術を学びとることの他に，「数ベクトル」という，場合によっては「図形のもつ具体性から離れた量」を「ベクトルの定義」としても，「２次元」，「３次元」における図形的諸性質が，「ある程度はキチンとした形で」保存されることが**「少しだけ」見えれば「大成功」**としてよい．

第1節
ベクトルとその演算

「ベクトル」を説明するにあたって，最も重要な部分である．そのつもりで読んでもらいたい．次の手順で解説する．

(i) **「ベクトル」とは何か!!**——— **「数ベクトル」からはいることにする．**

(ii) 「数ベクトル」に**「加(減)法」，「実数(スカラー)倍」**という２つの「演算」を定義し，その具体的な例（２次元，３次元）として**「幾何ベクトル」**との関係を確認する．

(iii) ベクトルの**「1次独立」，「1次従属」について説明する**———実際には**「幾何ベクトル（２次元，３次元)」**を用いて図形問題を処理する上で大きな意味をもつことになる．

(iv) 第３の演算として**「内積」**を定義する．

1 「ベクトル」とは何か

たとえば，A君は身長180cm，体重60kg，B君は身長165cm，体重70kgといえば，両君の体格のおおよその特徴はわかる．さらに，胸囲，座高などをつけ加えれば，両君を実際に見なくても，その体格のイメージがかなりハッキリしてくる．

このとき，(身長180cm，体重60kg) というかわりに，はじめに身長，次に体重を書き，その単位をそれぞれ，cm，kgと約束しておけば

(180，60)，(165，70)

と，２つの実数を並べたものにカッコをつけて表すことができる．

これが，実はベクトルである．

「ベクトル」の定義

2つ以上の数（われわれの場合は「実数」に限定しておく）を1列に並べて，カッコでくくったものを**「ベクトル（数ベクトル）」**という．

カッコ内の1つ1つの数を**「成分」**といい，成分の個数をベクトルの**「次元」**という．

「ベクトル」に対して，数（実数）を**「スカラー」**という．

解　説　「成分」の並べ方は「ヨコ」でも「タテ」でもよい．

「ヨコ」に並べたもの，たとえば

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

などを「行（ぎょう）ベクトル」といい，「タテ」に並べたもの，たとえば

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

などを「列（れつ）ベクトル」という．あとで「行列」を学ぶときはこの2つの使い分けが必要になってくるが，「ベクトル」の段階ではどちらでもよいので，この章では主に「行ベクトル」を使うことにする――「列ベクトル」で書くと「紙面をとる」が「見通し」はよい．

また，ベクトル

$$(a_1,\ a_2),\ (a_1,\ a_2,\ a_3)$$

などを1つの文字で表すときは，いろいろな書き方があるが，本書では「$\vec{a}$」「$\vec{b}$」のように矢印をつけた記号で表すことにする．

なお

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

とするとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\ |\vec{b}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

をそれぞれベクトル「$\vec{a}$」「$\vec{b}$」の**「絶対値（あるいは長さ）」**という．

らしんばん

➡ 「ベクトル」を上のように定義しただけでは，ただ，「いくつかの数を1まとめにして考える」というだけのことでしかないが，**「その間に演算を定義する」と，いろいろな面で大きな力を発揮するようになる．**そこで「数ベクトル」に「加法（その逆演算である減法）」，「実数（スカラー）倍」，「内積」という「演算」を定義する――**数でないもの（数をまとめてセットにしたものは1つの数ではない）の間に演算を定義し，あたかも1つの数を扱うかのように計算**

するところを「スゴイ!!」と思ってもらいたい.

2 「加(減)法」と「実数(スカラー)倍」

数ベクトルの「加(減)法」,「実数(スカラー)倍」を定義するには，まず,「2つのベクトルが等しい」とはどういうことか，を決めることからはじめることにする.

(1) 数ベクトルの「相等(等しいということ)」

数ベクトルの「相等」

「2つの数ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が等しい」とは

(i) **「次元」が等しい**　(ii) **対応する「成分」が等しい**

ことをいい,「$\vec{a}=\vec{b}$」で表す.

解　説　たとえば

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

とするとき

$$\vec{a}=\vec{b} \rightleftarrows a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

である.

らしんばん

➡ この先に学ぶことになる「行列」についても同様であるが「次元」についてはキチンとした了解が必要である．たとえば

$$\vec{a_1}=(a_1,\ a_2),\ \vec{a_2}=(a_1,\ a_2,\ 0)$$

であるようなときは「$\vec{a_1}\neq\vec{a_2}$」である．それは $\vec{a_1}$ は「2次元の数ベクトル」であり，$\vec{a_2}$ は「3次元の数ベクトル」であって上に述べた「相等」の関係が成り立たないからである.

(2) 数ベクトルの「加(減)法」

数ベクトルの「和」

「次元」の等しい2つの数ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間に,「対応する各成分の和」で構成される数ベクトルを考えることができる.

これを「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ との和」といい，「$\vec{a}+\vec{b}$」で表す．

解　説　たとえば

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ はともに「3次元」の数ベクトルである．したがってこれらの間には「和」が定義され

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

である．これが「数ベクトルの加法（たし算）」である．

要するに「ベクトルの加法」というのは，「数である成分ごとのたし算」であって，「数の加法」で成り立つ演算法則がそのまま成り立つ．すなわち

「加法」についての演算法則

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　（交換則）

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　（結合則）

である．

らしんばん

数ベクトルの「減法（ひき算）」を定義したい―――

まず，成分がすべて0のベクトルを考え，これを「零ベクトル」といい「$\vec{0}$」で表す．

2次元の零ベクトルは　$\vec{0}=(0,\ 0)$

3次元の零ベクトルは　$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$

である．

このように $\vec{0}$ をきめると，任意の数ベクトル $\vec{a}$ に対して

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

となり，「この零ベクトルは数の加法の0（ゼロ）にあたるもの」と考えればよい．この「$\vec{0}$」を用いると，たとえば任意の2次元数ベクトル「$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$」に対して

$$\vec{a}+\vec{x}=\vec{0}$$

となるような，やはり2次元数ベクトル「$\vec{x}=(x_1,\ x_2)$」を考えることができ，成分を計算すると

$$a_1+x_1=0,\ a_2+x_2=0 \qquad \therefore\ x_1=-a_1,\ x_2=-a_2$$

として求められ

$$\vec{x}=(-a_1,\ -a_2)$$

であることがわかる．このような $\vec{x}$ を「$\vec{a}$ の逆ベクトル」といい，これを「－

$\vec{a}$」で表す．すなわち

$$-\vec{a}=(-a_1,\ -a_2)$$

である．この逆ベクトルを用いて，数の場合と同様に「**ベクトルの減法**（**引き算**）」を次のように定義するわけである．

任意のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ をとり，「$\vec{b}+(-\vec{a})$」を「$\vec{b}-\vec{a}$」で表し，これを「$\vec{b}$ から $\vec{a}$ をひいた差」ということにして，この演算「－」を「**減法**」という．

そしてこの「$\vec{b}-\vec{a}$」は

$$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$$

をみたす $\vec{x}$ に等しい――そのように決めたのだから「あたりまえ」のことである．

---

(3)　数ベクトルの「実数(スカラー)倍」

数ベクトルの「実数(スカラー)倍」

実数 k を数ベクトル $\vec{a}$ にかける乗法を

$$k\vec{a}$$

と書き，これは $\vec{a}$ の各成分を k 倍した数ベクトルを表すものとする．

解　説　たとえば

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

に実数 k をかける乗法は

$$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$

である．

また，任意のベクトル $\vec{a}$ の「1倍」はそのベクトル自身に等しい，つまり

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$$

である．

この「実数(スカラー)倍」という演算が定義されると，次の演算法則も簡単に認めるところとなる．

「実数(スカラー)倍」についての演算法則

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$　　（スカラーの結合則）

$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　　（ベクトルの分配則）

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　　（スカラーの分配則）

ここで定義した乗法は「実数とベクトルとのかけ算」である.「ベクトルとベクトルのかけ算」についてはあとでくわしく述べることにする(p. 24, 25参照).

らしんばん

以上, 数ベクトルについて「加(減)法」と「実数(スカラー)倍」の演算を定義し,「演算の基本法則」を明らかにしてきたが, これらのことからわかることは

「ベクトルについての計算は1次式の計算であって, 実数を表す文字についての1次式と全く同じに計算できる」

ということである. たとえば

$$2\vec{a}+3(\vec{b}-\vec{c})+\{\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})\}$$

の計算は

$$2a+3(b-c)+\{a-(b-c)\}$$

と同じつもりでやればよい.

以下の例題で確認しておくとよい.

例題 1

(1) $\vec{a}=(1,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$, $\vec{c}=(-3,\ -5)$について, $\vec{c}$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ (k, l は実数) の形で表せ.

(2) $\vec{a}=(-2,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}=(1,\ 2,\ 3)$のとき, 次の式をみたす $\vec{x}$ を求めよ.

(1) $4\vec{a}-\vec{x}=\vec{b}$　　　(2) $2\vec{x}+(\vec{a}-3\vec{b})=\vec{0}$

解説 (1) $k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{c}$ を成分で表すと

$$k(1,\ 1)+l(-1,\ 3)=(k-l,\ k+3l)=(-3,\ -5)$$

$$\therefore\ k-l=-3,\ k+3l=-5$$

これを解いてk, l を求めると

$$k=-\frac{7}{2},\ l=-\frac{1}{2}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\vec{c}=-\frac{7}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$$

(2) (1) $\vec{x}=4\vec{a}-\vec{b}=4(-2,\ 1,\ 0)-(1,\ 2,\ 3)$

$$=(-8-1,\ 4-2,\ 0-3)=\boldsymbol{(-9,\ 2,\ -3)}$$

(2) $\vec{x}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-3\vec{b})=-\frac{1}{2}\{(-2,\ 1,\ 0)-3(1,\ 2,\ 3)\}$

$$=-\frac{1}{2}(-2-3,\ 1-6,\ 0-9)=\boldsymbol{\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{9}{2}\right)}$$

らしんばん

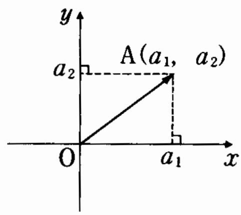
➡ (1)は成分で表すと，k と l の「連立方程式」，(2)は「3次元数ベクトル」ではあるが，3つの数をまとめて1セット（？）とした $\vec{x}$ を「未知数」とする方程式となっている，いわば「代数的な取扱い」である．

3 「有向線分」と「演算」

2次元の数ベクトル「$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$」は，成分 a_1，a_2 を xy 平面上の座標とみれば，点 $A(a_1,\ a_2)$ と「1対1」に対応させることができる．

$$\vec{a} \longleftrightarrow \text{点A}$$

したがって，2次元数ベクトル全体の集合と xy 平面上の点全体の集合が対応し，さらに，点Aを，**原点を始点としてAを終点とする「有向線分（方向をもつ線分）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」**に対応させる．



$$\text{点A} \longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

このようにして

$$\vec{a} \longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

という対応によって，**「2次元数ベクトル全体の集合」**を，**座標平面上の「原点を始点とする有向線分全体の集合」と対応させる**ことができる．

そこで，「原点を始点とする有向線分」の「加法」と「実数(スカラー)倍」という演算を定義することを考えてみよう．

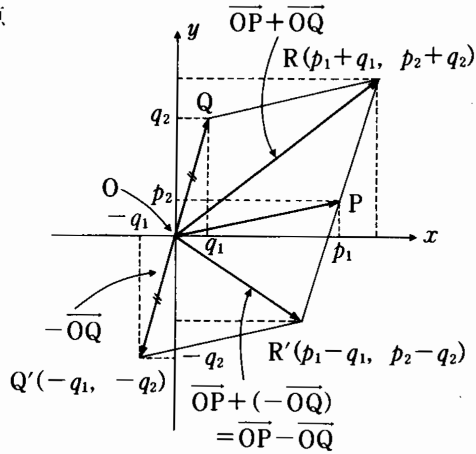
注　一般に線分ABにおいて，始点Aと終点Bとの区別をつけたものを「有向線分（$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く）」といい，図に示すときには線分ABに「AからBに向う矢印」をつけて表す．

(1) 加(減)法

まず，「有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が等しい」とはどういうことか――これを「AとBが一致すること」と決めておいて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で表すことにする．



いま，図のように，任意の２点

$\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$，$\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$

をとり，平行四辺形 OPRQ をつくると，点 R の座標は

$\mathrm{R}(p_1+q_1,\ p_2+q_2)$

となる．

そこで，「２つの有向線分 $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ の和」を

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}+\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$$

と表すことにして，この和を

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}+\overrightarrow{\mathbf{OQ}}=\overrightarrow{\mathbf{OR}}$$

と定義するのである．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が重なると平行四辺形はつぶれて線分になるが，このときも

$\mathrm{R}(p_1+q_1,\ p_2+q_2)$

となる点をとって $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ との和と定義することにしておけばよい．

次に，Q の原点に関する対称点を

$\mathrm{Q}'(-q_1,\ -q_2)$

として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}'}$ を「$-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$」で表すことにし，平行四辺形 OPR′Q′ をつくると

$\mathrm{R}'(p_1-q_1,\ p_2-q_2)$

となるので

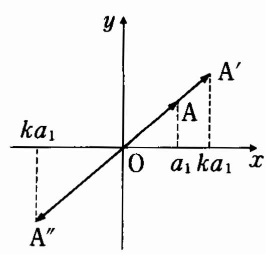
$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}+\overrightarrow{\mathbf{OQ}'}=\overrightarrow{\mathbf{OP}}+(-\overrightarrow{\mathbf{OQ}})=\overrightarrow{\mathbf{OR}'}$$

となり，これを

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}-\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$$

と書くことにすると，「$\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ から $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ をひいた差」すなわち「減法」が定義できる．

(2)　実数(スカラー)倍



数ベクトル

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$

の k 倍は

$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$

であった．そこで，「$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ の $\boldsymbol{k}$ 倍」もこれと同じように決める．すなわち，「$\boldsymbol{k}>\mathbf{0}$ のときは，$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ と同じ向きに線分 **OA** を $\boldsymbol{k}$ 倍」して OA′ をつくると

$$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$$

また「$\boldsymbol{k}<\mathbf{0}$ のときは逆方向に **OA** を $|\boldsymbol{k}|$ 倍」して OA″ をつくり

$$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA''}}$$

と決めればよい．

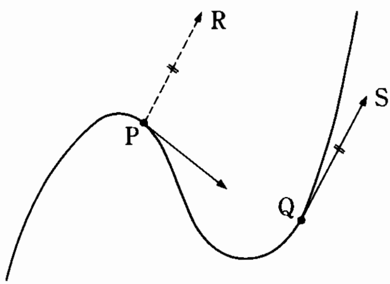
このようにして，**「原点を始点とする有向線分」**に**「数ベクトル」**と同じく**「加(減)法」，「実数(スカラー)倍」**が定義される．

4　幾何ベクトル

運動する点の移動，すなわち「変位」や「速度」，「物体に働く力」などは，「大きさ」だけでは決まらない．たとえば，「ある物体に加えられる力の大きさ」が同じでも，その「働く向き」によってはその作用が違ってくる．このような量を表すのに「有向線分」は非常に便利である――その「大きさ」を「線分の長さ」で表し，「向き」を「矢印」で表せばよい．

しかし，「有向線分」を「原点を始点とするもの」に限定してしまうと，いろいろ不便なことが多い．

たとえば，右〈図1〉のような曲線上を動く点があるとする．このような場合，点 P にきたときの速度，点 Q にきたときの速度を表すには P，Q を始点とする図のような「有向線分」で表すとわかりやすい．しかし，この2つの「有向線分」を比較するには有向線分の始点を一致させると，さらにハッキリしてくる――「有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$」をそのまま「平行移動」して「有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$」におきかえることができないか．



〈図1〉

そこで，「有向線分」について，次のような「とりきめ」をする．つまり

〝**「平行移動」によって重なる「有向線分」はすべて「同じ」とみる**〟

ことにするわけである．たとえば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動して $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ に重なるとすれば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は

(i)　同じ向きに平行

(ii)　「長さ」が等しい

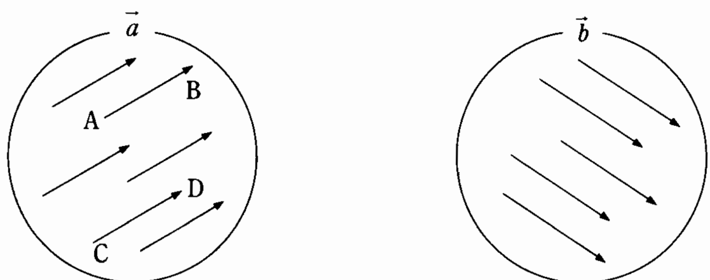
ことがわかる．

このとき「$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ は等しい」といい

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{CD}}$$

のように表すことにする．

そうすると $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しい「有向線分」は無数にあり，これらの集合は「有向線分」の1つのタイプとして，他の「有向線分」から類別される．そのような1つの集合を「**ベクトル（幾何ベクトル）**」といい，これを「$\vec{a}$」などで表す――〈図2〉．

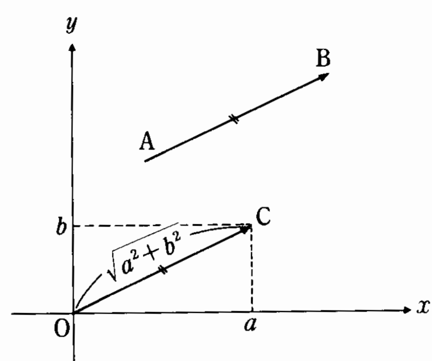


〈図2〉

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が「ベクトル $\vec{a}$（これは集合）」に属しているときは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\vec{a}$ の代表と考えることができる．逆に代表が1つきまれば「ベクトル」が決まるので，代表そのものを「ベクトル」とよぶときもあり，「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$」のように書くときもある．

さて，われわれはいま「有向線分」に「平行移動」を認めた――「有向線分」の「始点」と「終点」についての「こだわり」を捨てたといってもよい――**このことによって「何がありがたい」のかを考えてみよう．**

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を「平行移動」して $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$（O は原点）に重ねたとき，点 C の座標が



$(a,\ b)$

であるとする．

このとき a, b を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の「成分」という（a を「x 成分」，b を「y 成分」ということもある）．

そして，このことを

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{OC}}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$$

と表すことにする．実はこのようにとりきめることによってはじめて**「幾何ベクトル」に「数ベクトル」と同じく「加(減)法」と「実数(スカラー)倍」の演算が定義されるのである**――「原点を始点とする有向線分」の「加(減)法」，「実数(スカラー)倍」についてはすでにくわしく述べた（p. 9，10，11参照）．

また，**「線分 AB の長さ」**を「ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ の大きさ（長さ)」といい，これを $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ で表すと

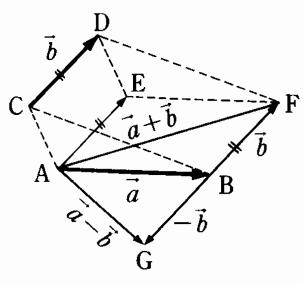
$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=|\overrightarrow{\mathbf{OC}}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$$

である．

ここまでに述べたことがらは「3次元の空間」においても全く同様に説明される．

以下，「ベクトル（幾何ベクトル)」の「加(減)法」，「実数(スカラー)倍」について実例で説明する．

任意の2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を図のように平行移動して $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ になったとする．そこで平行四辺形 ABFE をつくって，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を**「$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ の和」**と定め，これを



$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{AF}}$$

と書くことにすると，「ベクトルの加法」が決まる．あるいは

$$\overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{AE}}=\overrightarrow{\mathbf{BF}}$$

だから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ をつぎたして，$\triangle$ABF をつくって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の和が $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ となると考えてもよい．

「減法」の場合も，「原点を始点とする有向線分」の場合（p. 9，10）と同じように，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と長さが等しく向きが反対のベクトルを，「$-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$（＝

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$)」と表すことにして

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(-\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

と決めればよい．

ところで，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ というとき，**「始点 A と終点 B が一致したとき」**はどうなるか，ということだが，これは数ベクトルの場合と同じに「零ベクトル」といい，$\vec{0}$ で表すことにすればよい．$\vec{0}$ の成分は (0, 0) である．

このように，**「幾何ベクトルの演算」をきめておけば，「数ベクトル」の「加(減)法」「実数(スカラー)倍」の演算法則がそのまま「幾何ベクトル」でも成り立つことになる**――「成分」で表せば，これは「あたりまえ」のことで，**「幾何ベクトル」は「数ベクトル」の，特に「2 次元」，「3 次元」の場合であると考えればよい．**

例題 2

平面上に 4 点 A，B，C，D がある，線分 AD，BC の中点をそれぞれ M，N とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$ であることを示せ．

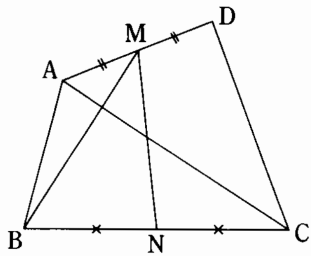
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ であることを示せ．

解　説　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\quad\cdots\cdots\cdots\text{①}\end{aligned}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\quad\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

M は AD の中点だから，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

これを用いて，②より

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

(3)　いろいろな考え方ができるが，ここでは①にならって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MN}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DM}}+\overrightarrow{\mathrm{MN}}+\overrightarrow{\mathrm{NC}}$$

として，この和をつくってみる．そうすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}+2\overrightarrow{\mathrm{MN}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}}+\overrightarrow{\mathrm{NC}} \quad \cdots\cdots③$$

M，N はそれぞれ AD，BC の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{MD}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BN}}=\overrightarrow{\mathrm{NC}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{MD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NB}}+\overrightarrow{\mathrm{NC}}=\overrightarrow{\mathrm{NB}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}=\vec{0}$$

これを③に用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$$

らしんばん

(1)　一般に，図のように点 A から出発して P，Q，…を経て最後に A にもどるベクトルの和は $\vec{0}$ となる．

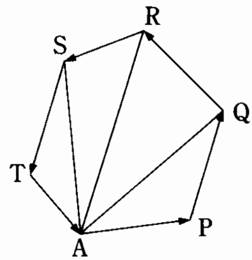
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}},\quad \cdots\cdots$$

のように考えていくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\overrightarrow{\mathrm{AT}}$$

「$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=-\overrightarrow{\mathrm{TA}}$」だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\overrightarrow{\mathrm{ST}}+\overrightarrow{\mathrm{TA}}=\vec{0}$$



となる（点の配列に注意）．これは，**途中の点が何個あっても同じように成り立つ．**

5　「1次独立」と「1次従属」

「1次独立」，「1次従属」という「コトバ」は高校の教科書には出てこない．しかし入試問題を解く上でもこれは重要な「概念」である．はじめは「ナジミにくい」かもしれないが何とか理解するように努力してほしい．

一般の場合についていうと，n 個のベクトル $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，……，$\overrightarrow{a_n}$ があって，これらのベクトルの実数倍の和

$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}$$

を，a_1，a_2，……，a_n の「1次結合」というのだが，これが「$\vec{0}$」となる場合を考える．すなわち

$$\boldsymbol{k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots\cdots\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}}$$

これが，「$\boldsymbol{k_1=k_2=\cdots\cdots=k_n=0}$」のときに限って成り立つとき，$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，……，$\overrightarrow{a_n}$ は「**1次独立**」であるという．

そうでないとき，すなわち「$\boldsymbol{k_1}$，$\boldsymbol{k_2}$，……，$\boldsymbol{k_n}$ **のうち，少なくとも1つは 0 でないものがある**」ときでも①が成り立つならば，$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，……，$\overrightarrow{a_n}$ は「**1次従属**」であるという．

このことを「2次元」と「3次元」の場合について，もう少し具体的に調べてみることにする．

(1)　2次元ベクトルの「1次独立」と「1次従属」

上の説明で，$n=2$ とするとハナシは次のように表される．

2次元ベクトルの「1次独立」と「1次従属」

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ ……………………………………………①

であるとき，これが

(i)　$\boldsymbol{\alpha=\beta=0}$ **のときに限って成り立つならば** $\boldsymbol{\vec{a}}$ **と** $\boldsymbol{\vec{b}}$ **は「1次独立」**

(ii)　$\boldsymbol{\alpha\neq0}$ **または** $\boldsymbol{\beta\neq0}$ **のとき成り立つならば** $\boldsymbol{\vec{a}}$ **と** $\boldsymbol{\vec{b}}$ **は「1次従属」**

である．

解　説　「幾何ベクトル」で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が「1次独立」あるいは「1次従属」である図形的条件を求めてみる．

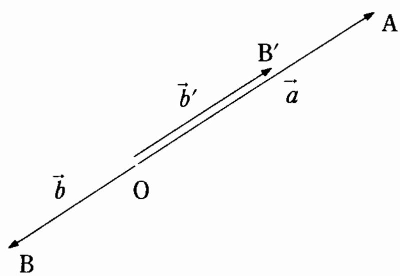
①で

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおくと

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

であるが，説明は(ii)の「1次従属」からはいる方がわかりやすい．

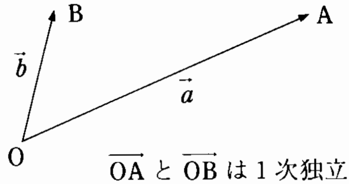


$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は1次従属

「$\alpha \neq 0$ または $\beta \neq 0$」であるから，いま $\alpha \neq 0$ とすると，②の両辺を α で割ることができて

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{OB} \quad (=k\overrightarrow{OB}) \quad \cdots ③$$

すなわち，「3点 **O, A, B** が1直線上にある」ことがわかる．



$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は1次独立

(i)の「1次独立」は「(ii)でない場合」としてとらえればよいから「3点 **O, A, B** が1直線上にない」ときのことである．

したがってこれらのことを「図形的に」述べると次のようになる．

2次元ベクトルの「1次独立」と「1次従属」の図形的説明

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \nparallel \vec{b}$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a} \parallel \vec{b}$

ただし，「$\vec{a} \parallel \vec{b}$」というのは「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行（同じ向き，あるいは逆向き）」であることを表し，「$\vec{a} \nparallel \vec{b}$」はそうでないことを示す記号である．なお，「$\vec{a} \parallel \vec{b}$」には「$\vec{a}=\vec{0}$（あるいは $\vec{b}=\vec{0}$）」も含むものとする．つまり「$\vec{0}$」は，「どんなベクトルとも平行」と約束しておくことにする．

らしんばん

➡ 2次元ベクトルの「1次独立」，「1次従属」の条件を成分で表すとどうなるか．

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\quad \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

として，「3点O，A，Bが1直線上にある」条件③に代入してみると

$$\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB} \Longleftrightarrow (a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)$$

$$\therefore\ a_1=kb_1,\ a_2=kb_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

をみたす実数（スカラー）k が存在することである．（$*$）より k を消去すれば

$$a_1b_2-a_2b_1=0$$

逆にこれが成り立つときは（$*$）をみたす実数 k が存在する．

そこで2次元ベクトルの「1次独立」，「1次従属」を「成分」を用いて次のように表すこともできる．

2次元ベクトルの「1次独立」，「1次従属」と成分の関係

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とするとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ $a_1b_2-a_2b_1=0$

ただし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれかが $\vec{0}$ のときも

$$a_1b_2-a_2b_1=0$$

が成り立つから $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とは「1次従属」である．

このことから次の重要な定理が得られる．

2次元ベクトルの「1次独立」と「1次結合」について

2次元ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が1次独立のとき，任意の2次元ベクトル $\vec{c}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ の1次結合として，ただ1通りに表される．すなわち

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$$

となる実数（スカラー）x，y が，ただ1組存在する．

解　説　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（O，A，B は1直線上にない），$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，C を通り OB に平行な直線と OA の交点を A′，C を通り OA に平行な直線と OB の交点を B′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

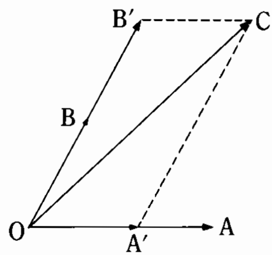
となる x，y がただ1組存在し

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$
$$=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

すなわち

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$$

となる．



らしんばん

「ただ1組であること」をキチンと説明するには次のようにやればよい．

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$$

の x，y の組 $(x,\ y)$ の他にもう1組 $(x',\ y')$ があって

$$\vec{c}=x'\vec{a}+y'\vec{b}$$

と表されたとすると

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x'\vec{a}+y'\vec{b}\quad(=\vec{c})$$

$$\therefore\quad (x-x')\vec{a}+(y-y')\vec{b}=\vec{0}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立であるから

$$x-x'=0,\ y-y'=0 \qquad \therefore\ x=x',\ y=y' \longleftarrow$$ 実は1通り!!

成分で確認してみよう――

$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2),\ \vec{c}=(c_1,\ c_2)$

とおくと

$(c_1,\ c_2)=x(a_1,\ a_2)+y(b_1,\ b_2)$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a_1x+b_1y=c_1} & \longleftarrow \text{第 1 成分の関係式} \\ \boldsymbol{a_2x+b_2y=c_2} & \longleftarrow \text{第 2 成分の関係式} \end{cases}$$

これは 2 元連立方程式に他ならない――「加減法」により

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \\ (a_1b_2-a_2b_1)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから「$\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1\neq 0}$」（p. 17参照）

$$\therefore\ \ x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1} \longleftarrow \boldsymbol{x,\ y}\ \text{はただ 1 組!!}$$

この計算はすでにやっている――**例題1**（p. 8）参照

➡ この定理から次のことがいえる.

「3 つの 2 次元ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は 1 次従属である」

証明は次のようにやればよい.

(i) $\vec{a},\ \vec{b}$ が 1 次独立のとき

上の定理から

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$　　$\therefore\ \ x\vec{a}+y\vec{b}+(-1)\vec{c}=\vec{0}$

となり,「-1」が 0 でないので, $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は 1 次従属である.

(ii) $\vec{a},\ \vec{b}$ が 1 次従属のとき

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$

をみたす $\alpha,\ \beta$ で 0 でないものがある. たとえば「$\alpha\neq 0$」とすると

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$

となり,「$\alpha\neq 0$」より $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は 1 次従属である.

4 つ以上の 2 次元ベクトルについても同じことがいえて, 2 次元ベクトルが 1 次独立となるものは 2 つ（1 組）しかない――**実際に 2 次元ベクトルの問題を解くときは「平行でない 2 つ（1 組)」のベクトルに注目することがポイント**になる.

---

(2)　3 次元ベクトルの「1 次独立」と「1 次従属」

3 次元ベクトルの「1 次独立」,「1 次従属」

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

であるとき, これが

(i) $\boldsymbol{\alpha=\beta=\gamma=0}$ のときに限って成り立つならば, 3 つのベクトル $\boldsymbol{\vec{a}}$,

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は「1次独立」

(ii) $\alpha \neq 0$, または $\beta \neq 0$, または $\gamma \neq 0$ のとき成り立つならば $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は「1次従属」

である.

解　説　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$

とおくと

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

この場合も(ii)の「1次従属」の場合から説明するとわかりよい.

いま, $\alpha \neq 0$ とすると

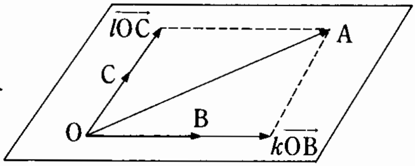
$$\overrightarrow{OA}=-\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{OB}-\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{OC}$$

$$(=k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC})$$

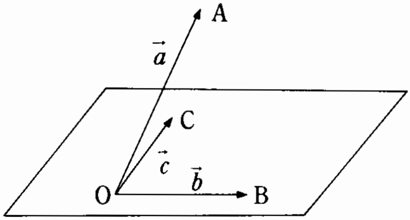
で, $\overrightarrow{OA}$ は $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる平面上にある――「4点O, A, B, Cが同一平面上にある」ことがわかる.

また「$\overrightarrow{OB}/\!/\overrightarrow{OC}$」のときは4点O, A, B, Cが同一直線上にあることになり, この場合に含まれる.

一方(i)の「1次独立」の場合は「(ii)でない」ときのハナシであるから, 図形的には「4点O, A, B, Cが同一平面上にない」ときのことであると考えればよい.



$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は1次従属



$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は1次独立

らしんばん

➡ このことを「成分」で表すとどうなるか――3次元の場合は, 2次元のときのように簡単にいかないし, われわれの場合あまり必要でないので省略する.

2次元のときと同様に, 次の定理が得られることだけ述べておく.

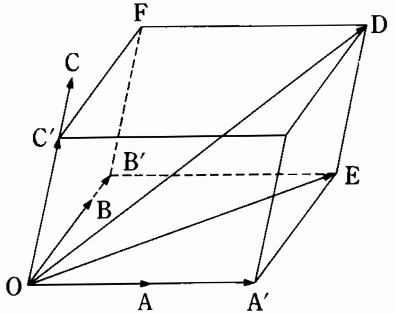
3次元ベクトルの「1次独立」と「1次結合」について

3次元ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が1次独立のとき, 任意の3次元ベクトル $\vec{d}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の1次結合として, ただ1通りに表される. すなわち

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$$

となる実数（スカラー）x, y, z が，ただ1組存在する．

2次元の場合とだいたい同じに考えればよい．



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とし，OA，OB，OC 上に点 A′，B′，C′ をとると

$$\overrightarrow{OA'}=x\vec{a}$$
$$\overrightarrow{OB'}=y\vec{b}$$
$$\overrightarrow{OC'}=z\vec{c}$$

で表され，OA′，OB′，OC′ を隣りあう3辺とする図のような平行六面体をつくると

$$\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC'}$$
$$=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$$

すなわち

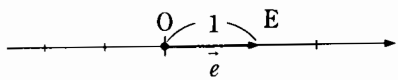
$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$$

となる実数 x, y, z が「ただ1組」きまる．

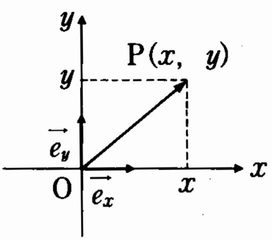
なお，この定理から，4つ以上の3次元ベクトルが1次独立となることはないことも，2次元の場合と同様にして証明できる．

(3)　基本ベクトルと座標

数直線上で，原点を O，「単位点（O からの距離が1の点）」を E とするとき，$\overrightarrow{OE}$（$=\vec{e}$）をこの数直線の「基本ベクトル」という．



座標平面上で，「x 軸，y 軸の基本ベクトル」をそれぞれ「$\vec{e_x}$」，「$\vec{e_y}$」とすると



$$\vec{e_x}=(1,\ 0),\quad \vec{e_y}=(0,\ 1)$$

で，これは

$$\vec{e_x}\neq\vec{0},\quad \vec{e_y}\neq\vec{0},\quad \vec{e_x}\not\parallel\vec{e_y}$$

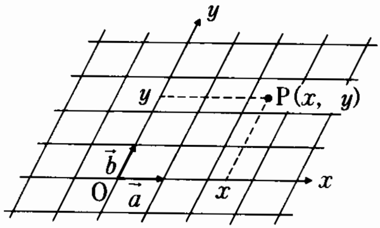
をみたすので「1次独立」であり，これをベースとして1つの座標平面が決定されている．この平面上の任意のベクトルを「$\vec{x}=(x,\ y)$」とすると

$$\vec{x}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}$$

と表すことができる．

ところで，いままでは，原点をOとして，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと，$\vec{x}$ の終点Pの座標が $(x,\ y)$ であると考えてきた．

ここで，話を逆にして，「2つの1次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ をベースとする平面」を決め，原点Oを決めると，ここの平面上の任意の点Pと，「2つの実数の順序つきの組 $(x,\ y)$」の間には



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$$

によって「**1対1の対応**」がつけられる．この $(x,\ y)$ を「点Pの座標」と定義することもできる———このことは3次元の座標空間においても同様である．

このように考えると，「基本ベクトル」は必ずしも直交する「**単位ベクトル（長さ1のベクトルのことをいう）**」である必要はなく，図のように斜交してもよいし，長さも「1」でなくてよい．

座標の考えを導入したのはデカルトであるが，彼が考えたのはわれわれがつかっている直交座標ではなく，一般の斜交座標であったといわれている．

注　上の説明でもわかるように「**基本ベクトル**」というとき，その「**始点**」は「**原点**」におかれている．ただ「単位ベクトル」というときはその限りではないから混同してはならない．

例題 3

(1)　$\vec{a}=(2,\ -1,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 3,\ 2)$，$\vec{c}=(3,\ 2,\ -1)$ は1次独立であることを示し，$\vec{d}=(4,\ 2,\ 0)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の1次結合で表せ．

(2)　ベクトル $\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ が1次独立のとき，次のベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は1次独立かどうかを調べよ．

(i)　$\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$，$\vec{q}=\vec{n}+\vec{l}$，$\vec{r}=\vec{l}+\vec{m}$

(ii)　$\vec{p}=2\vec{l}+\vec{n}$，$\vec{q}=\vec{l}+\vec{m}$，$\vec{r}=\vec{l}+3\vec{m}-\vec{n}$

解　説　(1)　$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$$=\alpha(2,\ -1,\ 3)+\beta(-1,\ 3,\ 2)+\gamma(3,\ 2,\ -1)$$

$$=(2\alpha-\beta+3\gamma,\ -\alpha+3\beta+2\gamma,\ 3\alpha+2\beta-\gamma)=\vec{0}$$

が，「$\alpha=\beta=\gamma=0$ のときに限って成り立つ」ことを示せばよい．

上式から

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+3\gamma=0 \\ -\alpha+3\beta+2\gamma=0 \\ 3\alpha+2\beta-\gamma=0 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて（計算省略）

$$\alpha=\beta=\gamma=0$$

よって，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は「1次独立」である．

そこで

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$$

とおくと

$$\vec{d}=(2x-y+3z,\ -x+3y+2z,\ 3x+2y-z)=(4,\ 2,\ 0)$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ -x+3y+2z=2 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$$

これを解いて

$$x=\frac{9}{26},\ y=\frac{1}{26},\ z=\frac{29}{26}\qquad \therefore\quad \boldsymbol{\vec{d}=\frac{9}{26}\vec{a}+\frac{1}{26}\vec{b}+\frac{29}{26}\vec{c}}$$

(2)　(i)　$\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0}$ とおくと

$$\alpha(\vec{m}+\vec{n})+\beta(\vec{n}+\vec{l})+\gamma(\vec{l}+\vec{m})=\vec{0}$$

$$\therefore\quad (\beta+\gamma)\vec{l}+(\gamma+\alpha)\vec{m}+(\alpha+\beta)\vec{n}=\vec{0}$$

$\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ は1次独立であるから

$$\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\alpha+\beta=0\qquad \therefore\quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

よって，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は「1次独立」である．

(ii)　$\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0}$ ……………………………………………①

とおくと

$$\alpha(2\vec{l}+\vec{n})+\beta(\vec{l}+\vec{m})+\gamma(\vec{l}+3\vec{m}-\vec{n})=\vec{0}$$

$$\therefore\quad (2\alpha+\beta+\gamma)\vec{l}+(\beta+3\gamma)\vec{m}+(\alpha-\gamma)\vec{n}=\vec{0}$$

$\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ は1次独立であるから

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta+3\gamma=0 \\ \alpha-\gamma=0 \end{cases}$$

これより，$\alpha=\gamma$，$\beta=-3\gamma$ で，「$\alpha=\beta=\gamma=0$」でなくても①は成り立ち，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は「**1次従属**」である．

らしんばん

➡ 3次元ベクトルの「**1次独立**」，「**1次従属**」と「**1次結合**」の関係を「**成分に注目したときにどう見るか**」については p. 20で少し触れたが，本問はその具体例である．

[6] ベクトルの内積

実数(スカラー)倍は

(スカラー)(ベクトル)＝(ベクトル) ⟵ **実数(スカラー)倍** (p. 7)

の形の乗法であったが，ここでは

(ベクトル)(ベクトル)＝(スカラー) ⟵ **「内積」の定義!!**

の形の乗法を定義する．

(1) 「数ベクトル」の「内積」

数ベクトルの内積

2つのベクトル

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

に対して，これらの「**成分の積の和**」

$$\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との「**内積**」といい「$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}$」で表す．すなわち

$$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

である．(内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を「$(\vec{a},\ \vec{b})$」のように書くときもある)

解　説 この定義は，いかにも「天下り的」であるが，このあと「幾何ベクトルの内積 (p. 27)」で，その意味を図形的に説明する．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が2次元ベクトルで

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

ならば

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

である.

この「内積」については，次の演算法則が成り立つ.

内積についての演算法則

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ （交換則）

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ （分配則）

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

これらの演算法則の成立は

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \vec{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

などとすれば容易に確かめることができる——必ずやっておくこと.

らしんばん

「内積」を用いて「ベクトルの大きさ（長さ)」を定義する——

「ベクトルの大きさ（長さ)」については，「ベクトルの定義」のところで天下り的に定義し（p. 4 参照)，「幾何ベクトル」のところで「有向線分の長さ」として定義した（p. 13参照).

しかし，この「内積」を用いると**「数ベクトル」**でも**「無理なく」**その「大きさ」を定義することができる．たとえば

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

に対して，$\vec{a}$ と $\vec{a}$ との内積「$\vec{a}\cdot\vec{a}$」を考えると

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\geqq 0$$

ここで

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \qquad \therefore\ |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

と書くことにすれば

$$|\vec{\boldsymbol{a}}|=\sqrt{\boldsymbol{a}_1{}^2+\boldsymbol{a}_2{}^2+\boldsymbol{a}_3{}^2} \longleftarrow \text{数ベクトルの「絶対値（あるいは長さ)」}$$

となり，これを**「ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}$ の大きさ（あるいは長さ)」**という.

また，このとき

$$|k\vec{a}|=\sqrt{(k\vec{a})\cdot(k\vec{a})}$$
$$=\sqrt{k^2(\vec{a}\cdot\vec{a})}=|k||\vec{a}|$$

という関係が成り立つこともわかる．k はもちろん実数である.

例題 4

次の等式を証明せよ.

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$

解　説　内積の演算法則は,「交換則」が成り立ち, 加法との「分配則」も成り立つ. したがって, この法則を用いてやる計算の範囲では数の計算と全く同じにできる. この例題の(1), (2), (3)も数の文字式の場合の公式

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

と同じにやればよい.

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$　　（分配則）

$=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　　（交換則）

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)-(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

$=4\vec{a}\cdot\vec{b}$

らしんばん

➡ 「内積」では「結合則」は成り立たない.

たとえば

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=(\text{実数})\times\vec{c}\\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})=\vec{a}\times(\text{実数})\end{array}\right\rangle \longleftarrow \text{いずれもベクトル}$$

であるが, $\vec{a}$ と $\vec{c}$ が「1次独立」のときはこれらは明らかに等しくない.「1次

従属」であったとしても等しいとは限らない――「結合則」は成り立たない．

「(ベクトル)(ベクトル)=(ベクトル)」という乗法もあって，この形の乗法は「外積」とよばれ，「$\vec{a}\times\vec{b}$」と表す．しかし，これは高校数学では扱わない．この外積で「×」という記号を用いるので，**内積では「×」という記号はつかわない．**

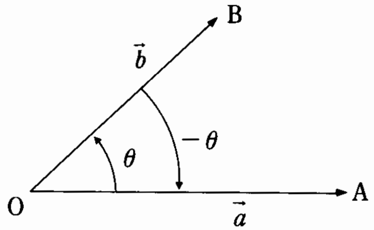
(2)「幾何ベクトル」の「内積」

$\vec{0}$ でないベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とする．

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}$$

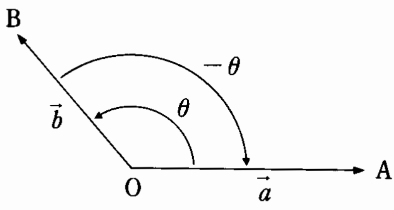
であるとき，**「$\angle AOB=\theta$」** を **「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ とのなす角」** という．

まず，「角の測り方」についての「とりきめ」から説明する．



図の場合，**「OA から OB に向けて測る角 θ は正」** で，逆に **「OB から OA に向けて測る角は負」** である．

「幾何ベクトル」の「内積」を定義するときは「$\cos\theta$」が問題になるのであるが，**「$\cos\theta$ は θ が正でも負でも同じ値をとる」** ので **「OA から測っても OB から測っても同じ値」** である．**そこで θ の範囲を最初から「$0\leqq\theta\leqq\pi$」** としておくことにする．



なお，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は

「$\theta=0$」のとき：　同じ向きに平行（重なる）

「$\theta=\pi$」のとき：　反対向きに平行

となる．

幾何ベクトルでは「$\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさ（線分OA, OBの長さ)」と，「そのなす角を θ としたときの $\cos\theta$」との積を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との **「内積」** といい，「$\vec{a}\cdot\vec{b}$ または $(\vec{a},\ \vec{b})$」で表す．すなわち

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

である．

特に「$\vec{a}=\vec{0}$」，または「$\vec{b}=\vec{0}$」のときは

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

と定める．

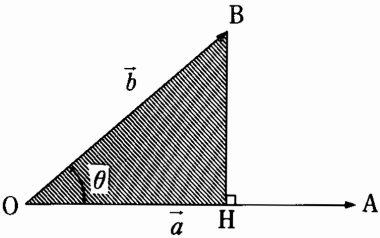
(i) **「幾何ベクトルの内積」と「正射影」**

図のように，B から直線 OA に垂線 BH を下ろしたとき，「長さ OH」に

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が同じ向きなら「正」

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が反対の向きなら「負」

の符号をつけたものを，**「$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 上への正射影」**という．



〈図 1〉

式で表すと

$$\mathrm{OH}=|\vec{b}|\cos\theta$$

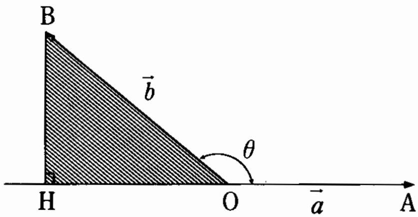
である．

そこで「内積」を計算すると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\underbrace{|\vec{b}|\cos\theta}_{\substack{\| \\ \mathrm{OH}}}$$

$$=|\vec{a}|\times\mathrm{OH}$$

（「×」は実数の「かけ算」の記号）



〈図 2〉

すなわち

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times(\vec{b}\text{ の }\vec{a}\text{ 上への正射影})$$

同様に考えて

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\times(\vec{a}\text{ の }\vec{b}\text{ 上への正射影})$$

としてもよい――〈図 2〉のとき，この値が「負」となることに注意!!

(ii) **「数ベクトルの内積」との関係**

数ベクトルの場合は

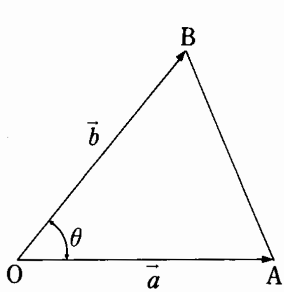
$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

であった（p. 24参照）．



図で，原点をOとし

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}$$

とおくと

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OA}|,\ |\vec{b}|=|\overrightarrow{OB}|$$

で，△OABに「余弦定理」を用いると

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \cdots\cdots ①$$

である．また

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$|\boldsymbol{\vec{a}}||\boldsymbol{\vec{b}}|\cos\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

このことから，2つの内積の定義は，**「内容的には全く同じもの」**であることがわかる．したがって「$\vec{a}\cdot\vec{b}$」を

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

としても，前に示した**「内積についての演算法則（p. 25）」**がそのまま成り立つわけである．

例題 5

$\vec{a}=(3,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -3,\ 2)$ とし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする．

（1）$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

（2）θ を求めよ．

（3）$\vec{a}$ と同じ向きをもつ単位ベクトルを求めよ．

解　説　（1）$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$

$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+(-2)\times(-3)+(-1)\times2=\boldsymbol{7}$$

（2）$\cos\boldsymbol{\theta}=\dfrac{\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}}{|\boldsymbol{\vec{a}}||\boldsymbol{\vec{b}}|}=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

（3）$\vec{a}$ と同方向の「単位ベクトル（長さ1のベクトル）」を $\vec{e}$ とすると

$$|\vec{a}|\,\vec{e}=\vec{a}$$

$$\therefore\quad \vec{e}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,\ -2,\ -1)$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{-2}{\sqrt{14}},\ \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

らしんばん

➡ (2)は「2つのベクトルのなす角」を求めている．

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

とするとき，「$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ」とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

から「$\cos\theta$」は

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

である．

➡ (3)で「$\vec{a}$ と同方向」である「単位ベクトル」が

$$\boldsymbol{\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

で求められることは覚えておくとよい――この先よく使うことになる．

次のようにしてもよい．

$$\vec{e}=k\vec{a}\qquad\therefore\ \underbrace{|\vec{e}|}_{=1}=|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$$

$$\therefore\ |k|=\frac{1}{|\vec{a}|}\qquad\therefore\ k=\pm\frac{1}{|\vec{a}|}$$

$\vec{e}$ は $\vec{a}$ と同方向であるから「$k>0$」である．

$$\therefore\ k=\frac{1}{|\vec{a}|}\qquad\therefore\ \vec{e}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

例題 6

任意のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次の不等式を証明せよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$　　　（シュワルツの不等式）

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$　　　（三角不等式）

解　説　(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$|\vec{a}||\vec{b}|\geqq 0$，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\leqq|\vec{a}||\vec{b}| \qquad \therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$$

(2)　両辺は負でないから，平方したものの差をとって大小を比較すればよい．

$$(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$=2(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b})\geqq 0 \qquad (\because\ (1))$$
$$\therefore\quad |\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

らしんばん

(1)の不等式は，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より

$$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}| \qquad \therefore\quad |\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$$
$$\therefore\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

と書きかえられて，「$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$」，「$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$」とし，これを成分で表すと

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3)^2\leqq(\boldsymbol{a}_1{}^2+\boldsymbol{a}_2{}^2+\boldsymbol{a}_3{}^2)(\boldsymbol{b}_1{}^2+\boldsymbol{b}_2{}^2+\boldsymbol{b}_3{}^2)$$

となる．また，「$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$」，「$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$」とすれば

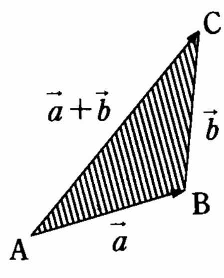
$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2)^2\leqq(\boldsymbol{a}_1{}^2+\boldsymbol{a}_2{}^2)(\boldsymbol{b}_1{}^2+\boldsymbol{b}_2{}^2)$$

となる．これらの不等式は**「コーシー・シュワルツの不等式」**とよばれている．

(2)　図で「$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$」，「$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$」とすると，「$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$」となる．したがってこの不等式は

$$AC\leqq AB+BC$$

ということ，**「三角形の2辺の和は他の1辺より大」**という定理と同じである．ただし，等号はBがAC上にきて三角形がつぶれた場合である．



そういう意味でこの不等式を「三角不等式」という．

三角形の2辺の差は他の1辺より小を考えると

$$||\vec{\boldsymbol{a}}|-|\vec{\boldsymbol{b}}||\leqq|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}|$$

が成り立つこともわかる．本問にならって証明しておくとよい．

第2節
「ベクトル」の図形への応用

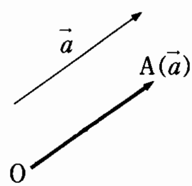
いろいろな「図形に関する問題」を「ベクトル」を用いて考えていく．図形の問題は大きく分けると，次の2つのタイプになる．

(i) **位置に関する問題**——「内(外)分点」，「3点が1直線上にある条件」，「三角形の3中線が1点で交わる（重心の存在)」，「2直線の平行（垂直)」など，この種の問題は「ベクトル」の持ち味を生かした扱いができる．

(ii) **計量の問題**——「線分の長さ（2点間の距離)」，「2直線のなす角」，「面積，体積」などの問題で，これらは「ベクトル」を「成分で表す」ことにより扱いが簡単になる場合が多い．

1 位置ベクトル

平面でも空間でもよいが，1つの定点Oをとる．1つのベクトル「$\vec{a}$」が与えられたとすると，これを代表する「有向線分」$\overrightarrow{OA}$ をとることができ，点Aが1つ決まる．



したがって，ベクトルによって点Aの位置を表すことができる．点Aに対応するベクトルが $\vec{a}$ であるとき，$\vec{a}$ を点Aの「位置ベクトル（座標といってもよい)」といい，これを $A(\vec{a})$ で表す．なおこの定点Oを「原点」という．

(1)　2点間の距離

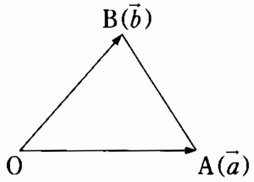
2点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$$

この「大きさ」が「2点間の距離」，すなわち「線分 AB の長さ」で

$$\mathbf{AB}=|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=|\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{a}}|$$

となる．



(2)　分点の公式

線分 AB を「一定な比に分ける点」の位置ベクトルについては，次の定理が成り立つ．

分点の公式

2点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) をむすぶ線分 AB を「$\boldsymbol{m}:\boldsymbol{n}$」に「内分」する点を P($\vec{p}$) とすると

$$\vec{\boldsymbol{p}}=\frac{\boldsymbol{n}\vec{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{b}}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}\quad\left(\begin{array}{l}\vec{\boldsymbol{a}}\text{ に }\boldsymbol{n}\text{ がかかり，}\vec{\boldsymbol{b}}\text{ に }\boldsymbol{m}\text{ が}\\ \text{かかっていることに注意!!}\end{array}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．ただし，$\boldsymbol{m}>0$, $\boldsymbol{n}>0$ とする．

解　説　右図で，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

←ベクトルの和!!

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

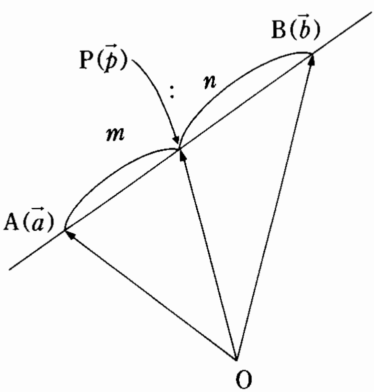
←実数倍!!

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

←差!!

$$=\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと

$$\vec{\boldsymbol{p}}=\frac{\boldsymbol{n}\vec{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{b}}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}$$

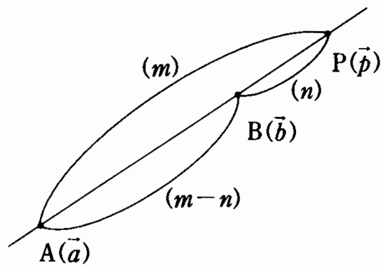
である．

$\left(\text{特に } m=n \text{ のときは } \vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \text{ で，これは } \mathbf{AB} \text{ の中点を与える}\right)$

らしんばん

「外分点」のときはどうすればよいか――

線分 AB を「$m:n$ $(m>n)$」に外分する点 P を図示すると，右図のようになる．このとき点 B に注目すると，**点 B が線分 AP を「$(m-n):n$」に「内分」**していることになり，上に述べた「内分点」を与える公式①を用いると



$$\vec{b}=\frac{n\vec{a}+(m-n)\vec{p}}{(m-n)+n}$$
$$=\frac{n\vec{a}+(m-n)\vec{p}}{m}$$

となるが，この式を**「$\vec{p}$」を求める方向で変形する**と

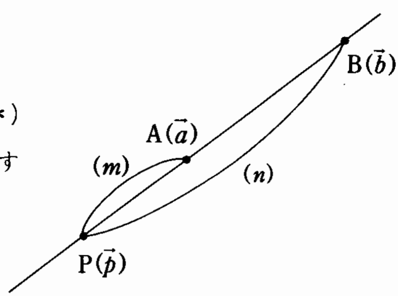
$$m\vec{b}=n\vec{a}+(m-n)\vec{p}$$
$$\therefore\quad \vec{p}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}=\frac{(-n)\vec{a}+m\vec{b}}{m+(-n)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

となり，これは「公式①」で n を $(-n)$ でおきかえたものに他ならない．

同様にして「$m<n$」のときは①の m を $(-m)$ におきかえればよい．

すなわち

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+(-m)\vec{b}}{(-m)+n} \qquad \cdots\cdots\cdots(**)$$



である．また「公式①」で「$m=0$」とすると

$\vec{p}=\vec{a}$ ―― P は A に一致

「$n=0$」とすると

$\vec{p}=\vec{b}$ ―― P は B に一致

することもわかり，これがなかなか有効な公式であることがわかる．

「外分点」を与える $(*)$，$(**)$ などは，公式として覚えておくのはまぎらわしいので，上で示したように，**「内分点」を与える公式だけをうまく利用する**ことも知っておくとよい．m，n の符号にだけ注意すれば「①」の公式 1 本で直線 AB 上のすべての点を表示することができることは了解しておきたい．

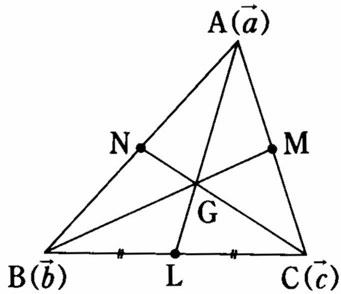
例題 7

A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を 3 頂点とする △ABC の重心を G($\vec{g}$) とすれば

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

であることを示せ.

解　説　**△ABC の重心は辺 BC の中点を L とするとき，線分 AL を「2：1」の比に内分する点のことである.**



L の位置ベクトルを $\vec{l}$ とすると

$$\vec{l}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

線分 AL を「2：1」の比に内分する点が G だから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\vec{l}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3}$$

$$=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{3}}$$

らしんばん

➡ これは「公式」として覚えておかなければならない.

➡ このことから，「△ABC の 3 つの中線が 1 点で交わる」ことも証明できる.

BC の中点を L とし，中線 AL を「2：1」の比に分ける点を G($\vec{g}$) とすると

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

である.

また，辺 CA の中点を M とすると，M$\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)$ で，中線 BM を「2：1」の比に分ける点を G′($\vec{g}'$) とすると，上の解と全く同様にして

$$\vec{g}'=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

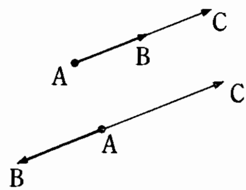
であることがいえる. したがって，G と G′ は一致する.

同様にして中線 CN を「2：1」の比に分ける点を G″ とすれば，これも G に一致することがいえて，結局 3 中線 AL，BM，CN は 1 点 G で交わる.

2 直線のベクトル方程式

(1) 「3点が1直線上」にあるための条件

3点を A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) とすると，この「3点が1直線上」にあるとき，「$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ は平行（同じ向きか反対向き）」であるから，「$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \vec{0}$」として $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ の実数倍となる．



したがって

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} = t\overrightarrow{\mathbf{AB}} \quad (t \text{ は実数})$$

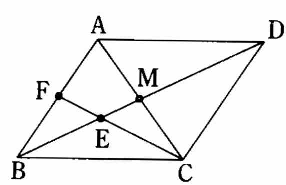
逆に，これが成り立てば，3点 A, B, C は1直線上にあることも明らかである．

「**A，B，C が1直線上にある**」 $\Longleftrightarrow$ 「$\overrightarrow{\mathbf{AC}} = t\overrightarrow{\mathbf{AB}}$」

例題 8

平行四辺形 ABCD において，対角線 BD を3等分する点のうち，B に近い方の点を E，AB の中点を F とすれば，3点 C，E，F は1直線上にあることを示せ．

解　説　例題 7 (p. 35) では，A($\vec{a}$)，…と点の位置ベクトルが与えられているので，原点もどこかに与えられていて，それを O とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ という具合に考えなければならなかったが，本問の場合は「原点」を自由に選んでよい．



たとえば，C を原点にとり，「$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$」，「$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{d}$」とおけば，B，D の C に対する位置ベクトルが $\vec{b}$，$\vec{d}$ となり，B($\vec{b}$)，D($\vec{d}$) と書くことができる．

この場合

$$\vec{b} \neq \vec{0}, \quad \vec{d} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \not\parallel \vec{d}$$

であるから，$\vec{b}$，$\vec{d}$ は「1次独立」で平行四辺形のある平面上のすべてのベクトルが $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表される．

ところで，本問では「3点 C，E，F が1直線上にあることを示せ」とい

うのだから

$$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=t\overrightarrow{\mathrm{CE}} \cdots\cdots\text{①}$$

となる実数 t があることをいえばよい．

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表し，①の形になるかどうかを調べる．

$$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{2}=\frac{1}{2}\{(\vec{b}+\vec{d})+\vec{b}\}$$

$$=\frac{1}{2}(2\vec{b}+\vec{d}) \cdots\cdots\text{②}$$

また，E は BD を「1：2」に分ける点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{1+2}=\frac{2\vec{b}+\vec{d}}{3} \cdots\cdots\text{③}$$

②，③より，$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ となり，C，E，F は 1 直線上にある．

らしんばん

➡ 平行四辺形 ABCD，△ABC などでは，特に指定がない限り，原点をどれか 1 つの頂点にとり，その頂点からでる 2 辺のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は「1 次独立」で，その平面上のすべての点の位置ベクトルが，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

の形で表されることを利用して問題が処理できることが多い．本問はその代表的な例の 1 つである．

➡ p. 36の図のように，対角線の交点を M とすると，M は AC の中点である．F が AB の中点だから，△ABC で BM，CF は 2 つの中線，したがってその交点を E′ とすると，E′ は △ABC の重心だから

$$\mathrm{BE'}:\mathrm{E'M}=2:1 \qquad \therefore\quad \mathrm{BE'}:\mathrm{BD}=1:3$$

で，E′ は BD を 3 等分する点となり E と一致する——— E は △ABC の重心!! このようにみれば本問は初等幾何で解くこともできる．しかし，上の解のようにベクトルを用いるほうがずっとラクである．

(2)　直線のベクトル方程式

2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) をむすぶ直線 AB 上に点 C($\vec{c}$) があるための条件は

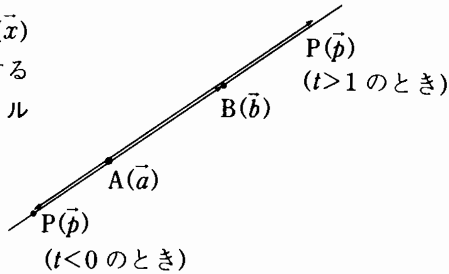
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (t\text{ は実数})$$

であった (p. 36).

ここで，点 C は動かないある特定の点であったが，この点 C のかわりに直線 AB 上の任意の 1 点 P($\vec{x}$) をとると，P の動きに応じて t の値が変化し

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

となる．逆に，この t がすべての実数値をとって変化するとき，動点 $\mathrm{P}(\vec{x})$ は直線 AB 上のすべての点を通過するので，これを**直線 AB の「ベクトル方程式」**という．



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{x}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$$

と変形されるので，①はいろいろな形で表される――われわれとしては問題の条件に応じて使い分けられるようにしておきたい．

①以外の形をしたものをまとめて解説しておく．

直線のベクトル方程式

$$\vec{x}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}) \quad (\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \quad \cdots\cdots ①'$$

$$\vec{x}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

あるいは $1-t=s$ とおいて

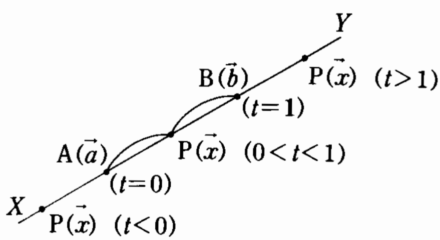
$$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b},\ s+t=1 \quad \cdots\cdots ③$$

解　説　(i)　①′について――これは点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行な直線であることを示している．

(ii)　②について――これは

$$\vec{x}=\frac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{t+(1-t)}$$

と書きかえられるので，**点 $\mathrm{P}(\vec{x})$ が線分 AB を「$t:(1-t)$」に分ける点であることを示している**――「分点の公式（p. 33，34）」と比較参照するとよい――①の形で見るとこの公式の意味がよりハッキリと了解される．



すなわち

(i)　$t>1$　：　P は半直線 BY(B を除く)上

(ii)　$t=1$　：　P＝B

(iii)　$0<t<1$：　Pは線分AB(両端を除く)上

(iv)　$t=0$　：　$\mathrm{P}=\mathrm{A}$

(v)　$t<0$　：　Pは半直線AX(Aを除く)上

である．

(iii)　③について――― $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が「1次独立」のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ とで決まる平面上の任意のベクトル $\vec{x}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「1次結合」として「ただ1通りに」表された (p. 18)．

このことから，③は定理として

共線条件

2定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ が与えられたとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が「1次独立」ならば，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の定める平面上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{x})$ は

$$\boldsymbol{\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}}$$

とただ1通りに表され，**3点A，B，Pが1直線上にある（共線である）条件は**

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=1}$$

である．

にまとめられる―――これもよく用いられる定理である．

らしんばん

②に注目しよう．この式から「**直線の方程式の一般形**」を考えることができる．

まず「**直線の方向**」は，それに平行なベクトル「$\vec{m}$ ($\vec{m}\neq\vec{0}$，大きさは任意)」によって表される．このベクトルを直線の「**方向ベクトル**」という―――しかしこれだけではまだ直線は決まらない．

さらに，「**その上の1点**」を決めると1つの直線が決定される．

このことは次のように表される．

直線のベクトル方程式

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{m}$ ($\neq\vec{0}$) に平行な直線は

$$\boldsymbol{\vec{x}=\vec{a}+t\vec{m}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

で表される．

ハナシを具体的にするために「2次元の成分表示」で書いてみよう―――これは第4章の「1次変換」でよく使うことになる．

$$\vec{a}=(a,\ b),\ \vec{m}=(k,\ l),\ \vec{x}=(x,\ y)$$

とおくと上の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ベクトルを「タテ」に書くと見通しがよい.}$$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{x=a+tk} & \cdots\cdots\cdots\cdots (**) \\ \boldsymbol{y=b+tl} & \cdots\cdots\cdots\cdots (***) \end{cases}$$

となる．この形を，「**直線の媒介変数（パラメーター）表示**」という．$\boldsymbol{t}$ が「**媒介変数（パラメーター）**」である．

(**)，(***) の2式から t を消去するとどうなるか．

「(**)$\times l-$(***)$\times k$」を計算すると

$$k(y-b)=l(x-a)$$

「$k\neq0$」のときは両辺を k で割ることができて

$$y-b=\frac{l}{k}(x-a) \longrightarrow y-b=m(x-a) \quad \left(\longleftarrow \frac{l}{k}=m \text{ とおいた}\right)$$

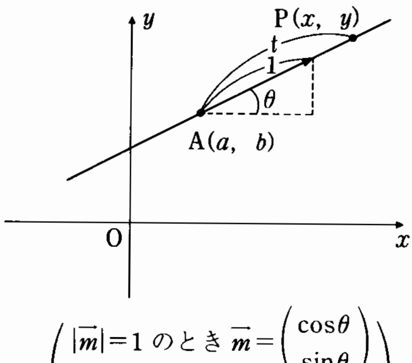
となり，点 $(a,\ b)$ を通り「傾き m」の直線の方程式となる――これはすでに数Iでみた「直線の表現」である．

また，「**媒介変数（パラメーター）」の図形的な意味**をもう少し説明すると (*) は

$$\vec{x}-\vec{a}=t\vec{m} \longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{m}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|t||\vec{m}|$$

$\vec{m}$ は与えられた一定なベクトルで，$|\vec{m}|\neq0$ であるから，これは **A** から **P** に**至る距離が $|\boldsymbol{t}|$ に比例すること**を意味している．



特に $\vec{m}$ が「単位ベクトル」，すなわち

$$|\vec{m}|=1$$

のときは

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|t|$$

となり，$|t|$ は「線分 AP の長さ」そのものを表している（右図）．

このとき，直線と x 軸の正方向とのなす角を θ とすると，(**)，(***) は

$$\begin{cases} x=a+t\cos\theta \\ y=b+t\sin\theta \end{cases}$$

となる．

$$\left(|\vec{m}|=1 \text{ のとき } \vec{m}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ とおくことができる} \right)$$

3次元の場合のハナシについては第2章の「空間図形 (p. 79)」でくわしくやることにする．

例題 9

△ABCにおいて，辺AB，AC上に点D，Eをとり

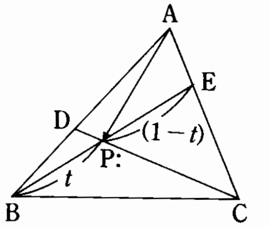
AD：DB＝2：1，AE：EC＝1：3

とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくとき，BEとCDの交点をPとして，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

解　説　Aを原点とみて，B，C，D，Eの位置ベクトルは

$$\mathrm{B}(\vec{b}),\ \mathrm{C}(\vec{c}),\ \mathrm{D}\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right),\ \mathrm{E}\left(\frac{1}{4}\vec{c}\right)$$

である．



Pは**線分BE**上にあるので，$\mathrm{P}(\vec{x})$ とすると

$$\vec{x}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}$$

$$=(1-t)\vec{b}+\frac{t}{4}\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$(0<t<1)$$

また，**P**は**線分CD**上にあるので

$$\vec{x}=(1-s)\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AD} \longleftarrow \mathrm{CP}:\mathrm{PD}=s:(1-s)$$

$$=(1-s)\vec{c}+\frac{2s}{3}\vec{b} \quad (0<s<1) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より，$(1-t)\vec{b}+\dfrac{t}{4}\vec{c}=\dfrac{2s}{3}\vec{b}+(1-s)\vec{c}$ $\cdots\cdots\cdots$③

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は「1次独立」であるから③の両辺を比較して

$$1-t=\frac{2s}{3},\ \frac{t}{4}=1-s \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

これを解いて

$$t=\frac{2}{5} \quad \left(s=\frac{9}{10}\right)$$

したがって，$t=\dfrac{2}{5}$ を①へ代入すると

$$\vec{x}=\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{1}{10}\vec{c}$$

らしんばん

➡「1次独立」の図形的な扱いとしては典型的な例である．

本文中の

$$\left.\begin{cases}\text{「PはBE上にある……………」}\\ \text{「PはCD上にある……………」}\end{cases}\right\rangle \text{2通りに表す} \longrightarrow \text{実は1通り}$$

については

$$\left.\begin{array}{l}\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}\\ \vec{c}=x'\vec{a}+y'\vec{b}\end{array}\right\rangle \quad \therefore \quad x=x',\ y=y'$$

として，すでに p. 18，19でくわしく説明した．

$\boxed{3}$ 「$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$」の応用

(1) ベクトルの「平行」と「垂直」

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とするとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

が，**「内積の定義」**であった (p. 27)．これによると

「$\theta=0$」のとき：　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$

「$\theta=\pi$」のとき：　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

で，いずれも「$\vec{a}/\!/\vec{b}$ (平行)」の場合である．

また

「$\theta=\dfrac{\pi}{2}$」のとき：　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

で，これは「$\vec{a}\perp\vec{b}$ (**垂直**)」を意味する．

ところで，「$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$」は「$\vec{a}=\vec{0}$ $(|\vec{a}|=0)$」のときも成り立ち，この場合「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直といえるか」ということが問題になるが，「垂直」というコトバの意味を拡張して，そういう場合を含めて，**「$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$」のとき「$\vec{a}$，$\vec{b}$ は垂直である」**といい，それを「$\vec{a}\perp\vec{b}$」という記号で表す，と決めておけばよい．

そうすれば

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

が，任意のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して成り立つことになる．

例題 10

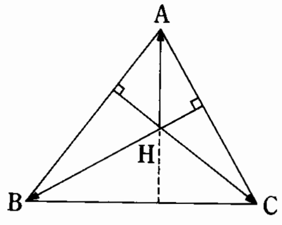
(1)　三角形の3頂点からそれぞれの対辺に下ろした3つの垂線は1点で交わることを示せ.

(2)　平面 π 上に直線 l がある. 平面 π 上にない1点Aより π に下ろした垂線の足をB, Bより l に下ろした垂線の足をCとするとき, AC $\perp l$ であることを示せ.

解　説　(1)　△ABC の頂点 B, C から CA, AB に下ろした垂線の交点をHとする. A から BC に下ろした垂線がHを通ること, すなわち

$$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$$

を証明すればよい.



$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{c}$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

BH $\perp$ AC, CH $\perp$ AB より

$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0 \quad \cdots\cdots ②$$

「①−②」より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

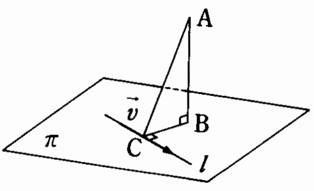
また,「$\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$」であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad \therefore\quad \mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$$

よって, 3垂線は1点で交わる（これを**「三角形の垂心」**という).

(2)　直線 l 上にあるベクトル $\vec{v}$ をとる――「$\vec{0}$」以外なら勝手にとってよい.

AB $\perp \pi$ ということは, AB が π 上の任意の直線と直交するということだから



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{v}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また

$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{v}=0$ ……………………………………………………………②

「①+②」より

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\vec{v}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{v}=0 \qquad \therefore\ AC\perp l$

らしんばん

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{AB}\perp\pi\\ \mathbf{BC}\perp \boldsymbol{l}\end{array}\right\} \longrightarrow \mathbf{AC}\perp\boldsymbol{l}$ ―― **3垂線の定理**

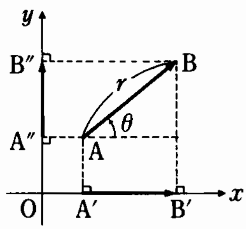
この定理は，空間図形の問題を処理するときの重要な定理で，覚えておかなければならない．

これは，逆も成り立ち

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{AB}\perp\pi\\ \mathbf{AC}\perp \boldsymbol{l}\end{array}\right\} \longrightarrow \mathbf{BC}\perp\boldsymbol{l}$

である．

(2) 内積と三角関数



ベクトル

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$

が，x軸の正方向となす角を θ とし

$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=|\vec{a}|=r$

とすると

$\boldsymbol{r=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$

$\boldsymbol{a_1=r\cos\theta,\ \ a_2=r\sin\theta}$

である．

そして，$\overrightarrow{AB}$ の x 軸，y 軸上への正射影ベクトル $\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{A''B''}$ については

$\overrightarrow{A'B'}=(a_1,\ 0)=(r\cos\theta,\ 0)$

$\overrightarrow{A''B''}=(0,\ a_2)=(0,\ r\sin\theta)$

であるから，次の関係が成り立つ．

$(\vec{a}+\vec{b})$ の正射影 $=$ ($\vec{a}$ の正射影) $+$ ($\vec{b}$ の正射影)

このハナシを次の例題で確かめてみよう．

例題 11

(1)　xy 平面上で，直線 l に原点 O から下ろした垂線の足を H とし，$\mathrm{OH}=p\ (>0)$，$\angle x\mathrm{OH}=\alpha$ とするとき，l の方程式は

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

であることを示せ．

(2)　余弦の加法定理

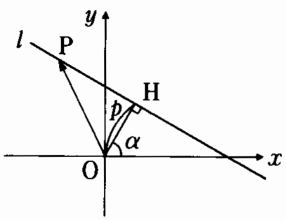
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を，ベクトルを用いて証明せよ．

解　説　(1)　$\mathrm{OH}=p$，$\angle x\mathrm{OH}=\alpha$ であるから

$$\mathrm{H}(p\cos\alpha,\ p\sin\alpha)$$

とおくことができる．



l 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HP}}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$$

$$\therefore\quad (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p\cos\alpha\\p\sin\alpha\end{pmatrix}=p^2$$

「$p>0$」を考えて

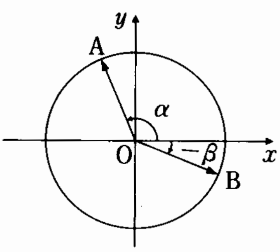
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

これが l の方程式である．

(2)　単位円 $(x^2+y^2=1)$ の周上に 2 点 A，B を

$$\angle x\mathrm{OA}=\alpha,\quad \angle x\mathrm{OB}=-\beta$$

となるようにとると



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}\cos(-\beta)\\\sin(-\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\-\sin\beta\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角は

$$\alpha-(-\beta)=\alpha+\beta$$

ここで

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta\\ -\sin\beta\end{pmatrix}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

らしんばん

(1)で与えられた直線

l: $\boldsymbol{x\cos\alpha+y\sin\alpha=p}$ (>0)

についてもう少し説明しておこう.

lを「内積」を用いて表すと

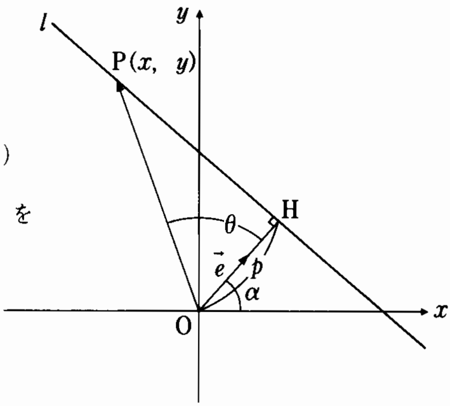
$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=p \quad\cdots\cdots(*)$$

となる. ここで l 上に点 P$(x,\ y)$ をとって

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\vec{e},\quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

とおくと $(*)$ は

$$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p$$



と表される——— **$\vec{e}$ は l と直交する「単位ベクトル」**である.

さらに, これは $\vec{e}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのなす角 θ を用いて次のように表される.

$$\underbrace{|\vec{e}|}_{=1}\ \underbrace{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta}_{=\mathrm{OH}}=p \qquad \therefore\quad p=\mathrm{OH}$$

すなわち, l は**「原点からの距離が p (>0) である直線の一般形」**であることがわかる. 直線のこのような形の表現を**「Hesse(ヘッセ)の標準形」**という.

なお垂線の足 H の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{e}=p\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\cos\alpha\\ p\sin\alpha\end{pmatrix}$$

で与えられることは説明するまでもない——— **$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{e}$ への「正射影ベクトル」**である.

具体的な例で示しておこう.

$$3x+4y=10$$

が与えられるとき，これを（＊）の形に変形するために，両辺を

$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$

で割ると――「単位ベクトル」による内積表現にしたい．

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=2 \qquad \left(\frac{3}{5}=\cos\alpha,\ \frac{4}{5}=\sin\alpha,\ 2=p\right)$$

で，**「原点からこの直線までの距離（＝OH)」**が**「2」**であることがすぐにわかる．

ついでに，この場合の垂線の足Hの座標は

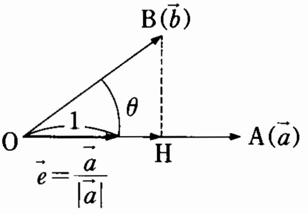
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=2\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\ \frac{8}{5}\end{pmatrix} \qquad \therefore\ \mathrm{H}\left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

である．

「正射影」と「正射影ベクトル」について――

「内積」は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\underbrace{|\vec{b}|\cos\theta}_{=\mathrm{OH}}=|\vec{a}|\times\mathbf{OH} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{「×」は実数}\\ \text{の「かけ算」}\end{array}\right)$$



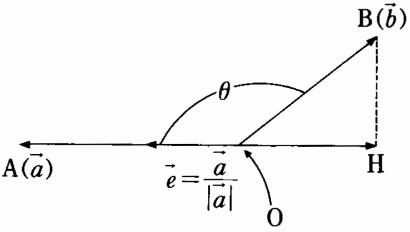
〈図1〉

であった (p. 28)．そこで $\vec{\boldsymbol{b}}$ の $\vec{\boldsymbol{a}}$ 上への**「正射影」OH** を求めるには，この両辺を $|\vec{a}|$ で割ればよい．

すなわち

$$\mathrm{OH}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{b}$$

ここで「$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e}$」とおくと―― $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は $\vec{a}$ と同方向の「単位ベクトル」であった (p. 30)．



〈図2〉

$$\mathbf{OH}=\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}$$

である．このことから $\vec{\boldsymbol{b}}$ の $\vec{\boldsymbol{a}}$ 上への**「正射影ベクトル」**である $\overrightarrow{\mathbf{OH}}$ は次の式で与えられる．

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}}=(\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})\vec{\boldsymbol{e}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

$$=\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{b}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2}\vec{\boldsymbol{a}}=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}\vec{\boldsymbol{a}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

このように $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は「$(\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})\vec{\boldsymbol{e}}$」，「$\dfrac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2}\vec{\boldsymbol{a}}$」，「$\dfrac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}\vec{\boldsymbol{a}}$」など，いろいろな形で

表されるが，内容をキチンと理解していればそれほどむずかしいハナシではない．

マジメ（？）にやってみよう．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が $\vec{a}$ と平行（同方向，または逆方向）であることに注目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}$$

と書くことができる．ここから出発するなら

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\vec{a}-\vec{b}$$

で，これは「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$」と垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\vec{a}\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\qquad\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

となって上に述べた結果と同じになる――このような形で出題されるときもある．

もう1つ説明を加えると「正射影」OHの符号については

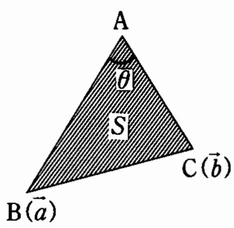
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき：　$\mathrm{OH}>0$ ――― 〈図1〉

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき：　$\mathrm{OH}<0$ ――― 〈図2〉

であるが，「$\mathrm{OH}<0$」のときは（＊＊）の $(\vec{e}\cdot\vec{b})$，（＊＊＊）の $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ が「負」の値をとり，それぞれ $\vec{e}$，$\vec{a}$ の向きをかえることになって，**結局Hは「いつでもシッカリBから直線OAに下した垂線の足」となる**――これはなかなかよくデキていて面白い．

（3）　三角形の面積

△ABCの面積を S，Aを原点として，B，Cの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とし「$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ $(0<\theta<\pi)$」とすれば



$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

ところで，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

で，$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ だから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

これを①に入れると，三角形の面積を内積で表す公式が得られて

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}} \quad \cdots\cdots ②$$

となる.

この公式は，成分で表すと2次元の場合

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

として

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

であるから

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2&=(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\\&=(a_1b_2-a_2b_1)^2\end{aligned}$$

となり，これを②に入れると

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|} \quad \cdots\cdots ③$$

となる.「内積で表した面積の公式②」は空間の三角形の場合も成り立つが，成分で表すと少し複雑になる.

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

とすると

$$\begin{aligned}&|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\\&\quad=(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&\quad=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\end{aligned}$$

となるので

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

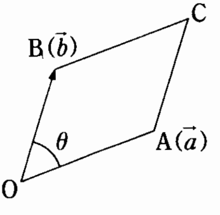
となるが，相当メンドウなので覚えておかなくてもよい．どうしても必要なときは②に数値を代入して求めればよい.

注　③は三角形の面積であったが，右図のような「平行四辺形 OACB」で

$$\mathrm{A}(a_1,\ a_2),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2)$$

とすると，この面積 S は

$$S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|a_1b_2-a_2b_1|$$



このことから「$\sin\theta$」は

$$\sin\theta=\frac{S}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}} \quad (0<\theta<\pi)$$

である．「**内積の定義**（p. 27, 29）」による

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}} \quad (0<\theta<\pi)$$

と比較して覚えておくとよい．

例題 12

空間の 3 点を

A(2, −3, −1), B(−1, 2, 2), C(2, 3, 3)

とする．

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) △ABC と xy 平面とのなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

解 説 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 5,\ 3),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 6,\ 4)$$

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} \quad (\text{p. }49) \quad \cdots\cdots ①$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-3)^2+5^2+3^2=43$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0^2+6^2+4^2=52$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3)\cdot 0+5\cdot 6+3\cdot 4=42$$

これらを①に代入して

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{43\cdot 52-42^2}$$

$$=\sqrt{43\cdot 13-21^2}=\sqrt{559-441}=\sqrt{118}$$

(2) 3 点 A, B, C から xy 平面に下した垂線の足をそれぞれ A′, B′, C′ とすると——— A′, B′, C′ を A, B, C の「**xy 平面への正射影**」という．

A′(2, −3, 0), B′(−1, 2, 0), C′(2, 3, 0)

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}=(-3,\ 5,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}=(0,\ 6,\ 0)$$

△A′B′C′ の面積を S' とすると

$$S'=\frac{1}{2}|(-3)\cdot 6-0\cdot 5| \longleftarrow \frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1| \quad (\text{p. }49)$$

$$=9$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{S'}{S}=\frac{9}{\sqrt{118}}$$

らしんばん

(1)はp. 49で説明した公式

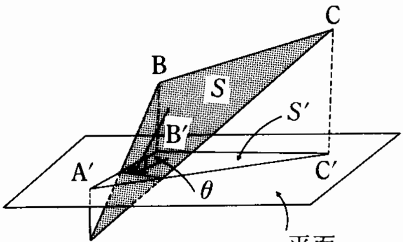
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

に$|\vec{a}|^2$, $|\vec{b}|^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ をマジメに代入して計算しただけである――― 3 次元ベクトルのときは「成分で表された形の公式」をいきなり用いるのは少し気がひける．
―――「①（あるいは（＊））の形の式」は示しておくことにしよう．

△ABC と xy 平面とのなす角 θ というのは，図で示すと右の〈図 1〉のような θ のことである．**△A′B′C′ は △ABC の xy 平面上への正射影になっ**ている．このとき

$$\cos\theta=\frac{S'}{S}\quad\left(=\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}\right)$$

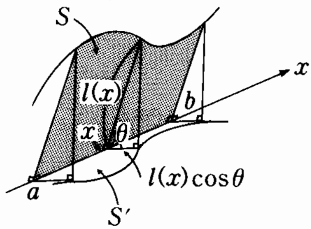
をどう説明すればよいか．



〈図 1〉

〈図 2〉のように状況を書きかえてみると「積分（基礎解析）」を利用して求めることができる．すなわち

$$S'=\int_a^b l(x)\cos\theta dx$$
$$=\cos\theta\int_a^b l(x)dx$$
$$=\cos\theta\cdot S$$
$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{S'}{S}$$



〈図 2〉

である―――この公式は知っておくと都合のよいときがある．

第3節
問題解法の研究

発展問題 1—「ベクトル方程式」,「1次独立」

四角形 ABCD の対辺 AB, CD の延長が点 E で交わり，他の対辺 AD, BC の延長が点 F で交わるとき，AC, BD, EF の中点を P, Q, R とする．このとき

$$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}\ (m>1),\ \overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AD}\ (n>1)$$

として次の問いに答えよ．

(1) 3点 P, Q, R が1直線上にあることを示せ．

(2) △AEF の面積を S とするとき，△BRD の面積を S で表せ．

解 説 (1) 「図形の問題」を「ベクトル」で解く1つのキメ手は「位置ベクトル」である．

4つの頂点の1つ，たとえば A を原点にとり

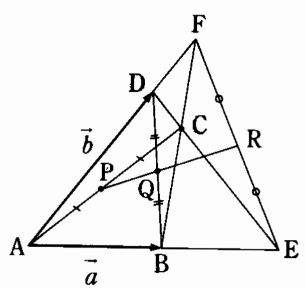
$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b}$$

とおくと，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「1次独立」であるから，他の点 C, E, F, P, Q, R の「位置ベクトル」は，すべて $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表される．

このことを用いて

$$\overrightarrow{PQ}=p\overrightarrow{PR} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots① $$

となることを示せばよい．



①の $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ は

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots② $$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots③ $$

であるから，「目的」はこの $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表すことである．

この3点 P, Q, R はそれぞれ AC, BD, EF の中点であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=m\vec{a}\ (m>1),\ \overrightarrow{\mathrm{AF}}=n\vec{b}\ (n>1)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \quad \cdots\cdots ④$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}(m\vec{a}+n\vec{b}) \quad \cdots\cdots ⑤$$

はすぐにわかる．

問題は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるが，これは

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

で，結局この問題は**「$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すことがポイント**である．

B，C，F は1直線上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-t)\vec{a}+tn\vec{b} \quad \cdots\cdots ⑦$$

D，C，E も1直線上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=sm\vec{a}+(1-s)\vec{b}$$

$$\therefore\quad (1-t)\vec{a}+tn\vec{b}=sm\vec{a}+(1-s)\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は「1次独立」であるから両辺を比較して

$$1-t=sm,\quad tn=1-s \qquad \therefore\quad t=\frac{1-m}{1-mn}$$

これを⑦に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(1-\frac{1-m}{1-mn}\right)\vec{a}+\frac{n(1-m)}{1-mn}\vec{b}$$

$$=\frac{m(1-n)\vec{a}+n(1-m)\vec{b}}{1-mn}$$

これを⑥に入れると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{m(1-n)\vec{a}+n(1-m)\vec{b}}{2(1-mn)} \quad \cdots\cdots ⑧$$

④と⑧を②に入れて

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{m(1-n)\vec{a}+n(1-m)\vec{b}}{2(1-mn)}$$

$$=\frac{(1-m)\vec{a}+(1-n)\vec{b}}{2(1-mn)}$$

⑤と⑧を③に入れて

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}(m\vec{a}+n\vec{b})-\frac{m(1-n)\vec{a}+n(1-m)\vec{b}}{2(1-mn)}$$

$$=\frac{mn}{2(1-mn)}\{(1-m)\vec{a}+(1-n)\vec{b}\}$$

この $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ の式から「$(1-m)\vec{a}+(1-n)\vec{b}$」を消去すると

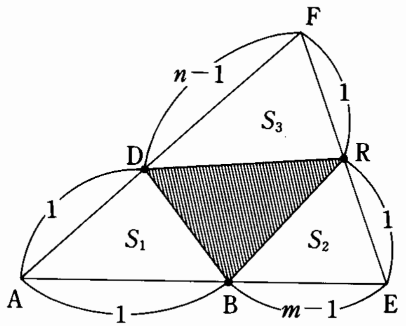
$$\overrightarrow{PR}=mn\overrightarrow{PQ}$$

すなわち，3点P，Q，Rは1直線上にある．

(2)　3点B，R，Dは3辺AE，EF，FAを図のような比に内分している．

すなわち

$$AB:BE=1:(m-1)$$
$$ER:RF=1:1$$
$$FD:DA=(n-1):1$$



このことから，△ABD，△ERB，△FRDの面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると

$$S_1=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\triangle AEF=\frac{1}{mn}S$$

$$S_2=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{2}\triangle AEF=\frac{m-1}{2m}S$$

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\triangle AEF=\frac{n-1}{2n}S$$

このことから，△BRDの面積は△AEFから S_1，S_2，S_3 を引いて

$$\begin{aligned}\triangle BRD&=S-S_1-S_2-S_3\\&=S-\frac{1}{mn}S-\frac{m-1}{2m}S-\frac{n-1}{2n}S\\&=\frac{2mn-2-n(m-1)-m(n-1)}{2mn}S\\&=\frac{m+n-2}{2mn}S\end{aligned}$$

らしんばん

➡「初等幾何」では本問を「ニュートンの定理」といい，直線PQRを「ニュートン線」といっている．

具体的に m，n に数値を与えてみよう．

たとえば

$$m=2,\ n=3$$

とすれば次ページの図のようになり，$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表す問題はこのタイプの問題として必ずやっておかなければならないものの1つである（p. 41，42でも説

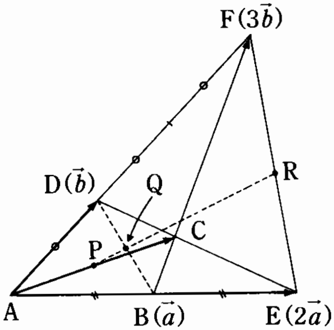
明した）.

この場合も本問の方法にならってマジメに計算すれば

$$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b},\qquad \overrightarrow{PR}=6\overrightarrow{PQ}$$

が得られる.

また,「初等幾何」では「メネラウスの定理」という便利なもの（？）もあって,これを用いると



$$\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{EB}}\cdot\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{CF}}\cdot\frac{\mathbf{FD}}{\mathbf{DA}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\therefore\quad \frac{BC}{CF}=\frac{1}{4}\qquad \therefore\quad BC:CF=1:4$$

すなわち点CはBFを「1：4」に内分することがわかり,「分点公式」を用いて

$$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$

は「ともかく」簡単に求められる———ここではベクトルを用いたい.

「メネラウスの定理」について述べておく.

メネラウスの定理

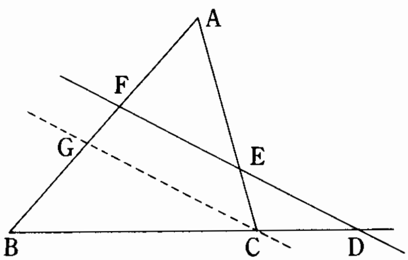
△ABCの辺BC，CA，AB，あるいはその延長と，任意の直線との交点をそれぞれD，E，Fとすると

$$\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{DC}}\cdot\frac{\mathbf{CE}}{\mathbf{EA}}\cdot\frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{FB}}=1$$

が成り立つ.

「証明」は次のようにやる.

CからDFに平行な直線を引き，ABとの交点をGとすれば



$$\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{GF},\quad \frac{CE}{EA}=\frac{GF}{FA}$$

$$\therefore\quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$$

$$=\frac{BF}{GF}\cdot\frac{GF}{FA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

（証明終り）

➡ (2)について———「三角形の面積公式（p. 48)」によれば

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta\quad (\mathrm{OA}=a,\ \mathrm{OB}=b)$$

であった．実はこれにもう1つつけ加えておきたいことがある．それは，たとえば右の図で2点 A′，B′ を

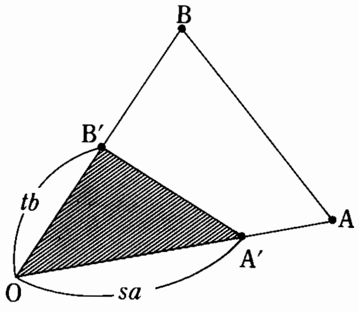
$$\mathbf{OA'}=s\boldsymbol{a},\ \mathbf{OB'}=t\boldsymbol{b}$$

にとり，△OA′B′ の面積を S' とすると

$$S'=\frac{1}{2}(sa)(tb)\sin\theta$$

$$=st\cdot\frac{1}{2}ab\sin\theta=stS$$

⟵ **面積は「st 倍」になる!!**



となる―――(2)はこれを用いた．

上に述べた「$m=2,\ n=3$」などの具体的な例で確かめておくとよい．

発展問題2―直線の定点通過

1直線上にない3点をO，A，Bとする．実数 p，q が $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ をみたしてかわるとき，$\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=q\overrightarrow{OB}$ の終点C，Dをむすぶ直線は，定点を通ることを示せ．

解　説　マジメ(？)に考えるとどこから手をつけてよいかわからない．

直線 CD の方程式は，その上の任意の1点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$$

$$=(1-t)p\overrightarrow{OA}+tq\overrightarrow{OB}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

である．「目的」はパラメーター t の値を適当にとるとき，$\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ が p，q に無関係なベクトルになることを示すことである．

それには，①で

$$(1-t)p=m,\quad tq=n$$

となるような，p，q に無関係な m，n が選べるように t を決めてやればよいから

$$\frac{m}{p}=1-t,\ \frac{n}{q}=t\qquad \therefore\ \frac{m}{p}+\frac{n}{q}=1 \longleftarrow\ t\text{ を消去した}$$

与えられた条件「$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$」をにらんで

$$m=n=1,\ t=\frac{1}{q}$$

にとればよいことがわかる．

以上のことを，次のように答案にまとめればよい———本問はここまで見えないとどうもスッキリした「答案」は書きにくい．

次にまとめてみる．

直線 CD 上の点を P とすれば

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$$

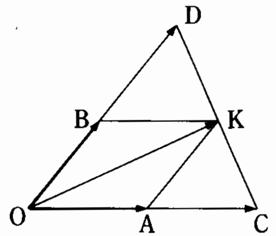
をみたす実数 t が存在する．

$$\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OD}=q\overrightarrow{OB}$$

だから

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)p\overrightarrow{OA}+tq\overrightarrow{OB}$$

(←　これは①)



$t=\dfrac{1}{q}\left(=1-\dfrac{1}{p}\right)$ に対応する CD 上の点を K とすると

$$\overrightarrow{OK}=\left(1-\frac{1}{q}\right)p\overrightarrow{OA}+\frac{1}{q}\cdot q\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{1}{p}\cdot p\overrightarrow{OA}+\frac{1}{q}\cdot q\overrightarrow{OB}\quad\left(\because\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

となり，K は定点で，直線 CD はこの定点 K を通る．

らしんばん

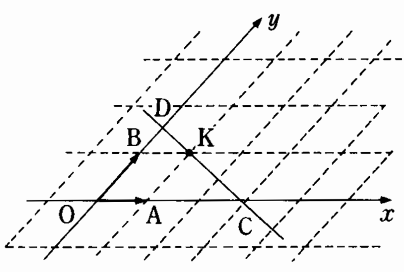
➡ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を基本ベクトルとする図のような「斜交座標系」を考えると

$$\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OD}=q\overrightarrow{OB}$$

だから

$$C(p,\ 0),\ D(0,\ q)$$

で，直線 CD の方程式は直交座標軸の場合と同じように



$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

と表せる．これは「$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$」なら「$x=y=1$」，すなわち，K(1, 1) という定点を通ることがすぐわかる．このとき K(1, 1) は

$$\overrightarrow{OK}=1\cdot\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

である．

➡ この問題は「定点 K の予想」がつけば，次のような解答でもよい．

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{p}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{q}\overrightarrow{OD}$$

「$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}$」とおくと，K は定点で，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ だから，K は線分 CD を「$\dfrac{1}{q}:\dfrac{1}{p}$」の比に分ける点である（「**共線条件** (p. 39)」参照）.

したがって CD は定点 K を通る.

発展問題 3―角の 2 等分線上のベクトル

(1) 平面上に，1 直線上にない 3 点 O，A，B があるとき，∠AOB の 2 等分線上の点を P とすれば

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)\quad (k \text{ は実数})$$

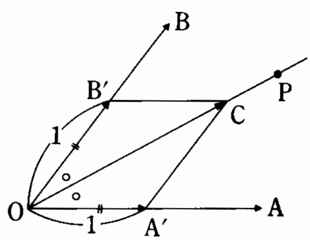
と表されることを示せ.

(2) △ABC において，∠A の 2 等分線が BC と交わる点を D とするとき，BD：DC＝AB：AC であることをベクトルを用いて示せ.

解 説 (1) 図のように，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 上の「**単位ベクトル**」を $\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$ とすると

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|},\quad \overrightarrow{OB'}=\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$$

（「単位ベクトル (p. 30)」参照!!）



であるから

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$$

とすると，**平行四辺形** OA′CB′ は「ひし形」となり，点 C は ∠AOB の 2 等分線上にある.

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OC}$$

$$=\boldsymbol{k}\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{OA}}}{|\overrightarrow{\mathbf{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{OB}}|}\right)\quad (k \text{ は実数})$$

と表すことができる.

なお，$k>0$ ならば P は O に関して C と同じ側，$k<0$ のときは P は直線 CO の O をこえる延長上にくる.

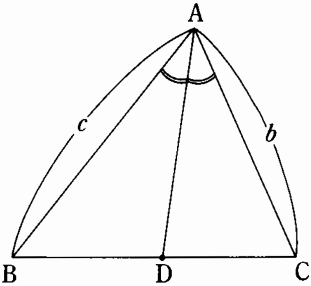
(2) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ の長さを c，b とする.

$\overrightarrow{AD}$ は ∠BAC の 2 等分線上のベクトルであるから，(1)を用いると

$$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{k}\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathbf{AC}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AC}}|}\right)$$

$$=k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\frac{k}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{b}\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，3点B，D，Cが1直線上にあることから



$$\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{c}}+\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{b}}=\mathbf{1} \longleftarrow \text{(p. 39参照!!)}$$

$$\therefore\quad k=\frac{bc}{b+c}$$

これを①に代入して

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$$

これは，Dが線分BCを「$c:b$」，すなわち，「AB：AC」の比に分ける点であることを示している．

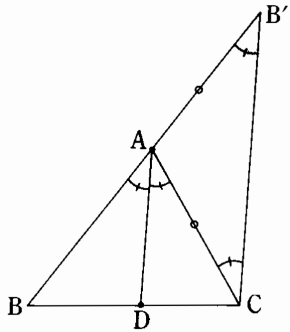
らしんばん

➡ この(2)は「初等幾何」の定理として覚えておいたほうがよい――次のようにやる．

BAの延長線上に点B′を

AD∥B′C

にとると



∠BAD＝∠AB′C　(同位角)

∠DAC＝∠ACB′　(錯角)

であるから，△AB′Cは二等辺三角形で

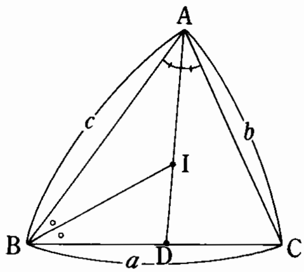
AC＝AB′

∴　AB：AC＝AB：AB′

＝BD：DC

➡ **△ABCの内心Iについて**――

内心は3つの頂角の2等分線の交点であるから



BD：DC＝$c:b$

から，まず「**Dの位置ベクトル**」と「**BDの長さ**」が求まる．

次に

AI：ID＝BA：BD

このことから，「**分点の公式**」を用いて，内心Iの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathbf{OI}}=\frac{\boldsymbol{a}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\boldsymbol{c}\overrightarrow{\mathbf{OC}}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

として導かれる——やってみること!!

また，（＊）で与えられる点 I が内心であることを示すには，「ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{AI}}$ が $\angle\mathbf{BAC}$ を 2 等分」していることを示せばよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{b(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+c(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{a+b+c}$$

$$=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}\right)$$

$$=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\right)$$

このことは，本問(1)によって，「$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ が $\angle\mathrm{BAC}$ を 2 等分」していることを示している．$\overrightarrow{\mathrm{BI}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ についても同様であるから，I は内心である．

発展問題 4—軌跡，領域

xy 平面上に 3 点 **O(0, 0)，A(1, 3)，B(3, −1)** がある．次の各式をみたす点 **P，Q** の存在範囲をそれぞれ図示せよ．

(1) $\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cos\alpha+\overrightarrow{\mathbf{OB}}\sin\beta$，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$

(2) $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cos\alpha+\overrightarrow{\mathbf{OB}}\sin\alpha$，$0\leqq\alpha\leqq\pi$

解　説　P，Q の座標を $(x,\ y)$ とおいて，与えられた条件より x，y の不等式あるいは方程式を導き，それを図示する方向でやってみよう．

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，与式より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\cos\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\sin\beta\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha+3\sin\beta \\ 3\cos\alpha-\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{cases} \cos\alpha+3\sin\beta=x \\ 3\cos\alpha-\sin\beta=y \end{cases} \quad \therefore\ \cos\alpha=\frac{x+3y}{10},\ \sin\beta=\frac{3x-y}{10} \quad \cdots\text{①}$$

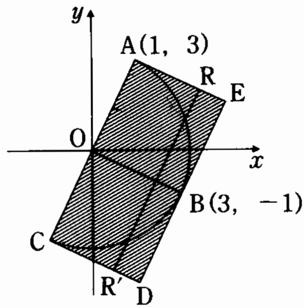
$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$ より，$-1\leqq\cos\alpha\leqq1$，$0\leqq\sin\beta\leqq1$ であるから

$$-1\leqq\frac{x+3y}{10}\leqq1$$

$$0\leqq\frac{3x-y}{10}\leqq1$$

$$\therefore\quad \begin{cases} -10 \leqq x+3y \leqq 10 \\ 0 \leqq 3x-y \leqq 10 \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

Pは，②の不等式の表す領域，すなわち，図の長方形 ACDE の周および内部にある．



(2) ①で，$\sin\beta$ のかわりに $\sin\alpha$ とおいて

$$10\cos\alpha = x+3y,\quad 10\sin\alpha = 3x-y$$

平方して加えると

$$x^2+y^2=10 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

また，「$0 \leqq \alpha \leqq \pi$」より(1)と同じく②が成り立ち，Q は③の円周の長方形 ACDE の外にでない部分，すなわち図の半円 ABC 上にある．

らしんばん

与えられた条件の「**図形的意味**」を考えて処理することもできる．

(1)で **α, β は互いに関係なく勝手に $0 \leqq \alpha \leqq \pi$, $0 \leqq \beta \leqq \pi$ の範囲で動く**．こういうときは，**一方を固定して考える**のが定石である．

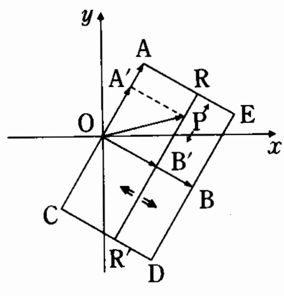
まず，β を固定すると

$$\overrightarrow{OB}\sin\beta = \overrightarrow{OB'}$$

となる点 B′ が OB 上に決まる．

次に

$$\overrightarrow{OA}\cos\alpha = \overrightarrow{OA'}$$



となる点 A′ を直線 OA 上にとり，α を 0 から π まで変化させると，A′ は図の A から C まで動く．

したがって

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$$

である P は図の R から R′ までを動く．

すなわち，β を固定して α を動かすと，P の描く図形は線分 RR′ である．

次に，β を 0 から π まで動かすと，B′ が O から B まで動くので，それにともなって線分 RR′ が AC から ED まで平行移動し，P の描く図形は長方形 ACDE の周および内部となる．

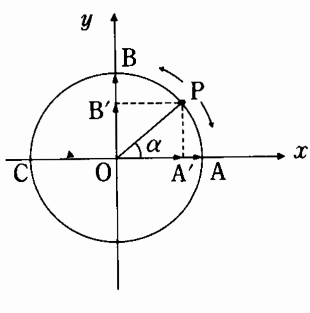
(2)も図形的に考えてみよう．

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3-3=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$$

であることに着目する．



$$\overrightarrow{OA}\cos\alpha = \overrightarrow{OA'} \quad \overrightarrow{OB}\sin\alpha = \overrightarrow{OB'}$$

となる点 A′, B′ をとると

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OA'}|^2+|\overrightarrow{OB'}|^2$$

$$=|\overrightarrow{OA}|^2\cos^2\alpha+|\overrightarrow{OB}|^2\sin^2\alpha$$

$$=10(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=10$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{10}$$

となり，P は O を中心，半径 $\sqrt{10}$ の円周上にあり，「$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$」で，この α が「$0\leqq\alpha\leqq\pi$」の範囲を動くと，**P は図の A から B を通って C までの半円を描く**ことになる．

一般に

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cos\theta+\overrightarrow{\mathbf{OB}}\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

で

$$|\overrightarrow{\mathbf{OA}}|=|\overrightarrow{\mathbf{OB}}|=r,\qquad \overrightarrow{\mathbf{OA}}\perp\overrightarrow{\mathbf{OB}}$$

のときは，P は O を中心，半径 r の円周を描く——— $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ が空間ベクトルのときでもハナシは同様である（p. 129, 130）．このことは覚えておく方がよい．

発展問題 5—分点の公式，三角形の内部の点

△ABC と原点 O が与えられていて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．

(1) $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ となる点 P はどんな点か．

(2) 点 P が △ABC の内部に存在するための必要十分条件は

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\qquad \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$$

をみたす実数 α, β, γ が存在することである．これを証明せよ．

解　説　(1)　与えられた条件からは，P がどんな点か予想できそうもない．こういうときは「$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\vec{\boldsymbol{p}}$」として，「**位置ベクトルで条件を書きかえてみる**」と手がかりがつかみやすくなることがある．

$$(\vec{a}-\vec{p})+3(\vec{b}-\vec{p})=2(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{b})$$

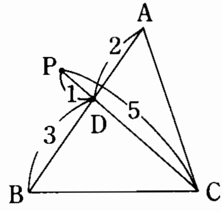
これを整理して

$$\vec{p}=\frac{1}{4}(3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$$

次に，「$\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{a}}+\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{b}}$」が，「$\mathbf{5}\cdot\dfrac{\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{a}}+\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{3+2}}$」と書きかえられることに着目する（この変形はよく用いられる手法である）．

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{3+2}\quad (=\vec{d})$$

とおくと，D は AB を「2：3」に分ける点で



$$\vec{p}=\frac{1}{4}(5\vec{d}-\vec{c})$$

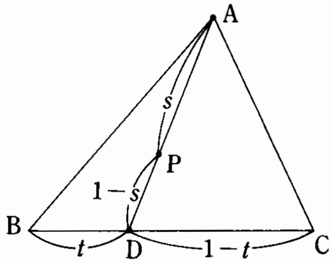
この式を変形すると

$$\vec{p}=\frac{5\vec{d}-\vec{c}}{5-1}$$

で，このことから，P は CD を「5：(−1)」に分ける点であることがわかる．すなわち，**辺 AB 上に「AD：DB＝2：3」となる点 D をとり，次に CD の延長上に「CP：PD＝5：1」となる点 P をとると**，これが題意をみたす点であることがわかる．

(2)　まず，点 P が △ABC の内部にあるための「必要条件」を求める．

点 P が △ABC の内部にあるとすると，AP の延長は辺 BC と交わる．その点を D とすると，D は辺 BC 上の点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$$
$$(0<t<1)$$

また，点 P が線分 AD 上にあるから，「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$」とおくと

$$\begin{aligned}\vec{p}&=(1-s)\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad(0<s<1)\\&=(1-s)\vec{a}+s\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\\&=(1-s)\vec{a}+s(1-t)\vec{b}+st\vec{c}\end{aligned}$$

でなければならない．

ここで

$$1-s=\alpha,\ s(1-t)=\beta,\ st=\gamma$$

とおくと

$$\alpha+\beta+\gamma=(1-s)+s(1-t)+st=1$$

また，「$0<t<1$」，「$0<s<1$」であるから

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$$

すなわち

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\alpha\vec{\boldsymbol{a}}+\beta\vec{\boldsymbol{b}}+\gamma\vec{\boldsymbol{c}}\\ \boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

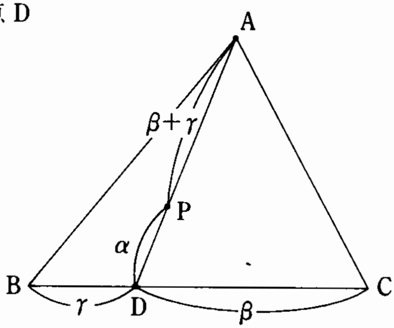
をみたす実数 α，β，γ が存在する（**必要条件**）．

逆に，このとき①で表される点 P が △ABC の内部の点であることを示す．①が成り立つときは

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$
$$=\alpha\vec{a}+(\beta+\gamma)\cdot\frac{\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\beta+\gamma} \quad \cdots\cdots ②$$

そこで辺 BC を「$\gamma:\beta$」に内分する点 D をとると

$$\frac{\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\beta+\gamma}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$



であるから，②は

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\frac{\alpha\vec{a}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\alpha+(\beta+\gamma)}$$
$$=\frac{\alpha\vec{a}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\alpha+(\beta+\gamma)} \quad (\because \ \alpha+\beta+\gamma=1)$$

この形から点 P は線分 AD を「$(\beta+\gamma):\alpha$」に内分する点であることがわかり，このことから点 **P** が **△ABC の内部の点であることがわかる（十分条件）**.

以上より，①が求める必要十分条件である．

らしんばん

(2)で求めた条件

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\boldsymbol{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}} \\ \boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=1}, \quad \boldsymbol{\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (*)$$

についてもう少し考えてみよう．

(i) **条件「$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=1}$」は何を意味するか**―――

もしこの条件がないとして

$$\alpha+\beta+\gamma=k \quad (\neq 1)$$

とすると

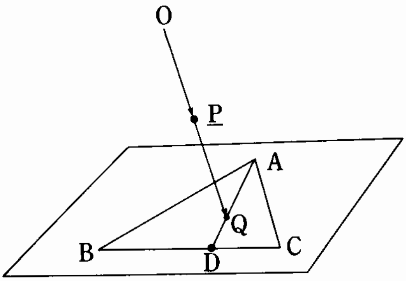
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\cdot\frac{\alpha\vec{a}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\alpha+(\beta+\gamma)} \quad \cdots\cdots (**)$$

であるが，ここで AD を「$(\beta+\gamma):\alpha$」に分ける点を Q とすると

$$\frac{\alpha\vec{a}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\alpha+(\beta+\gamma)}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

とおくことができるから，(**) は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$



となる．このときもし「$k=1$」ならばPはQに一致するが，「$k \neq 1$」だと点Qに対しての点Pの位置は原点Oの位置がわからないと決まらない．ところが**「$k=1$」という条件があれば，原点Oがどこにあっても（△ABCを含む平面上にあってもよい），Pの位置は△ABCに対してOに関係なくこの平面上の1点として決まる．**あるいは「3点A，B，Cが与えられていれば，その3点に対してPの位置が決まる」といってもよい．そういう意味で**「実数の組$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$（ただし，$\alpha+\beta+\gamma=1$）」を点Pの△ABCに対する「3点座標（あるいは重心座標）」**という．

(1)では

$$\vec{p}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{2}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$$

となったが，これは

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=1$$

だから，**Oの位置に関係なく3点A，B，Cを含む平面上に点Pを決定できた**のである．

(ii) **条件「$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$」は何を意味するか**――

本文中に示したことがらは

$$\left.\begin{array}{ll} \text{D：} & \text{BC を「}\gamma:\beta\text{」に内分} \\ \text{P：} & \text{AD を「}\beta+\gamma:\alpha\text{」に内分} \end{array}\right\} \longrightarrow \text{P は △ABC の内部}$$

ということであるが，もう少しくわしく説明すると，ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とスカラーα，β，γの対応関係に注目すれば

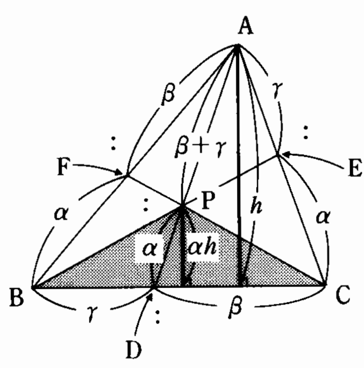
$$\mathbf{BD:DC}=\gamma:\beta$$
$$\mathbf{CE:EA}=\alpha:\gamma$$
$$\mathbf{AF:FB}=\beta:\alpha$$

の関係もわかり，さらに

$$\mathrm{AD:PD}=1:\alpha$$

から辺BCを共通の底辺とする△PBCの高さが△ABCの高さのα倍であることもわかる．このことから面積の関係は

$$\triangle\mathrm{PBC}=\alpha\triangle\mathrm{ABC}$$



同様に考えて

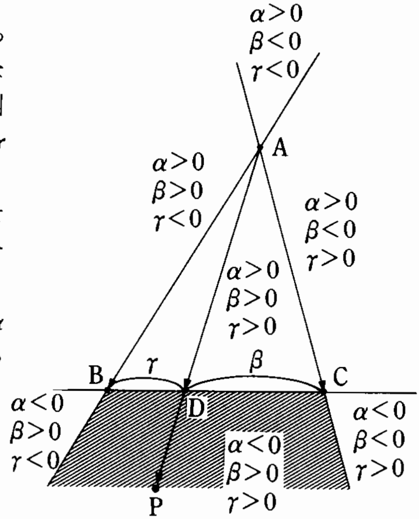
$$\triangle\mathrm{PCA}=\beta\triangle\mathrm{ABC},\qquad \triangle\mathrm{PAB}=\gamma\triangle\mathrm{ABC}$$

これより

$$\triangle\mathbf{PBC} : \triangle\mathbf{PCA} : \triangle\mathbf{PAB} = \alpha : \beta : \gamma$$

である．

ところで α, β, γ の 3 つの値のうちの 1 つを負の値にすると点 P はどうなるか．たとえば「$\boldsymbol{\alpha<0}$ $(\boldsymbol{\beta>0}, \boldsymbol{\gamma>0})$」**とすると点 P は線分 AD を**「$\boldsymbol{\beta+\gamma}$ $(\boldsymbol{>1}) : (\boldsymbol{-\alpha})$」**に外分することになり，**この条件のもとに α, β, γ を変化させると，点 P の存在領域は図の斜線部分となる．



このハナシの説明には（$*$）から α を消去してみるとわかりよい．すなわち

$$\alpha=1-(\beta+\gamma)<0$$
$$\therefore\quad \beta+\gamma>1$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-\beta-\gamma)\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{a}=\beta(\vec{b}-\vec{a})+\gamma(\vec{c}-\vec{a})$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathbf{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathbf{AC}} \longleftarrow$$

（$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は「1 次独立」だから β, γ が決まれば P が決まる．当然 α は「$\alpha=1-\beta-\gamma$」と決まる．）

$$=(\beta+\gamma)\cdot\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\beta+\gamma}$$

$$=(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\left(\text{ただし，}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\beta+\gamma},\ \beta+\gamma>1\right)\quad\cdots(***)$$

である．

このように α, β, γ の符号がかわっても（いずれかが 0 のときは直線 BC, CA, AB のいずれかの上にある），「$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=1}$」**の条件をみたす限り点 P は 3 点 A, B, C で定まる平面上のいずれかに存在する**ことがわかる．

（$*$）と（$***$）から点 P が三角形の内部にあるための条件は次のようにまとめられる．

三角形の内部の点の表示

(i) **点 P が △ABC の内部にあるための条件は**

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathbf{OC}}$$
$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=1},\quad \boldsymbol{\alpha>0},\ \boldsymbol{\beta>0},\ \boldsymbol{\gamma>0}$$

(ii) **点 P が △OAB の内部にあるための条件は**

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{OB}},\quad \boldsymbol{\alpha>0},\ \boldsymbol{\beta>0},\quad \boldsymbol{\alpha+\beta<1}$$

(ii)は上の（＊＊＊）から説明してもよいが，(i)で「点C」を「原点」にとったと考えればよい．このとき

$$\gamma=1-\alpha-\beta>0 \qquad \therefore\ \alpha+\beta<1$$

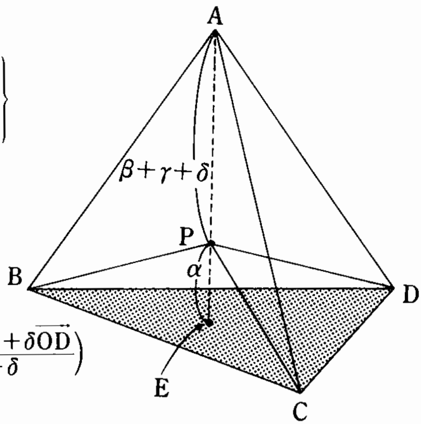
となる―――(ii)に他ならない．

なお「周上の点」を含むときは，すべての不等号「＞，＜」を「≧，≦」におきかえればよい．

➡ 参考までに四面体 ABCD において

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD}\\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=1,\\ \qquad\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \delta>0\end{array}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(****)$$



をみたす点 P はどうか．

（＊＊＊＊）を次のように変形すれば，ハナシは全く同様である．すなわち

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+(\beta+\gamma+\delta)\left(\frac{\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD}}{\beta+\gamma+\delta}\right)$$

$$=\alpha\overrightarrow{OA}+(\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{OE}$$

$$\left(\overrightarrow{OE}=\frac{\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD}}{\beta+\gamma+\delta} \longleftarrow \text{E は △BCD の内部!!}\right)$$

で，この場合は 4 つの四面体 P-BCD，P-CDA，P-DAB，P-ABC の体積比が「$\alpha:\beta:\gamma:\delta$」となる．

まとめると次のようになる．

四面体の内部の点の表示

(i)「点 P が四面体 ABCD の内部」にあるための条件は

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD}}$$

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma+\delta=1,\quad \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \delta>0}$$

(ii)「点 P が四面体 OABC の内部」にあるための条件は

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}$$

$$\boldsymbol{\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\quad \alpha+\beta+\gamma<1}$$

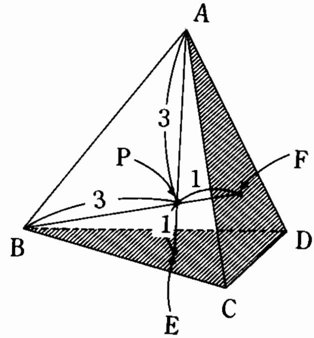
考え方は「三角形の場合」と同様である．

なお特に

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{4}\quad\left(\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})}\right)$$

のときは，上の $\overrightarrow{OE}$ にこれらの値を代入すると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OE}$$



$$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}$$

となる．これは

(i) E は △BCD の「重心」であり

(ii) P が線分 AE を「3：1」に内分している

ことを示しており，以下 P が他の 3 つの線分

BF（ただし，F は △CDA の重心）

CG（ただし，G は △DAB の重心）

DH（ただし，H は △ABC の重心）

とも上に述べたと同様の関係であることは容易に説明される．すなわち，P は AE，BF，CG，DH の交点で互いに他を「3：1」に内分する――このような点 P を**四面体 ABCD の「重心」**という．

発展問題 6―外心，垂心，重心

△ABC の外心を O，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{OH}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく．

(1) H は △ABC の垂心であることを示せ．

(2) △ABC の外心 O，垂心 H，重心 G は 1 直線上にあって，OG：GH＝1：2 であることを示せ．

解　説　(1) H が「垂心（3 垂線の交点（p. 43））」であることをいうには

AH⊥BC，BH⊥CA

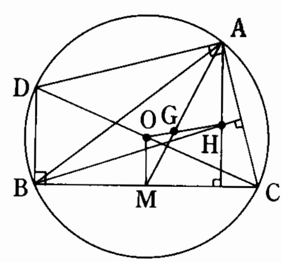
が証明できればよい．

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ……………………①

がいえれば，同様にして

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

もいえるので，①の証明を考える．



$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$

∴　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\vec{c}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$

ところで，O は △ABC の「外心（外接円の中心）」だから

OB＝OC　　∴　$|\vec{c}|=|\vec{b}|$　　∴　$\boldsymbol{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$

同様の計算で，「$\overrightarrow{\mathbf{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CA}}=\mathbf{0}$」もいえるので，H は △ABC の垂心である．

(2)「OG：GH＝1：2」だから，O，G，H が 1 直線上にあって，このことをベクトルで示すには

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}} \quad \cdots\cdots ②$$

がいえればよい．

重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

だから，「$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$」を「$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$」におきかえれば②が成り立つことがすぐいえる．

らしんばん

「△ABC の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathbf{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ」とすると，どうなるか．「$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{x}$」とおくと

$$\mathrm{BC}\perp\mathrm{AH} \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0 \quad \cdots\cdots ③$$

また，BC の中点を M とすると

$$2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{b}+\vec{c},\ \mathrm{BC}\perp\mathrm{OM}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0 \quad \cdots\cdots ④$$

「③－④」より

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\vec{x}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=0$$

全く同様の計算で

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot(\vec{x}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=0$$

左辺の「$\vec{x}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$」を $\vec{n}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{n}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\vec{n}=0$$

ここで，「$\vec{n}\neq\mathbf{0}$」とすると，$\overrightarrow{\mathbf{BC}}/\!/\overrightarrow{\mathbf{CA}}$ となり，矛盾する．

$$\therefore\ \vec{n}=0$$

$$\therefore\ \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

(2)の方は「初等幾何」で解くこともできる――

前ページの図を参照!!

CO の延長と外接円の交点を D とすると

$$\mathrm{DB}\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}2\mathrm{OM} \qquad \therefore\ \mathrm{DB}/\!/\mathrm{AH}/\!/\mathrm{OM}$$

また，CD は直径だから　∠CAD＝90°，DA // BH

したがって，四角形 BDAH は平行四辺形で，DB＝AH

$\therefore\quad \mathrm{AH}=2\mathrm{OM}$

そこで，AM と OH の交点は AM を「2：1」に分ける点で，これは △ABC の重心 G である．

すなわち，O，G，H は一直線上にあって「OG：GH＝1：2」である．

発展問題 7—対称点を与えるベクトル

座標平面上のベクトル全体の集合を V とし，$\vec{a}$ を V の 1 つの単位ベクトルとする．V の任意ベクトルの $\vec{x}$ に対して

$$f(\vec{x})=-\vec{x}+2(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a}$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．ただし，$(\vec{x},\ \vec{a})$ は $\vec{x}$ と $\vec{a}$ との内積 $\vec{x}\cdot\vec{a}$ のことである．

(1) $\vec{x}\in V$，$\vec{y}\in V$ のとき，次のことを証明せよ．

$$|f(\vec{x})-f(\vec{y})|=|\vec{x}-\vec{y}|,\quad (f(\vec{x}),\ f(\vec{y}))=(\vec{x},\ \vec{y})$$

(2) $f(f(\vec{x}))-\vec{x}$ を簡単にせよ．

(3) $\vec{u}=(1,\ 0)$，$\vec{v}=(0,\ 1)$ とするとき，$f(\vec{u})=\vec{v}$ となる $\vec{a}$ の成分を求めよ．

解　説　$f(\vec{x})$ を定義する式を用いて，「内積の計算」を正しくやれば，結果は自然にでてくる．

(1) $f(\vec{x})-f(\vec{y})=(\vec{y}-\vec{x})-2(\vec{a},\ (\vec{y}-\vec{x}))\vec{a}$

このままの形で $|f(\vec{x})-f(\vec{y})|^2$ を考えるのはメンドウだから

$$f(\vec{x})-f(\vec{y})=\vec{t},\quad \vec{x}-\vec{y}=\vec{s},\quad (\vec{a},\ \vec{s})=k$$

とおくと

$$\vec{t}=-\vec{s}+2k\vec{a}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |\vec{t}|^2&=|\vec{s}|^2-4k(\vec{a},\ \vec{s})+4k^2|\vec{a}|^2\\&=|\vec{s}|^2-4k^2+4k^2\quad(\because\ |\vec{a}|=1)\\&=|\vec{s}|^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |\vec{t}|=|\vec{s}|=|-\vec{s}|$$

$$\therefore\quad |f(\vec{x})-f(\vec{y})|=|\vec{x}-\vec{y}|$$

次に，内積の方を証明する．

$$(f(\vec{x}),\ f(\vec{y}))=(-\vec{x}+2(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a},\ -\vec{y}+2(\vec{y},\ \vec{a})\vec{a})$$

$$=(\vec{x},\ \vec{y})-2(\vec{x},\ \vec{a})(\vec{y},\ \vec{a})-2(\vec{y},\ \vec{a})(\vec{x},\ \vec{a})+4(\vec{x},\ \vec{a})(\vec{y},\ \vec{a})(\vec{a},\ \vec{a})$$

「$\vec{a}\cdot\vec{a}=1$」だから

$$(f(\vec{x}),\ f(\vec{y}))=(\vec{x},\ \vec{y})$$

(2)　$f(f(\vec{x}))=f(-\vec{x}+2(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a})$

$$=-\{-\vec{x}+2(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a}\}+2\{-\vec{x}+2(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a},\ \vec{a}\}\vec{a}$$

$$=\vec{x}-2(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a}-2(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a}+4(\vec{x},\ \vec{a})(\vec{a},\ \vec{a})\vec{a}$$

$$=\vec{x}-4(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a}+4(\vec{x},\ \vec{a})\vec{a}\qquad(\because\quad(\vec{a},\ \vec{a})=|\vec{a}|^2=1)$$

$$=\vec{x}$$

$$\therefore\quad f(f(\vec{x}))-\vec{x}=\vec{0}$$

(3)　「$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$」とおくと

$$f(\vec{u})=-\vec{u}+2(\vec{u},\ \vec{a})\vec{a}$$

$$=-(1,\ 0)+2a_1(a_1,\ a_2)$$

$$=(2a_1^2-1,\ 2a_1a_2)=(0,\ 1)\quad(=\vec{v})$$

$$\therefore\quad 2a_1^2-1=0,\qquad 2a_1a_2=1$$

これを解いて

$$\vec{a}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

らしんばん

➡ 「$f(\vec{x})$」の「図形的な意味」を考えてみよう．与えられた「f」は

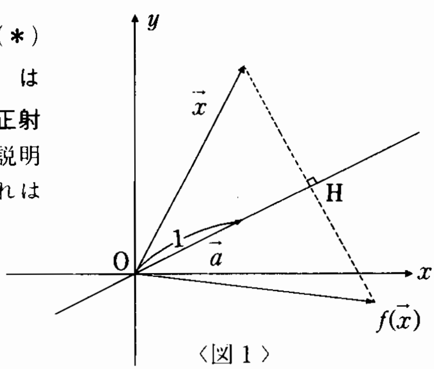
$$f(\vec{x})=-\vec{x}+2(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a}\quad\cdots\cdots(*)$$

であった．この式の「$(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a}$」は $|\vec{a}|=1$ であるから「$\vec{x}$ の $\vec{a}$ 上への正射影ベクトル」であることはすでに説明した（p. 46, 47）．すなわち，これは〈図1〉の $\overrightarrow{OH}$ のことである．

このことから（＊）は

$$f(\vec{x})=-\vec{x}+2\overrightarrow{OH}$$

$$\therefore\quad\frac{\vec{x}+f(\vec{x})}{2}=\overrightarrow{OH}$$



〈図1〉

このことから $f(\vec{x})$ は $\vec{x}$ を $\vec{a}$ に関して対称移動したものであることがわかる．したがって〈図2〉から

(1)：　$|f(\vec{x})-f(\vec{y})|=|\vec{x}-\vec{y}|$，$(f(\vec{x}),\ f(\vec{y}))=(\vec{x},\ \vec{y})$

であることは当然であり，また

(2)：　$f(f(\vec{x}))$ は，「$\vec{a}$」に関して 2 回対称移動するので，もとにかえり

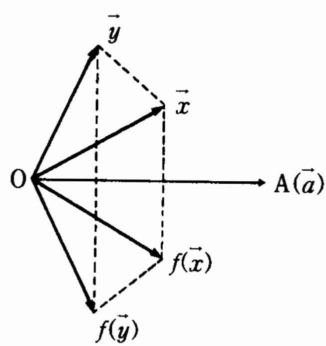
$$f(f(\vec{x}))=\vec{x}$$

となる．

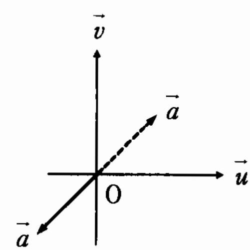
(3)：　$\vec{u}$ を「$\vec{a}$」に関して対称移動して $\vec{v}$ となるような「$\vec{a}$」は直線「$y=x$」上のベクトルであるはずで，長さ 1 なら

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

であることもほとんど図形的に明らかである——〈図 3〉.



〈図 2〉



〈図 3〉

発展問題 8—ベクトルの恒等式—「つねに～」

平面上の四角形 ABCD と点 P がある．点 P がこの平面上を動くときつねに

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}$$

が成り立つという．この四角形はどのような形か．

解　説　「点 P が……つねに……」をどうとらえるか——与えられた条件から「点 P」だけを分解することを考える．

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP} \quad \cdots\cdots ①$$

の「$\overrightarrow{AP}$」に注目すると

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}$$

であるから，これらを①に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

これが「点Pの位置にかかわらず」成立，すなわち「$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$にかかわらず」成立するための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}\longrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

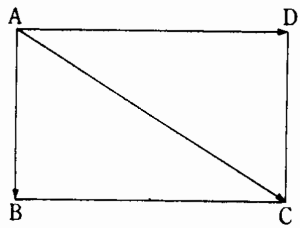
この条件は

③ ──→ **四角形ABCDは「平行四辺形」**

④ ──→ **$\angle A=90°$**

であることを示している．

すなわち，四角形ABCDは「**長方形**」である．



らしんばん

➡ 本文②を成分で表してみよう―――

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a,\ b),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y),\quad -\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k$$

とおくと

$$②:\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$$

$$\therefore\quad ax+by+k=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

②が「$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$にかかわらず成立する」ということをいいかえると，（＊）が「x，yについての恒等式である」ということに他ならない，すなわち

$$a=b=0,\quad k=0$$

で，③，④の成立が簡単に確められる．

このような考え方は「3次元ベクトル」においても同様である．

➡ 与えられた条件の式をもう一度ながめてみよう．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

が「Pがどこにあっても成立する」のであるから

PをAに重ねてみる ──→ $\mathbf{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}=0\quad\therefore\quad\angle A=90°}$

以下同様にして

PをBに重ねてみる ──→ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0\quad\therefore\quad\angle\mathrm{B}=90°$

PをCに重ねてみる ──→ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=0\quad\therefore\quad\angle\mathrm{C}=90°$

PをDに重ねてみる ──→ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0\quad\therefore\quad\angle\mathrm{D}=90°$

で，この四角形が「長方形」であることがわかる（**必要条件**）．

このとき逆に（**）が成り立つことを確めなくてはならない．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}} \longleftarrow \text{「差」をとって考える!!}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\}$$

$$=\underbrace{(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})}_{=\vec{0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}}_{=0}=0$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

がつねに（P の位置にかかわらず）成り立つ（**十分条件**）．

――――このような扱い方にも注目しておきたい．