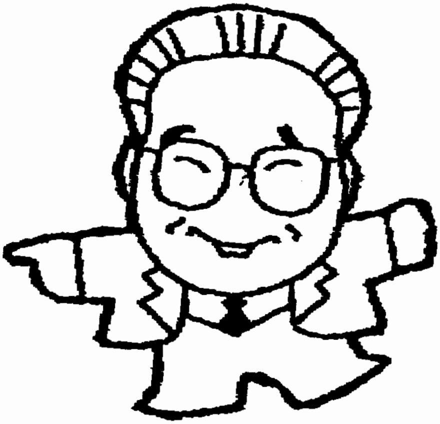
第2章

空間図形

要するに、「ベクトル方程式」の成分表示。
……空間のイメージを豊かにすること!!

ポイントは
図をうまく描く
ことだ。



3次元空間の図形は「座標 x, y, z の方程式」で表される

第1章の「ベクトルの応用」では,「点」を「位置ベクトル」で,「図形」を「ベクトル方程式」で表すことを学んだ——ここではそれらのことをふまえて空間の「点」や「図形」を,「座標」と「方程式」で表して,それらの間の関係や,いろいろな性質を研究することにする.

ここで扱う内容は

(i) **点** ⟶ $(x,\ y,\ z)$ で表す

(ii) **直線** ⟶ ベクトル方程式の成分表示

(iii) **平面** ⟶ x, y, z の1次方程式

(iv) **球面** ⟶ x^2, y^2, z^2 の係数が等しい2次方程式

(v) **これらの図形の間の相互の関係** ⟶ 「共有点」の有無,他

などであるが,これらをキチンと扱えるようになるためには,「ベクトル」の,特に

分点公式,直線のベクトル方程式

内積——垂直条件,正射影と正射影ベクトル,三角形の面積公式

などが十分に理解された上のことでないと少しむずかしく感じるかもしれない.その都度,第1章を参照しながら読み進めるとよい.

実際に教室で講義してみると,「正射影ベクトルの応用」と「平面束(球面群)の考え方」などがなじみにくいようである.

もともと空間の図形であるものを平面上に見取図を描いて説明するのであるから多少の「ムリ」はしかたがないとしても,想像力をせい一ぱいにふくらませてなるべく早く慣れるように努力してもらいたい.

また,ここで学んだことがらは,**「数I」の「図形と方程式」**で

「平面」と「球面」との関係 ⟶ 「直線」と「円」との関係

「2球面」の関係 ⟶ 「2円」の関係

のように,そのまま応用されるものも少なくないので,この章を読み終えたあとで「数I」の「図形と方程式」を「図形的な立場」から洗い直しておくとよい.

この章を読み終える頃は,イメージのとらえにくい「立体幾何」のかなりの部分が「解決された」ことになるはずである.

第1節 「点」,「直線」,「平面」

まず，空間に，直交する x, y, z の「3次元座標軸」を定める．このことを用いて空間における「点」,「直線」,「平面」の

(i)　表現の方法――― x, y, z を用いた方程式

(ii)　それらの「相互の関係」―――たとえば「平行」,「垂直」,「交わる」,「なす角」など……

について研究する―――第1章で学んだ「ベクトル」のいろいろな知識が「具体的な図形への応用」として役に立つことになる．

1　点

(1)「点」の「表し方」について

3次元ベクトル

$$(a,\ b,\ c)$$

と，原点Oを始点とする位置ベクトル

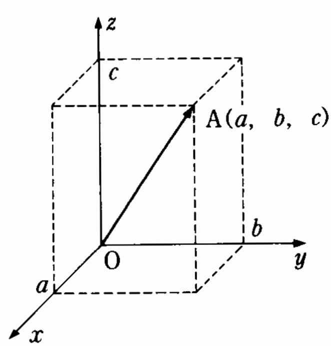
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ c) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とは「1対1」に対応する．

このとき，点Aの座標を

$$\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$$

で表す．



このとき，①は点Aの座標の x, y, z 成分を「横（ヨコ）」にならべたものであるが，対応する成分を加えたり，引いたり計算するときは，これを

「縦（タテ）」にならべて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

と表すほうが成分の対応関係がわかりやすく見通しのよい場合が多い．

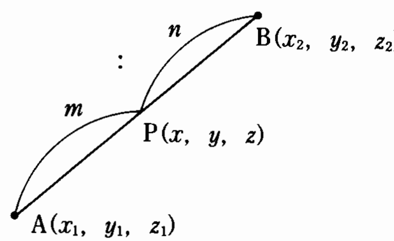
そこで，点の位置をベクトルで表すときは，なるべく「タテ」に書くことにしたいが，この表し方は紙面をとるので，ここでは，特にそのほうがわかりやすいときは「タテ」に書き，それ以外のときには「ヨコ」に書くことにする。

(2) 分点の座標，2点間の距離の公式

空間の2点を，

$$\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

とするとき，**線分 AB を $m:n$ に内分する点を P** とすれば，「ベクトル」のところで説明した「分点公式（p. 33, 34）」より



$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\frac{\boldsymbol{n}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\boldsymbol{m}\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}$$

である．これに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

をいれると，点 P の座標は，

$$\mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{nx_1+mx_2}}{\boldsymbol{m+n}},\ \frac{\boldsymbol{ny_1+my_2}}{\boldsymbol{m+n}},\ \frac{\boldsymbol{nz_1+mz_2}}{\boldsymbol{m+n}}\right)$$

として求められる。「外分」のときも同様にして「外分点の公式」を用いて求めることができる。

次に「**AB の距離**」については

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

であるから，これを内積で表すと

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{x_2-x_1})^2+(\boldsymbol{y_2-y_1})^2+(\boldsymbol{z_2-z_1})^2}$$

として求められる．

2　直線

(1)　直線の方程式

点 A($\vec{a}$) を通り，ベクトル「$\vec{m}$ ($\neq\vec{0}$)」に平行な「直線のベクトル方程式」は

$$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{m} \quad \cdots\cdots ①$$

であった（p. 38, 39, 40）．

これは，「2次元ベクトル」なら「xy 平面上の直線」，「3次元ベクトル」なら「xyz 空間の直線」である．

いま

$$\vec{x}=(x,\ y,\ z)$$

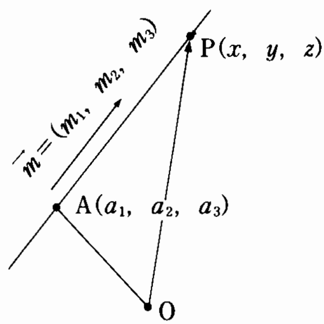
$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$\vec{m}=(m_1,\ m_2,\ m_3)$$

とすると，①は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

$$\therefore \begin{cases} x=a_1+tm_1 \\ y=a_2+tm_2 \\ z=a_3+tm_3 \end{cases} \quad \cdots\cdots ②'$$



で表される．

②の形を，**直線の「媒介変数（パラメーター）表示（p. 40）」**という．

②′でパラメーター t を消去すると，x, y, z の関係式は

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-a_2}{m_2}=\frac{z-a_3}{m_3} \quad (=t) \quad \cdots\cdots ③$$

である——これを「**直線の標準形**」という．

ただし，分母に「0」があるとき，たとえば「$m_3=0$」のときは

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-a_2}{m_2},\quad z=a_3 \quad \cdots\cdots ③'$$

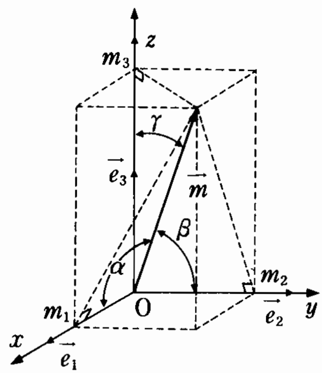
のように書く．

注❶　直線を「方程式」として示すには「③の形」の表現が用いられる場合が

多いが，実際に図形問題を処理するときは，この**直線上の点**を「**パラメーター表示**」するために分母を払い，「②′あるいは②の形」で用いることになる．

結局「②′あるいは②の形」の方が「エライ（偉い）」のだ，ということを最初に認めておきたい．そうすれば「分母＝0」のときなどが「特別なハナシ」ではなく，たとえば「$m_3=0$」を②′あるいは②に代入すれば「自動的に」③′が導かれることが簡単に了解される．

注❷ m_1，m_2，m_3 のことを，この直線の「**方向比**」といい，特に，「$|\vec{m}|=1$」のときは，その成分 m_1，m_2，m_3 を「**方向余弦**」とよんでいる．



この直線が x 軸，y 軸，z 軸の正方向となす角（「2直線のなす角」については p. 84，85でくわしく説明する）をそれぞれ α，β，γ とすると，たとえば，**m_1 は，$\vec{m}$ の x 軸方向への「正射影（p. 28）」である**から，「$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$」とすると

$$
\begin{aligned}
m_1&=\vec{m}\cdot\vec{e_1}\\
&=|\vec{m}||\vec{e_1}|\cos\alpha\\
&=\cos\alpha
\end{aligned}
$$

同様にして，「$m_2=\cos\beta$」，「$m_3=\cos\gamma$」であり，「$|\vec{m}|=1$」から

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

が確かめられる．2次元の場合については p. 40で説明した．

例題 1

次の直線の方程式を求めよ．

(1)　2点 A(1，2，3)，B(−1，0，4) を通る直線

(2)　点 A(1，2，3) を通り，y 軸に平行な直線

(3)　点 B(−1，0，4) を通り，x 軸，y 軸となす角が 60° の直線

解　説　(1)　直線の「方向ベクトル」は，「$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(2,\ 2,\ -1)$」であるから

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

(2)　y 軸の方向ベクトルは，(0，1，0) であるから

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\therefore\ \begin{cases}x=1\\y=t+2\\z=3\end{cases}$$

よって，$x=1$，$z=3$

(3)　直線が z 軸となす角を θ とすると

$$\cos^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore\quad \cos^2\theta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\qquad\qquad \therefore\quad \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

この直線の「方向比」は

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1:1:(\pm\sqrt{2})$$

したがって求める直線の方程式は

$$x+1=y=\frac{z-4}{\pm\sqrt{2}}$$

らしんばん

(2)のように，「方向ベクトル」の成分に「0」があるときは

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-a_2}{m_2}=\frac{z-a_3}{m_3}$$

の形にせず，本問のように表す．

これは，求める直線が，2平面

$$x=1,\quad z=3$$

の交線であることを示している．

(2)「定点」から「定直線」への垂線

直線上の点を「パラメーター表示」しておき，「垂直条件」としては「ベクトルの内積」が「0」になることを利用する．

以下実例で説明する．

例題 2

(1)　2点 A$(b,\ c,\ a)$，B$(c,\ a,\ b)$ を通る直線は，原点 O と線分 AB の中点 M を通る直線に垂直であることを示せ．

(2)　点 A$(1,\ -2,\ 3)$ から，直線

$$l:\quad x-2=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$$

に下した垂線の足を H とするとき，線分 AH の長さ，および，H の座標を求めよ．

解　説　(1)　2点 A，B を通る直線の「方向ベクトル」は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(c-b,\ a-c,\ b-a)$$

であり，ABの中点Mは

$$\mathrm{M}\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{c+a}{2},\ \frac{a+b}{2}\right) \longleftarrow \text{「内分点の表示（p. 78)」}$$

であるから，OとMを通る直線の「方向ベクトル」は

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{c+a}{2},\ \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{c^2-b^2}{2}+\frac{a^2-c^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}=0$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}\perp\mathrm{OM}$$

(2)　Hは l 上の点であるから

$$(2+t,\ -1+2t,\ -3+2t)$$

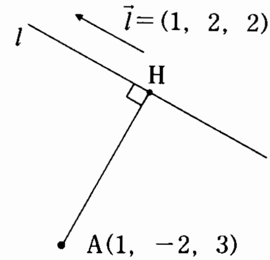
と表され，これより，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1+t,\ 1+2t,\ -6+2t)$$

である．そこで l の「方向ベクトル」を

$$\vec{l}=(1,\ 2,\ 2)$$

として，「$\boldsymbol{l}\perp\mathbf{AH}$」の条件を調べればよい．



$$\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(t+1)+2(2t+1)+2(2t-6)=0$$

$$\therefore\quad t=1,\qquad\qquad \therefore\quad \mathbf{H(3,\ 1,\ -1)}$$

また，

$$|\overrightarrow{\mathbf{AH}}|=\sqrt{\mathbf{2^2+3^2+(-4)^2}}=\sqrt{\mathbf{29}}$$

らしんばん

➡ (2)は l の任意の点をPとしたとき，$|\overrightarrow{\mathbf{AH}}|$ は「$|\overrightarrow{\mathbf{AP}}|$ が最小となるときの長さ」に等しいから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(t+1)^2+(2t+1)^2+(2t-6)^2$$
$$=9(t-1)^2+29\geqq 29\quad (t=1\text{ のとき等号が成り立つ})$$
$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{29}$$

としてもよい．

➡ (2)で「正射影ベクトル（p. 47)」の考え方を利用できないか――

l は定点B(2, −1, −3)を通り，$\vec{l}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}$ は

$$\vec{e}=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

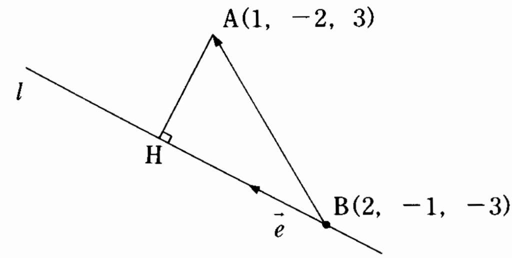
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

である．

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BA}}|$$

$$=\frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{3}|-1-2+12|=3$$



また

$$\mathrm{BA}^2=(-1)^2+(-1)^2+6^2=38$$

であるから，直角三角形 ABH に「ピタゴラスの定理」を用いて

$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{BA}^2-\mathrm{BH}^2$$

$$=38-3^2=29 \qquad \therefore\quad \mathrm{AH}=\sqrt{29}$$

としてもよい．このとき H の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{OB}}+(\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BA}})\vec{e}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}+3\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \therefore\quad \mathrm{H}(3,\ 1,\ -1)$$

として求められる．

しかし，この方法は「慣れるまで」少し時間がかかると思うので「あとまわし」にしてもよい．

---

(3)　2 直線の位置関係

平面上の 2 直線は「交わる」か「平行（重なるときも含む)」の 2 つの場合しかないが，空間の 2 直線では少し事情がちがってくる．

- **共有点をもつ**
  - 1 点のみで交わる――― 2 直線は平面をつくる．
  - 重なる
- **共有点ナシ**
  - **平行**―――当然，2 直線は平面をつくる．
  - **「ねじれの位置」**にある．

（重なる・平行）「重なる」ときも「平行である」という．

「ねじれの位置」が 2 直線の最も一般的な位置関係である．

これも実例で説明する．

(i)　**「ねじれの位置」と「2 直線のなす角」について**

例題 3

2 直線

$$l_1:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{2}=1-z$$

$$l_2:\ x-3=\frac{y-1}{4}=z-5$$

がある.

(1) l_1, l_2 は交わるか.

(2) l_1, l_2 のなす角 φ を求めよ.

解 説 (1) 交点を調べるには，パラメーターを用いる方がやりやすい。このとき l_1 の「$1-z$」は「$\dfrac{z-1}{-1}$」と直しておく.

$$l_1:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}=t$$

$$l_2:\ x-3=\frac{y-1}{4}=z-5=s$$

とおくと，これより l_1, l_2 は

$$l_1:\ \begin{cases} x=2t+2 \\ y=2t-2 \\ z=-t+1 \end{cases},\quad l_2:\ \begin{cases} x=s+3 \\ y=4s+1 \\ z=s+5 \end{cases} \longleftarrow \text{パラメーター表示!!}$$

l_1, l_2 が交わるとすると

$$\begin{cases} 2t+2=s+3 & \cdots\cdots\text{①} \\ 2t-2=4s+1 & \cdots\cdots\text{②} \\ -t+1=s+5 & \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$$

を同時にみたす s, t が存在しなければならない.

①, ③より「$t=-1$, $s=-3$」となるが，これは②をみたさない. したがって，**l_1 と l_2 は「交わらない」**.

(2) 「**2 直線のなす角 φ**」を求めるには，まずそれらの「**方向ベクトルのなす角**」に注目する.

l_1, l_2 の「方向ベクトル」

$$\vec{l_1}=(2,\ 2,\ -1),\ \vec{l_2}=(1,\ 4,\ 1)$$

のなす角を「θ」とすると

$$\cos\varphi=|\cos\theta|=\left|\frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}\right| \longleftarrow \vec{l_1}\cdot\vec{l_2}=|\vec{l_1}||\vec{l_2}|\cos\theta$$

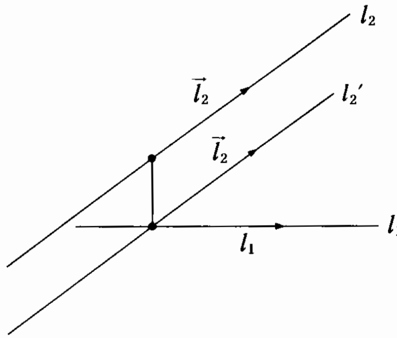
$$=\frac{|2\cdot1+2\cdot4+(-1)\cdot1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+4^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \varphi = 45^\circ$$

らしんばん

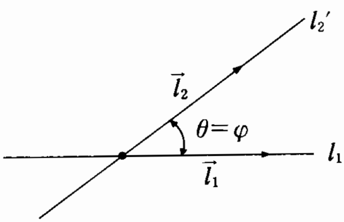
「２直線のなす角 φ」について――

２直線 l_1, l_2 が「ねじれの位置にある」ときでも「l_1 と l_2 のなす角」は定義される―― l_2 を l_1 と交わるところまで「平行移動」したものを l_2' とするとき，l_1 と l_2' とのなす角 φ をいう．

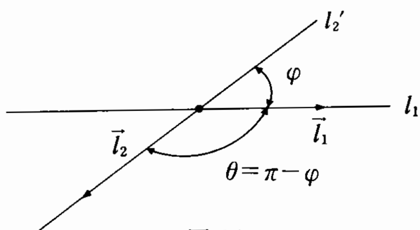


ただし，**直線には「方向性」がない**ので，**l_1 と l_2' が作る２つの角のうち，「大きくない方の角」を「φ $\left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$」と定める．**

このようにきめた「φ」を求めるには，「基本的には」l_1 と l_2 の「方向ベクトル $\vec{l_1}$ と $\vec{l_2}$ のなす角」を「θ」として「$\cos\theta$ の値」を求めるのだが，$\vec{l_1}$ に対する $\vec{l_2}$ の向き（直線 l_2 に沿って２つある）は見た目だけではわからない――〈図１〉，〈図２〉



〈図１〉



〈図２〉

式で表すと

$$\varphi = \begin{cases} \theta & \left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \cos\varphi = \cos\theta \quad (\cos\theta \geqq 0) \\ \pi - \theta & \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi\right) \longrightarrow \cos\varphi = -\cos\theta \quad (\cos\theta \leqq 0) \end{cases}$$

であるが，このことを１本の式で表したのが本文中の

$$\boldsymbol{\cos\varphi = |\cos\theta| = \left| \frac{\vec{l_1} \cdot \vec{l_2}}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|} \right|}$$

という表現である．

(ii)　共通垂線

例題 4

空間における２直線を

$$l_1:\ \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$$

$$l_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-2}=z-2$$

とする．ただし，l_1，l_2 は交わらない．

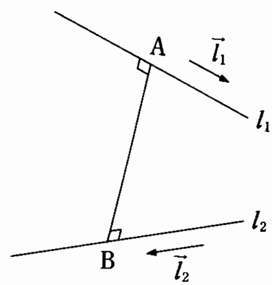
直線 l_1 上の点Aと，直線 l_2 上の点Bとを結んでできる線分ABが，直線 l_1 と直線 l_2 の両方に垂直であるとき，2点A，Bの座標を求め，直線ABの方程式を求めよ．

解　説　題意の２点A，Bは

$$A(4+3s,\ 3+2s,\ -s)$$
$$B(-1+2t,\ 4-2t,\ 2+t)$$

で表されるから，$\overrightarrow{AB}$ を求めると

$$\overrightarrow{AB}=(-5-3s+2t,\ 1-2s-2t,\ 2+s+t)$$



また，l_1，l_2 の「方向ベクトル」は

$$\vec{l_1}=(3,\ 2,\ -1)$$
$$\vec{l_2}=(2,\ -2,\ 1)$$

条件から，$\overrightarrow{AB}$ は $\vec{l_1}$，$\vec{l_2}$ の両方に垂直であるから

$$\vec{l_1}\cdot\overrightarrow{AB}=3(-5-3s+2t)+2(1-2s-2t)-(2+s+t)=0$$
$$\vec{l_2}\cdot\overrightarrow{AB}=2(-5-3s+2t)-2(1-2s-2t)+(2+s+t)=0$$

この２式を整理すると

$$\begin{cases}14s-t+15=0\\ s-9t+10=0\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}s=-1\\ t=1\end{cases}$$

これをA，Bに入れて

A(1, 1, 1)，B(1, 2, 3)

「$\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 2)$」であるから直線ABの方程式は

$$\boldsymbol{x=1,\ y-1=\frac{z-1}{2}}$$

らしんばん

➡ ２直線 l_1，l_2 の両方に垂直な直線を l_1，l_2 の「共通垂線」という．本問の場

合，直線ABは2直線l_1，l_2の共通垂線である．

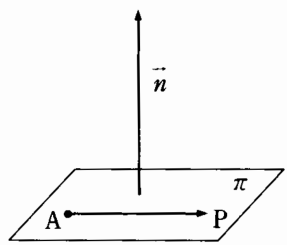
➡ $\overrightarrow{AB}$の成分がs，tで表されているので，$|\overrightarrow{AB}|^2$をs，tの式で表し，それが最小となるときのs，tの値を求めると，A，Bの座標が求まるが，しかし，この方法は計算がかなりうるさくなる．

3 平面

(1) 平面の方程式

「平面の方程式」を決定するには，次の2つの方法がある．

(i) 定点Aと「法線ベクトル$\vec{n}$」が与えられたとき



点A$(\vec{a})$を通り，「$\vec{n}$ $(\neq\vec{0})$」に垂直な平面をπとする．

π上の任意の1点をP$(\vec{x})$とすると

$$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$$

であるから，

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

これが求める平面πの方程式である．

いま

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\ P(x,\ y,\ z),\ \vec{n}=(a,\ b,\ c)$$

とすると，①は

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot(a,\ b,\ c)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0} \quad \cdots\cdots ②$$

と，書きかえられる．

さらに，「$-(ax_1+by_1+cz_1)=d$」とおくと，②は

$$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0} \quad \cdots\cdots ③$$

となり，平面の方程式のよく用いられる形が求められる．

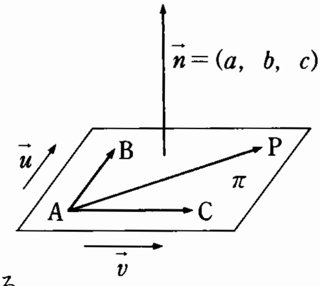
このとき，

$$\boldsymbol{\vec{n}=(a,\ b,\ c)} \quad (\neq\vec{0})$$

を③の「法線ベクトル」という.

(ii) **定点 A と「1次独立である2つのベクトル」で決定される平面**

点 $A(\vec{a})$ を通り，2つの $\vec{0}$ でないベクトル「$\vec{u}$, $\vec{v}$ ($\vec{u} \not\parallel \vec{v}$)」に平行な平面を π とする.



$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}$$

とし，π 上の任意の1点を $P(\vec{x})$ とすると，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は1次独立であるから

$$\overrightarrow{\mathbf{AP}}=s\overrightarrow{\mathbf{AB}}+t\overrightarrow{\mathbf{AC}} \quad \cdots\cdots④$$

をみたす実数 s, t が,「ただ1組」きまる.

$$\therefore\quad \vec{x}-\vec{a}=s\vec{u}+t\vec{v}$$

$$\therefore\quad \vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{a}}+s\vec{\boldsymbol{u}}+t\vec{\boldsymbol{v}} \quad (\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}+s\overrightarrow{\mathbf{AB}}+t\overrightarrow{\mathbf{AC}}) \quad \cdots\cdots⑤$$

ここで

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\ P(x,\ y,\ z),\ \vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3),\ \vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=x_1+su_1+tv_1 \\ y=y_1+su_2+tv_2 \\ z=z_1+su_3+tv_3 \end{cases}$$

と，表すこともできる.

注❶ ④に

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$$

を代入すると

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

ここで,「$1-s-t=l$」,「$s=m$」,「$t=n$」とおくと

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=l\overrightarrow{\mathbf{OA}}+m\overrightarrow{\mathbf{OB}}+n\overrightarrow{\mathbf{OC}} \quad (l+m+n=1)$$

という表し方になる (p. 64, 65, 66).

注❷ ⑤で $\vec{u}$, $\vec{v}$ の両方に垂直なベクトルを「$\vec{\boldsymbol{n}}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$」とすれば，これは π の「法線ベクトル」で

$$\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot(\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v})$$

$$=\vec{n}\cdot\vec{a}+s\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{u})}_{0}+t\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{v})}_{0} \longleftarrow \text{「内積」の「分配則」}$$

$$=\vec{n}\cdot\vec{a}$$

$$\therefore\quad \vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0$$

これは，①に他ならない．

例題 5

3点 A(0，−1，0)，B(1，1，1)，C(3，3，0) を通る平面の方程式を求めよ．

解説　いろいろな方法が考えられる．

《その1》——「$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$」に3点を代入する．

求める平面の方程式を

$$ax+by+cz+d=0 \quad \cdots\cdots ①$$

とおいて，3点の座標を代入すると

$$\begin{cases} -b+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ 3a+3b+d=0 \end{cases}$$

これを，a，b，c について解くと

$$a=-\frac{4}{3}d,\quad b=d,\quad c=-\frac{2}{3}d$$

①に代入して，「$d \neq 0$（$d=0$ とすると a，b，c は0になる）」を用いて

$$\boldsymbol{4x-3y+2z-3=0}$$

《その2》——「$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}}$」を利用する．

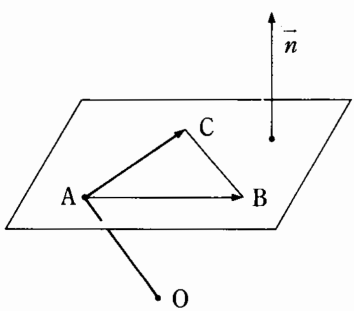
$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 1),\quad \overrightarrow{AC}=(3,\ 4,\ 0)$$

で，この平面は点Aを通り，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ に平行であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=s+3t \\ y=-1+2s+4t \\ z=s \end{cases}$$



この式から「《その1》①の形」を導くには，パラメーター t，s を消去すればよい．

$$s=z,\quad t=\frac{x-s}{3}=\frac{x-z}{3}$$

これを第2式に入れて整理すれば①の形となる．

《その3》——点 A に注目しながら「法線ベクトル」を求める．

求める平面の「法線ベクトル」$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=a+2b+c=0 \quad\cdots\cdots ②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=3a+4b=0 \quad\cdots\cdots ③$$

③で，b を a で表し②に入れると c が a で表されるから，a, b, c の比が求まって

$$a:b:c=4:(-3):2$$

$\vec{n}=(4,\ -3,\ 2)$ として，求める平面の方程式は

$$4(x-0)-3(y+1)+2(z-0)=0$$

$$\therefore\quad \mathbf{4x-3y+2z-3=0}$$

らしんばん

《その2》は場合によっては，かなりめんどうな計算になるときがある．

《その3》が最もよくつかわれる．

このとき $a:b:c$ を簡単に求める方法がある．

②の係数をならべて書く……　③の係数をならべて書く……　（最初の数をうしろにつける）

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & -2 & -4 & 3 \\ & (c) & (a) & (b) \end{array}$$

「行列式の計算」と同様の計算をする……

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ \multicolumn{2}{c}{\downarrow} \\ \multicolumn{2}{c}{ad-bc} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

（この計算で求めた -4, 3, -2 が，a, b, c に対応する数値である——順序に注意すること．）

これより

$$a:b:c=(-4):3:(-2)=4:(-3):2$$

となる——求めたら②，③に代入して成立することを確認する習慣をつけておくとよい．

この方法は「行列式」をやらないとキチンとした説明はできないが，便利のよい方法であるから知っておくとよい．

(2)「定点」から「定平面」への垂線

平面上にない定点からその平面に垂直に垂線を下ろすとき，その長さ(「**点と平面との距離**」)は次の公式によって求められる——これは「大変よく使われる公式」の1つである．

「点と平面との距離」を与える公式

点 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から平面

$$\pi:\quad ax+by+cz+d=0$$

に下した垂線の長さを h とすると

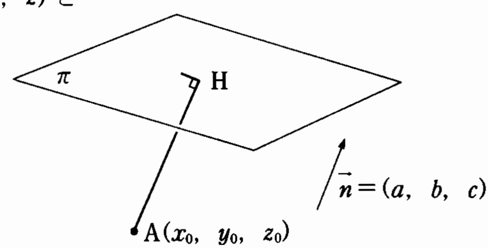
$$\boldsymbol{h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

である．

解　説　点 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から平面 π に下した垂線の足を $H(x,\ y,\ z)$ とすると，π の法線ベクトルを

$$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$$

として



$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\vec{n}$$

$$\overrightarrow{AH}=t\vec{n}$$

$$\therefore\quad h=|\overrightarrow{AH}|=|t\vec{n}| \quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

と表される．

これを「成分」で表すと

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=x_0+ta\\y=y_0+tb\\z=z_0+tc\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

となる．

この $H(x,\ y,\ z)$ は

$$\pi:\quad ax+by+cz+d=0$$

上の点であるから，②をこれに入れて

$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c(z_0+tc)+d=0$$

この式から t を求めると

$$t=\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\quad (=t_0)$$

これを①に用いると

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

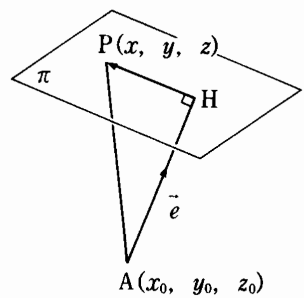
また，このとき，t_0 の値を②に代入すれば，H の座標を求めることができる．

らしんばん

➡ これを「正射影」と「正射影ベクトル」(p. 47) の立場から説明しよう．

法線ベクトル方向の単位ベクトルは

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$



であるから，右図で AH（符号つき長さ）は

$$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\quad (=|\vec{e}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta)$$
$$=\frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad \cdots\cdots(*)$$

$(\because\ \ ax+by+cz+d=0 \longleftarrow$ P は π 上$)$

$$\therefore\quad \mathrm{AH}=|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$
$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

また，このときの H の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})\vec{e}$$
$$=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{e}$$
$$=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t_0\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad \left(t_0=\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

である．

特に点 A が原点 O に一致しているときは，（＊）の A を O におきかえて

$$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{|\boldsymbol{d}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}$$

H の座標も，（＊＊）で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{0}$（$x_0=y_0=z_0=0$）とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{-d}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\ \left(=\frac{-\boldsymbol{d}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}\vec{\boldsymbol{e}}\right)$$

である．

➡ **「Hesse（ヘッセ）の標準形」について**――

例題 5（p. 89）で求めた平面の方程式は

$$4x-3y+2z-3=0 \qquad \therefore\quad 4x-3y+2z=3$$

であったが，この両辺を

$$\sqrt{4^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{29}$$

で割ると

$$\frac{4}{\sqrt{29}}\boldsymbol{x}-\frac{3}{\sqrt{29}}\boldsymbol{y}+\frac{2}{\sqrt{29}}z=\frac{3}{\sqrt{29}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

これを「内積」で表せば

$$\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{3}{\sqrt{29}} \longrightarrow \vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{\sqrt{29}} \quad ((***)\text{と同じ形!!})$$

となり，（＊＊＊＊）の「右辺の値 $\left(=\frac{3}{\sqrt{29}}\right)$」が「原点とこの平面との距離」を表していることがわかる――考え方は 2 次元のときと同様で「（＊＊＊＊）の形」を「**Hesse の標準形**」という（p. 46，47参照）．

➡ 本文中の①は

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{n}$$

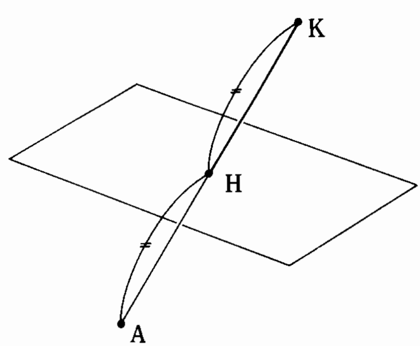
であった．したがって上で求めた t の値 t_0 を 2 倍して

$$t=2t_0$$

として①に代入すると，「点 A の平面 π に関する対称点 K が得られる．結局

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})\vec{e}$$

であるから，K の座標を求めるには（＊＊）の右辺の第 2 項を 2 倍すればよい．



(3) 「直線」と「平面」の関係

例題 6

点 A(1, 2, 3) と 2 直線

$$l:\quad x-2=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{-2}$$

$$g:\quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}$$

がある.

(1) 点 A を通り, l をふくむ平面の方程式を求めよ.

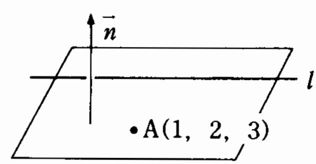
(2) 交わる 2 直線 l, g で決定される平面の方程式を求めよ.

解 説 (1) いろいろな方法が考えられる.

《その 1》———定点 A に注目して「法線ベクトル」を求める

A(1, 2, 3) を通る平面の方程式を,

$$a(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0 \quad \cdots\cdots①$$



とし, l 上の点 (2, 1, −2) を代入して

$$a-b-5c=0 \quad \cdots\cdots②$$

また, ①の「法線ベクトル」を

$$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$$

とすると

これは l の方向ベクトルと垂直であるから

$$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 4,\ -2)=a+4b-2c=0 \quad \cdots\cdots③$$

②, ③より

$$a:b:c=22:(-3):5$$

ゆえに①は,

$$22(x-1)-3(y-2)+5(z-3)=0$$

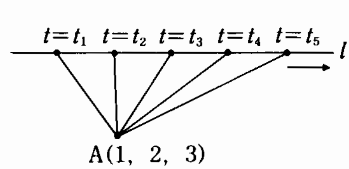
$$\therefore\quad \boldsymbol{22x-3y+5z=31}$$

《その 2》——— l 上の点を「パラメーター表示」する (t の恒等式)

l 上の点は, パラメーター t を用いて, $(t+2,\ 4t+1,\ -2t-2)$ で, これが平面①上にあるから, 代入して

$$a(t+1)+b(4t-1)+c(-2t-5)=0$$

$$\therefore\quad (a+4b-2c)t+(a-b-5c)=0$$



これが, t について恒等式となる.

$$\therefore\quad a+4b-2c=0,\ a-b-5c=0$$

としてもよい.

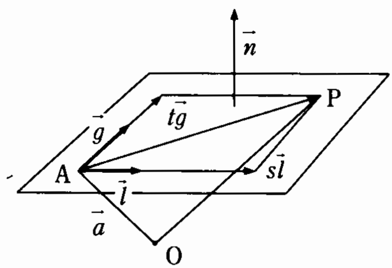
(2)《その1》——— $\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\vec{a}+s\vec{l}+t\vec{g}$ （$\vec{l}$, $\vec{g}$ は2直線の方向ベクトル）

求める平面は，l, g の方向ベクトル

$$\vec{l}=(1,\ 4,\ -2),\ \vec{g}=(3,\ -1,\ 2)$$

に平行でかつ $\boldsymbol{l}$ 上の1点 (2, 1, −2) を通るから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\therefore\quad \begin{cases} x=2+s+3t \\ y=1+4s-t \\ z=-2-2s+2t \end{cases}$$

この式から s, t を消去すれば

$$\boldsymbol{6x-8y-13z=30}$$

《その2》——— 「法線ベクトル」を求める

l, g の方向ベクトルに垂直なベクトル「$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$」を求める.

$$\vec{l}\cdot\vec{n}=a+4b-2c=0,\ \vec{g}\cdot\vec{n}=3a-b+2c=0$$

$$\therefore\quad a:b:c=6:(-8):(-13)$$

あとは「$\boldsymbol{l}$ または，$\boldsymbol{g}$ 上の1点」を適当にとって平面を決めるとよい.

らしんばん

➡ (1)についてもう少し研究しておこう——— 「平面束」について

xy 平面上で，2つの曲線

$$\boldsymbol{f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0}$$

が交わるとき，

$$\boldsymbol{\lambda f(x,\ y)+\mu g(x,\ y)=0}\quad (\lambda^2+\mu^2\neq 0 \text{ ―― } \lambda,\ \mu \text{ は同時には } 0 \text{ でない})$$

は，λ, μ の値にかかわらず2曲線の交点を通る———

このハナシは，空間の図形にも拡張される.

空間の2平面では，2平面

$$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}\quad \cdots\cdots(*),\quad \boldsymbol{a'x+b'y+c'z+d'=0}\quad \cdots\cdots(**)$$

が交わるとき，その交線を l とすると，平面（x, y, z の1次式）

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0\quad (\lambda^2+\mu^2\neq 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

は，λ, μ の値にかかわらず l を含む———（$*$），（$**$）を同時にみたす点 (x, y, z) は（$***$）をみたす.

このとき，（$***$）は $\boldsymbol{l}$ を含む「平面束」を表す———「（$*$）と（$**$）の交

線 l」を通るどのような平面も，（＊＊＊）の λ, μ に適当な数値を入れた形で表される．

しかし，「λ」と「μ」の「2 文字」で表すのはメンドウである――「1 文字」で表す方法はないか．

いま，「$\lambda \neq 0$」とすると，（＊＊＊）の両辺を λ で割ることができる．

$$(ax+by+cz+d)+\frac{\mu}{\lambda}(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

ここで「$\frac{\mu}{\lambda}=k$」とおくと

$$\boldsymbol{(ax+by+cz+d)+k(a'x+b'y+c'z+d')=0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{（＊＊＊＊）}$$

$\lambda=0$ のときは $\mu \neq 0$ であるから，（＊＊＊）は

$$\boldsymbol{a'x+b'y+c'z+d'=0} \quad \text{（これは（＊＊））}$$

となる．このことから「（＊）と（＊＊）の交線 l を通る平面」を述べるには，（＊＊＊）を用いるかわりに「（＊＊＊＊）または（＊＊）」を示してもよい．

このことから，(1)を見なおすと l は 2 平面

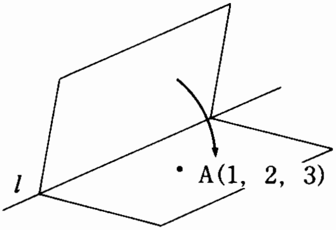
$$x-2-\frac{y-1}{4}=0,\quad x-2+\frac{z+2}{2}=0$$

の交線であるから，l を含む平面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-2-\frac{y-1}{4}\right)+k\left(x-2+\frac{z+2}{2}\right)=0},\ \text{または}\quad \boldsymbol{x-2+\frac{z+2}{2}=0}$$

これが，A(1, 2, 3) を通るから，代入して A を通るときの k の値をきめると
(第 2 式は A をみたさない)

$$k=\frac{5}{6}$$



これをもとの式にいれると

$$22x-3y+5z-31=0$$

なお，実際に問題を解くときは，先に与えられた 2 式の分母を払って

$$x-2-\frac{y-1}{4}=0 \longrightarrow 4x-y-7=0$$

$$x-2+\frac{z+2}{2}=0 \longrightarrow 2x+z-2=0$$

としておいて

$$(4x-y-7)+k(2x+z-2)=0,\ \text{または}\quad 2x+z-2=0$$

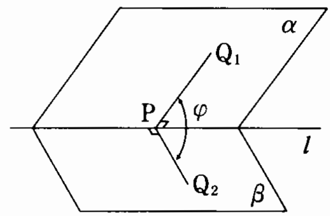
とおくと「分数計算」が避けられていくらか「ラク」になる．

(4)「平面」と「平面」の関係

(i)　2平面の交角———「法線ベクトル」に注目!!

「2平面 α, β のなす角」は,「この2平面の交線上に立てた2つの垂線のなす角」のことである.

(図の α 上の PQ_1 と, β 上の PQ_2 のなす角をいう).



この角を「φ」とすると, φ を求めることは, 下の図のように2平面 α, β の法線ベクトル $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ のなす角「θ」を求めることに帰着する.

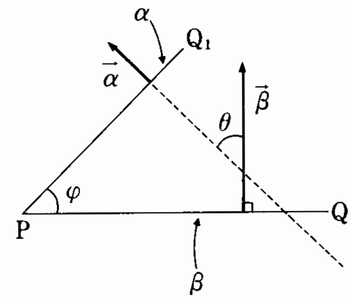
いま

$$\alpha: \quad a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\beta: \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

とし, α, β の法線ベクトルを

$$\vec{\alpha}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$$
$$\vec{\beta}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$$

とすると



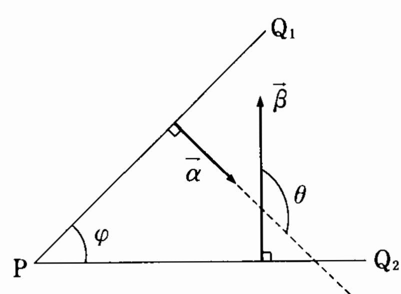
〈図1〉

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} \quad \cdots\cdots ①$$

である.

しかしこのときの θ は,〈図2〉に示すように $\frac{\pi}{2}$ をこえる場合もおこりうる. ところが, 平面には方向性がないので「2平面のなす角 φ」を考えるときは, その2平面の作る2つの角のうち, 大きくない方の角を φ にとり

$$0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$$



〈図2〉

としたい———このことは「**2直線のなす角**(p. 84, 85)」で説明したことと同様である.

$\cos\varphi$ は次の式で求められる. すなわち

$$\boldsymbol{\cos\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}} \quad \cdots\cdots ②$$

を計算すればよい．

第１章の 例題 12(2)（p. 50）をこの方法でやってみよ．

注❶ 「xy 平面上の２直線」を

$$g_1: \quad a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$g_2: \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

とし，$\overrightarrow{g_1}=(a_1,\ b_1)$，$\overrightarrow{g_2}=(a_2,\ b_2)$ とすれば，①，②はそのまま使える．

$\overrightarrow{g_1}$，$\overrightarrow{g_2}$ はそれぞれ２直線 g_1，g_2 の「**法線ベクトル**」である．

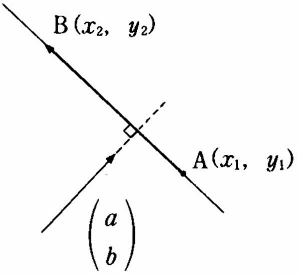
なおベクトル「$\vec{a}=(a,\ b)$」が直線

$$ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

に垂直であることは次のようにして証明できる．

（＊）上に２点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ をとると

$$ax_1+by_1+c=0,\ ax_2+by_2+c=0 \quad \cdots\cdots(**)$$



このとき

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$$
$$=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)$$
$$=(ax_2+by_2)-(ax_1+by_1)$$
$$=(-c)-(-c)=0 \longleftarrow (**)$$
$$\therefore \quad \vec{a}\perp\overrightarrow{AB}$$

注❷ ２平面 α，β の「**平行条件**」は

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}/\!/\vec{\boldsymbol{\beta}} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}}=\frac{\boldsymbol{b_1}}{\boldsymbol{b_2}}=\frac{\boldsymbol{c_1}}{\boldsymbol{c_2}}$$ （分母が０なら分子も０とする）

「**垂直条件**」は

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}\perp\vec{\boldsymbol{\beta}} \longrightarrow \vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0}$$

である．

(ii) **２平面の交線**

例題 7

２平面

$$\alpha: \quad 3x-2y-z-4=0$$
$$\beta: \quad x+3y+z+5=0$$

の交線の方程式は

$$\frac{x-\boxed{}}{\boxed{}}=\frac{y-\boxed{}}{4}=\frac{z+2}{\boxed{}}$$

である．

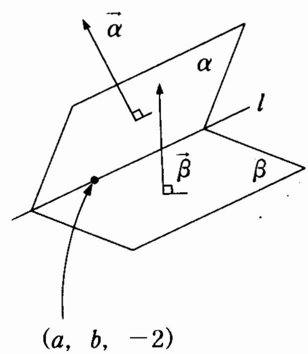
解　説　求める「直線の方向ベクトル」を $(l,\ 4,\ n)$ とすると，これが「α，βの法線ベクトル」と直交するから

$$(3,\ -2,\ -1)\cdot(l,\ 4,\ n)=3l-n-8=0$$

$$(1,\ 3,\ 1)\cdot(l,\ 4,\ n)=l+n+12=0$$

$$\therefore\quad l=-1,\ n=-11$$

また，分子の $\boxed{}$ を順に a，b とすると，交線 l は $(a,\ b,\ -2)$ を通るから，α，β の式をみたす．



$$\therefore\quad \begin{cases} 3a-2b+2-4=0 \\ a+3b-2+5=0 \end{cases}$$

これから，

$$a=0,\ b=-1$$

らしんばん

本問の場合，交線は，「$(a,\ b,\ -2)$ を通り，方向ベクトルは，$(l,\ 4,\ n)$」とわかるので，l，n，a，b が簡単に求められるが，２つの平面 α，β の交線の方程式を

$$\frac{x-p}{l}=\frac{y-q}{m}=\frac{z-r}{n}$$

の形で求めよ，というときはどうすればよいか．

その１つの方法としては，連立方程式

$$\begin{cases} 3x-2y-z-4=0 & \cdots\cdots(*) \\ x+3y+z+5=0 & \cdots\cdots(**) \end{cases}$$

を書きかえるのであるが，まず z を消去して

$$4x+y+1=0\quad((*)+(**))\quad\cdots\cdots(***)$$

次に y を消去して

$$11x-z-2=0\quad((*)\times3+(**)\times2)\quad\cdots\cdots(****)$$

この $(***)$，$(****)$ を指定された形に書きかえるのである．

$$(***):\quad \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{4}$$

$$(****):\quad \frac{x}{-1}=\frac{z+2}{-11}$$

よって，求める方程式は

$$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{-11}$$

となって，本文に説明した結果と同じ式になる．

考え方をかえてみる．$(*)$，$(**)$ を x，y についての連立方程式とみて

$$\begin{cases} 3x-2y=z+4 \\ x+3y=-z-5 \end{cases}$$

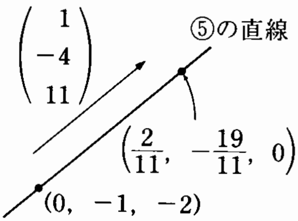
これを x, y について解くと

$$x=\frac{z+2}{11},\ y=\frac{4z+19}{-11}$$

この2式を，z について解きなおすと

$$11x-2=\frac{-11y-19}{4}=z$$

$$\therefore\quad x-\frac{2}{11}=\frac{y+\frac{19}{11}}{-4}=\frac{z}{11}$$



となって，先に求めた結果とみかけは違う形になるが，**実はこれは同じ直線**である．直線は「その上の1点と方向ベクトル」で決まるが，その「通過点」のとり方で，形が違ってくるだけのハナシである．

➡ 式の形だけ求めるなら，(＊) と (＊＊) の式で，たとえば z の値を2つえらぶと

$z=0$ に対して $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+3y=-5 \end{cases}$

これを解いて

$$\mathrm{A}\left(\frac{2}{11},\ -\frac{19}{11},\ 0\right)$$

$z=1$ に対して $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=-6 \end{cases}$

これを解いて

$$\mathrm{B}\left(\frac{3}{11},\ -\frac{23}{11},\ 1\right)$$

が決まり，**直線は通過する2点がきまれば決定する**から，これより直線ABの方程式を求めてもよい．

➡ **「平面束」**の考え方 (p. 95, 96) を利用して l, n を求めてもよい．

「2平面 α, β の交線を含む平面の方程式」は

$$(3x-2y-z-4)+k(x+3y+z+5)=0,$$

$$\text{または}\quad x+3y+z+5=0$$

$$\therefore\quad (k+3)x+(3k-2)y+(k-1)z+5k-4=0,$$

$$\text{または}\quad x+3y+z+5=0$$

で表される．

このとき，求める直線の方向ベクトル $(l,\ 4,\ n)$ は，上の平面の「法線ベクト

ル」とつねに直交するから

$$\begin{pmatrix} l \\ 4 \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k+3 \\ 3k-2 \\ k-1 \end{pmatrix} = l(k+3)+4(3k-2)+n(k-1)=0$$

$$\therefore \quad (l+n+12)k+(3l-n-8)=0$$

これが k の値にかかわらず成立する（k の恒等式）と考えて

$$\begin{cases} l+n+12=0 \\ 3l-n-8=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} l=-1 \\ n=-11 \end{cases}$$

（$(-1,\ 4,\ -11)$ は「$x+3y+z+5=0$」の法線ベクトルとも直交する.）

第2節
球面の方程式

空間において，主としてとりあげる曲面は「球面」である．そしてわれわれとしてはすでに xyz 空間で，「点」，「直線」，「平面」の扱いについて学んできた．ここではこのことをふまえて

(i) 「球面の方程式」を確認する．

(ii) 「球面」と「他の図形」との関係について研究する――具体的には「球面と直線の関係」，「球面と平面との関係」，「球面と球面との関係」である．

(iii) 「空間図形」の基本的な扱い方を整理する．

要するに「空間図形の総まとめ」と考えてもらえばよい．

1 球面の方程式

点 $C(\vec{c})$ からの距離が一定値 r である点 $P(\vec{x})$ の集合は，平面上では円，空間では球面になる。すなわち

$$|\overrightarrow{CP}|=r \qquad \therefore \quad |\vec{x}-\vec{c}|=r \quad \cdots\cdots①$$

が，「2次元ベクトル」なら「円」，「3次元ベクトル」なら「球面」の「ベクトル方程式」である．

これを成分で表すには

$$\vec{x}=(x,\ y,\ z),\ \vec{c}=(a,\ b,\ c)$$

として，①は

$$|\vec{x}-\vec{c}|^2=r^2$$

であるから

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \cdots\cdots②$$

②を展開して，x，y，z の係数を l，m，n，定数項を k とおくと

$$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+k=0 \quad \cdots\cdots ③$$

の形になる．

逆に③の形が与えられたときは

$$\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2+\left(z+\frac{n}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(l^2+m^2+n^2)-k$$

と変形すると②の形になるが，無条件に球面の方程式とはいえない．

右辺の「$\frac{1}{4}(l^2+m^2+n^2)-k$」が「正」でないと，これが r^2 の形に書けないからである．

このことは，xy 平面で

$$x^2+y^2+lx+my+k=0$$

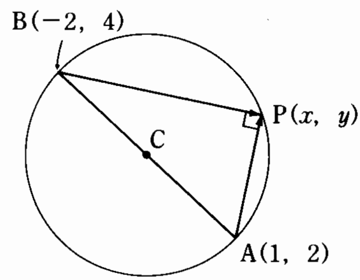
が，「$\frac{1}{4}(l^2+m^2)-k>0$」なら円を表すのと同じである．

例題 8

(1)　xy 平面上で2点 A(1, 2)，B(−2, 4) を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

(2)　xyz 空間で，2点 A(1, 2, 3)，B(−2, 4, −1) からの距離の比が 2 : 1 であるような点 P はどんな図形を描くか．

解　説　(1)は，中心が AB の中点で半径が $\frac{AB}{2}$ で簡単にすむが，ここでは，別の角度から「円・球面の性質」を考えてみたい．



(1)　求める円周上の任意の1点を，P$(x,\ y)$ とすると，**直径に対する円周角は直角であるから**「AP⊥BP」である．

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

これを成分で表すと

$$(x-1)(x+2)+(y-2)(y-4)=0$$

これが円の方程式で，整理すると

$$x^2+y^2+x-6y+6=0 \qquad \therefore \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{13}{4}$$

(2)　原点を O として

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(1,\ 2,\ 3),\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}=(-2,\ 4,\ -1)$$

とする．

A，B からの距離の比が「2：1」である点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z)$$

として

$$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{AP}|^2=4|\overrightarrow{BP}|^2 \quad\cdots\cdots②$$

この式を成分で表すと

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4\{(x+2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2\}$$

展開して整理すると

$$3(x^2+y^2+z^2)+2(9x-14y+7z)+70=0$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2+6x-\frac{28}{3}y+\frac{14}{3}z+\frac{70}{3}=0$$

$$\therefore\quad (x+3)^2+\left(y-\frac{14}{3}\right)^2+\left(z+\frac{7}{3}\right)^2=\frac{116}{9}$$

これより求める図形は

中心 $\left(-3,\ \dfrac{14}{3},\ -\dfrac{7}{3}\right)$，**半径** $\dfrac{\sqrt{116}}{3}\left(=\dfrac{2\sqrt{29}}{3}\right)$ **の球面である．**

らしんばん

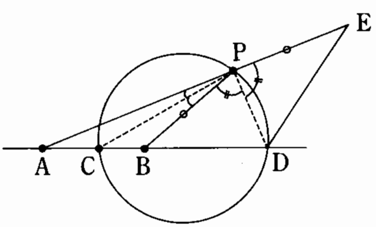
➡ (1)について——

このような扱いの方が有効である場合もある．

3 次元のときも同様に，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

から，「球面の方程式」が導かれる．



➡ 「アポロニウスの円」について——

「平面上の 2 定点から，距離の比が一定な点の集合」は円になることが知られていて，これを，「アポロニウスの円」という．

右図で，「**AP：PB＝*m*：*n***」がつねに成り立つとき，「2 点 **C**，**D** はそれぞれ **AB** を同じ比に内分，外分する点」になり，「**PC** は **∠APB** の 2 等分線」，「**PD** はその外角の 2 等分線」で，「**∠CPD＝90°**」より，「点 **P** は線分 **CD** を直径とする円周上の点」である．

このことは，AP の延長上に「BP＝EP」であるような点 E をとることにより「**△BDP≡△EDP**」を用いて示される．すなわち

AD：BD＝AD：ED　⟵　BD＝ED

$=\mathrm{AP}:\mathrm{EP}$ ←―― PD は ∠BDE を 2 等分

$=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}$ ←―― EP＝BP

$=\mathrm{AC}:\mathrm{BC}$ ←―― CP は ∠APB を 2 等分

$(=m:n)$ ――― C は「内分点」，D は「外分点」

である．

②をベクトルのまま変形してみよう．

$$②:\quad (\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})=4(\vec{x}-\vec{b})\cdot(\vec{x}-\vec{b})$$

展開して整理すると

$$3\vec{x}\cdot\vec{x}+(2\vec{a}-8\vec{b})\cdot\vec{x}-(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$$

左辺を因数分解して

$$\{3\vec{x}-(\vec{a}+2\vec{b})\}\cdot\{\vec{x}+(\vec{a}-2\vec{b})\}=0$$

$$\therefore\quad \left\{\vec{x}-\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right\}\cdot\{\vec{x}-(-\vec{a}+2\vec{b})\}=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0$$

よって，点 P のえがく図形は，**2 点 $\mathrm{C}\left(\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)$，$\mathrm{D}(-\vec{a}+2\vec{b})$ を直径の両端とする球面**であることがわかる――― A，B の座標が具体的に与えられないときは，この変形を利用する．

ところで，2 点 C，D について調べてみると

$$\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{1+2},\quad -\vec{a}+2\vec{b}=\frac{-\vec{a}+2\vec{b}}{-1+2}$$

であることから，C は AB を「2：1」に内分する点，D は AB を「2：1」に外分する点である．「分点公式（p. 33，34）」を参照のこと．

2　「球面」と「他の図形」との関係

(1)　球面と直線

球面と直線との関係は，「**接する**」，「**交わる**」，「**共有点がない**」の 3 つの場合が考えられる．

例題 9

空間に次の球面 S と直線 l がある．

$$S:\quad (x-1)^2+y^2+z^2=9$$

$$l:\quad \frac{x+1}{2}=y-a=z-2a \quad (a\text{ は定数とする})$$

(1)　S と l が異なる２点で交わるような a の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，l が S に切りとられる部分の長さの最大値を求めよ．

解　説　(1)　**l と S の交点**　$\longleftrightarrow$　$\begin{cases} l \text{上の点であり，かつ} \\ S \text{上の点である．} \end{cases}$

まず，l 上の点であることは，パラメーター t を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 2a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+a \\ z=t+2a \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

であるから，この点が S 上にあるためには，これを S の方程式に代入して

$$(2t-2)^2+(t+a)^2+(t+2a)^2=9$$

$$\therefore \quad 6t^2+2(3a-4)t+5a^2-5=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

すなわち，求める条件は「**②が異なる２つの実数解をもつこと**」である．

$$\therefore \quad \frac{D}{4}=(3a-4)^2-6(5a^2-5)>0$$

$$\therefore \quad 21a^2+24a-46<0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{-12-\sqrt{1110}}{21}<a<\frac{-12+\sqrt{1110}}{21}}$$

(2)　(1)の解を α，β として求める線分の長さ d は，①の t に α，β を入れてえられる２点間の距離だから

$$\boldsymbol{d=\sqrt{2^2+1^2+1^2}\,|\beta-\alpha|} \quad \longleftarrow \quad \text{この形に「チョットだけ」注目!!}$$

$$=\sqrt{6}\,|\beta-\alpha|$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

ここで，「解と係数の関係」から

$$\alpha+\beta=-\frac{3a-4}{3},\quad \alpha\beta=\frac{5a^2-5}{6}$$

これを③に入れて整理すると

$$d=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{-21a^2-24a+46}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{-21\left(a+\frac{4}{7}\right)^2+\frac{370}{7}}$$

ゆえに，「$a=-\dfrac{4}{7}$」のときに d は最大で，最大値は

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\frac{370}{7}}=\frac{2\sqrt{3885}}{21}}$$

らしんばん

➡ **$D=0$ のとき———共有点 1 つ　(l と S は接する)**

$D<0$ のとき———共有点なし

➡ 右図でわかるように球面の中心

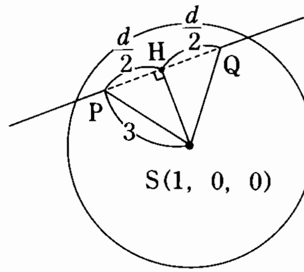
S(1, 0, 0)

から l への距離 SH が求まれば

$$\frac{d}{2}=\sqrt{SP^2-SH^2}$$

$$\therefore\quad d=2\sqrt{3^2-SH^2}$$

で d が求められる——— SH を求める方法は p. 81, 82, 83でくわしく説明した.



しかし, 本問についていえばこの方法はあまり有効とは思えないが, 参考のために両方のやり方を比較しておくとよい.

(2)　球面と平面

このときも, 「接する」, 「交わる」, 「共有点がない」の 3 つの場合があるが, **平面上の点は直線上の点とちがって, 1 つのパラメーターで表すことができない. したがって簡単に「パラメーターの 1 元方程式の問題」として扱かうわけにはいかないので, 少し事情が違ってくる.**

まず, 「接する」ときのハナシから進めていくことにする.

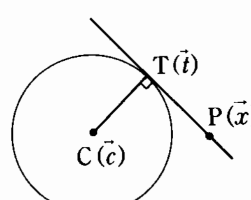
(i)　球面の接平面

まず, **球面と平面が, 「接する」**ということから説明する. これは, 円の接線と同じように考えてみればよい. 円の接線の場合は,

円 C の半径を CT とし, T においてこの円にひいた接線を TP とすると

CT ⊥ TP

で, これは円の接線の基本的な性質である.



そこで, 曲線の接線の一般的な定義はしばらくおいて, 円に限っていうと,

「円周上の 1 点 T において半径 CT に垂直な直線を T における円の接線という」

と定義してもよい.

これにならって，「**球面上の 1 点 T において，半径 CT に垂直な平面を T における球の接平面という**」と定義することができる．

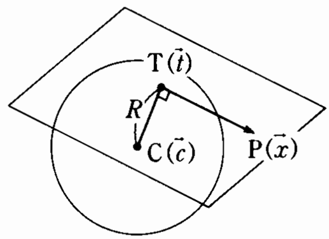
ベクトルで表すと，球の半径を R として

$$\overrightarrow{\mathbf{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CT}}=\mathbf{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad (\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CT}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}-|\overrightarrow{\mathrm{CT}}|^2=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}=|\overrightarrow{\mathrm{CT}}|^2=R^2$$

$$\therefore\quad (\vec{x}-\vec{c})\cdot(\vec{t}-\vec{c})=R^2$$



この式で

$$\vec{x}=(x,\ y,\ z)$$

$$\vec{c}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

$$\vec{t}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

とおくと

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{(x_0-\alpha)(x-\alpha)}\\&\quad\boldsymbol{+(y_0-\beta)(y-\beta)}\\&\quad\boldsymbol{+(z_0-\gamma)(z-\gamma)=R^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

となり，これが「**接平面の方程式**」である．

特に点 C が原点のときは「$\alpha=\beta=\gamma=0$」であるから

$$\boldsymbol{x_0x+y_0y+z_0z=R^2}$$

となる．

この式で，第 3 成分を除くと，xy 平面上の円の接線の公式が得られ，特に C を原点にとるときは

$$\boldsymbol{x_0x+y_0y=R^2} \quad \longleftarrow \quad \text{数 I}$$

という公式になる．

注 ①を成分で表すと

$$\boldsymbol{(x-x_0)(x_0-\alpha)+(y-y_0)(y_0-\beta)+(z-z_0)(z_0-\gamma)=0}$$

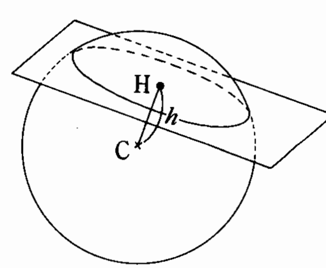
である．場合によるとこの形の方が使いやすいときもある．

この式で T$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が球面上にある条件

$$(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+(z_0-\gamma)^2=R^2$$

を用いて x_0^2, y_0^2, z_0^2 を消去すると②が得られる．

(ii) **球面と平面の位置関係**



(i)の説明でわかるように，球面 S と平面 π が接するとき，S の中心 C から π までの距離は球面の半径 R に

等しい．

このことから，Sとπとの位置関係を次のようにまとめることができる．

$$\pi: \quad ax+by+cz+d=0$$
$$S: \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

とすると点Cから平面πまでの距離は

$$h=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であるから

$R>h$のとき：　Sとπは交わり，交線は「空間の円」になる

$R=h$のとき：　Sとπは接する

$R<h$のとき：　Sとπは共有点なし

となる．

これらの関係は，xy平面における円と直線の場合とまったく同様な関係である．このように，xy平面での公式，定理がxyz空間で同じように成り立つことが多い．

例題 10

球面

$$S: \quad x^2+y^2+z^2=1$$

の接平面で，点A(1，1，1)を通るものの接点の全体は円になる．この円の含まれる平面の方程式を求め，この円の中心Cと半径rを求めよ．

解　説　接点を$(x_0,\ y_0,\ z_0)$とすれば，この点における接平面の方程式は

$$x_0x+y_0y+z_0z=1$$

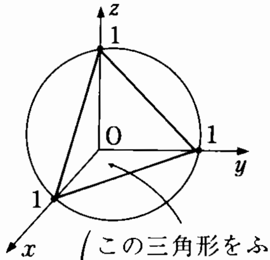
これが，A(1，1，1)を通るから

$$x_0+y_0+z_0=1$$

これは接点が，平面

$$x+y+z=1 \quad \cdots\cdots①$$

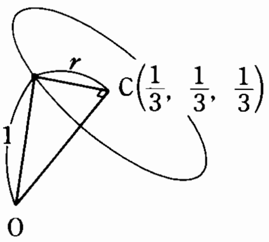
上にあることを示しているから，求める円は，これと球面Sとの交線である．



（この三角形をふくむ平面：$x+y+z=1$）

次に①の「法線ベクトル」は(1，1，

1) であるから，円の中心は C$(t,\ t,\ t)$ とおくことができて，しかもこれは①上にある．



$$\therefore\quad t+t+t=1 \qquad \therefore\quad t=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \mathrm{C}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

ゆえに半径 r は

$$r^2=1^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$
$$=1-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad r=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

らしんばん

➡ 球面

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

上の，点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における「**接平面の方程式**」

$$\boldsymbol{x_0x+y_0y+z_0z=r^2}$$

はいきなり用いてもよい．「覚え方」は（＊）で x^2，y^2，z^2 をそれぞれ

$$x^2 \longrightarrow x_0x,\quad y^2 \longrightarrow y_0y,\quad z^2 \longrightarrow z_0z$$

のようにおきかえればよい．

➡ C の座標を求めるには

$$x+y+z=1$$

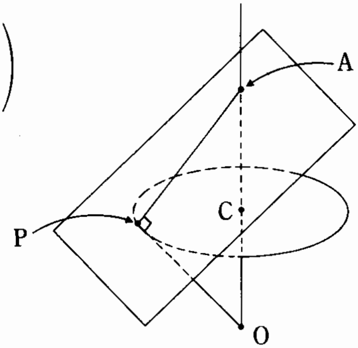
の両辺を「$\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$」で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (=\mathrm{OC})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

としてもよい．これは p. 92，93で述べた．

➡ 本問を「読みかえる」と，「円 C 上の任意の点 P における球面 S の接平面は定点 A(1，1，1) を通る」ということで，よく考えてみれば「あたりまえ」のことである――このような形で出題されたこともある．

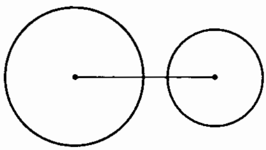


(3)　球面と球面の関係

(i)　位置関係について

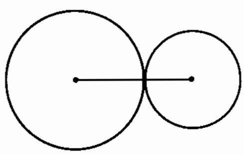
まず，xy 平面上の 2 つの円の中心距離を d，半径を r_1，r_2 とすると，この 2 円の位置関係は次の 5 つの場合が考えられる．

1）



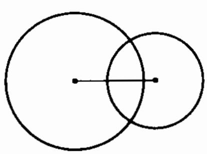
$d>r_1+r_2$

2）



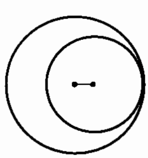
$d=r_1+r_2$

3）



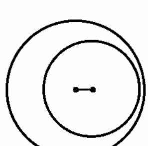
$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$

4）



$|r_1-r_2|=d$

5）



$|r_1-r_2|>d$

2円のかわりに2球としても，これらの図を「2球の中心線を含む平面で切った断面」と考えてみれば，d，r_1，r_2 の間に成り立つ関係は同じである．

(ii)　2つの球面の交線の円を含む球面（あるいは平面）の方程式について

「2つの平面の交線をふくむ平面の方程式（平面束）」についてはすでに述べた（p. 95，96）が，このことは2つの球面の間の関係としても全く同様に扱うことができる．

すなわち，2つの球面

$$S_1:\quad x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$S_2:\quad x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \quad \cdots\cdots②$$

が交わるとき

$$\lambda(x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1)$$
$$+\mu(x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0 \quad \cdots\cdots③$$
$$(\lambda^2+\mu^2\neq 0)$$

は，一般には「**2球面の交線（円になる）を含む球面**」であるが，特に「$\mu=-\lambda$」のときは

$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)z+d_1-d_2=0 \quad \cdots\cdots④$$

となり，2つの球面の交線である円を含む平面となる．

注❶　xy 平面上の2つの円についても同様のことがいえて，**2つの円の交点を通る「円（円群）」**の方程式を求めることができる．特に「$\mu=-\lambda$」のときは**2つの円の「共通弦」の方程式**が得られる．

注❷　「**平面束**（p. 95，96)」の場合と同様に「$\lambda\neq 0$，$\lambda=0$」のときに分けて考えると③は

$$\begin{cases} (x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1) \\ \qquad +k(x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0 \\ ,\ \text{または}\quad x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

と表される．どちらのスタイルで扱うか「自分の方法」を決めておくとよい．

例題 11

2つの球面

$$S_1:\quad x^2+y^2+z^2-2x-8=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$S_2:\quad x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+a=0 \quad \cdots\cdots②$$

がある．

(1)　S_1，S_2 が交わるように a の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，2球面の交わりである円の中心Cの座標，および半径 r を求めよ．

解　説　(1)　S_1：　$(x-1)^2+y^2+z^2=9$

S_2：　$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6-a$　$(a<6)$

S_1 と S_2 の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(2-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

半径は，3，$\sqrt{6-a}$　$(=r)$ であるから，S_1，S_2 が交わるためには

$$\boldsymbol{|3-r|<\sqrt{3}<3+r}$$

この右側の不等式は，「$r>0$」でつねに成り立つ．

左側の不等式は，

$$-\sqrt{3}<3-r<\sqrt{3}\qquad\therefore\quad 3-\sqrt{3}<r<3+\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad (3-\sqrt{3})^2<r^2=6-a<(3+\sqrt{3})^2$$

$$\therefore\quad -6(\sqrt{3}+1)<a<6(\sqrt{3}-1)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

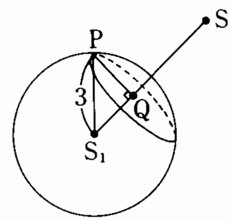
③と S_2 の式の「$a<6$」から

$$\boldsymbol{-6(\sqrt{3}+1)<a<6(\sqrt{3}-1)}$$

(2)　2球の交線を含む平面は

「①－②」より

$$\boldsymbol{2x+2y+2z-(a+8)=0}\quad\cdots④$$



2球の中心を S_1，S_2 とすると，直線 S_1S_2 は平面④と直交し，その交点Qが交線である円の中心である．

$S_1(1,\ 0,\ 0)$ より平面④への垂線の長さ S_1Q は「点と平面との距離の公式 (p. 91，92，93)」を用いて

$$S_1Q=\frac{|2-(a+8)|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{|a+6|}{2\sqrt{3}}$$

よって円 C の半径は

$$\sqrt{3^2-\left(\frac{a+6}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\boldsymbol{9-\frac{(a+6)^2}{12}}}\quad(=r'\text{ とおく}\longrightarrow\text{p. 115})$$

また，「$\overrightarrow{S_1S_2}=(1,\ 1,\ 1)$」であるから，直線 S_1S_2 は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\therefore\quad\begin{cases}x=t+1\\y=t\\z=t\end{cases}$$

これと④の交点が円 C の中心で

$$2(t+t+t+1)-(a+8)=0$$

$$\therefore\quad t=\frac{a+6}{6}$$

よって，求める中心は

$$\left(\frac{a+12}{6},\ \frac{a+6}{6},\ \frac{a+6}{6}\right)$$

らしんばん

④は

$$\lambda(x^2+y^2+z^2-2x-8)+\mu(x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+a)=0$$

で，「$\lambda=1$」，「$\mu=-1$」とおいたものである．

「点と平面との距離の公式（p. 92）のらしんばん」で説明した（＊＊）を用いると，Q の座標は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{-\{2\cdot1+2\cdot0+2\cdot0-(a+8)\}}{2^2+2^2+2^2}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}a+12\\a+6\\a+6\end{pmatrix}$$

としてすぐに求まるが，いきなりこれを用いるのは「カワイくない」——この過程をある程度キチンと書くか，さもなくば「確認用」にとどめておきたい．

少し「イジワル」な例をあげておこう．

たとえば

直線

l：　$x=y=z$

が本問(2)の円の内部を通過するための a の値の範囲を求めよ．

(1)　まず，l と「円 C を含む平面」との交点 K を求める．

l 上の点 $\longrightarrow$ K$(t,\ t,\ t)$

であるから，これを

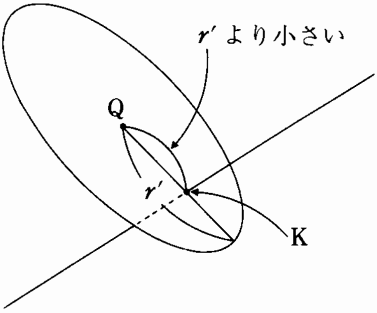
④：　$2x+2y+2z-(a+8)=0$ ……………………（＊）

に入れると

$$2t+2t+2t=(a+8)$$

$$\therefore\quad t=\frac{a+8}{6}\quad\text{……………（＊＊）}$$

$$\therefore\quad \mathrm{K}\left(\frac{a+8}{6},\ \frac{a+8}{6},\ \frac{a+8}{6}\right)$$



ここで，求める条件として，本問では円 C の中心 Q の座標が求まっているから「円 C の中心 Q から K までの距離」と「円 C の半径 r'」との大小を比較して

$$\mathrm{QK}=\sqrt{9-\frac{(a+6)^2}{12}} \longleftarrow \quad r'=\sqrt{9-\frac{(a+6)^2}{12}} \quad (\text{p. }113)$$

を計算してもよいが――― Q の座標が与えられていないときなどはかなりメンドウになる――― K がまず「**平面（＊）上**」であることが約束されており，加えて「**球面 S_1 の内部**」，または「**球面 S_2 の内部**」であることがわかっているから，K の座標をいきなり不等式

$$(x-1)^2+y^2+z^2<9 \qquad \longleftarrow \quad S_1\text{の内部!!}$$

あるいは

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2<6-a \quad \longleftarrow \quad S_2\text{の内部!!}$$

のいずれかに代入すればハナシはすんでしまう―――なるべく計算を簡単にしたいので「S_1 についての条件」を用いることにする．すなわち

$$\left(\frac{a+8}{6}-1\right)^2+\left(\frac{a+8}{6}\right)^2+\left(\frac{a+8}{6}\right)^2<9$$

分母を払って整理すると

$$3a^2+36a-192<0 \quad \longleftarrow \quad \text{「}S_2\text{の条件」を用いても同じ!!}$$

$$\therefore \quad -16<a<4 \quad (<6\text{ をみたす})$$

となる．

第３節　問題解法の研究

発展問題１—平面に関する対称点

空間に平面

α：　$x+2y+z=5$

と２点 A(0, 0, 2), B(2, 1, 0) がある.

(1)　α に関する A の対称点 A′ の座標を求めよ.

(2)　線分 AB は α と交わらないことを示せ.

(3)　点 P が α 上を動くとき, $|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|$ の最小値を求めよ.

解　説　(1)　α は

$x+2y+z=5$ ……………………①

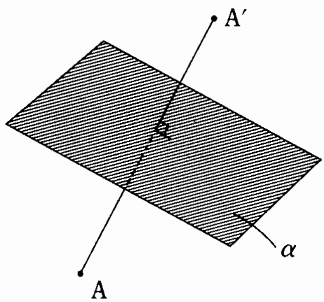
で表されるから, A から α に下ろした垂線の足を H(x, y, z) として

$\overrightarrow{AH}=t(1, 2, 1)$ ……………②

のとき

$\overrightarrow{AA'}=2t(1, 2, 1)$ …………③

である (p. 93参照).



②より, A(0, 0, 2) を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t+2 \end{cases} \quad \cdots\cdots④$$

これが α 上にあるから①に入れて t を求め, その値に対して③で A′ を求める.

$$1\cdot t+2\cdot 2t+1\cdot(t+2)=5$$

$$\therefore \quad t=\frac{1}{2} \quad (=t_0 \text{ とおく})$$

ゆえに, ③より, 「$2t_0=2\times\frac{1}{2}=1$」を t とあらためておいて, ④に代入す

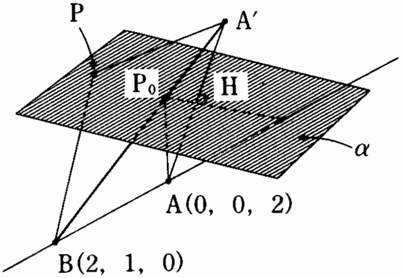
れば，A′(1，2，3) が得られる.

(2)　線分 AB 上の点を Q(x，y，z) とすれば

$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AB}$　$(0\leqq t\leqq 1)$

$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-2t+2 \end{cases}$



α 上の点は①をみたすから代入すれば

$1\cdot 2t+2\cdot t+1\cdot(-2t+2)=5$

$\therefore\ t=\dfrac{3}{2}$　(>1)

ゆえに，線分 AB は平面 α と交わらない.

(3)　A′ は α に関する A の対称点であるから，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{A'P}|$

$\therefore\ |\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{A'P}|+|\overrightarrow{BP}|\geqq|\overrightarrow{A'B}|$　$(=|\overrightarrow{AP_0}|+|\overrightarrow{BP_0}|)$

$=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{11}$　（求める最小値）

（ただし，P_0 は A′B と α との交点である.）

らしんばん

➡ (1)で A′(k，$2k$，$k+2$) として，AA′ の中点 M を求めると

$M\left(\dfrac{k}{2},\ k,\ \dfrac{k+4}{2}\right)$

であるから，これが α 上にあることから k を求めてもよい.

➡ (2)では α の式から

$f(x,\ y,\ z)=x+2y+z-5$

とおくと，「α 上の点 (x，y，z) に対して，$f(x,\ y,\ z)=0$」であるが，2点 A，B については

A の座標を代入して，$f(0,\ 0,\ 2)=-3<0$ ←―― **$f(x,\ y,\ z)$ の負領域!!**

B の座標を代入して，$f(2,\ 1,\ 0)=-1<0$ ←―― **$f(x,\ y,\ z)$ の負領域!!**

これより，A，B はいずれも $f(x,\ y,\ z)$ の負領域で線分 AB と α とは交わらない，としてもよいが，（平面図形の領域の扱いと同じ）ここではベクトル的に扱いたい.

➡ (3)は対称点の性質を利用して図形的に考えるとよい.

――平面 α を「鏡」と考えよう.

点光源 A を出た光は「あたかも点 A′ から出た光であるかのように」点 P_0 で

反射し、点 B を通過するが，このことはほとんど直観的に認めるところである．

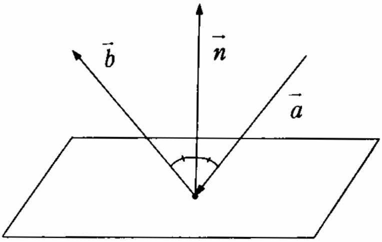
ハナシのついでに，P_0 の座標を求めておこう．(2)で求めた t の値を用いると

$$t=\frac{3}{2} \longrightarrow P_0\left(3,\ \frac{3}{2},\ -1\right)$$

である．

本問では，まず「α に関する A の対称点 A′」が決まり，次に「$\overrightarrow{A'B}$（反射方向のベクトル)」が決まり，このことから「反射点 P_0」が決定するわけである．

しかし**「反射の問題」**で**「方向」**だけを問題にするなら，もっと**「うまい方法」**がある．つまり



入射方向のベクトル――― $\vec{a}$

反射方向のベクトル――― $\vec{b}$

法線方向のベクトル――― $\vec{n}$

が与えられると，「$\vec{n}$」は「$-\vec{a}$」と「$\vec{b}$」とのなす角を 2 等分しているから

$$-\vec{a}=\vec{a}'$$

とおいて，「$\vec{n}$」の方向は

$$\vec{n}=t\left(\frac{\vec{a}'}{|\vec{a}'|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \longleftarrow \text{角の 2 等分 (p. 58)}$$

で求められる．

また「$\vec{b}$」の方向を求めるには

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\vec{e} \longleftarrow \vec{n}\ \text{方向の単位ベクトル!!}$$

とすると

$$\vec{b}=k\{\underbrace{-\vec{a}'+2(\vec{e}\cdot\vec{a}')\vec{e}}_{\vec{n}\text{ に関する }\vec{a}'\text{ の対称ベクトル}}\} \longleftarrow \text{対称ベクトル (p. 70, 71)}$$

を計算すればよい．

いずれにしても 3 つの方向のうちの 2 つがわかれば他の 1 つの方向が簡単にわかる便利のよい方法である．

本問の $\overrightarrow{P_0A}$ $(=-\vec{a})$，$\overrightarrow{P_0B}$ $(=\vec{b})$，$\vec{n}$ で確認しておくとよい．

発展問題 2―球面のベクトル表示

空間に 3 定点 O(0, 0, 0)，A(0, 0, 1)，B(1, 1, 1) がある．

内積 $(\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{BP})=0$ をみたす動点 $P(x,\ y,\ z)$ について，次の問いに答

えよ．

(1)　動点 P の描く図形を求めよ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の長さの最大値を求めよ．またそのときの点 P の座標を求めよ．

解　説　(1)　$P(x,\ y,\ z)$，$A(0,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ 1,\ 1)$ であるから

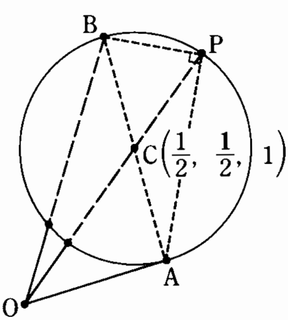
$$\overrightarrow{AP}=(x,\ y,\ z-1),\ \overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-1,\ z-1)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=x(x-1)+y(y-1)+(z-1)^2=0$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

これより，P は点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$ を中心とする，半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の球面を描く．

(2)　①の中心を点 C とするとき $|\overrightarrow{OP}|$ が最大となるのは，直線 OC と①の球面との 2 つの交点のうち，P が O から遠い方の点と一致するときであるから



$$\overrightarrow{OP}=t\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)\quad (t>1)$$

とおくと，

$$x=\frac{t}{2},\ y=\frac{t}{2},\ z=t$$

これらを①に入れて，

$$\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+(t-1)^2=\frac{1}{2}$$

$$(t-1)^2=\frac{1}{3}\qquad \therefore\quad t=1+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\quad (\because\quad t>1)$$

このとき

$$|\overrightarrow{OP}|=t\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

これより，

最大値：　$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$P\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$

らしんばん

「最大値」は，球面の半径を r として，

$$OC+r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

（「**最小値**」は $|\mathbf{OC}-\mathbf{r}|$）

として簡単に求められる．

問題はそのときの点Pの座標をどのようにして求めればよいかである．

「$\overrightarrow{OC}$ の方向の単位ベクトル」は

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

であるから，これを用いると

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OC}}+\overrightarrow{\mathbf{CP}}=\overrightarrow{\mathbf{OC}}+r\vec{e}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

とすればよい．

同様に「**最小となる点**」を求めるには「$\overrightarrow{\mathbf{OC}}-r\vec{e}$」を計算することになる．

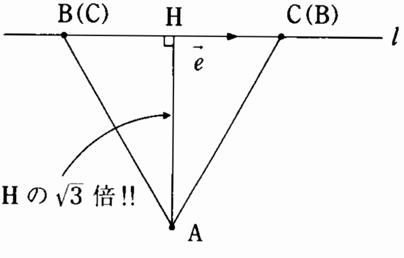
「単位ベクトル」のこの用い方の例を1つあげておく．

たとえば

> 直線
>
> l：　$x=y=z$
>
> と定点A(3, 0, 0)がある．このとき l 上に2点B，Cをとり，△ABCが正三角形になるようにしたい，B，Cの座標を求めよ．

まず，点Aから l へ垂線AHを下し，

その足Hの座標と $|\overrightarrow{AH}|$ を求める．



$\mathrm{H}(t,\ t,\ t)$

とすると

$\overrightarrow{AH}=(t-3,\ t,\ t)$

これが l の方向ベクトル

$\vec{l}=(1,\ 1,\ 1)$

と垂直であるから

$\vec{l}\cdot\overrightarrow{AH}=1\cdot(t-3)+1\cdot t+1\cdot t=0 \qquad \therefore\ t=1$

$\therefore\ \mathrm{H}(1,\ 1,\ 1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AH}=(-2,\ 1,\ 1)$

$\therefore\ |\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

このことから

$\mathbf{BH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{AH}$ ←―― **△ABCは正三角形!!**

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2}$　（$=$CH）

一方 $\vec{l}$ 方向の単位ベクトルは

$$\vec{e}=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

であるから，B，C の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\pm\sqrt{2}\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\pm\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{3\pm\sqrt{6}}{3},\ \frac{3\pm\sqrt{6}}{3},\ \frac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right)\longleftarrow$$ **一方が B，他方が C**

発展問題 3―「平面束」の応用

平面 α と直線 l が

$$\alpha:\quad 4x-y-z=6,\qquad l:\quad 1-x=y+1=\frac{z-2}{4}$$

で与えられている．

(1)　平面 α と直線 l の交点の座標を求めよ．

(2)　直線 l を含み，平面 α とのなす角が 45° となる平面 β の方程式を求めよ．

解　説　(1)　l 上の点をパラメーター表示する．

$$1-x=y+1=\frac{z-2}{4}=t$$

とおくと，l 上の点 P は

$$\mathrm{P}(1-t,\ t-1,\ 4t+2)$$

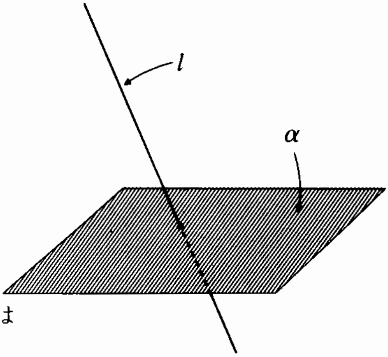
で表されるから，これを α の式に入れて

$$4(1-t)-(t-1)-(4t+2)=6$$

$$\therefore\quad t=-\frac{1}{3}$$

これを P に代入して求める交点の座標は

$$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$



(2)　直線 l は，2 平面

$$1-x=y+1,\ 1-x=\frac{z-2}{4}$$

すなわち

$$x+y=0,\ 4x+z-6=0$$

の交線であるから，l を含む平面 β の方程式は

$k(x+y)+(4x+z-6)=0$ ⟵ **平面束**（p. 95，96） …①

⟵ **「$x+y=0$」は平面 α と 45° となることはない.**

$\therefore \quad (k+4)x+ky+z-6=0$

ここで，平面 α，β の「法線ベクトル」を $\overrightarrow{n_\alpha}$，$\overrightarrow{n_\beta}$ とおくと

$\overrightarrow{n_\alpha}=(4,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{n_\beta}=(k+4,\ k,\ 1)$

で，「2平面のなす角が 45°」であるから，$\overrightarrow{n_\alpha}$ と $\overrightarrow{n_\beta}$ とのなす角を θ とすると

$$\cos 45^\circ=|\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|}$$ ⟵ **2平面のなす角**（p. 97）

$$=\frac{|4\cdot(k+4)+(-1)\cdot k+(-1)\cdot 1|}{\sqrt{(k+4)^2+k^2+1^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}}\quad\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\therefore \quad \sqrt{2k^2+8k+17}=|k+5|$

両辺を2乗して整理すると

$k^2-2k-8=0 \qquad \therefore \quad (k-4)(k+2)=0$

$\therefore \quad k=4,\ -2$

ゆえに，求める平面の方程式は

$\boldsymbol{8x+4y+z-6=0,\ 2x-2y+z-6=0}$

らしんばん

➡ (1)は「平面と直線」を求める問題であるが

(i) **直線 l 上**
(ii) **平面 α 上**
〉同時にみたす

ことを了解していればさして問題はない———「直線と球面との交点（p. 105，106，107）」を参照———考え方は同様である.

➡ 「**平面束**」については p. 95，96でくわしく説明したが，本文①は本来

$\lambda(x+y)+\mu(4x+z-6)=0 \quad (\lambda^2+\mu^2\neq 0)$

と書かなければならず，①の形では平面

$x+y=0$ ……………………………………………………（＊）

がすでに除かれてしまっていることには注意しなければならない．したがって「（＊）の形の平面が，平面 α と 45° の角をなすことがない」ことを何らかの形で示しておかなければならない.

$\overrightarrow{n_\alpha}=(4,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{n_\beta}'=(1,\ 1,\ 0)$

のなす角を θ' とし，（＊）が α と 45° の角をなすときがあるとすると

$$\cos 45^\circ=|\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}'|}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}'|}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|4\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 0|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{18}=3 \longleftarrow \text{これはあり得ない!!}$$

ということになる．

「平面束」に関する例題を1つあげておく．

たとえば

直線 g と球面 S が次の式に与えられている．

$$g:\quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

$$S:\quad (x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=2$$

このとき，g を含み，かつSに接する平面の方程式を求めよ．

「**接点に注目しないタイプ**」の「**接平面の問題**」である．

g は2平面

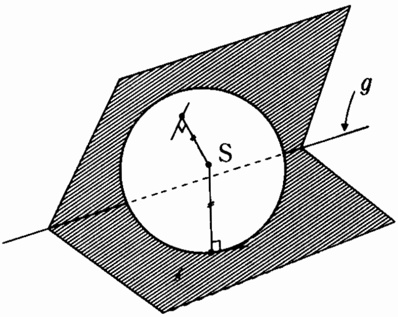
$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1} \longrightarrow x+3y-2=0$$

$$\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1} \longrightarrow y+z+1=0$$

ゆえに，g を含む平面の方程式は

$$k(x+3y-2)+(y+z+1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

$$\therefore\quad kx+(3k+1)y+z+1-2k=0 \quad \cdots\cdots\cdots(***)$$



で，一方，球面 S は

中心：　S(1，−1，−2)

半径：　$r=\sqrt{2}$

であるから（***）が S に接するための条件は中心Sから（***）までの距離が「$r=\sqrt{2}$」に等しいことである．

$$\therefore\quad \frac{|k\cdot 1+(3k+1)\cdot(-1)+(-2)+1-2k|}{\sqrt{k^2+(3k+1)^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{|-4k-2|}{\sqrt{10k^2+6k+2}}=\sqrt{2}$$

分母を払って2乗して整理すると

$$(2k+1)^2=5k^2+3k+1$$

$$\therefore\quad k^2-k=k(k-1)=0 \qquad \therefore\quad k=0,\ 1$$

ゆえに，これらを（***）に入れて

$$\boldsymbol{y+z+1=0,\ x+4y+z-1=0}$$

———ともあれ平面の方程式が「予定通り(？)」に2つ求まったので，これで「ヨシ」としよう．

実は（**）を示したとき，この平面束の中には

$$x+3y-2=0$$

は，すでに除かれており

$$\frac{|1+3(-1)-2|}{\sqrt{1^2+3^2+0^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}\neq\sqrt{2}$$

からこれが球面 S に接することはない――これは何らかの形で説明を求められることがらである．

また（＊＊）を

$$(x+3y-2)+k(y+z+1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（＊＊＊＊）$$

とおくと

$$x+(3+k)y+kz-2+k=0$$

$$\therefore\quad \frac{|1+(3+k)\cdot(-1)+k\cdot(-2)-2+k|}{\sqrt{1^2+(3+k)^2+k^2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad |-4-2k|=2\sqrt{k^2+3k+5}$$

2乗して整理すると

$$k=1$$

この k の値を代入すると

$$x+4y+z-1=0$$

が得られるが，2つ求まるはずの平面が1つしか求まらない――もう1つの平面はどこへいったか．それは（＊＊＊＊）ですでに除かれてしまっている「$y+z+1=0$」のことであることはもう説明するまでもない．

このように（＊＊）あるいは（＊＊＊）の形で平面を表したときは，**k がどんな実数値をとっても，表しきれない（すでに除かれてしまっている）平面がある**ことに注意しなければならない，

また，本問のような場合「直線 g と球面 S が共有点をもたない」ことは最初に注目しなければならないところであり，それは p. 105の例にならって説明することもできるが，実は，共有点をもつような場合には「実数 k の値が求まらない（$D<0$）」ことになる．つまり**この k が実数として求まった以上は必ずそのような平面が存在する**わけで，この辺がこのような場合の「方程式」のおもしろいところでもある．

発展問題4―四面体の体積を2等分する

座標空間の原点をOとし，3点 A(1, 0, 0)，B(3, −1, 0)，C(3, −1, $\sqrt{15}$) をとり，A, B, C を通る平面を α とする．

(1)　四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(2)　平面 α に平行で，四面体 OABC の体積を2等分する平面 β の方程式を求めよ．

解　説　(1)　$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を求めると

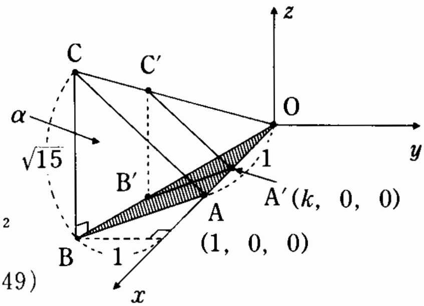
$\overrightarrow{AB}=(2,\ -1,\ 0)$

$\overrightarrow{AC}=(2,\ -1,\ \sqrt{15})$

であるから，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

⟵　三角形の面積（p. 49）



$$=\frac{1}{2}\sqrt{(2^2+(-1)^2+0^2)(2^2+(-1)^2+(\sqrt{15})^2)-(2^2+(-1)^2+0\cdot\sqrt{15})^2}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

次に「高さ（0 から α への距離）」を求めたい．

平面 α の法線ベクトルを

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$

とすると，これは $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ に垂直であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=2\cdot a+(-1)\cdot b+0\cdot c=0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=2\cdot a+(-1)\cdot b+\sqrt{15}\cdot c=0$

$$\therefore\quad \begin{cases} 2a-b=0 \\ 2a-b+\sqrt{15}c=0 \end{cases} \qquad \therefore\quad a:b:c=1:2:0$$

ゆえに，α の方程式は

$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-0)+0\cdot(z-0)=0$

$\therefore\quad x+2y-1=0 \qquad \therefore\quad x+2y=1$

したがって「高さ」は

$$h=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \longleftarrow \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ （p. 91, 92）

ゆえに，四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

(2)「平面 α に平行」で，「四面体 OABC の体積を 2 等分」する平面の方程式を

$x+2y=k$

とおき，これと OA, OB, OC との交点を A′, B′, C′ とすると

四面体 OABC ∽ 四面体 OA′B′C′

で，A′(k, 0, 0) であるから，「OA′$=k$」となる．

ここで「OA$=1$」に注目すると，**相似比は「$1:k$」**であることがわかり，したがって，**体積比は「$1^3:k^3$」**となる．

$$\therefore\quad k^3=\frac{1}{2}\qquad\qquad \therefore\quad k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

ゆえに，求める平面 β の方程式は

$$\boldsymbol{x+2y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

らしんばん

➡ 「座標の関係」をよくにらむと「**BC⊥△OAB**」が見えてくる．

(1)の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{BC}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)\sqrt{15}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

と簡単に求められる———気がつかないときは本文に述べた方法で「マジメ(？)に」やる．

➡ (2)は(1)の結果を用いないで「カタ」がついた———

$$\textbf{相似比が「}k\textbf{ 倍」}\longrightarrow\begin{cases}\textbf{面積は「}k^2\textbf{ 倍」}\\ \textbf{体積は「}k^3\textbf{ 倍」}\end{cases}$$

である．

「三角すい(錐)」で説明すると，底面の三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta \longleftarrow \text{三角形の面積公式 (p. 48)}$$

また，体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh \longleftarrow$$ キチンとした説明は『諸橋の基礎解析講義』の「積分」を参照!!

で，「k 倍の相似」では「a, b が k 倍」であるから「S は k^2 倍」，さらに「h が k 倍」で「k^3 倍」と考えればよい———他の図形の場合も同様である．

➡ **「四面体の体積を 2 等分」するもう 1 つのタイプの問題をあげておく．**

たとえば

空間の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, -1, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 0, 2) を頂点とする四面体がある．2 点 O，A を通り，この四面体の体積を 2 等分する平面 π の方程式を求めよ．

平面 π と辺 BC との交点を P とすると，**△OAB** は**「四面体 OABC」**と「四

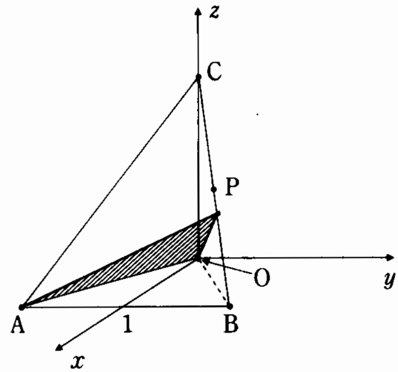
面体 OABP」との共通の底面であるから，条件をみたす平面は点 P が BC の中点 M と一致するときの「平面 OAM」のことである――高さが $\frac{1}{2}$ 倍!!

$$M\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

で，求める平面の「法線ベクトル」を

$$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$$

とすると，これは $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OM}$ に垂直であるから



$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}&=a-b=0\\ \overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}&=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c=0\end{aligned}\right\}\qquad\therefore\quad a:b:c=1:1:(-1)$$

ゆえに，求める平面 π の方程式は

$$x+y-z=0$$

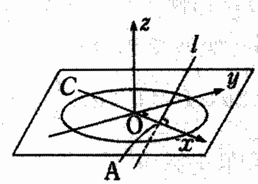
である．

発展問題 5―2つの図形上の2点間の距離の最小

平面上に点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．

また，この平面上の O と異なる点 A を通って，直線 OA と垂直な空間の直線 l があり，平面とのなす角が 45° である．

このとき，円 C 上の点と直線 l 上の点の間の最短距離を，2 点 O，A 間の距離 a で表せ．



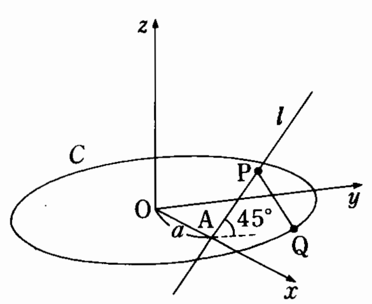
解　説　l 上の点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad(a>0)$$

から，P$(a,\ t,\ t)$ とおくことができて，さらに円 C 上の点を

$$Q(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$

とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}\cos\theta-a\\ \sin\theta-t\\ -t\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(\cos\theta-a)^2+(\sin\theta-t)^2+(-t)^2$$
$$=2t^2-2t\sin\theta-2a\cos\theta+a^2+1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

これを $f(t)$ とおいて，t の 2 次関数とみると

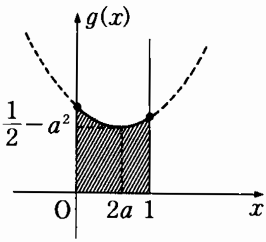
$$f(t)=2\left(t-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2-\frac{1}{2}\sin^2\theta-2a\cos\theta+a^2+1$$

$$\geqq-\frac{1}{2}\sin^2\theta-2a\cos\theta+a^2+1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

$\left(\text{等号は } t=\frac{1}{2}\sin\theta \text{ のとき成立する}\right)$

さらに右辺の最小値を求めるには「$\cos\theta=x$」とおいて，右辺の式を $g(x)$ とすると，

$$g(x)=-\frac{1}{2}(1-x^2)-2ax$$
$$+a^2+1 \quad (0\leqq x\leqq 1)$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2ax+a^2+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(x-2a)^2+\frac{1}{2}-a^2$$



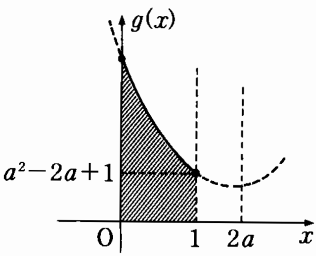
図形の対称性から，「$0\leqq x\leqq 1$」の範囲で最小値 m を求める．

(i) 「$\mathbf{0<2a\leqq 1 \rightleftarrows 0<a\leqq\frac{1}{2}}$」のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ の最小値 m^2 は

$$g(2a)=\frac{1}{2}-a^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m=\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}}$$



(ii) 「$\mathbf{2a\geqq 1 \rightleftarrows a\geqq\frac{1}{2}}$」のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ の最小値 m^2 は

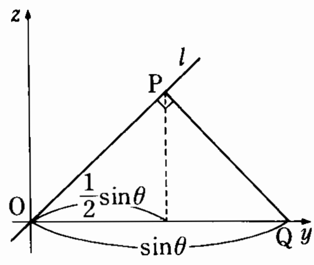
$$g(1)=\frac{1}{2}-2a+a^2+\frac{1}{2}=a^2-2a+1=(a-1)^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m=|a-1|}$$

らしんばん

円周上の点を Q($\cos\theta$, $\sin\theta$) とパラメーターで表しておくとわかりよい.

①は t と θ の関数であるが，まず $\boldsymbol{\theta}$ を固定し，$\boldsymbol{t}$ を変化させる（**P** を $\boldsymbol{l}$ 上で動かす）ときの最小値②が求まり，さらに $\boldsymbol{\theta}$ を変化させてその②の最小値を求めるということになる.



「$t=\frac{1}{2}\sin\theta$」で①が最小になるということは，Q が P を通り l に垂直な平面上にあるということで，横から（x 軸方向から）見た図をかいてみれば，当然のことである.

さらに θ を変化させる（上に述べた平面が l に垂直のまま動く）とき，点 A が O に近いときと遠いときとではハナシがちがう．そのことを計算でやると上のようになるわけである.

発展問題 6—空間の円

空間における曲線 C が，媒介変数 t ($0\leqq t<2\pi$) を用いて

$$\left.\begin{aligned} x&=-\cos t-2\sin t\\ y&=2\cos t+\sin t\\ z&=-2\cos t+2\sin t \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられているとき，次の問いに答えよ.

(1)　曲線 C は原点を中心とする円であることを示せ.

(2)　2 点 (2, 2, 1), (1, 3, 2) を通る平面で，円 C とただ 1 つの点を共有するものを求めよ．**(やや難)**

解　説　(1)　①を次のように表すと見通しがよい.

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\cos t\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -2 \end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 2 \end{pmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\vec{x},\quad \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -2 \end{pmatrix}=\vec{a},\quad \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}=\vec{b}$$

と表すと，②は

$$\vec{x}=\cos t\cdot\vec{a}+\sin t\cdot\vec{b} \quad \cdots\cdots ②'$$

で，曲線 C 上の点 $P(\vec{x})$ は

(i) **原点 O を通り，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とで作られる平面 π 上にある.**

(ii) **$|\overrightarrow{OP}|$ が一定値になることを確認する.**

$$|\overrightarrow{OP}|^2=|\vec{x}|^2$$
$$=|\cos t\cdot\vec{a}+\sin t\cdot\vec{b}|^2$$
$$=\cos^2 t\cdot|\vec{a}|^2+2\sin t\cdot\cos t\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})+\sin^2 t\cdot|\vec{b}|^2 \quad \cdots\cdots ③$$

であるが，$|\vec{a}|^2$，$|\vec{b}|^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算しておくと

$$|\vec{a}|^2=(-1)^2+2^2+(-2)^2=9 \qquad \therefore\ |\vec{a}|=3$$
$$|\vec{b}|^2=(-2)^2+1^2+2^2=9 \qquad \therefore\ |\vec{b}|=3$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot(-2)+2\cdot1+(-2)\cdot2=0$$

これらを③に代入すると

$$|\overrightarrow{OP}|^2=9\cos^2 t+2\sin t\cdot\cos t\cdot0+9\sin^2 t$$
$$=9(\cos^2 t+\sin^2 t)=9$$
$$\therefore\ |\overrightarrow{OP}|=3$$

(i)(ii)から，**曲線 C は「原点を中心とする」，「半径 3」の円である.**

(2) 原点を通る平面は円 C とつねに 2 点で交わるから，求める平面は原点を通らない―― π を次のように表す.

$$ax+by+cz=1$$

とおくことができる.

これが点 (2, 2, 1) を通るから代入すると

$$2a+2b+c=1 \quad \cdots\cdots ④$$

また点 (1, 3, 2) を通るから同様にして

$$a+3b+2c=1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤を b，c について解くと

$$b=1-3a,\ c=4a-1$$

であるから，平面は a のみで表される．すなわち

$$ax+(1-3a)y+(4a-1)z=1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

これが円 C と交わるのであるから，点 (x, y, z) が C 上にあるための条件①を⑥に代入すると

$$a(-\cos t-2\sin t)+(1-3a)(2\cos t+\sin t)+(4a-1)(-2\cos t+2\sin t)=1$$

整理すると

$(4-15a)\cos t+(3a-1)\sin t=1$ ……………………………………⑦

これは t についての「三角方程式」で，「この方程式の解の 1 つを①に代入することにより，円 C と平面⑥との交点が 1 つ決定する」――本問については⑦が「$0 \leqq t < 2\pi$」でただ 1 つの解をもつ条件を求めればよい.

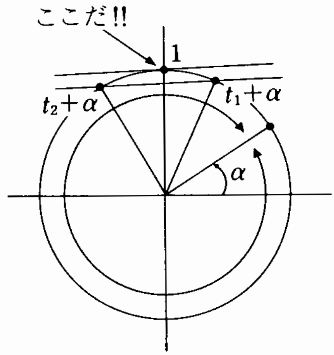
⑦を t について「合成」すると

$$\sqrt{(4-15a)^2+(3a-1)^2}\sin(t+\alpha)=1$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{ただし}\\ \sin\alpha=\dfrac{4-15a}{\sqrt{\cdots\cdots}},\ \cos\alpha=\dfrac{3a-1}{\sqrt{\cdots\cdots}}\end{array}\right)$$

$$\therefore\ \sin(t+\alpha)=\frac{1}{\sqrt{(4-15a)^2+(3a-1)^2}}$$

$$(\alpha \leqq t+\alpha < 2\pi+\alpha)$$



ゆえに「t がただ 1 つ決まる（$t+\alpha$ がただ 1 つ決まる）ための条件」は

$$\frac{1}{\sqrt{(4-15a)^2+(3a-1)^2}}=1$$

$$\therefore\ (4-15a)^2+(3a-1)^2=234a^2-126a+17=1$$

$$\therefore\ 234a^2-126a+16=0$$

$$\therefore\ 117a^2-63a+8=(3a-1)(39a-8)=0$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ \frac{8}{39}$$

これらの値を⑥に入れて整理すると，2 つの平面の方程式

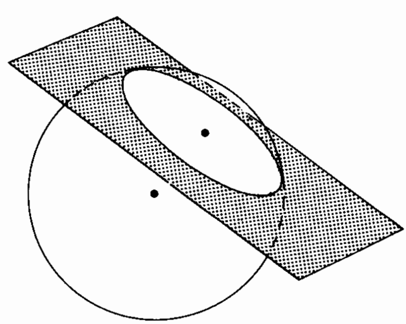
$$\boldsymbol{x+z=3,\ 8x+15y-7z=39}$$

が得られる.

らしんばん

(1)のポイントは「空間の円」をどうとらえるか，ということ. (1)では C 上の点 P が

$$\begin{cases}\text{(i)}\ \ \text{平面}\ \pi\ \text{上}\\ \text{(ii)}\ \ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=3\ \ (\text{一定})\end{cases}$$



としてとらえたが，この(ii)は「原点を中心とする半径 3 の球面上」と言いかえてもよい.

平面 π の方程式は，「法線ベクトル」を

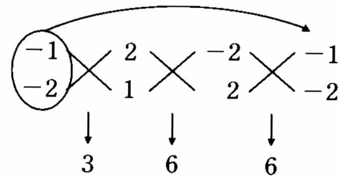
$$\vec{n}=(l,\ m,\ n)$$

にとると，これは $\vec{a}$，$\vec{b}$ に垂直であるから

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{n}=-l+2m-2n=0\\ \vec{b}\cdot\vec{n}=-2l+m+2n=0\end{array}\right\}$$

$$\therefore\quad l:m:n=6:6:3$$
$$=2:2:1$$
$$\therefore\quad \pi:\quad 2x+2y+z=0$$

である．



(p. 90)

そこで「空間の円」を表す方法としては

$$\begin{cases}\mathbf{2x+2y+z=0} & \longleftarrow\ \text{平面上}\\ \mathbf{x^2+y^2+z^2=9} & \longleftarrow\ \text{球面上}\end{cases}$$

のように「2つの方程式（同時にみたすということ!!）を示して表す」か，あるいは本文の②′のように「ベクトルを用いて表す」ことになる．

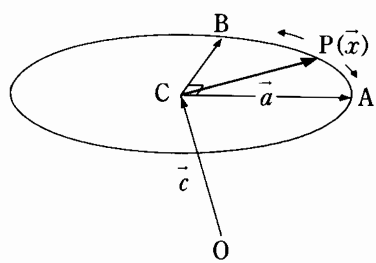
一般に原点以外の点 $C(\vec{c})$ が中心であるときは

$$\vec{x}=\vec{c}+\cos t\cdot\vec{a}+\sin t\cdot\vec{b}$$

のように表される．ただしこのとき

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=r\quad（半径）$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad(\vec{a}\perp\vec{b})$$

であることには注意しなければならない．



このことは p. 61，62にくわしく述べた．

➡ (2)で平面の方程式をいきなり

$$ax+by+cz=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

と書いたが，一般には平面の方程式は

$$ax+by+cz=-d$$

である．

これが原点を通らないことがわかっていれば「$d\neq0$」であるから，両辺を「$-d$」で割ることができる．すなわち

$$\frac{a}{-d}x+\frac{b}{-d}y+\frac{c}{-d}z=1$$

となるが，ここで，「$\frac{a}{-d}$，$\frac{b}{-d}$，$\frac{c}{-d}$」をそれぞれ「a，b，c」とおき直したものが（＊）である――― **「文字をなるべく少なく使う知恵」** として知っておくとよい．

➡ (2)の⑥に注目しよう．

⑥：　$ax+(1-3a)y+(4a-1)z=1$

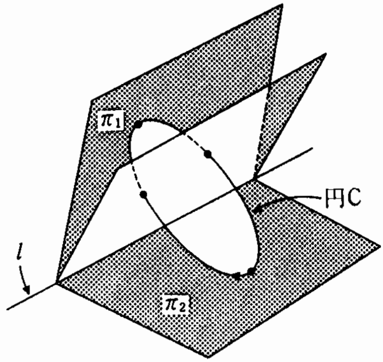
これを変形すると

$$a(x-3y+4z)+(y-z-1)=0$$

となり，2つの平面

$$x-3y+4z=0,\ y-z-1=0$$

の交線 l を通る「平面束（p. 95, 96）」である．したがって⑥で a の値をいろいろとかえていくとき，円 C とただ1つの共有点をもつ場合が2つあることは右の図からも簡単に了解される．



発展問題 7─極投影

空間内の点の集合

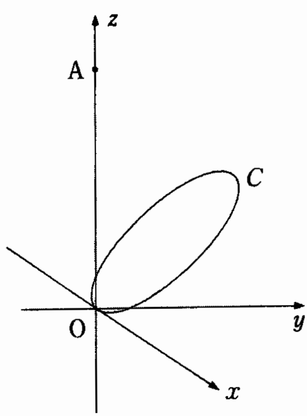
$$\{(x,\ y,\ z)\mid y\geqq 0,\ z\geqq 0\}$$

に含まれ，原点 O において x 軸に接し，xy 平面と 45° の傾きをなす半径1の円板 C がある．

座標が $(0,\ 0,\ 2\sqrt{2})$ の位置にある点光源 A により，xy 平面に投ぜられた円板 C の影を S とする．

(1)　S の輪郭を表す xy 平面上の曲線の方程式を求めよ．

(2)　円板 C と影 S の間にはさまれ，光の届かない部分のつくる立体の体積を求めよ．（やや難）



解　説　(1)　円板 C の中心の座標は

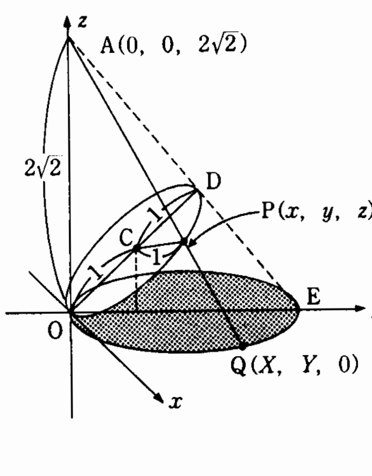
$$\mathrm{C}\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

である．このとき円板 C の周上の1点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とし，点光源 A によって xy 平面上に投ずる点 P の像を $\mathrm{Q}(X,\ Y,\ 0)$ とする．

(i)　**P についての条件：**

円板上　$\longrightarrow$　$z=y$　……………①

$\overline{\mathrm{CP}}=1$　$\longrightarrow$　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=1$



$$\therefore\quad x^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1 \quad\cdots\cdots\cdots\textcircled{2}$$

(ii) **P$(x,\ y,\ z)$ と Q$(X,\ Y,\ 0)$ の関係から X と Y の関係式を求める.**

3 点 A, P, Q は 1 直線上にあるから, これをベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\quad(\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AQ}})$$

成分では

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X\\Y\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}\qquad\therefore\ \begin{cases}x=tX & \cdots\cdots\textcircled{3}\\ y=tY & \cdots\cdots\textcircled{4}\\ z=2\sqrt{2}(1-t) & \cdots\cdots\textcircled{5}\end{cases}$$

これらを①, ②に代入する.

①: $2\sqrt{2}(1-t)=tY$ (t と Y との関係式) $\cdots\cdots\textcircled{6}$

②は, はじめに①を用いて簡単にしておいてから③, ④を代入する.

$$\textcircled{2}:\quad x^2+2\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad (tX)^2+2\left(tY-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad t^2X^2+2t^2Y^2-2\sqrt{2}\,tY=0$$

$$\therefore\quad tX^2+2tY^2-2\sqrt{2}\,Y=0\quad(t\neq 0)\quad\cdots\cdots\textcircled{7}$$

⑥, ⑦から t を消去すれば, 求める X と Y の関係式が得られる.

$$\textcircled{6}:\quad t(Y+2\sqrt{2})=2\sqrt{2}\qquad\therefore\quad t=\frac{2\sqrt{2}}{Y+2\sqrt{2}}\quad(Y\neq-2\sqrt{2})$$

これを⑦に代入すると

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{Y+2\sqrt{2}}\right)X^2+2\left(\frac{2\sqrt{2}}{Y+2\sqrt{2}}\right)Y^2-2\sqrt{2}\,Y=0$$

$$\therefore\quad X^2+Y^2-2\sqrt{2}\,Y=0\qquad\therefore\quad X^2+(Y-\sqrt{2})^2=2$$

ゆえに求める xy 平面上の曲線の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+(y-\sqrt{2})^2=2,\ z=0}\quad(\boldsymbol{xy}\ \textbf{平面上の円})$$

(2) $\angle\mathrm{AOE}=90^\circ$, $\angle\mathrm{ADO}=90^\circ$, $\mathrm{AO}=2\sqrt{2}$, $\mathrm{AD}=2$

に注意して,「円すい(錐)の体積を求める公式」にしたがって計算すると

$$V=\frac{1}{3}\{\pi\cdot(\sqrt{2})^2\}\cdot2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\cdot(\pi\cdot1^2)\cdot2$$

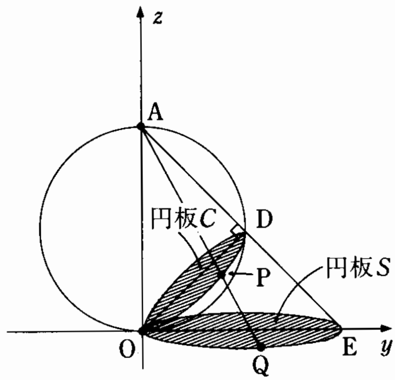
$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\pi}$$

らしんばん

点光源 A による「円板 C」の xy 平面上への投影が「円板 S」になった——これは，実は単なる偶然ではない．

本問の状況を x 軸の正方向からながめてみよう——右図

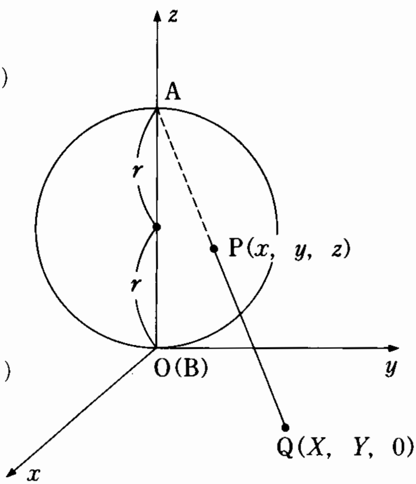


「$\angle$**ADO＝90°**」に注目すると問題の「円板 C」が「OA を直径とする球」を「平面：$z=y$」で切ったときの「切り口の円」であることがわかる．

一般のハナシをしておこう．

球の 1 つの直径を AB とし，球面上の任意の点 P と A とを結ぶ直線が，B における接平面と交わる点を Q とする．

このとき，点 P を点 Q に対応させることを**「極射影（極投影）」**といい，A をその**「極」**という．



いま，球の方程式を

$$x^2+y^2+(z-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

とすると本問と同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

であるから，これを成分で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} X \\ Y \\ -2r \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \left\{\begin{array}{l} x=tX \\ y=tY \\ z=2r(1-t) \end{array}\right\rangle \cdots\cdots\cdots (**)$$

となる．これを（$*$）に代入すると

$$(tX)^2+(tY)^2+\{r(1-2t)\}^2=r^2$$

$$t^2X^2+t^2Y^2+4r^2(t^2-t)=0$$

$t \neq 0$ としてよいから（「$t=0$」のとき，P は A に一致する）

$$tX^2+tY^2+4r^2(t-1)=0 \qquad \therefore \quad t=\frac{4r^2}{X^2+Y^2+4r^2}$$

これを（$**$）に代入すると

$$x=\frac{4r^2X}{X^2+Y^2+4r^2},\quad y=\frac{4r^2Y}{X^2+Y^2+4r^2},\quad z=\frac{2r(X^2+Y^2)}{X^2+Y^2+4r^2} \quad \cdots\cdots\cdots (***)$$

このとき P$(x,\ y,\ z)$ がこの球面を切る平面上にあるなら，x，y，z の関係式

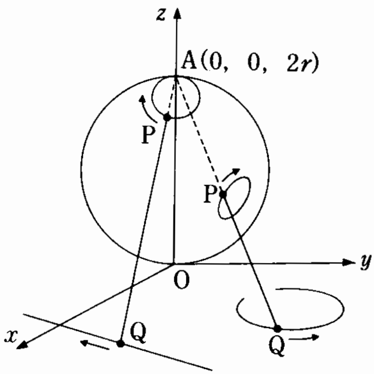
は1次式

$$ax+by+cz+d=0$$

の形であるから，これに（＊＊＊）を代入して整理すると，X^2 の係数と Y^2 の係数が等しくなり，X，Y の関係式は「円の方程式」になることは当然のことである．ただし，この平面が点Aを通るとき，すなわち

$$ax+by+c(z-2r)=0$$

の形のときは，X^2，Y^2 の項が消えて，X と Y の1次式になり，この場合のQは xy 平面上に直線を描くことになる．



発展問題8―「直円すい(錐)」の「平面」による断面

xy 平面との交わりが，$x^2+y^2=2$ で，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ を頂点とする円すい(錐)について

(1)　この円すいの側面上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ がみたす関係式を求めよ．

(2)　平面 π：$z=y$ でこの円すい(錐)を切ったとき，切り口の曲線は放物線であることを証明せよ．**(やや難)**

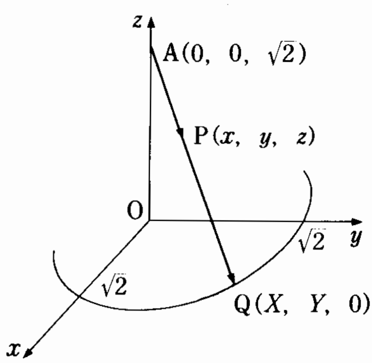
解　説　(1)「円すい(錐)」の底面の円周上の点を $\mathrm{Q}(X,\ Y,\ 0)$ とすると，A，P，Qは同一直線上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\quad(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}X\\Y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x\\y\\z-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

…………………①

$$\therefore\ \begin{cases}X=tx & \cdots\cdots② \\ Y=ty & \cdots\cdots③ \\ 0=t(z-\sqrt{2})+\sqrt{2} & \cdots④\end{cases}$$



X，Y は

$$X^2+Y^2=2$$

であるから，②，③をこれに入れて

$$(tx)^2+(ty)^2=2$$

$$\therefore\quad t^2(x^2+y^2)=2$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=\frac{2}{t^2}$$

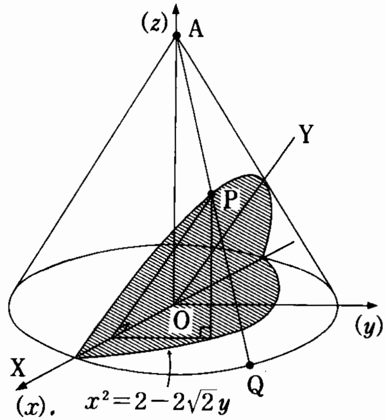
④を用いて

$$\boldsymbol{x^2+y^2=(z-\sqrt{2})^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

(2)　⑤で「$z=y$」から z を消去すれば

$$x^2+y^2=(y-\sqrt{2})^2$$

$$\therefore\quad x^2=2-2\sqrt{2}y\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$



これは，「⑤と平面 $z=y$ との交線」の「xy 平面上への正射影」を表す図形の方程式である．

そこで断面の図形は，あらためて図のように XY 座標軸をきめると

$$\begin{cases} x=X \\ y=Y\cos45°=\dfrac{Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

これを⑥に入れて整理すると

$$X^2=2-2\sqrt{2}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\qquad\therefore\quad Y=\frac{1}{2}(2-X^2)$$

らしんばん

➡ 基本的には「$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AP}$」とおくのがよいが，Q をパラメーター θ を用いて $Q(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta,\ 0)$ と表すと

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}$$

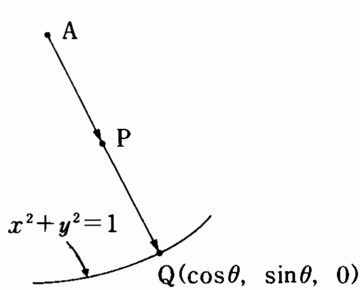
とおいても簡単にいく．

成分で表すと

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}t\cos\theta \\ y=\sqrt{2}t\sin\theta \\ z=\sqrt{2}(1-t) \end{cases}$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=2t^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2t^2$$

$$=2\left(1-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2=(\sqrt{2}-z)^2$$



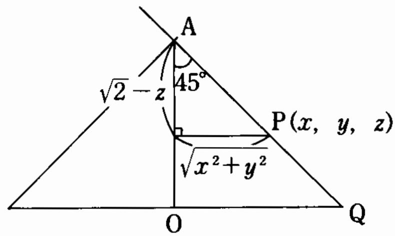
となる．

➡ ⑤で与えられる式は「円すい(錐)の側面の方程式」である．

△OAQ をふくむ平面を用いて，次のように考えてもよい．

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}-z}=\tan 45°=1$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=(\sqrt{2}-z)^2$$



➡ 2つの曲面が交わるとき，それらの方程式で z を消去すると，交線の xy 平面上への正射影の方程式が得られる —— z をパラメーターと考えればよい．

発展問題 9―立方体を平面で切るときの断面

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ で定まる空間の部分を A とし，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq 1$ で定まる立方体を C とする．

t が，$0<t<3$ の範囲で動くとき，平面 $x+y+z=t$ による，A および C の切り口の面積を，それぞれ $T(t)$ および $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $T(t)$ を求めよ．

(2) $S(t)$ の最大値を求めよ．

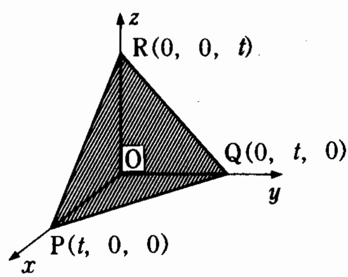
解 説 (1) 平面

$$x+y+z=t$$

と，x 軸，y 軸，z 軸の交点を P，Q，R とすると

P$(t,\ 0,\ 0)$
Q$(0,\ t,\ 0)$
R$(0,\ 0,\ t)$

で，△PQR は 1 辺が $\sqrt{2}t$ の正三角形であるから



$$T(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}t)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \quad \cdots\cdots① $$

(2)「$0<t \leqq 1$」のとき： $S(t)=T(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$ （単調増加）

$2 \leqq t<3$ のとき： 次の図で K は「$x=z=1$」とおいて

$$y=t-2$$

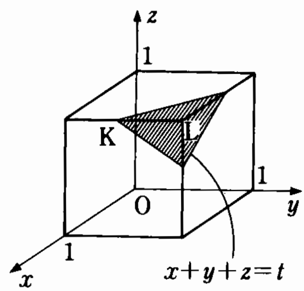
$$\therefore \quad \mathrm{KL}=1-(t-2)$$
$$=3-t$$

ゆえに，(1)と同様にして

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$

（単調減少）

そこで，「$1<t<2$」のときを調べればよい．



このときの切り口は，正三角形 PQR から，3 つの正三角形を除いた右図の斜線部分であるから

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2\times 3$$

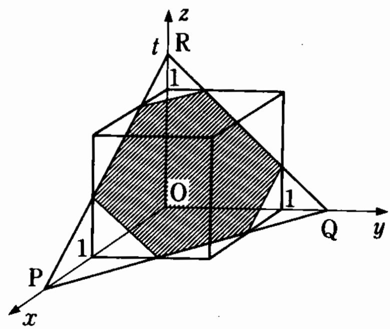
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3)$$

$$=-\sqrt{3}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ゆえに求める最大値は

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である．



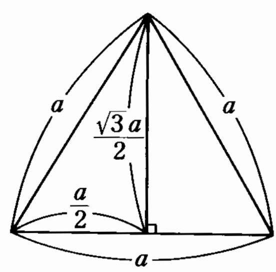
らしんばん

まず「1 辺 a の正三角形の面積」は

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\quad\left(あるいは\ \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

は公式として用いてよいとしよう．



本問のポイントとしては(1)の①で求めた

$$T(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

を「くり返し用いることができる」点にあるわけで，t の変化にしたがって変わる断面をしっかりととらえることである．

平面の「切片(せっぺん)形」について――

x，y，z 軸との交点の座標が，それぞれ

A(a, 0, 0)

B(0, b, 0)

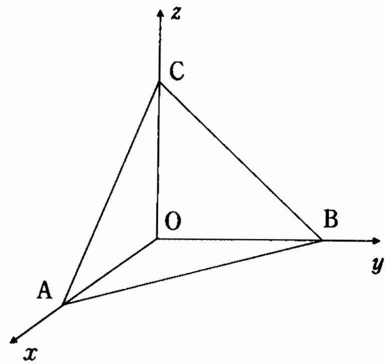
C(0, 0, c)

で与えられる平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(abc \neq 0)$

で表される．これを平面の「切片形」という——（$*$）を見るだけで「軸との交点の座標」がわかり便利であるから覚えておくとよい．本問は（$*$）の a, b, c を t（$\neq 0$）とおいたものと考えればよい．



また，「$a>0$, $b>0$, $c>0$」とすると「四面体 OABC」の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OAB}\cdot \mathrm{OC}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot c=\frac{1}{6}\boldsymbol{abc}$$

である．

また（$*$）は分母を払うと

$$bcx+cay+abz-abc=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

であるから，原点 O とこの平面との距離 h は

$$h=\frac{|-abc|}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}} \longleftarrow \text{「垂線の距離」を与える公式（p. 91, 92）}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

ゆえに，$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

$$\therefore\quad \frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}S\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

であることもわかる．

当然のことではあるが，この式で「$a=b=c=t$（>0）」とおけば本文①で示した

$$T(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

となる．

なお，xy 平面上の直線の方程式の「切片形」は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

であることは説明するまでもない．

ついでに例を1つあげておく.

たとえば

> $a=1$, $b=2$, $c=3$ として，四面体 OABC に内接する球面の方程式を求めよ.

まず平面の方程式は

$$(*):\quad x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$$

$$\therefore\quad (**):\quad \underbrace{6x+3y+2z-6}_{f(x,\ y,\ z)\text{とおく}}=0$$

球面の中心の座標は M$(r,\ r,\ r)$ とおくことができるから「M と $(**)$ との距離」を求めると

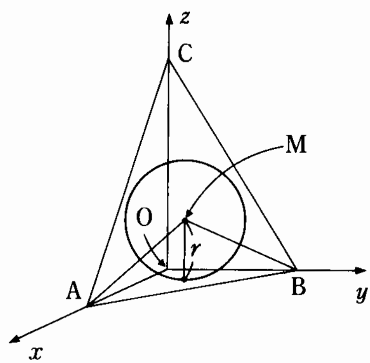
$$\frac{|6r+3r+2r-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{-(11r-6)}{7}=r \longleftarrow \textbf{M は } f(x,\ y,\ z) \textbf{の負領域!!}$$

$$\therefore\quad -(11r-6)=7r$$

$$\therefore\quad 18r=6 \qquad \therefore\quad r=\frac{1}{3}$$

ゆえに，求める球面の方程式は

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$



———もっと簡単に「半径 r」を求める方法もある。**それにはこの四面体 OABC の体積 V が，M を頂点とし，△OAB，△OBC，△OCA，△ABC をそれぞれ底辺とする4つの四面体（高さはすべて r）の体積の和になっていること**を利用する．すなわち

$$V=\frac{1}{3}\cdot r\cdot(\underbrace{\triangle\text{OAB}}_{\frac{1}{2}\cdot1\cdot2}+\underbrace{\triangle\text{OBC}}_{\frac{1}{2}\cdot2\cdot3}+\underbrace{\triangle\text{OCA}}_{\frac{1}{2}\cdot3\cdot1}+\underbrace{\triangle\text{ABC}}_{\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot3^2+3^2\cdot1^2+1^2\cdot2^2}})$$

$$=3r$$

一方，四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$$

であったから

$$3r=1 \qquad \therefore\quad r=\frac{1}{3}$$

となる———この方法は「三角形の内接円の半径」を求めるとき，その三角形の面積を利用する方法を空間へのハナシに応用したものと考えればよい.

すなわち右図で △ABC の面積を S とすると

$$\mathbf{S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB}$$
$$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$
$$= \frac{r}{2}(a+b+c)$$
$$\therefore \quad r = \frac{2S}{a+b+c}$$

である――これは覚えておくとよい.