第 5 章

2 次曲線

「2次曲線」の歴史に少し感動しよう……
……「統一的定義」と「座標変換」は
少しむずかしかったかナ(?)

放物線，だ(楕)円，双曲線—— x, y の2次方程式で表される

xy 平面上で

$$y=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$$

のグラフが **「放物線」** を表すことは，すでに「数 I」で学んでいるが，ここではこの他に，**「だ(楕)円」**，**「双曲線」** とよばれる曲線をとりあげる．

これらの曲線は，「直円すい(錐)」を，頂点を含まない平面で切ったときの切り口にあらわれるので **「円すい(錐)曲線」** とよばれ，古くは「アポロニウス（BC 260～200)」の時代から研究されてきた．

一方，近代（ルネッサンス以後）になると「デカルト（1596～1650)」に代表される，「図形問題」に「代数の考え方」を導入した **「座標幾何」** の立場が確立され，これらの曲線に関する研究もさらに新しい展開をみることになる．このような歴史の流れの中で，「ケプラー（1571～1630)」が太陽のまわりをまわる惑星の軌道が「だ(楕)円」を描いていることを発見し，さらにそれが「ニュートン（1642～1727)」の，「万有引力の法則」から数学的に証明されたことは，ひときわ大きな意味をもつということができる．

この章では，この3つの曲線（「放物線」，「だ(楕)円」，「双曲線」）の **「幾何学的定義」から出発し，「座標幾何」の立場からそれらの方程式を導き，それらの曲線のいろいろな性質を明らかにしていくこと** が主な目的である．

具体的には方程式で次のように表される．

放物線 ——→ $y^2=4px$

だ(楕)円 ——→ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

双曲線 ——→ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

また，それぞれがちがった形で定義される，これらの3つの曲線が **「統一的な立場で定義される」** ことも興味深い．

さらに

$$ax^2+2hxy+by^2+fx+gy+c=0$$

のように，「xy の項」を含むものは，適当な **「座標変換」** によって，基本的には上に述べた3つのいずれかの形で表せることにも注目したい———— **「標準化」** という．

第1節
「放物線」,「だ(楕)円」,「双曲線」

「放物線」,「だ(楕)円」,「双曲線」の「幾何学的定義」を確認し，その定義にしたがって，xy 平面上でそれらの図形を表す方程式を導くことにする．

具体的には

(i)　放物線　———　$y^2=4px$

(ii)　だ(楕)円　———　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(iii)　双曲線　———　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

である———これらはそれぞれ「標準形」といわれている．

なお，ここでは「数Ⅰ」の「図形と方程式」,「方程式，不等式」，あるいは「ベクトル」,「直線，円のパラメーター表示」など，今まで学んだ知識で有効と思われるものはすべて駆使して解説することにする．

1　放物線

「放物線」の「幾何学的定義」から解説していこう．

「放物線」の定義

> 定点Fと，それを通らない定直線 l から等距離にある点の描く図形(軌跡)を「放物線」といい，点Fをその「焦点」，直線 l をその「準線」という．

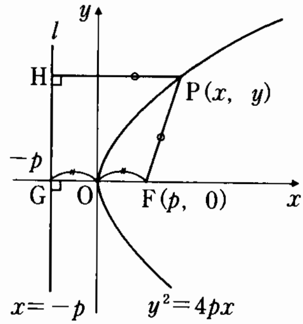
解　説　焦点Fから準線 l に下ろした垂線の足をG，FGの中点を原点Oにとり，GFを x 軸，線分GFの垂直2等分線を y 軸にとって，放物線を表す方程式を求めてみよう．Fの座標を

$F(p,\ 0)\quad (p \neq 0)$

とすれば，l の方程式は

$x=-p$

である.



放物線上の任意の点を $P(x,\ y)$，P から l に下ろした垂線の足を H とすると

$PH=|x+p|,\qquad PF=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

で，「**放物線の定義**」より，「$\boldsymbol{PF=PH}$」であるから

$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$

これが，**F** を「**焦点**」，$\boldsymbol{l}$ を「**準線**」とする**放物線の方程式**である．しかし，この形は $\sqrt{}$ がついたり絶対値記号があったりで，使い易い形ではない．そこで，これをもっと簡単な形に整理しておく.

上の方程式の両辺は負ではないので，平方したものと同値で

$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2\qquad \therefore\quad \boldsymbol{y^2=4px}$

となり，これが

「**焦点**： $\boldsymbol{(p,\ 0)}$，**準線**： $\boldsymbol{x=-p}$」

の放物線の方程式である．この形を特に「放物線の方程式」の「**標準形**」という.

らしんばん

➡ 「数 I 」で学んだ「２次関数」

$y=ax^2+bx+c$

のグラフは，その「対称軸」が「y 軸に平行」な「放物線」であった.

ここで扱う「放物線」の方程式は

$y^2=4px$ （←―― 標準形!!）

で，これは「対称軸」が「x 軸」である―――慣れるまでは多少の異和感があるかもしれないが「基本的には同じもの」と考えてよい―――次の例題で確認する.

例題 1

(1) 次の放物線の焦点と準線を求めよ.

(i) $y^2=4x+6$ (ii) $2y=x^2-2x$

(2) 点 $F(2,\ 3)$ を焦点とし，直線 $x-2y+1=0$ を準線とする放物線

の方程式を求めよ．

解　説　(1)　(i)　$y^2=4\left(x+\frac{3}{2}\right)$ と変形すると，これは

$$y^2=4x \quad (\text{焦点：}\ (1,\ 0),\ \text{準線：}\ x=-1)$$

を「x 軸方向に $-\frac{3}{2}$ だけ平行移動」したものだから，「焦点も準線も同じだけ平行移動」して

$$\textbf{焦点：}\ \left(-\frac{1}{2},\ 0\right),\quad \textbf{準線：}\ x=-\frac{5}{2}$$

(ii)　$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2$ ……………………………………①

と変形すると，これは

$$y=\frac{1}{2}x^2 \quad \text{……………………………………②}$$

を「x 軸方向に 1」，「y 軸方向に $-\frac{1}{2}$」だけ平行移動したものである．

この②を「直線 $x=y$ に関して対称移動」すると

$$x=\frac{1}{2}y^2 \quad \text{すなわち} \quad y^2=2x \quad \text{……………………③}$$

$$\text{焦点：}\ \left(\frac{1}{2},\ 0\right),\quad \text{準線：}\ x=-\frac{1}{2} \quad \text{……………④}$$

が得られる．

そこで，「③→②→①」と逆にたどって，「①の焦点と準線」を求めればよい．そこで④の「焦点」と「準線」を「直線 $x=y$ に関して対称移動」すると

$$\left(0,\ \frac{1}{2}\right),\quad y=-\frac{1}{2}$$

が得られ

これを，「x 軸方向に 1，y 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動」すると

$$\textbf{焦点：}\ (1,\ 0),\quad \textbf{準線：}\ y=-1$$

となる．

(2)　放物線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{FP}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

で，P から準線までの距離は

$$\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}|x-2y+1|$$

これと FP が等しいから，平方して

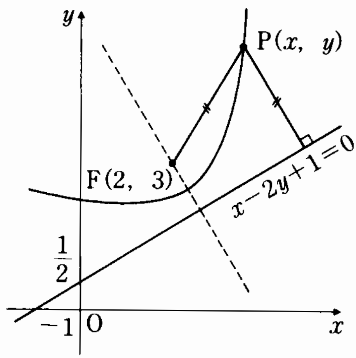
$$5\{(x-2)^2+(y-3)^2\}$$
$$=(x-2y+1)^2$$

これを整理すると

$$\mathbf{4x^2+4xy+y^2-22x-26y+64=0}$$

が求める方程式である．

（「対称軸」が「x 軸」，「y 軸」に対して「ナナメ」になっていることに注目!!）



らしんばん

➡ 「グラフの平行移動」について復習しておく．点 P$(x,\ y)$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動した点を Q$(X,\ Y)$ とすると

$$X=x+a,\quad Y=y+b \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

いま，P が曲線

$$f(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

上にあるとすると，（$*$）より

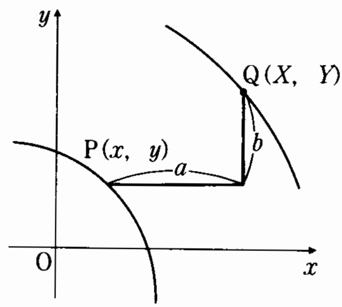
$$x=X-a,\quad y=Y-b$$

だから，これを（$**$）に入れて

$$f(X-a,\ Y-b)=0$$

X，Y を x，y で書きかえておくと

$$f(x-a,\ y-b)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$



したがって，曲線（$**$）を「x 軸，y 軸方向にそれぞれ a，b だけ平行移動」すると，曲線（$***$）になる．

すなわち（$**$）で「x」を「$x-a$」で，「y」を「$y-b$」でおきかえたものが，（$**$）を「ベクトル $(a,\ b)$ だけ平行移動」して得られる曲線の方程式（$***$）である．

➡ **「直線 $y=x$ に関する対称移動」**については，「数 I の逆関数」，あるいは「1 次変換（p. 225）」で学んでいる―――「x」と「y」をいれかえればよい．

➡ 「平行移動」と「直線 $y=x$ に関する対称移動」を用いると

$$y=ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(****)$$

で与えられる放物線の「焦点」，「準線」の公式を，(1)の(ii)と同じようにして求めることができる．

（$****$）を書きかえて

$$y-\frac{b^2-4ac}{-4a}=a\left(x-\frac{b}{-2a}\right)^2$$

$$-\frac{b}{2a}=\alpha,\qquad \frac{b^2-4ac}{-4a}=\beta$$

とおくと

$$y-\beta=a(x-\alpha)^2$$

これは，「$y=ax^2$」を「ベクトル $(\alpha,\ \beta)$ だけ平行移動」したものである．この放物線を「$y=x$」に関して折りかえすと

$$y^2=\frac{1}{a}x=4\left(\frac{1}{4a}\right)x$$

となり

$$焦点：\left(\frac{1}{4a},\ 0\right),\qquad 準線：\ x=-\frac{1}{4a}$$

である．そこで，これを「$y=x$」に関して折りかえして

$$\left(0,\ \frac{1}{4a}\right),\qquad y=-\frac{1}{4a}$$

さらに，「ベクトル $(-\alpha,\ -\beta)$ だけ平行移動」すると

$$焦点：\left(-\alpha,\ \frac{1}{4a}-\beta\right),\qquad 準線：\ y=-\beta-\frac{1}{4a}$$

が得られる．

2　だ(楕)円

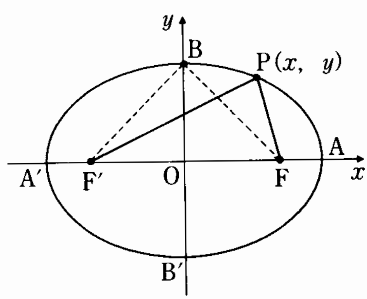
「だ(楕)円」は次のように定義される．

「だ(楕)円」の定義

> **「2定点 F，F′ からの距離の和（線分 FF′ より大）が一定な点」の描く図形（軌跡）を「だ(楕)円」といい，点 F，F′ をその「焦点」という．**

解　説　2点 F，F′ をむすぶ直線を x 軸，線分 FF′ の垂直二等分線を y 軸とし

$$F(c,\ 0),\ F'(-c,\ 0)$$
$$(ただし,\ c>0)$$



とする．また，「だ(楕)円」上の任意の1点を P$(x,\ y)$ とすると，「PF′＋PF」は一定であるから，その一定値を「$2a$」とすると

$$\mathbf{PF'+PF=2a}\quad (0<c<a \longleftarrow \triangle FBF' \text{ ができる条件!!})$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

2乗して整理すると，

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

さらに2乗して整理すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

ここで「$0<c<a$」であるから，「$a^2-c^2=b^2$ $(b>0)$」とおくと

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

逆に②のとき①が成り立つので，②が求める「**だ(楕)円の方程式（この形を標準形という）**」である．

また，「だ(楕)円の方程式」②が与えられるとき

$$a^2-c^2=b^2 \qquad \therefore \quad c^2=a^2-b^2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{c=\sqrt{a^2-b^2}}$$

から，焦点F，F′の座標は

$$(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

であり，x軸，y軸との交点は前ページの図のように

$$\mathrm{A}(a,\ 0), \quad \mathrm{A}'(-a,\ 0), \quad \mathrm{B}(0,\ b), \quad \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

である．この4点を「**だ(楕)円の頂点**」という．さらに，このとき「AA′ $(=2a)$」の方が「BB′ $(=2b)$」より大きく，AA′を「**だ(楕)円の長軸**」，BB′を「**だ(楕)円の短軸**」という．

また，「$b>a>0$」のときも，②の方程式は「だ(楕)円」を表し，F，F′はy軸上にあってF，F′は$(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2})$となり，前ページの図の「だ(楕)円」のように「ヨコ長」でなく「タテ長」になり，AA′が「短軸」，BB′が「長軸」となる．

らしんばん

➡「だ(楕)円」は「円」を「**y軸方向（タテ方向）**」に「**一定比に伸縮**」したものである．

たとえば

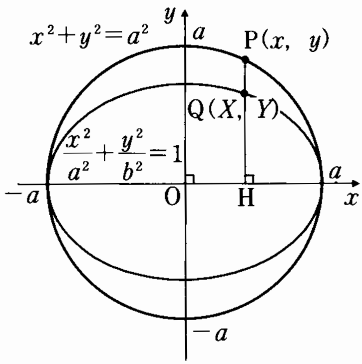
$$x^2+y^2=a^2 \quad (a>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

について考える．

$(*)$上の任意の点$\mathrm{P}(x,\ y)$からx軸に下ろした垂線の足をHとし，半直線HP上に

$$\mathrm{HP}:\mathrm{HQ}=a:b \quad (b>0)$$

となる点Q$(X,\ Y)$をとる（Pがx軸上の点ならQはPに一致するものとする．）．そうすると



$$X=x, \qquad Y=\frac{b}{a}y$$

$$\therefore \quad x=X, \qquad y=\frac{a}{b}Y$$

これを（＊）に入れて，X，Yをx，yで書きかえておくと

$$x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2=a^2$$

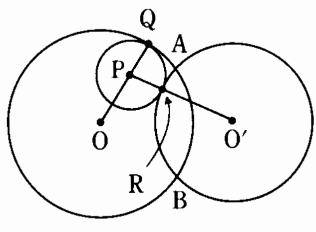
$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

したがって，Pが「円（＊）」上を動くとき，Qは「だ(楕)円（＊＊）」の上を動く．つまり，「だ(楕)円（＊＊）」というのは「円（＊）」をy軸方向に「$\dfrac{b}{a}$倍に引き伸ばす$\left(\dfrac{b}{a}>1\right)$か，縮める$\left(\dfrac{b}{a}<1\right)$か」したものであることがわかる．

このことは，「だ(楕)円の問題」を「円の問題」に書きかえることができる場合があることを意味している．あとで，そういう問題を扱うことにする．

例題 2

図のように半径がr，r'の2円O，O′が2点A，Bで交わるとき，円Oに内接し，円O′に外接する動円の中心Pの軌跡を求めよ．



解説　円Pと円O，O′との接点をそれぞれQ，Rとすると，円Pは円Oに内接し，円O′に外接するゆえ，「円Pの半径をk」とすると

$$\mathrm{OP}=r-k, \qquad \mathrm{O'P}=r'+k$$

$$\therefore \quad \mathrm{OP}+\mathrm{O'P}=r+r' \quad (\text{一定})$$

よって，Pの軌跡は，O，O′を焦点とする「だ(楕)円（ただし，円Oの内部)」である．(「2定点からの距離の和」が一定である．)

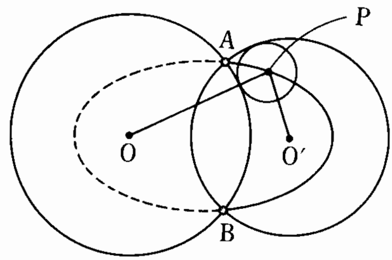
らしんばん

本問の図は，「円 P」が「円 O に内接」し，「円 O′ に外接」しているが，「円 O に外接」し，「円 O′ に内接」するときも点 P の軌跡は 2 点 O，O′ を焦点とする「だ(楕)円（ただし円 O′ の内部)」となる．この場合は

$OP=r+k,\quad O'P=r'-k$

$\therefore\ OP+O'P=r+r'$ （一定）

である．



例題 3

(1) だ(楕)円：$4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$ の焦点と長軸，短軸の長さを求めよ．

(2) 焦点が $F(0,\ 4)$，$F'(0,\ -4)$ で，短軸の長さが 6 であるだ(楕)円の方程式を求めよ．

解 説 (1) まず，与えられた方程式を「標準形」になおすことを考える．

$4(x^2-4x+4)+9(y^2+2y+1)-16-9-11=0$

$4(x-2)^2+9(y+1)^2=36$

$$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$$

これは，「だ(楕)円」

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ （焦点$(\pm\sqrt{5},\ 0)$，長軸 6，短軸 4）

を x 軸，y 軸方向にそれぞれ 2，(-1) だけ平行移動したものであるから，求める「**焦点**」は

$\mathbf{(2+\sqrt{5},\ -1),\ (2-\sqrt{5},\ -1)}$

そして，**長軸，短軸の長さ**は変らず，それぞれ **6，4** である．

(2) 焦点が y 軸上にあることに注意．長軸の長さを $2a$ とすると

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ $(a>3)$

で，この焦点が $(0,\ \pm4)$ だから，$a^2-3^2=4^2$ $\qquad\therefore\ a^2=25$

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1}$$

3　双曲線

「双曲線」は次のように定義される．

「双曲線」の定義

2定点F，F′からの距離の差（>0）が一定な点の描く図形を「双曲線」といい，点F，F′をその「焦点」という．

解　説　「双曲線の方程式」も，「だ(楕)円」のときとほとんど同じ方法で導かれるが，ここでは，計算の仕方を少しかえてやってみよう．

$F(c,\ 0)$，$F'(-c,\ 0)$（$c>0$），双曲線上の任意の1点を

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),\quad |\mathbf{PF}-\mathbf{PF'}|=\mathbf{2}\boldsymbol{a}\quad (\boldsymbol{a}>\mathbf{0})$$

とおくと，定義より

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \quad \cdots\cdots①$$

両辺に，「$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$（$>0$）」をかけて整理すると

$$\pm 2a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$
$$=(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2=4cx$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm\frac{2c}{a}x \quad \cdots\cdots②$$

「①+②」より

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm\left(a+\frac{cx}{a}\right)$$

2乗して整理すると

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

「$0<a<c$」であるから

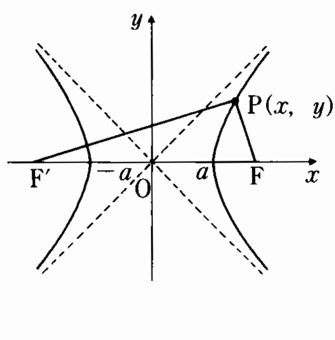
$$c^2-a^2=b^2\quad (b>0)$$

とおくと

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}=\mathbf{1} \quad \cdots\cdots③$$

$$(\boldsymbol{a}>\mathbf{0},\ \boldsymbol{b}>\mathbf{0})$$

で，これが求める**「双曲線の方程式」**である．このとき，「$c=\sqrt{a^2+b^2}$」であるから



双曲線③の焦点は

$$F'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ F(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

となる．

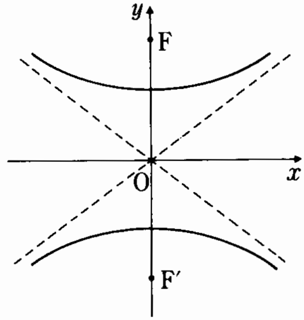
　また

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

も双曲線の方程式で，この場合は FF′ が y 軸になり，右図のような形で，焦点は

$$(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$$

となる．



らしんばん

「双曲線」の「漸近線（ぜんきんせん）」について説明しておく――

双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

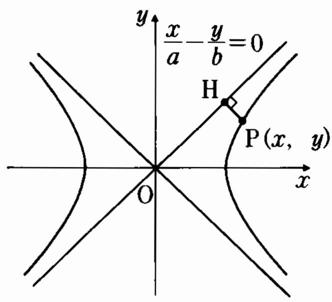
で，「$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$」とおくと，2直線

$$\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0}$$

が得られる．これを「**双曲線**」の「**漸近線**」という．

　この「双曲線」上の任意の1点 P$(x,\ y)$ から，直線「$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$」に下した垂線の足を H とすると

$$\mathrm{PH}=\frac{\left|\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$



　ところで，P は「双曲線」上の点であるから

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$$

$$\therefore\quad \left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|=\frac{1}{\left|\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right|}$$

　これを（$*$）に入れると

$$\mathrm{PH}=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}\left|\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right|}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

　いま，点 **P** が「**第1象限**」か，「**第3象限**」にあって，原点から限りなく遠ざ

かっていくとき，「x と y は同符号」であるから，分母の「$\left|\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right|$」は限りなく大きくなる．

すなわち，（＊＊）で PH は限りなく 0 に近づくので，「双曲線」は限りなく直線「$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$」に接近していくことがわかる．

「第2象限」，「第4象限」において，直線「$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$」が「漸近線」になることも同様にして確認することができる．

➡ 「漸近線」が直交する「双曲線」を**「直角双曲線」**という．たとえば

$$x^2-y^2=\pm1$$

などがある．

例題 4

F，F′ を焦点とする双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　①上に適当な1点 P をとると，$\angle \mathrm{FPF'}=90°$，$\mathrm{PF'}=2\mathrm{PF}$ となるという．$\mathrm{FF'}=10$ として，a，b の値を求めよ．

(2)　①上の任意の1点 Q から漸近線に下ろした垂線の足を H，K とするとき，QH・QK は一定であることを示せ．

解　説　(1)　$\mathrm{PF}=l$ とすれば

$$\mathrm{PF'}=2l,\quad \mathrm{FF'}=10$$

で

$$\angle \mathrm{FPF'}=90°$$

であるから

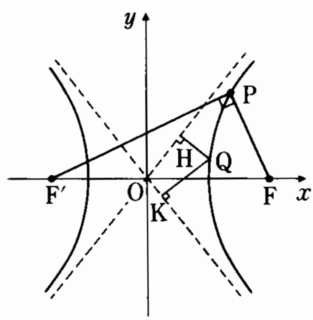
$$l^2+(2l)^2=10^2$$

$$\therefore\quad l=2\sqrt{5}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PF'}-\mathrm{PF}=4\sqrt{5}-2\sqrt{5}$$

$$=2\sqrt{5}=2a$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=\sqrt{5}}$$



また，F′，F の x 座標は $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ であるから

$$2\sqrt{a^2+b^2}=10$$

$$\therefore \quad b^2=5^2-(\sqrt{5})^2=20 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{b=2\sqrt{5}}$$

(2)　$\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ とすると

$$\mathrm{QH}\cdot\mathrm{QK}=\frac{\left|\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}}\cdot\frac{\left|\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}}$$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left|\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}\right|=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \quad (一定)$$

らしんばん

(2)が成り立つことから，**双曲線は「2つの定直線からの距離の積が一定である点の軌跡」**と定義することもできる．

第2節

2次曲線

例題 1 の(2) (p. 276) で求めた「放物線の方程式」は

$$4x^2+4xy+y^2-22x-26y+64=0$$

であった――「xy」の項があることに注目!!

一般に，「放物線」，「だ(楕)円」，「双曲線」の方程式は

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$$

という形の「2次方程式」で表される．その意味でこの3つの曲線をまとめて「2次曲線」といっている．

「前節で全くちがう曲線」のように定義されたこれらの曲線が，実は見かけほどのちがいがなく，よく似た性質をもっていることを確認することがここでの主なテーマであるが，加えてその周辺の諸問題――「接線」，「パラメーター表示」，「標準化」など――についても考えてみることにする．

1 「2次曲線」の統一的定義

前節では「放物線」，「だ(楕)円」，「双曲線」をそれぞれ3様にちがった定義で解説したが，実はそれらは「統一的に」定義される．

「2次曲線」の統一的定義

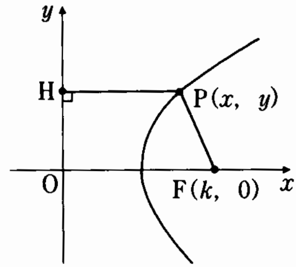
平面上の定点Fと，それを通らない直線 g が与えられていて，この平面上の1点Pから g に下ろした垂線の足をHとするとき

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e\ (\text{一定})$$

である点の軌跡が2次曲線で，e の値で次の3つに分かれる．

$$\begin{cases} e=1 \text{ のとき，放物線} \\ 0<e<1 \text{ のとき，だ(楕)円} \\ e>1 \text{ のとき，双曲線} \end{cases}$$

解　説　g を y 軸，F から g に下した垂線を x 軸にとり，F$(k,\ 0)$ $(k>0)$，P$(x,\ y)$ とおくと，H$(0,\ y)$ で



$$\mathrm{PH}=|x|,$$
$$\mathrm{FP}=\sqrt{(x-k)^2+y^2}$$

であるから

$$\mathbf{PF}=\boldsymbol{e}\cdot\mathbf{PH}$$
$$\therefore\quad \mathrm{PF}^2=e^2\cdot\mathrm{PH}^2$$

から

$$(x-k)^2+y^2=e^2x^2$$
$$\therefore\quad (1-e^2)x^2-2kx+y^2+k^2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

これがPの軌跡を表す方程式であるが，どんな曲線かをもう少しくわしく調べてみよう．

(i)　「$e=1$」のとき

$$①:\quad 2kx=y^2+k^2$$

で放物線

(ii)　「$0<e<1$」のとき

$$①:\quad (1-e^2)\left(x-\frac{k}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{e^2k^2}{1-e^2} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで

$$\frac{k}{1-e^2}=\alpha,\qquad \frac{ek}{1-e^2}=a,\qquad \frac{ek}{\sqrt{1-e^2}}=b$$

とおくと

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \quad \cdots\cdots ③$$

となり，これはだ(楕)円「$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$」を「$x$ 軸方向に α だけ平行移動」したものである．

(iii)　「$e>1$」のとき

②において

$$\frac{k}{1-e^2}=\alpha,\quad \frac{ek}{e^2-1}=a,\quad \frac{ek}{\sqrt{e^2-1}}=b$$

とおくと

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)\quad\cdots\cdots④$$

となり，これは双曲線「$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$」を「$x$軸方向に$\alpha$だけ平行移動」したものである．

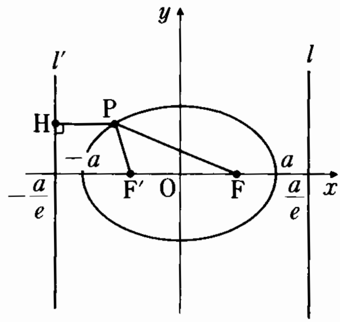
らしんばん

➡「だ(楕)円」,「双曲線」にも「準線」がある．

「だ(楕)円」

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)}$$

については，③の図形を「$\boldsymbol{x}$軸方向に$(-\boldsymbol{\alpha})$平行移動」して考えると



$$\boldsymbol{e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}$$

準線：　$\boldsymbol{x=\pm\frac{a}{e}}$

焦点：　$\boldsymbol{(\pm ae,\ 0)}$

（ただし，$b>a>0$のときは

$$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b},\quad 準線：y=\pm\frac{b}{e},\quad 焦点：(0,\ \pm be)$$

）

となる．

また,「双曲線」

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)}$$

も④の図形を「$\boldsymbol{x}$軸方向に$(-\boldsymbol{\alpha})$平行移動」すると

$$\boldsymbol{e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}},\quad 準線：\boldsymbol{x=\pm\frac{a}{e}},\quad 焦点：\boldsymbol{(\pm ae,\ 0)}$$

（ただし，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$では

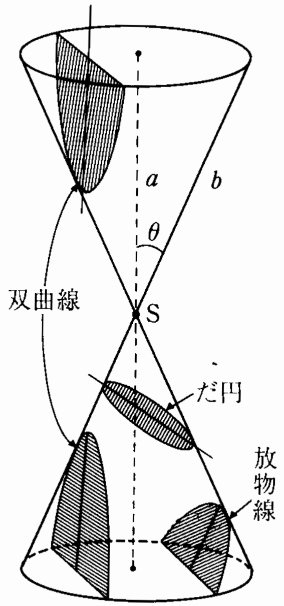
$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b},\quad 準線：y=\pm\frac{b}{e},\quad 焦点：(0,\ \pm be)$$

）

である――「e」を「**離心率**」という．

➡「放物線」,「だ(楕)円」,「双曲線」は「円すい(錐)曲線」ともいわれている．

点Sで交わる2直線a, bがあって，その交角を一定にたもちながらaを軸としてbがそのまわりに回転してできる曲面を**「直円すい(錐)」**といい，Sをその「頂点」，bの任意の位置をその**「母線」**というのだが，2次曲線はこの**「直円すい(錐)」**を**「平面αで切ったときの切り口」**としてあらわれることが古くから知られている．



a, bのなす角θ, aと平面のなす角をφ（いずれも鋭角）とすると

(i) $\boldsymbol{\theta<\varphi}$： **だ(楕)円**

(ii) $\boldsymbol{\theta>\varphi}$： **双曲線**

(iii) $\boldsymbol{\theta=\varphi}$： **放物線**（p. 136, 137）

となる．その意味でこの3曲線を**「円すい(錐)曲線」**ともいう．

——「直円すい(錐)」を単に「円すい(錐)」というときもある．

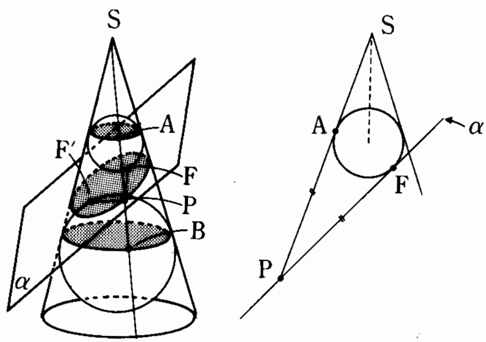
以下(i), (ii), (iii)について先に述べた「定義(p. 273, 277, 281)」にしたがって確認しておく．

(i) ——→ 〈図1〉

「直円すい(錐)」と「平面α」とに接する「球面」を図のように2つ考え，αとの接点をF, F′とする．

切り口の曲線上の点をPとすると，PFはFで上の球面に接し，直線SPはこの「直円すい(錐)」の「母線」であるから，上の球面に点Aで接する．「PA」，「PF」はいずれもPから引いた**「上の球面」**の**「接線」**で

PF＝PA



〈図1〉

同様にして**「下の球面」**で考えると

PF′＝PB

ところが，2つの球面はαに関して反対側にあるから辺々加えると

PF＋PF′＝PA＋PB

＝AB＝2$\boldsymbol{a}$（一定）

すなわち点**P**は2点**F**, **F′**を焦点とする「だ(楕)円」上の点である（p. 277).

(ii)　⟶　〈図2〉

(i)と同様に考えると2つの球面はαに関して同じ側にあり，したがって

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=|\mathrm{PA}-\mathrm{PB}|$$
$$=\mathrm{AB}=2a\quad（一定）$$

となり，**点 P は 2 点 F，F′ を焦点とする「双曲線」**上の点である（p. 281）.

(iii)　⟶　〈図3〉

この場合は，球面は1つ考えればよい．P，F，A を(i)と同様に定めると

$$\mathrm{PA}=\mathrm{PF}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

一方，「球面と直円すい(錐)の接点の作る円を含む平面」をβとし，αとβの交線をg，またF，Pからgに下した垂線の足をK，Hとすると，切り口の曲線はFKに関し対称で

$$\mathrm{PH}/\!/l\quad（lは\alphaに平行な母線）$$

よって，PAとβとのなす角とPHとβとのなす角は等しい．すなわち

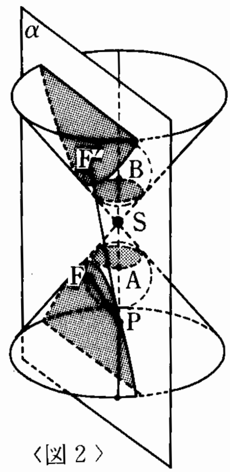
$$\mathrm{PA}=\mathrm{PH}\quad(\mathrm{PH}/\!/\mathrm{FK}/\!/l)$$

⟵　△PAH は二等辺三角形!!

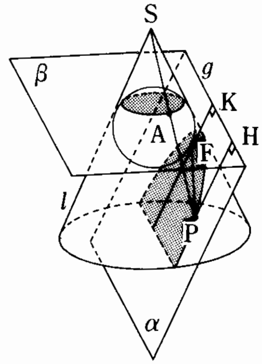
ゆえに，これと（$*$）から

$$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$$

このことから**点 P は F を焦点，g を準線とする「放物線」**上の点である（p. 273）.



〈図2〉



〈図3〉

例題 5

xy平面上の点の集合

$$A=\{(x,\ y)\mid px^2+qy^2=r\}$$

はどんな図形を表すか．ただし$A\neq\phi$（ϕは空集合）とする．

解　説　$px^2+qy^2=r$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$①

(i)　$r=0$のとき

$p=q=0$　⟶　x，yは任意で全平面を表す．
$p=0,\ q\neq0$　⟶　$y=0$　（x軸）
$p\neq0,\ q=0$　⟶　$x=0$　（y軸）

⟵　$pq=0$

$$pq \neq 0 \longrightarrow \begin{cases} pq>0 \quad \text{なら} \quad x=y=0 \quad \text{で原点} \\ pq<0 \quad \text{なら} \quad y=\pm\sqrt{\dfrac{-p}{q}}\,x \quad \text{で 2 直線} \end{cases}$$

(ii) $r \neq 0$ のとき，①の両辺を r で割って

$$\frac{p}{r}=m,\ \frac{q}{r}=n$$

とおくと①は

$$mx^2+ny^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\left.\begin{aligned} &m=0 \text{ のとき，} n\leqq 0 \text{ だと } A=\phi \text{ となるので } n>0 \\ &\therefore\quad y=\pm\sqrt{\frac{1}{n}} \quad (\text{2 直線}) \\ &n=0 \text{ のとき，} m\leqq 0 \text{ だと } A=\phi \text{ となるので } m>0 \\ &\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{m}} \quad (\text{2 直線}) \end{aligned}\right\} \longleftarrow \quad mn=0$$

$mn>0$ のとき，$m<0$，$n<0$ だと $A=\phi$ となるので，$m>0$，$n>0$ で

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2}=1 \longleftarrow \quad \text{だ(楕)円}$$

$$mn<0 \text{のとき，} \begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)^2}=1 \quad (m>0,\ n<0) \\[2ex] \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{-\frac{1}{m}}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2}=-1 \quad (m<0,\ n>0) \end{cases}$$

（いずれも「双曲線」である）

らしんばん

➡ いずれにしてもキチンとしておきたいことは②で

だ(楕)円 ―― **$m>0$，$n>0$**

双曲線 ―― **m と n は異符号**

ということである．

このハナシは p. 300，301で

$$AX^2+BY^2+\cdots\cdots=0$$

の「A」,「B」の符号の問題として確かめることになる．

2　2次曲線の接線

「放物線」,「だ(楕)円」,「双曲線」の接線は「2次曲線の接線」としてまとめて扱うことができる.

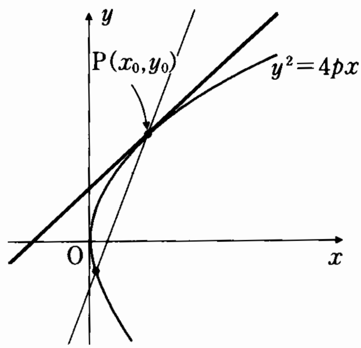
接線の公式

2次曲線上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線は次の式で与えられる.

(1)　$y^2=4px \longrightarrow \boldsymbol{y_0y=2p(x+x_0)}$

(2)　$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow \boldsymbol{\dfrac{x_0x}{a^2}\pm\dfrac{y_0y}{b^2}=1}$

解　説　(1)　放物線



$y^2=4px$　……………………①

の場合は,①上の点 P$(x_0,\ y_0)$ を通る直線を

$x-x_0=m(y-y_0)$　…………②

とおき,①,②が重解をもつ条件を考える.x を消去して

$y^2=4p\{x_0+m(y-y_0)\}$

$\therefore$　$y^2-4pmy+4pmy_0-4px_0=0$

これが「重解をもつ条件(判別式$=0$)」より

$4p^2m^2-(4pmy_0-4px_0)=4p^2m^2-4pmy_0+{y_0}^2=0$　$(\because\ {y_0}^2=4px_0)$

$(2pm-y_0)^2=0$　　$\therefore$　$2pm=y_0$

したがって

②:　$x-x_0=\dfrac{y_0}{2p}(y-y_0)$

$\therefore$　$y_0y=2p(x-x_0)+{y_0}^2=2p(x+x_0)$　$(\because\ {y_0}^2=4px_0)$

$\therefore$　$\boldsymbol{y_0y=2p(x+x_0)}$

(2)　曲線

$Ax^2+By^2=1$　……………………………………………③

上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線を考える.(1)と同じ方法でもよいが,少しやり方をかえてみる.

点 $(x_0,\ y_0)$ を通る直線を

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$　⟵　ベクトル方程式!!(p. 40)

とおくと

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases} \longleftarrow \text{パラメーター表示} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

④を③に入れて

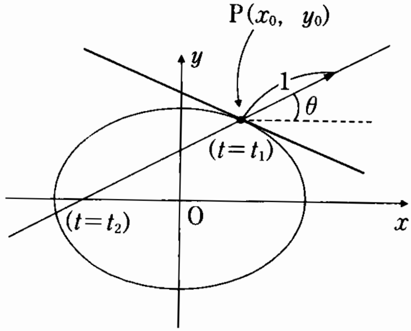
$$A(x_0+t\cos\theta)^2$$
$$+B(y_0+t\sin\theta)^2=1$$

ここで

$$Ax_0^2+By_0^2=1$$

を用いて整理すると

$$t\{(A\cos^2\theta+B\sin^2\theta)t$$
$$+2(Ax_0\cos\theta+By_0\sin\theta)\}=0$$



これが，tの解を 2 つもてば③，④は 2 点で交わるので，③，④が接するためにはただ 1 つの解「$t=0$（重解）」をもつ条件を考えると

$$A\cos^2\theta+B\sin^2\theta\neq 0, \qquad Ax_0\cos\theta+By_0\sin\theta=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

④，⑤よりθ，tを消去すれば，接線の方程式がえられる．

$$④ \longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Ax_0x}=Ax_0^2+tAx_0\cos\theta \\ \boldsymbol{By_0y}=By_0^2+tBy_0\sin\theta=By_0^2-tAx_0\cos\theta \quad (\because ⑤) \end{cases}$$

2 式の辺々を加えて，「$Ax_0^2+By_0^2=1$」を用いると

$$\boldsymbol{Ax_0x+By_0y=1}$$

ここで，$A=\dfrac{1}{a^2}$，$B=\pm\dfrac{1}{b^2}$ とおけば，$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の接線は

$$\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1}$$

となる．

らしんばん

➡ 微積分をやっている諸君なら，合成関数の微分を用いて，これらの公式は比較的簡単に導ける．

➡ 「接線の公式」から読みとれることは

$y^2=4px \longrightarrow$ y^2 が y_0y に，x が $\dfrac{x+x_0}{2}$ にかわって

$y_0y=2p(x+x_0)$

$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow$ x^2，y^2 がそれぞれ x_0x，y_0y にかわって

$\dfrac{x_0x}{a^2}\pm\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

となっている．

一般化すると，x，y の2次方程式

$$\boldsymbol{ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0}$$

で表される「2次曲線上の点 $(\boldsymbol{x_0},\ \boldsymbol{y_0})$ での接線」は

$$x^2 \longrightarrow x_0x,\quad y^2 \longrightarrow y_0y,\quad xy \longrightarrow \frac{x_0y+xy_0}{2}$$

$$x \longrightarrow \frac{x+x_0}{2},\quad y \longrightarrow \frac{y+y_0}{2}$$

と書きかえて

$$ax_0x+h(x_0y+xy_0)+by_0y+f(x+x_0)+g(y+y_0)+c=0$$

と覚えておくとよい．

例題 6

次の曲線の指定した点における接線の方程式を求めよ．

(1)　$3x^2+2(y-1)^2=14$，　点$(2,\ 2)$

(2)　$2(x-1)^2-y^2=1$，　点$(2,\ 1)$

(3)　$(y-1)^2=2x$，　点$(2,\ 3)$

解　説　(1)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線を x 軸，y 軸方向にそれぞれ α，β だけ平行移動したものは

$$\frac{(x_0-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_0-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$$

となることを考えると，本問の場合の接線は

$$3\cdot 2x+2(2-1)(y-1)=14 \qquad \therefore\ \boldsymbol{3x+y-8=0}$$

(2)　(1)と同様に考えて

$$2(2-1)(x-1)-1\cdot y=1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{2x-y-3=0}$$

(3)　$(3-1)(y-1)=x+2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x-2y+4=0}$

らしんばん

➡ 最初に展開してしまってはどうか――たとえば(1)は

$$3x^2+2y^2-4y-12=0$$

ここで

$$x^2\longrightarrow 2x\ (=\boldsymbol{x_0x}),\quad y^2\longrightarrow 2y\ (=\boldsymbol{y_0y}),\quad y\longrightarrow \frac{y+2}{2}\ \left(=\frac{\boldsymbol{y+y_0}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

とおくと

$$3\cdot(2x)+2\cdot(2y)-4\cdot\frac{y+2}{2}-12=0$$

$$\therefore\ 6x+2y-16=0 \qquad \therefore\ 3x+y-8=0$$

結局「同じ!!」になった.

3 パラメーター(媒介変数)表示

曲線の表し方はいろいろあって，2つの変数 x, y が変数 t の関数として

$$x=f(t),\quad y=g(t)\quad \cdots\cdots①$$

で与えられたとき，t の値を定めるとそれにしたがって x, y の値が定まり，点 $(x,\ y)$ の位置が定まる．t の値をいろいろ変えると一般に点 $(x,\ y)$ が動いて1つの曲線を描く．

①のように曲線上の点の座標 $(x,\ y)$ が1つの変数 t の関数として与えられているとき，①をその曲線の「**パラメーター表示（媒介変数表示）**」といい，「**変数 t**」を「**パラメーター（媒介変数）**」という．曲線を x, y の方程式で表したければ①より t を消去すればよい．

(1) だ(楕)円

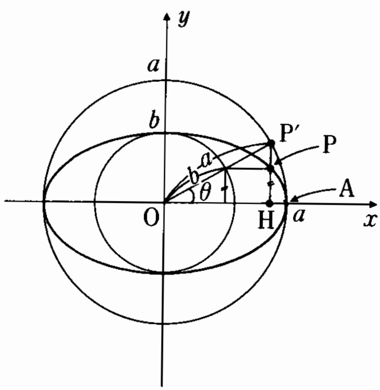
原点Oを中心とする円

$$x^2+y^2=a^2\quad (a>0)$$

を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に伸縮すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>0,\ b>0)$$

という「だ(楕)円」になることはすでに説明した（p. 278, 279）．このとき，円周上の任意の1点を $P'(x,\ y)$ とし，図の



$$\angle AOP'=\theta$$

とおくと

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}\quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

となり，これが「**θ**」を「**パラメーター（媒介変数）**」とする円の方程式となる．

いま，P′ から x 軸に垂線を下してその足をHとし

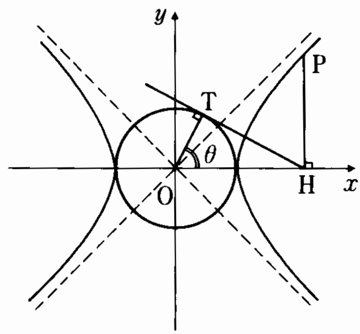
$$\frac{PH}{P'H}=\frac{b}{a}$$

となる点Pを半直線HP′上にとると，P$(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=a\cos\theta} \\ \boldsymbol{y=b\sin\theta} \end{cases} \quad (\boldsymbol{0\leqq\theta<2\pi}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

となり，θ を動かすとこのPがだ(楕)円「$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$」を描き，②がこの「だ(楕)円」を「パラメーター$\theta$」で表した方程式となる——「$\theta$」を「離心角」という．

(2)　双曲線



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

上の任意の点P$(x,\ y)$ から x 軸に下した垂線の足をH，Hから円

$$x^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$$

に，x 軸に関してPと同じ側に接線をひきその接点をT，$\angle\mathrm{HOT}=\theta$ とおくと

$$x\cos\theta=a$$

$$\therefore \quad x=a\sec\theta$$

これを，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に入れると

$$y^2=b^2(\sec^2\theta-1)=b^2\tan^2\theta$$

y と $\tan\theta$ は同符号であるから，「$y=b\tan\theta$」，すなわち

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \begin{cases} \boldsymbol{x=a\sec\theta} \\ \boldsymbol{y=b\tan\theta} \end{cases} \quad \left(\sec\theta\text{ は }\frac{1}{\cos\theta}\text{ のこと!!}\right)$$

で，これが**「$\boldsymbol{\theta}$」をパラメーターとする「双曲線のパラメーター表示」**である．

この「θ」も「離心角」という．

注　「だ(楕)円」，「双曲線」の「パラメーター表示」にはいろいろあって，たとえば

$$\text{だ(楕)円：} \quad x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \quad y=\frac{2bt}{1+t^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\text{双曲線　：} \quad x=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right), \quad y=\frac{b}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

などで表してもよいが，たとえば $(*)$ で $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおいてみると

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

である（p. 229, 230）ことから，上の(1)，(2)と同じ形になる．ただし「分母$=0$」となる点と，「$\tan\frac{\theta}{2}$」が定義されない点については除外しなければならない．

例題 7

次のおのおのは，t を媒介変数とする曲線の方程式である．これらの曲線を書け．

(1)　$x=t+\dfrac{1}{t}$,　　$y=t^2+\dfrac{1}{t^2}$

(2)　$x+y\sin t=1+\cos t$,　　$x\sin t+y=\sin t$　$(\cos t\neq 0)$

解　説　(1)　$y=t^2+\dfrac{1}{t^2}$

$$=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2$$

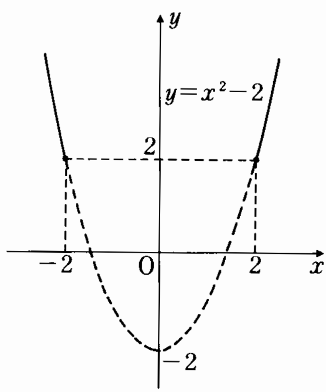
$$=x^2-2$$

ただし，x の範囲は

$$|x|=\left|t+\frac{1}{t}\right|=|t|+\left|\frac{1}{t}\right|$$

$$\geqq 2\sqrt{|t|\cdot\left|\frac{1}{t}\right|}=2$$

$\therefore$　$\boldsymbol{y=x^2-2}$　$(|\boldsymbol{x}|\geqq \boldsymbol{2})$



(2)　与えられた2式を

$$\begin{cases} x+y\sin t=1+\cos t & \cdots\cdots ① \\ x\sin t+y=\sin t & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

$(\cos t\neq 0)$

とおく．

②より

$y=-\sin t\cdot(x-1)$　$\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

これを①に入れて

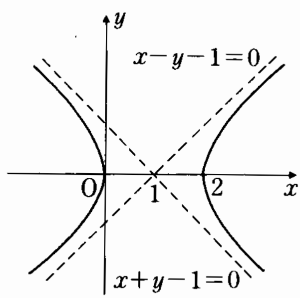
$x-\sin^2 t(x-1)=1+\cos t$

$\therefore$　$(x-1)(1-\sin^2 t)$

$=(x-1)\cos^2 t=\cos t$

$\cos t\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{x-1=\frac{1}{\cos t}=\sec t}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$



④を③に入れて

$$y=-\tan t$$

$$\therefore\quad (x-1)^2-y^2=\sec^2 t-\tan^2 t=1$$

$$\therefore\quad (x-1)^2-y^2=1\quad（双曲線）$$

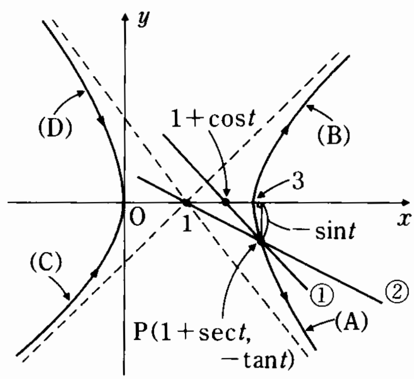
らしんばん

(2)は，「曲線の方程式」が「パラメーター表示」でストレートに与えられているわけではない．これは「tの値」を1つ与えると「2直線①，②」が決まり，「交点」が1つ決まる．それと異なる「tの値」に対しては，また別の「2直線①，②」が決まり「交点」が1つが決まる．このように順次「tの値（t：実数)」を与えていくときに，「交点」がどのような図形を描くか，という意味である．

与えられた「②」は，「③」のように変形すると，**点 (1, 0) を通り，「傾きが $-\sin t$」の直線**であることは簡単にわかるが，「①」の方は少しわかりにくい．したがって2式をx，yについて解いて

$$\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{\cos t}=1+\sec t \\ y=-\tan t \end{cases}$$

とした上で「tの値（t：実数)」にいろいろな値を入れていくことになる．



$\sin t$，$\cos t$，$\tan t$の値の符号を調べると大体次のようになる．

t：　$0\to\dfrac{\pi}{2}$ ———(A)　　　t：　$\dfrac{\pi}{2}\to\pi$ ———(D)

t：　$0\to-\dfrac{\pi}{2}$ ———(B)　　　t：　$-\dfrac{\pi}{2}\to-\pi$ ———(C)

以下$|t|$を大きくしていくと，Pは上に述べたことをくり返す（ただし，$\cos t\neq 0$)．実際「tの値」に「具体的な数値」を入れて確めておくとよい．

このように，「曲線の方程式」を求めるだけでなく，「パラメーター表示」された各点が，「パラメーターtの各数値」とどのようにかかわっているかを考えることはきわめて大切である．(1)についてもやっておくとよい．

4 座標軸の回転

2次方程式

$$f(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$$

は，いつもある曲線を表すとは限らない．たとえば

$$a=b=c=1,\quad h=f=g=0$$

のときは，$x^2+y^2+1=0$ となり，これをみたす x, y の実数値は存在せず，したがって実際には図形を表すことはできない．そういう場合を除いて，これがどんな曲線を表すかを調べるには，座標軸を適当に回転して

$$a'x^2+b'y^2+2f'x+2g'y+c'=0$$

の形になおすとその形状が調べやすい．つまり，**「xy の項がなくなるように座標変換」**をするのである．そのことを次の例題で研究しよう．

例題 8

(1) 座標軸を原点のまわりに60°回転することによって，次の方程式の表す曲線が放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ．

$$3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2-8x-8\sqrt{3}y+16=0 \quad \cdots\cdots ①$$

(2) 座標軸を原点のまわりに45°回転することにより，次の②はどんな曲線を表すかを調べよ．

$$5x^2-6xy+5y^2=8 \quad \cdots\cdots ②$$

解　説 (1)　**「座標軸を $\boldsymbol{\theta}$ 回転する」**ということは，**「図形を $-\boldsymbol{\theta}$ 回転する」**のと同じだから

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} X-\sqrt{3}Y \\ \sqrt{3}X+Y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ③$$

これを①に入れてもよいが，①の方を

$$(\sqrt{3}x-y)^2-8(x+\sqrt{3}y)+16=0$$

と変形しておいて入れる方が計算がラクになる．

$$\frac{1}{4}(\sqrt{3}X-3Y-\sqrt{3}X-Y)^2-4(X-\sqrt{3}Y+3X+\sqrt{3}Y)+16=0$$

これを整理して

$$Y^2=4(X-1) \quad \cdots\cdots ④$$

となり，これは放物線である．

④の焦点　$\longrightarrow$　$(2,\ 0)$

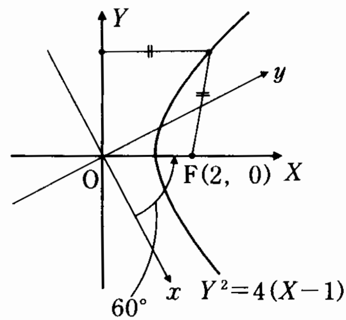
④の準線　$\longrightarrow$　$X=0$

これを③の変換を用いてもとにもどすと，①の

焦点：　$(1,\ \sqrt{3})$

準線：　$x+\sqrt{3}\,y=0$

である．



(2)　45° 回転の変換式は

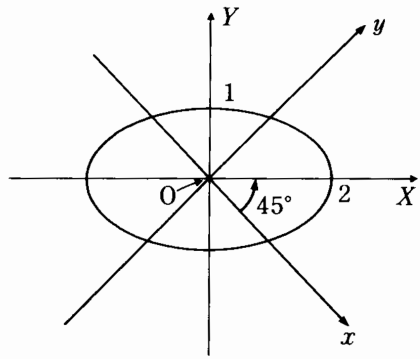
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X-Y \\ X+Y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤を，②に入れて

$$\frac{5}{2}\{(X-Y)^2+(X+Y)^2\}$$
$$-3(X-Y)(X+Y)=8$$

これを整理して，$\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$ となり，②は「だ(楕)円」を表す．



らしんばん

➡　「直交座標軸 O-xy」に関して，方程式

$$\boldsymbol{ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

で表される2次曲線が「座標軸 O-xy」を，原点 O のまわりに θ 回転した「直交座標軸 O-XY」で

$$\boldsymbol{AX^2+2HXY+BY^2+2FX+2GY+C=0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

と表されたとする．

このとき θ 回転を表す行列を $R(\theta)$ とすると

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}=\boldsymbol{R(-\theta)}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \quad \text{(p. 224)}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\boldsymbol{R(\theta)}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X\cos\theta-Y\sin\theta \\ X\sin\theta+Y\cos\theta \end{pmatrix}$$

これを（$*$）に入れると

$$a(X\cos\theta-Y\sin\theta)^2+2h(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)$$
$$+b(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2+\cdots\cdots+c=0$$

これを展開したものが（＊＊）であるわけだから，**係数を比較すること**を考える．

まず「XY」の係数については

$$\boldsymbol{2H=-2a\sin\theta\cos\theta+2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2b\sin\theta\cos\theta}$$
$$\boldsymbol{=(b-a)\sin2\theta+2h\cos2\theta}$$

そこで「$\boldsymbol{H=0}$」とおく――「$\boldsymbol{XY}$**のない形（標準形）**」にしたい．

$$(a-b)\sin2\theta=2h\cos2\theta \qquad \therefore\ \boldsymbol{\tan2\theta=\frac{2h}{a-b}}$$

したがって（＊＊）で「XYの項がなくなる（$H=0$）回転角 θ」は，この関係をみたす，なるべく簡単な角をとればよい．

本問についていえば，①は

$$a=3,\quad b=1,\quad 2h=-2\sqrt{3}$$

であることから

$$\tan2\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{3-1}=-\sqrt{3} \qquad \therefore\ 2\theta=120^\circ \qquad \therefore\ \theta=60^\circ$$

にとればよいことがわかる．

本問②については

$$a=b=5$$

から「$a-b=0$」となり，「$\tan2\theta$」は定義されないので

$$2\theta=90^\circ \qquad \therefore\ \theta=45^\circ \longleftarrow \textbf{tan}\boldsymbol{2\theta}\ \textbf{が定義されない}\ \boldsymbol{\theta}\ !!$$

にとればよいことがわかる．

ところで（＊＊）の「A」，「B」については

$$A=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$
$$=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos2\theta+h\sin2\theta$$
$$B=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$
$$=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\cos2\theta-h\sin2\theta$$

となる．

ここで「$\boldsymbol{A+B}$」と「$\boldsymbol{AB-H^2}$」を計算しておくと

$$\boldsymbol{A+B=a+b}\ \text{（一定）} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\ast\ast\ast)$$

$$\boldsymbol{AB-H^2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\cos2\theta+h\sin2\theta\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\sin2\theta+h\cos2\theta\right)^2$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-h^2=\boldsymbol{ab-h^2}\ \text{（一定）} \quad \cdots\cdots(\ast\ast\ast\ast)$$

――（＊＊）の A，B，H は「θ で表されている」のだが，「$A+B$」，「$AB-H^2$」を計算すると，それぞれ「θ」に関係のない実数「$a+b$」，「$ab-h^2$」となってしまうところがおもしろい．

いま，「$H=0$」となるように「θ」を決めると（＊＊＊＊）は

$$\boldsymbol{AB=ab-h^2} \quad (=\boldsymbol{D}\text{とおく})$$

となり，このとき（**）は

$$\boldsymbol{AX^2+BY^2}+\cdots\cdots=0 \quad \longleftarrow \quad \text{「}\boldsymbol{XY}\text{」の項がない!!}$$

と表されているはずだから「AB」の符号，すなわち（＊）の「2次の係数」で構成される数「$ab-h^2$ $(=D)$」の符号を調べさえすれば（＊）がどのような「2次曲線」であるかがわかる．すなわち

$D>0$：　だ(楕)円（または円）

$D<0$：　双曲線（または交わる2直線）

$D=0$：　放物線（または平行な2直線）

である――このことは覚えておくと便利である．

➡ 行列 $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ の「固有値」，「固有ベクトル」との関係――

（＊）の2次の項だけに注目すると

$$ax^2+2hxy+by^2=(x \quad y)\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と変形され，行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$（$=\boldsymbol{M}$とおく）の「固有方程式」は

$$t^2-(a+b)t+ab-h^2=0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{上に述べた「}D=ab-h^2\text{」はこの} \\ \text{行列の「Det.(行列式)」である．}\end{array}\right)$$

であった (p. 159).

ここで

$$H=0 \quad \left(\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}\right)$$

となるように「θの値」を選び，そのときの「$a+b$」と「$ab-h^2$」の値を「固有方程式」に代入すると

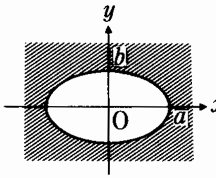
$$t^2-(A+B)t+AB=0$$

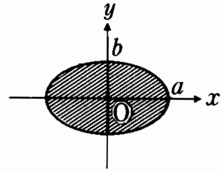
$$\therefore \quad (t-A)(t-B)=0 \qquad \therefore \quad t=A,\ B$$

すなわち，この「$\boldsymbol{A}$」，「$\boldsymbol{B}$」は「行列 $\boldsymbol{M}$」の「固有値」に他ならない――これが p. 268で説明した「α」，「β」の意味である．そして，この「**座標軸 O-$\boldsymbol{xy}$**」を **$\boldsymbol{\theta}$ 回転したときの $\boldsymbol{X}$ 軸，$\boldsymbol{Y}$ 軸の方向が2つの「固有ベクトル」の方向とな**っているわけである．

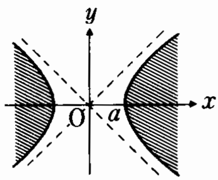
5 不等式と領域

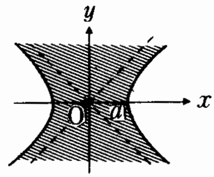
(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$　　　　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$





(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}>1$　　　　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}<1$





「だ(楕)円」の場合は，これが円「$x^2+y^2=a^2$」を「y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に伸縮」したものであることを考えれば，円の場合から容易に理解できよう．

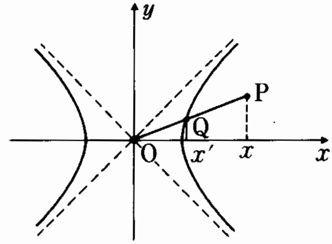
「双曲線」の場合はまちがえやすいから注意しなければならない．覚え方は原点 (0, 0) を入れたとき「>1」は成立しないので原点のない部分，「<1」が成り立つので，これは原点を含む部分と考えておけばよい．

「>1」の場合について説明しておこう（他も同様である）．

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

によって，座標平面は「原点を含む側」と「含まない側」に分割される．

いま，原点を含まない側に任意の1点 P$(x,\ y)$ をとると，線分 OP は双曲線とただ1点 Q で交わり，「OP>OQ」である．P$(x,\ y)$，Q$(x',\ y')$ とすると



$$\frac{|\vec{x}|}{|\vec{x'}|}=\frac{|\vec{y}|}{|\vec{y'}|}=k$$

とおくと，「$k>1$」で

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k^2\left(\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}\right)=k^2>1 \quad \left(\because \quad \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1\right)$$

すなわち，「原点のない側」が「$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}>1}$」をみたす**領域**である．

例題 9

(1)　定点 F$(2,\ 0)$ と2直線 $g_1: x=1$，$g_2: x=3$ があって，点 P$(x,\ y)$ $(x>0)$ から F にいたる距離は，P から g_1 にいたる距離の $\sqrt{2}$ 倍より小さく，P から g_2 にいたる距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍より小さいという．P の存在範囲を図示せよ．

(2)　集合 $\{(x,\ y)\mid y\leqq\sqrt{x},\ xy\geqq 1\}$ を図示せよ．

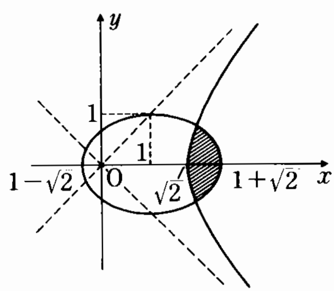
解　説　(1)　題意から

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}<\sqrt{2}\,|x-1|,\quad \sqrt{(x-2)^2+y^2}<\frac{1}{\sqrt{2}}\,|x-3|$$

両辺が負でないから平方して整理すると

$$x^2-y^2>2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{2})^2}+y^2<1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$



したがって，①は双曲線

$$x^2-y^2=2$$

の「原点のない側」で，②は「だ(楕)円」

$$(x-1)^2+2y^2=2$$

の内部であるから，P の存在範囲は右上の図の斜線部分となる．ただし，境界線は含まない．

(2)　$y\leqq\sqrt{x}$

は，「放物線」

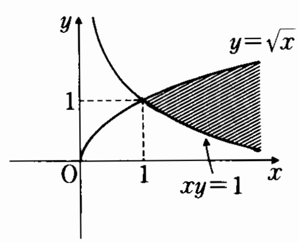
$$y^2=x$$

の「$y\geqq 0$」の部分の下側で

$$xy\geqq 1$$

は「双曲線」

$$xy=1$$



の「原点のない側」だから，求める領域は右下の図の斜線部分となる．ただし，境界線を含む．

らしんばん

一般に,「$y=\sqrt{f(x)}$」のグラフは「$y^2=f(x)$ ($y \geqq 0$) のグラフ」と同じになる.このことから,「$y=\sqrt{x}$」は放物線,「$x=y^2$ の $y \geqq 0$ の部分」となるのである.

なお

「$y>f(x)$」は曲線「$y=f(x)$」の上側

「$x>f(y)$」は曲線「$x=f(y)$」の右側

となる.

「$xy \geqq 1$」は,「座標軸を 45° 回転」すると

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

とおいて

$$\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) \geqq 1 \qquad \therefore \quad X^2-Y^2 \geqq 2$$

となる.このことから,「双曲線」の「原点のない側」であることがわかる.

あるいは

$$\begin{cases} x>0: \quad y \geqq \dfrac{1}{x} & (\text{「}x>0\text{」で割るとき,不等号の向きはかわらない}) \\[2ex] x<0: \quad y \leqq \dfrac{1}{x} & (\text{「}x<0\text{」で割るとき,不等号は「逆向き」}) \end{cases}$$

と分けて考えてもよい.

第3節
問題解法の研究

発展問題1―放物線と接線

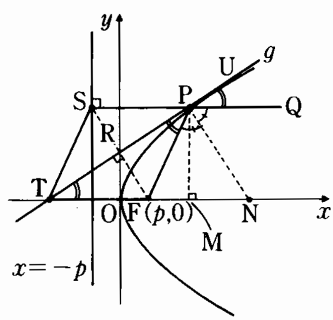
放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上の頂点でない任意の点を $P(x_0,\ y_0)$，焦点をFとし，Pから x 軸に平行に正の向きにひいた半直線をPQとするとき，次のことを証明せよ。

(1)　Pにおける接線 g が x 軸と交わる点をTとすれば，FP=FTである.

(2)　PFとPQはPにおける接線 g と等しい角をつくる.

(3)　接線 g が y 軸と交わる点をRとすれば，FR⊥g である.

解　説　(1)　$P(x_0,\ y_0)$ で



$$g:\quad y_0y=2p(x+x_0)$$

$y=0$ とおくと

$$T(-x_0,\ 0),\ F(p,\ 0)$$

であるから

$$FT=|p+x_0|$$

$$FP=\sqrt{(x_0-p)^2+y_0{}^2}$$

$$=\sqrt{(x_0-p)^2+4px_0}$$

$$(\because\quad y_0{}^2=4px_0)$$

$$=|p+x_0|$$

$$\therefore\quad FT=FP$$

(2)　FT=FPより△FPTは二等辺三角形で

$$\angle FTP=\angle FPT$$

また，PQ∥x 軸であるから

$$\angle FTP=\angle QPU\quad(\text{同位角})$$

$$\therefore\quad \angle FPT=\angle QPU$$

すなわち，PFとPQは g と等しい角をつくる.

(3)　P, T の x 座標は x_0, $-x_0$ だから g が y 軸と交わる点 R は線分 PT の中点で，△FPT は二等辺三角形である．

$$\therefore\quad \mathrm{PT}\perp\mathrm{FR} \qquad \therefore\quad \mathrm{FR}\perp g$$

らしんばん

以上のことから「**放物線と接線**」の関係をまとめると，図の「四角形 FPST」は「ひし形」である．

このことから，放物線とその接線の図形的な諸関係が導かれる．たとえば

(i)　**PF＝FT＝FN（PN⊥g である x 軸上の点を N）**

(ii)　**O は TM の中点**

(iii)　**R は SF の中点**

(iv)　**FS⊥PT**

(v)　**PT は ∠FPS を 2 等分する．**

……など．

発展問題 2―だ(楕)円の直交する 2 接線

(1)　だ(楕)円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \quad \cdots\cdots①$$

の傾き m の接線の方程式を求めよ．

(2)　円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上の任意の点から①へひいた 2 本の接線は直交することを示せ．

解　説　(1)　$y=mx+n$

を①に代入すると

$$b^2x^2+a^2(mx+n)^2=a^2b^2$$

$$\therefore\quad (b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mnx+a^2n^2-a^2b^2=0$$

「接する」ことから，「判別式＝0」として

$$(a^2mn)^2-(b^2+a^2m^2)(a^2n^2-a^2b^2)=0$$

$$\therefore\quad n^2=a^2m^2+b^2 \qquad \therefore\quad n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

ゆえに接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}} \quad \cdots\cdots②$$

(2)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上にあるとき

P が $(\pm a,\ \pm b)$（複号任意）のときは明らか．

それ以外のとき，**P** は②上にあるから，代入して整理すると

$$(y_1-mx_1)^2=a^2m^2+b^2$$

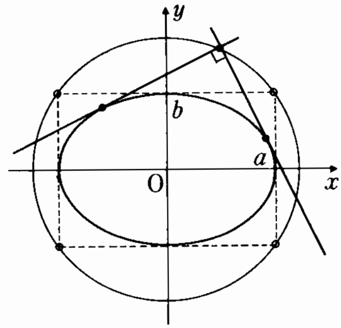
$$\therefore\quad (a^2-x_1^2)m^2+2x_1y_1m+b^2-y_1^2=0$$

接線の「傾き $\boldsymbol{m}$」は 2 つあって，それらを「$\boldsymbol{m_1}$」，「$\boldsymbol{m_2}$」とすると，「解と係数の関係」から

$$\boldsymbol{m_1m_2=\frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}=-1}$$

$$(\because\quad x_1^2+y_1^2=a^2+b^2)$$

ゆえに直交する．



らしんばん

ふたたび「だ(楕)円」の接線について――

直線

$$\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

は「だ(楕)円」

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

の「傾き $\boldsymbol{m}$」の接線である．

これに曲線上の接点 $(x_0,\ y_0)$ を与えるときはこれを（$*$）に代入して

$$y_0=mx_0\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

これを整理すると

$$(a^2-x_0^2)m^2+2x_0y_0m+b^2-y_0^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

ここで接点 $(x_0,\ y_0)$ は（$**$）上の点であるから

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$\therefore\quad a^2-x_0^2=\frac{a^2y_0^2}{b^2},\quad b^2-y_0^2=\frac{b^2x_0^2}{a^2}$$

これを（$***$）に代入すると

$$\frac{a^2y_0^2}{b^2}m^2+2x_0y_0m+\frac{b^2x_0^2}{a^2}=0$$

$$\therefore\quad \left(\frac{ay_0}{b}m+\frac{bx_0}{a}\right)^2=0 \qquad \therefore\quad m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\quad (y_0\neq 0)$$

これより，「$\boldsymbol{(x_0,\ y_0)}$ における接線の方程式」は

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

$$\therefore\quad \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

（これには $y_0=0$, $x_0=\pm a$ のときも含まれる）.（p. 291, 292）

なお,「傾き m」が与えられた「双曲線」「放物線」の接線も同様に導かれる.

双曲線： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ $\left(|m|>\dfrac{b}{a}\right)$

放物線： $y^2=4px \longrightarrow y=mx+\dfrac{p}{m}$

である.

発展問題 3—「双曲線」と「接線」,「漸近線」

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の任意の点 P における接線が, 漸近線と交わる点を A, B とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) AP＝BP である.

(2) △OAB の面積は一定である.

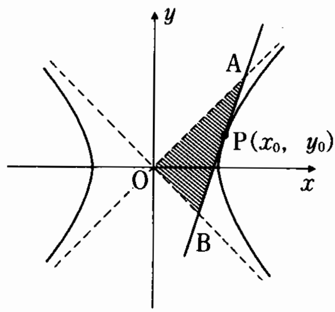
解 説 (1) $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすれば, P における接線の方程式は

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1 \quad (\longleftarrow \text{ p. 291, 292}) \quad \cdots\cdots ①$$

漸近線は

$$y=\frac{b}{a}x \quad \cdots\cdots ②$$

$$y=-\frac{b}{a}x \quad \cdots\cdots ③$$



「①と②」,「①と③」を連立して, A, B の座標を求めると

$$\mathrm{A}\left(\frac{bx_0+ay_0}{b},\ \frac{bx_0+ay_0}{a}\right)$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{bx_0-ay_0}{b},\ \frac{-bx_0+ay_0}{a}\right)$$

（ただし, $b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2=a^2b^2$）

このとき, AB の中点の座標を求めると

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{bx_0+ay_0}{b}+\frac{bx_0-ay_0}{b}\right)=x_0$$

同様にして「$y=y_0$」から「**AP＝BP**」である.

(2) O から直線 AB に垂線 OH を下ろすと

$$\mathrm{OH}=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2}}=\frac{1}{l} \quad \left(\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}=l \text{ とおく}\right)$$

また，「２点間の距離の公式」を用いると

$$AB=\sqrt{\left(\frac{-2ay_0}{b}\right)^2+\left(\frac{-2bx_0}{a}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}{y_0}^2+\frac{b^2}{a^2}{x_0}^2}$$

$$=2ab\sqrt{\frac{{x_0}^2}{a^4}+\frac{{y_0}^2}{b^4}}$$

$$=2abl$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OH$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2abl\cdot\frac{1}{l}=ab\quad(一定)$$

らしんばん

➡ 「双曲線」上の点を「パラメーター表示」すると

$$x_0=a\sec\theta,\quad y_0=b\tan\theta \quad\cdots\cdots(*)$$

で①は

$$\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$$

となるが，本問に関していえば(1)，(2)とも「わざわざ」(＊) でおきかえるほどの「ウマミ」はない．

この「パラメーター表示」は，本文中の条件

$$b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2=a^2b^2\quad\left(\longleftarrow\ \frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1 \text{———— P が双曲線上!!}\right)$$

を「代行（？）」するだけのハナシである．

➡ (2)では

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|\quad(p.\,49)$$

を用いてもよい．

発展問題4—「極」と「極線」

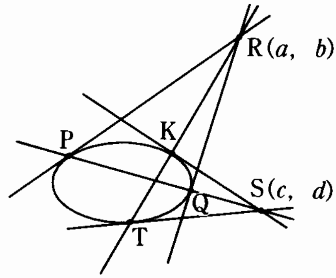
だ(楕)円，または双曲線

$$Ax^2+By^2=1 \quad\cdots\cdots①$$

上の２点 P，Q における接線の交点を R とする．

直線 PQ 上の点 S から①にひいた接線の接点を T，K とするとき，直線 TK は R を通ることを示せ．

解　説　$P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$, $R(a,\ b)$ とすると，P，Q における接線の方程式は



P：　$Ax_1x+By_1y=1$　……②

Q：　$Ax_2x+By_2y=1$　……③

②，③はRを通るから

$Ax_1a+By_1b=1$

$Ax_2a+By_2b=1$

これは

$\boldsymbol{aAx+bBy=1}$　……………………………………………④

が，2点P，Qを通ることを示している．

ゆえに，④はPQの方程式である．

次に，$S(c,\ d)$ とすると，これは④上の点であるから代入して

$aAc+bBd=1$　……………………………………………⑤

また，直線TKの方程式は

$cAx+dBy=1$　……………………………………………⑥

で表されるから，⑤は⑥が $R(a,\ b)$ を通ることを示している．

ゆえに証明された．

らしんばん

「極」と「極線」について———

上の例で，直線PQを，Rに対しての2次曲線

$Ax^2+By^2=1$

に関する「**極線**」といい，Rのことを「**極**」という．

「極」，「極線」は，「だ(楕)円」，「双曲線」，「放物線」のすべてについて考えられ，本問は，「**点Rを極とする極線 p 上の任意の点をSとすると，Sを極とする極線 q はRを通る**」ということの証明である．

発展問題5—「だ(楕)円」上の点のパラメーター表示

だ(楕)円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の2点 $A(-2,\ 0)$，$B(0,\ 1)$ およびこのだ(楕)円上の動点Pを頂点とする三角形ABPを考える．

(1)　この三角形の面積を最大にする点Pの座標を求めよ．

(2)　そのときの三角形の面積を求めよ．

解　説　(1)「だ(楕)円」の接線で，ABに平行なものの接点をさがすのも1つの方法だが，「だ(楕)円」上の点を「パラメーター表示」して，「三角形の面積の公式」を用いると簡単にいく．

「だ(楕)円」の点は $P(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくことができるから

$$\overrightarrow{AP}=(2\cos\theta+2,\ \sin\theta),\qquad \overrightarrow{BP}=(2\cos\theta,\ \sin\theta-1)$$

$$\therefore\quad \triangle ABP=\frac{1}{2}|(2\cos\theta+2)(\sin\theta-1)-2\cos\theta\sin\theta|$$

$$=|\cos\theta-\sin\theta+1|$$

$$=\left|\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\right|$$

これが最大となるのは，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ のときである．

「$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$」とするとこのときのPの座標は

$$P\left(\sqrt{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2)　最大値：　$\sqrt{2}+1$

らしんばん

この場合，「だ(楕)円」は「円を y 方向に縮小した図形」であるので

円：　$x^2+y^2=a^2$

を利用するとウマクいく．

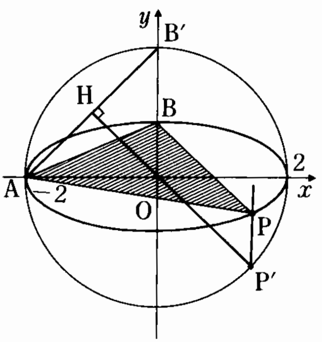
「$\triangle ABP$ の面積」は，「$\triangle AB'P'$ の面積」の $\dfrac{1}{2}$ 倍（「全体がタテに $\dfrac{1}{2}$ 倍されている」と考えればよい）で，これらの面積が最大になるとき，P' は

$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

で，y 座標に注意すると，Pは

$$P\left(\sqrt{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となる．



面積は

$$\triangle AB'P'=\frac{1}{2}\cdot AB'\cdot P'H$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot(2+\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2$$

$$\therefore\quad \triangle ABP=\frac{1}{2}\triangle AB'P'$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1$$

となり，「だ(楕)円」に関する問題ではこの方法が有効なときもある．

発展問題 6 ─「だ(楕)円」上の点の「パラメーター表示」,「接線」

だ(楕)円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 上の 1 点における接線へ，その 1 つの焦点から下ろした垂線の足の軌跡を求めよ．

解　説　だ(楕)円上の 1 点を

$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$

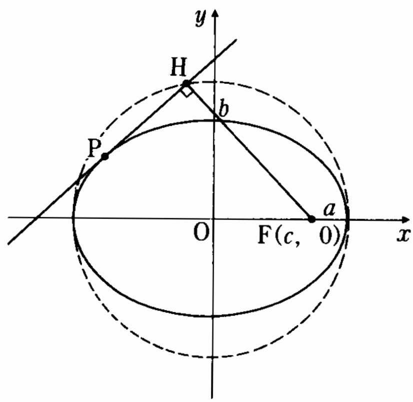
とし，焦点の 1 つを

$\mathrm{F}(c,\ 0)$　$(c^2=a^2-b^2)$

とすると，P における接線の方程式は

$$\frac{\boldsymbol{x\cos\theta}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{y\sin\theta}}{\boldsymbol{b}}=\mathbf{1}$$

$\therefore\quad (b\cos\theta)x+(a\sin\theta)y=ab$ ……………①



この「法線ベクトル」は

$(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$

これより，F を通り，これと直交する直線は

$(a\sin\theta)(x-c)-(b\cos\theta)y=0$

$\therefore\quad (\boldsymbol{a}\sin\theta)x-(\boldsymbol{b}\cos\theta)y=ca\sin\theta$ ……………………………②

「焦点から接線に下した垂線の足」は，①，②の交点であるから，その軌跡の方程式は，①，②からパラメーター $\boldsymbol{\theta}$ を消去して得られる．

「①^2+②^2」を作ると

$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)(x^2+y^2)=a^2(b^2+c^2\sin^2\theta)$ ………………③

「$\boldsymbol{c^2=a^2-b^2}$」を代入すると，この右辺は

$a^2(b^2+a^2\sin^2\theta-b^2\sin^2\theta)=a^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)$

これを③に用いると「$b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta\neq 0$」であるから

$\boldsymbol{x^2+y^2=a^2}$

である．

らしんばん

H の座標を実際に求めてみよう．それには「①の法線ベクトル」を利用して直線 FH を「ベクトル方程式」で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}$$

これを①に代入して「t の値」を求めてもよいが，**「連立方程式①，②」**を行列を用いて表す方法があった（p. 156）．———①，②は

$$\begin{pmatrix} b\cos\theta & a\sin\theta \\ a\sin\theta & -b\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab \\ ca\sin\theta \end{pmatrix}$$

である．

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b\cos\theta & a\sin\theta \\ a\sin\theta & -b\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} ab \\ ca\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$=\frac{-a}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} -b\cos\theta & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta & b\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}(b^2\cos\theta+ac\sin^2\theta) \\ y=\dfrac{a}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}(ab\sin\theta-bc\sin\theta\cos\theta) \end{cases}$$

ここで，「$\boldsymbol{x^2+y^2}$」を計算するわけであるが，←—— **これはきっと見えない!!**

$$(b^2\cos\theta+ac\sin^2\theta)^2+(ab\sin\theta-bc\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$=b^4\cos^2\theta+a^2c^2\sin^4\theta+a^2b^2\sin^2\theta+b^2c^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=b^4\cos^2\theta+a^2(a^2-b^2)\sin^4\theta+a^2b^2\sin^2\theta+b^2(a^2-b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$(\because\quad \boldsymbol{c^2=a^2-b^2})$$

$$=b^4\cos^2\theta+a^4\sin^4\theta-a^2b^2\sin^4\theta+a^2b^2\sin^2\theta+a^2b^2\sin\theta^2\cos^2\theta-b^4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=b^4\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)+a^4\sin^4\theta+a^2b^2\sin^2\theta(-\sin^2\theta+1+\cos^2\theta)$$

$$=b^4\cos^4\theta+2a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta+a^4\sin^4\theta$$

$$=(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^2$$

を計算しておくと，確かに

$$x^2+y^2=\left(\frac{a}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\right)^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^2=a^2$$

となる———しかし，これは相当メンドウである．

このことからも**「交点の座標を直接求める」**ことが必ずしも**最良の方法**ではないことがわかる———①，②から θ を消去する方がずっと簡単である．

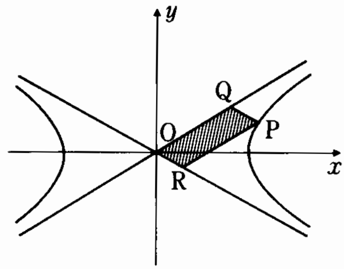
発展問題 7―「双曲線」上の点の「パラメーター表示」

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 上の任意の1点から，2つの漸近線に平行線を引くとき，その2直線と漸近線で囲まれる平行四辺形の面積は一定であることを証明せよ．

解　説 「双曲線」上の点は

$$\mathbf{P}(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$$

で表すことができる．



$$\mathrm{OQ}:\quad y=\frac{b}{a}x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\mathrm{PQ}:\quad y-b\tan\theta=-\frac{b}{a}(x-a\sec\theta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

①，②を解いて $Q(x_1,\ y_1)$ の座標を求めると

$$x_1=\frac{a}{2}(\sec\theta+\tan\theta)$$

$$y_1=\frac{b}{2}(\sec\theta+\tan\theta)$$

同様にして $R(x_2,\ y_2)$ の座標は

$$x_2=\frac{a}{2}(\sec\theta-\tan\theta)$$

$$y_2=-\frac{b}{2}(\sec\theta-\tan\theta)$$

であるから，求める面積 S は

$$S=|x_1y_2-x_2y_1|=\left|\frac{ab}{2}(\sec^2\theta-\tan^2\theta)\right|$$

$$=\frac{ab}{2}\quad(\text{一定})$$

らしんばん

➡ Pの座標を $P(x_0,\ y_0)$ とおくと

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{b}y_0\right),\qquad y_1=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0+y_0\right)$$

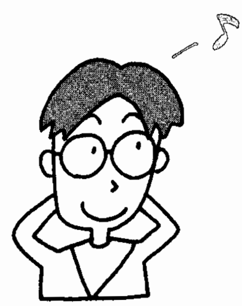
また

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{a}{b}y_0\right),\qquad y_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0-y_0\right)$$

となるから「面積」を計算すると

$$\begin{aligned}S&=|x_1y_2-x_2y_1|\\&=\frac{1}{4}\left|\left(x_0+\frac{a}{b}y_0\right)\left(\frac{b}{a}x_0-y_0\right)+\left(x_0-\frac{a}{b}y_0\right)\left(\frac{b}{a}x_0+y_0\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}x_0{}^2-\frac{a}{b}y_0{}^2\right|\\&=\frac{ab}{2}\left|\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}\right|=\frac{ab}{2}\quad\left(\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}=1\right)\end{aligned}$$

となる——本文のように点Pを「パラメーター表示」する方が，いくらかスッキリ表せる．場合によるとかなり有効なときもある．



索　　引

サ

シ

ス

セ

ソ

タ

チ

ツ

テ

ト

ナ

ニ

ヌ

ネ

ノ

ハ

ヒ

フ

ヘ

ホ

マ

ミ

ム

メ

モ

ヤ

ユ

ヨ

ラ

リ

ル

レ

ロ

ワ