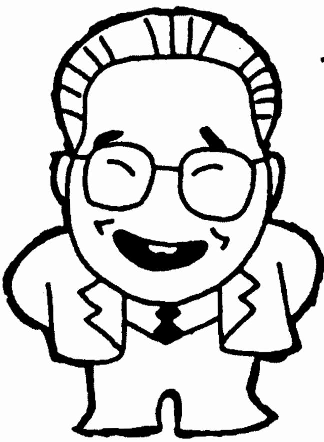
第１章

極　　限

「$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$」がいえるのは
角の単位を「ラジアン」にとっているから
なのだ!!
また「e」という数は

「$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$」

を成立させるaの値のこと!!



「極限」の概念—それは「解析学」の基礎である

「基礎解析」では，ある数列について，そのならび方の規則性を調べることにより n を有限な数としてその第 n 項の形を求めたり，第 n 項までの和を求めたりすることを学んだが，ここでは「**無限数列**」あるいは「**無限級数の和**」について考えることにする．

「無限数列」というのは項がどこまでも限りなく続く数列のことで，「無限級数」というのは「それらをすべて加えたもの」というほどの意味であるが，われわれの最大の関心はこのような**数列なり，級数なりが「あとの方になるにつれてどのように変化していくのか」**，そして「**最終的にはどのようになっていくのか**」——これを「極限」という——にある．その理由は，もしそれらが「収束する（ある一定な値に限りなく近づいていく）」ことが保証されれば，われわれとしては「その結果を積極的に利用することができる」からである．

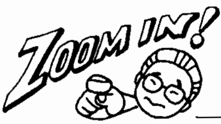
それでは，そうした「極限」を調べるにはどうすればよいか——もちろん全部の項をかきならべてみることなどできはしない．われわれの考えられる方法としては「**その一部（有限個）のならび方の規則性をしっかりとにらむことにより，全体を把握してしまう**」方法を工夫する以外にはない．

それが「まず有限な正整数 n に対して，**数列の一般項 a_n あるいは第 n 部分和（第 n 項までの総和）S_n を項数 n の関数として表し（有限である部分に着目する），その上で n を限りなく大きくする（$n\to\infty$）**」方法であり，あるいは「はさみうち」や「単調・有界」（あとで説明する）の考え方である．

いずれにせよ，これらの方法をうまく利用することにより，そのままでは目に見ることのできない「極限の状況」をある程度はナットクできる形でとらえることができる．

そしてこの「極限」の考え方は，「**関数の極限（関数の値のとる極限）**」の**考え方にまで発展し，「微分法」や「積分法」をつらぬく最も重要で基礎的な概念になるわけで**，このような意味でもこの章はあとに続く第2章，第3章を学ぶ上での「第一歩」ということができる．

第1節
数列の極限



まず，「無限数列」の「極限」――「収束」と「発散」――について説明し「極限値（数列が収束するときの値）」を扱う上で重要な諸定理とその用い方について研究する．

また「無限級数」の「極限」については，その「第 n 項までの部分和 S_n（n は有限）」がつくる数列 $\{S_n\}$ の「収束」と「発散」の問題に帰着させて考える．そのあたりの考え方，扱い方の基本をくわしく解説する．

1　無限数列

（1）収束・発散

有限個の項からなる数列を「有限数列」という．この一般項や，初項から第 n 項までの和を求めることは「基礎解析」ですでに学んだ．これに対して項が限りなく続く数列を「無限数列」という．以下，単に「数列」というときは，この「無限数列」のことをさすものとする．

第 n 項が a_n であるような数列を $\{a_n\}$ で表す．n が限りなく大きくなっていくにつれて，この数列 $\{a_n\}$ はどんなふるまいをするか．

それには，次の2つの場合がある．

(i)　一定の値 α に限りなく近づくとき

このとき，数列 $\{a_n\}$ は「α に収束する」といい，α を $\{a_n\}$ の「極限値」という．そして，このことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \cdots\cdots ①$$

と書く、たとえば

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$$

である．①の「∞」という記号は「無限大」と読み，「$n\to\infty$」は n が限りなく大きくなっていく「状況」を表す．また①のことを

$n\to\infty$ のとき，$a_n\to\alpha$

などと書くときもある．

上の例でもわかるがこのときの α は，あくまでも $\{a_n\}$ が近づいていく「目標」であって，必ずしも a_n が α になるという意味ではない．もちろん

$\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，……a_k，α，α，α，……

のように，ある値 k をこえたすべての n に対して $a_n=\alpha$ $(n>k)$ であるときも $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ である．

(ii)　(i)以外のとき

数列が収束しないとき，その数列は「発散する」，あるいは「極限値をもたない」という．

「発散」には，次に示すように，いくつかのタイプがある．

(ア)　n を限りなく大きくするとき，a_n も限りなく大きくなる（正の無限大に発散する）ならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad （たとえば \lim_{n\to\infty} n^2=\infty）$$

と書く．

(イ)　n を限りなく大きくするとき，a_n の値が負で，しかもその絶対値が限りなく大きくなる（負の無限大に発散する）ならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad （たとえば \lim_{n\to\infty} -\sqrt{n}=-\infty）$$

と書く．

ここに，「$-\infty$」は「負の無限大」を表す記号で，これに対して「∞」のことを「$+\infty$」と書いたりすることもある．

(ウ)　(i)でなく，しかも上に述べた(ア)，(イ)以外の場合，たとえば

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\} \quad \left(\begin{array}{ll} n\text{ が偶数のとき：} & 1+\dfrac{1}{n} \\ n\text{ が奇数のとき：} & -1+\dfrac{1}{n} \end{array}\right)$$

を考えてみると，n が偶数の値をとりながら限りなく大きくなるときは 1 に近づき，奇数の値をとりながら限りなく大きくなるときは -1 に近づく．

このような場合，この数列は「振動する」という．

以上のハナシをまとめると次のようになる．

収束・発散

数列 $\{a_n\}$ において，

(i)　収束……………………………… $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ……①

(ii)　発散
- (ア)　正の無限大に発散……… $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ……②
- (イ)　負の無限大に発散……… $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ …③
- (ウ)　振動する…………………その他の場合

解　説　「振動する」ということが少しわかりにくい．たとえば

1，1，1，2，2，2，1，1，1，2，2，2，………

3，1，4，1，5，9，2，6，5，3………（π の各桁）

なども「振動する」という——とにかく，(i)と(ii)の(ア)，(イ)以外のときを「振動する」というわけである．

また，上の①，②，③は，みな同じ「$\lim_{n\to\infty} a_n=$　」であるので混同しやすいが，「∞」や「$-\infty$」は特定の数値ではない．したがって

「正の無限大に収束する」，「負の無限大に収束する」

などとはいえない——ナンセンスである．

らしんばん

なお①の $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ は，$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$ と同じと考えてよい——よく用いられる表現である．

(2)　極限値に関する定理

数列の極限値を扱うときの基礎となる定理を次にあげておく．

数列の極限に関する定理

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束し $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする．このとき次の(1)〜(4)が成立する．

(1)　$\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$　（ただし，k は n に関係のない定数）

(2)　$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$　（複号同順）

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$b_n\neq 0$，$\beta\neq 0$）

解　説　これらの定理のキチンとした証明は高校数学の範囲をこえるのでここではふれないが，いずれも「**直観的には**」スナオにナットクできるものばかりである．

らしんばん

➡ これらの定理が成立するのは，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が「収束する」ときのハナシで，「**収束しないときには使えない!!**」ことには注意しておかなければならない——たとえば，$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2$ であって，$\frac{\infty}{\infty}$ というワケのわからないものをもち出したりしてはいけない．しかし $n\to\infty$ のとき

$\boldsymbol{a_n\to\alpha,\ b_n\to\infty}$ ならば $\boldsymbol{(a_n+b_n)\to\infty}$

$\boldsymbol{a_n\to\alpha\ (>0),\ b_n\to\infty}$　ならば $\boldsymbol{a_nb_n\to\infty}$

$\boldsymbol{a_n\to\alpha\ (<0),\ b_n\to\infty}$　ならば $\boldsymbol{a_nb_n\to-\infty}$

などは，ほとんど「直観的に」認めるところである．さらに

$\boldsymbol{|a_n|\to0 \iff a_n\to0}$

あるいは

$\boldsymbol{a_n\to\pm\infty}$ ならば $\boldsymbol{\frac{k}{a_n}\to0}$ （$\boldsymbol{k}$ **は定数**）

なども，「ほとんど明らか」である．

➡ 数列 $\{a_n\}$ が定数数列（すべての n に対して $a_n=k$）のときは $\lim_{n\to\infty}a_n=k$ であるから，(1)は(3)の特別な場合であると考えてもよい．

例題 1

(1)　第 n 項が次の式であたえられる数列の極限を調べよ．

(i)　$\frac{n^2+n-1}{2n^2+1}$

(ii)　$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(iii)　$\sin\frac{n\pi}{2}$

(iv)　$\log_2\frac{\sqrt{n}+1}{n}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}na_n=3$ をみたすとき，次の数列の極限値を求めよ．ただし，すべての n について $a_n\neq0$ とする．

$\{(n+1)a_n\}$，　$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$

解　説　(1)　第 n 項を a_n とおく．

(i)　$a_n=\dfrac{n^2+n-1}{2n^2+1}$ の分母と分子を n^2 で割ると

$$a_n=\frac{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}$$

この式で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

収束して極限値は $\dfrac{1}{2}$

(ii)　このままの形では考えにくいので，極限が調べやすい形に「同値変形」して考えるのがポイントになる．それには「有理化」という方法を利用する．

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ を有理化すると

$$a_n=\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\sqrt{n}\cdot\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

その上で，分母子を $\sqrt{n}$ で割ると

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

収束して極限値は $\dfrac{1}{2}$

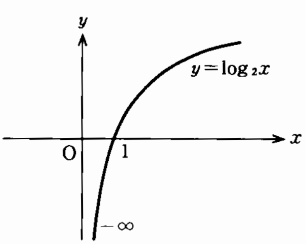
(iii)　n が偶数のときは $\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$，奇数のときは $\sin\dfrac{n\pi}{2}=\pm1$ で，極限値は存在せず，したがって振動する．

(iv)　$\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$ であるから

$n\to\infty$ のときは，$\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}\to0$ で

$$\lim_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n}\right)=-\infty$$

負の無限大に発散する



(2)　$(n+1)a_n=\dfrac{n+1}{n}\cdot na_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot na_n$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\ \lim_{n\to\infty} na_n=3\ (\text{有限確定})$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\mathbf{3}$$

次に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}$$

数列 $\{na_n\}$ が 3 に収束する ($\lim_{n\to\infty} na_n=3$) ときは $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=3$ であるから $na_n\neq 0$ に注意して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1\cdot\frac{3}{3}=\mathbf{1}$$

らしんばん

(1) (i) ──「**分母子を n^2 で割る**」ことについて

$$a_n=\frac{n^2+n-1}{2n^2+1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

でこのまま $n\to\infty$ としたのでは，分母→∞，分子→∞，となってワケのわからないことになってしまう．このことをどうみればよいか．

結論からいうと，(＊) の例では分母子がともに n の 2 次式で，$n\to\infty$ とするとき「n^2 の大きくなるなり方」が非常に大きく，分母の 1，分子の −1，あるいは n の 1 次式である分子の n などがほとんど無視できる．このようなときは「**分母子を n^2 で割る**」という「**同値変形**」を利用することにより，分母子はそれぞれ

$$\text{分母}=2+\frac{1}{n^2},\ \text{分子}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$$

と変形され，それらが「**どの程度に小さい値であるか**」ということを，よりハッキリと「**見る**」ことができるわけである．

(1) (ii) ──「**有理化**」について

$$a_n=\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

の $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ に注目してみよう．

$\sqrt{n+1}$ と $\sqrt{n}$ とでは $\sqrt{n+1}$ の方が $\sqrt{n}$ よりいつもほんの少しだけ大きいことはわかるが，この式のままで $n\to\infty$ とすると $a_n\to$「$\infty-\infty$」となり，これもワケのわからないことになってしまう．

ところが「**有理化**」という「**同値変形**」を利用すると

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$$

と変形され，n が大きくなるにしたがって $\sqrt{n+1}$ と $\sqrt{n}$ との差がより小さくなっていって，ついには 0 に収束していく状況をうまくとらえることができる．

すなわち，「∞−∞」という，そのままでは「みえない形の式」を，「$\dfrac{1}{\infty+\infty}=\dfrac{1}{\infty}$」という「みえる形の式」に「同値変形した」わけである．

この先の式変形，すなわち

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

の分母子を $\sqrt{n}$ で割る，という操作については，「分母子を n^2 で割る」ハナシと原理的には同じである．

(1)　(ii)，(iv) ──「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log f(n)$」，「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{f(n)}$」などについて

一般に

$$\lim_{n\to\infty}\{\log f(n)\}=\log\{\lim_{n\to\infty}f(n)\}$$

はあとで説明する「関数の連続性」とかかわってくるのだが，われわれ高校数学の立場としては，これも「直観的に」認めておくことにする．(iv)についていえば

$$f(n)=\frac{\sqrt{n}+1}{n}$$

で，「$n\to\infty$ のとき $f(n)\longrightarrow 0$ であるから，$\log f(n)\longrightarrow -\infty$」という理解で十分である──「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{f(n)}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}f(n)}$」などについても同様である．

これはすでに(ii)で

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1$$

として用いた．

(2)については「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=3$ (有限確定)」をどう利用するかがポイント!!

後半は

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)a_n}\longrightarrow\frac{3}{3}=1\ (n\to\infty)$$

とやれば「前半の結果」が利用できて簡単にいく．

不等式と極限に関する定理

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ について

(1)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき，

$a_n\leqq b_n$ $(n=1, 2, \cdots\cdots\cdots)$ ならば $\alpha\leqq\beta$

(2)　$\{a_n\}$，$\{c_n\}$ が収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ のとき，

$a_n\leqq b_n\leqq c_n$ $(n=1, 2, \cdots\cdots\cdots)$ ならば $\{b_n\}$ も収束し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$

である．

解　説　(1)　$a_n<b_n$ でも $\alpha\leqq\beta$ である（等号のときもある）ことに注意!!

(2)　これは $\{b_n\}$ の極限値を求めたいが，それを直接求めることが困難な場合，極限値がわかっている（あるいは求めやすい）$\{a_n\}$，$\{c_n\}$ を用いて b_n を a_n と c_n との間にはさむ方法である――これを「はさみうち」という．

らしんばん

➡ (1)で，$a_n=b_n$ $(n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$ ならば $\alpha=\beta$ はあたりまえであるが「つねに $a_n<b_n$ であっても $\alpha<\beta$ とは限らない（$\alpha=\beta$ のこともおこりうる）」ことに注意したい．それは「**極限値 α，β が，あくまでも $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の近づいていく「目標」であって a_n，b_n そのものでない**」ことに由来する．このタイプの簡単な例を示しておく．たとえば

$$a_n=1-\frac{1}{n},\qquad b_n=1+\frac{1}{n}$$

などとすると $a_n<b_n$ であるが $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ から

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$$

すなわち，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の極限値は等しい．

➡ (2)の定理を利用するときは，$\{a_n\}$ または $\{c_n\}$ の一方が定数数列であることが多い．たとえば $k<b_n\leqq f(n)$，$\lim_{n\to\infty}f(n)=k$ であれば，この定理で数列 $\{a_n\}$ を $a_n=k$（定数），$\{c_n\}$ を $c_n=f(n)$ とすることにより，$\lim_{n\to\infty}b_n=k$ が示される．

➡ なお，上の定理には入れなかったが，

「$\boldsymbol{a_n\leqq b_n}$ **$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots)$ のとき** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\infty}$ **ならば** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}b_n=\infty}$」

なども，ほとんど明らかである．

例題 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{3}\ \text{を求めよ．}$$

解　説　「$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n}$ **を求めよ」ということは「数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を調べよ」ということである．**

任意の自然数 n に対して

$$-1<\sin\frac{2n\pi}{3}<1\qquad\therefore\quad -\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{3}<\frac{1}{n}$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{3}=0$$　　収束して極限値は 0

らしんばん

「はさみうち」の基本的な例である．

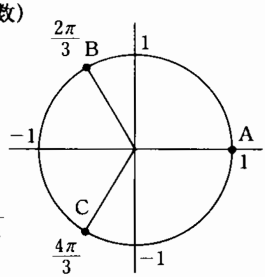
本文では $-1<\sin\frac{2n\pi}{3}<1$ として等号を除いたが，それは $\sin\frac{2n\pi}{3}=\pm1$ となるときがあるとすると $\frac{2n\pi}{3}=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}$ （m は整数）となり辺々を $\frac{6}{\pi}$ 倍して

$$4n=12m\pm3=2(6m\pm1)\pm1$$

この左辺は偶数，右辺は奇数で，実はこのようなことがおこりえないからである．しかし

$$-1\leqq\sin\frac{2n\pi}{3}\leqq1 \qquad \therefore\quad -\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{3}\leqq\frac{1}{n}$$

は当然成り立つからこれでやってもよい．



$\left(\frac{2n\pi}{3}\right.$ は3点A，B，C のいずれかにくる$\left.\right)$

なお絶対値を用いてこの不等式を

$$0\leqq\left|\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{3}\right|\leqq\frac{1}{n}\to0\quad(n\to\infty)$$

のように表せば，いくらかスッキリと表せる．（$\because$ $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$）

いずれにしても，限りなく大きくなる分母の n に対して $\sin\frac{2n\pi}{3}$ がいつまでも「有限な範囲をウロウロしている」のであるから，このハナシは「あたりまえ」のことである．

例題 3

無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の各命題が真であるか偽であるかを答え，偽である場合はそのことを示す具体例（反例）を1つ示せ．（真である場合，それを証明する必要はない）

(1)　$\{a_n{}^2\}$ が収束すれば，$\{a_n\}$ も収束する．

(2)　$\{a_n\}$ が収束し，$\{b_n\}$ が発散し，すべての自然数 n に対して $a_n\neq0$ ならば $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ は発散する．

(3)　$\{a_n\}$ が発散し，$\{|a_n-b_n|\}$ が0に収束すれば，$\{b_n\}$ も発散する．

(4)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに正の無限大に発散するとき，$\{a_n-b_n\}$ は0に収束する．

(5)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ のいずれか一方が発散すれば，$\{a_nb_n\}$ も発散する．

解　説　(1)　偽，(反例)　$a_n=(-1)^n$

$a_n{}^2=((-1)^n)^2=1$ で，$\{a_n{}^2\}$ は1に収束するが，$\{a_n\}$ は振動する．

(2)　真 ——— 収束すると仮定すると $b_n=\dfrac{b_n}{a_n}\cdot a_n$ も収束するので矛盾．

(3)　真 ——— $b_n=a_n-(a_n-b_n)$ と変形．$|a_n-b_n|\to 0 \Leftrightarrow (a_n-b_n)\to 0$ より a_n と b_n は $n\to\infty$ で同じふるまいをする．

(4)　偽，(反例)　$a_n=2n\to\infty$ $(n\to\infty)$，$b_n=n\to\infty$ $(n\to\infty)$とすると

$$a_n-b_n=n\longrightarrow\infty\ (n\to\infty)$$

あるいは $a_n=n+1\to\infty$ $(n\to\infty)$，$b_n=n\to\infty$ $(n\to\infty)$とすると

$$a_n-b_n=1\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$$

(この場合，収束するが0ではなく1である．)

(5)　偽，(反例)　$a_n=\dfrac{1}{n^2}\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$，$b_n=n\longrightarrow\infty$ $(n\to\infty)$

とすると　　$a_nb_n=\dfrac{1}{n^2}\cdot n=\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$

らしんばん

このような問題を扱うには——実はいつでもそうなのだが

(i)　何があたえられているか

(ii)　何をいえば示したことになるか

をシッカリとにらむこと——そのままの形で「みえない」ときは，あたえられた命題の「対偶」をとってみるとわかりやすいことがある．

たとえば(5)の対偶は

「$\{a_nb_n\}$ が収束するならば $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束する」

で，こうすると反例としてこの他にも $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=n$ などが簡単にさがせて，この命題が「偽」であることがよくわかる．

(3)　$\{r^n\}$ の極限

等比数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=ar^{n-1}\ (a：初項，r：公比)$$

であたえられた．そこで「無限等比数列」の収束・発散は，$\{r^n\}$ の極限によってきまる．

——これは r の値によって状況がちがうので次のような「場合分け」が必要である．

先に結論を示しておこう．

$\{r^n\}$ の収束・発散に関する定理

$n\to\infty$ のとき

(1)　$r>1$　：$r^n\to\infty$（正の無限大に発散）

(2)　$r=1$　：$r^n\to 1$（1に収束）

(3)　$-1<r<1$：$r^n\to 0$（0に収束）

(4)　$r\leqq -1$　：発散（振動する）

$\boxed{\text{解　説}}$　このうち，(1)，(2)と(4)の $r=-1$ のときは明らかだから，(3)と，(4)の $r<-1$ のときについて説明しておく．

(3)　$r=0$ のときは問題ナシとして，$0<|r|<1$ の場合に限って考えることにする．$0<|r|<1$ ならば

$$|r|=\frac{1}{1+h}\quad (h>0)$$

とおくことができて

$$|r^n|=|r|^n=\frac{1}{(1+h)^n}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

ところで $h>0$ のときは，不等式

$$(1+h)^n\geqq 1+nh>nh\ (\text{「数学的帰納法」で証明できる})\quad\cdots\cdots\text{②}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{nh}$$

が成り立ち，これを①に用いると

$$0<|r^n|<\frac{1}{nh}$$

ここで h は定数で，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nh}=0$ であるから「はさみうち」により

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=0\qquad\therefore\quad \lim_{n\to\infty}r^n=0$$

(4)　$r<-1$ のときは r^n の絶対値は n が大きくなるといくらでも大きくなるから，発散することは明らかであるが，符号が（正），（負）と交互にかわるため，「正の無限大に発散する」とか，あるいは「負の無限大に発散する」のように一律に表現することはできない——このようなときにも「振動する」という．

らしんばん

➡ 初項 a $(\neq 0)$，公比 r の「無限等比数列の収束条件」は上の定理から

$-1<r\leqq 1$

である．

この場合，特に $r=1$ をウッカリ忘れないように注意しなければならない．

このときの極限値は

$$\begin{cases} -1<r<1 & \text{のとき：} 0 \\ r=1 & \text{のとき：} a \end{cases}$$

である．

本文②の不等式を証明しておく．

(i) $n=1$ のときは明らかに成立する．

(ii) $n=k$ のとき

$$(1+h)^k \geqq 1+kh$$

とすると，両辺に $(1+h)(>0)$ をかけて

$$(1+h)^{k+1} \geqq (1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$$

ゆえに不等式

$$(1+h)^n \geqq 1+nh$$

が成り立つ．(例題 5 p.16 参照)

例題 4

(1) 一般項が次の式で表される数列の収束・発散を調べよ．

(i) $\dfrac{\sqrt{3^n}+2^n}{2^n}$

(ii) $\dfrac{x^{n+1}}{1+x^n}$ $(x \neq -1)$

(2) $a_1=a$，$a_{n+1}=pa_n+q$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が収束するために，a, p, q のみたすべき条件を求めよ．また，そのときの $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解　説

(1) (i) $\dfrac{\sqrt{3^n}+2^n}{2^n}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}+1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3^n}+2^n}{2^n}=\mathbf{1} \quad \textbf{(収束)}$$

(ii) x の値で「場合分け」をしなければならない．

$\dfrac{x^{n+1}}{1+x^n}=y_n$ とおくと（ただし，$x \neq -1$）

(ア) $x>1$ のときは，$x^n\to\infty$ $(n\to\infty)$ であるから

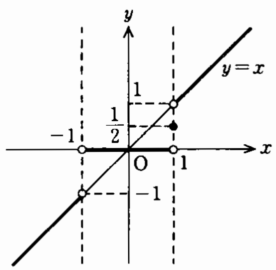
$$y_n=\frac{x}{\dfrac{1}{x^n}+1} \longrightarrow x \ (n\to\infty)$$

(イ)　$x=1$ のときは，$y_n=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}\ (n\to\infty)$

(ウ)　$-1<x<1$ のときは，$x^n\to 0\ (n\to\infty)$，$x^{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$ であるから
(分母)$\to 1$，(分子)$\to 0$
$\therefore\ \ y_n\to 0\ (n\to\infty)$

(エ)　$x<-1$ のときは，$\lim\limits_{n\to\infty}|x^n|=\infty$ であるから $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ となり

$$y_n=\frac{x}{\dfrac{1}{x^n}+1}\longrightarrow x\ (n\to\infty)$$



以上をまとめると次のようになる．

$$\textbf{収束し極限値は}\begin{cases}|x|>1\ \textbf{のとき：}\ x\\ x=1\ \ \textbf{のとき：}\ \dfrac{1}{2}\\ |x|<1\ \textbf{のとき：}\ 0\end{cases}$$

(2)　(i)　$p=1$ のときは，$a_{n+1}-a_n=q$（一定）で $\{a_n\}$ は q を公差とする等差数列であるから

$$a_n=a+(n-1)q$$

ここで $q\neq 0$ とすると $|a_n|\to\infty\ (n\to\infty)$ となり $\{a_n\}$ は発散する．したがって収束するための条件は　$q=0$（このとき a は任意）で，　**極限値は** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ である．

(ii)　$p\neq 1$ のときは，$\dfrac{q}{1-p}=\alpha$ とおくと与えられた漸化式は

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad ①$$

と変形され，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a-\alpha$，公比 p の「無限等比数列」であることがわかる．

$\{a_n\}$ の収束条件は $\{a_n-\alpha\}$ の収束条件と同じだから $\{a_n\}$ の収束する条件は

$$a_1=a=\alpha\quad または\quad |p|<1$$

とまとめられ，いずれの場合も極限値は $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ となる．

ゆえに，求める条件と極限値は

$$\begin{cases}\boldsymbol{p=1,\ \ q=0}\quad (\boldsymbol{a}\ \textbf{は任意})\ ;\ \boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a}\\ \boldsymbol{a=\dfrac{q}{1-p}}\quad (\boldsymbol{p\neq 1})\quad \textbf{または}\ \boldsymbol{|p|<1}\ ;\ \boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{q}{1-p}}\end{cases}$$

らしんばん

(1)については $x>1$, $x<-1$ のときをまとめて,

$|x|>1$ のとき

$$\frac{1}{x^n}\to 0\ (n\to\infty) \qquad \therefore\quad y_n=\frac{x}{\frac{1}{x^n}+1}\longrightarrow x\ (n\to\infty)$$

などとしてもよい.

(2)は「基礎解析」でやった「2項間漸化式」の基本である. 本文①から等比数列の一般項をあたえる公式にしたがって

$$a_n-\alpha=p^{n-1}(a_1-\alpha)$$

$$\therefore\quad a_n=\alpha+p^{n-1}(a-\alpha)$$

と, 第 n 項 a_n の形を示せば事情は, よりハッキリする.

$a=\alpha$ の場合を忘れないように!!

例題 5

次の不等式を利用して, $|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nr^n$ を求めよ. ただし, n は自然数とする.

$$(1+x)^n\geqq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\quad (x>0)$$

解 説 $r=0$ のとき, $\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ は明らかだから, $r\neq 0$ のときについて調べる.

$|r|<1$ より $|r|=\frac{1}{1+x}$ $(x>0)$ とおくことができるから, nr^n にあたえられた不等式を用いると

$$0\leqq n|r|^n=\frac{n}{(1+x)^n}$$

$$\leqq\frac{n}{1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2}=\frac{2n}{2(1+nx)+n(n-1)x^2}$$

$$=\frac{2}{2\left(\frac{1}{n}+x\right)+(n-1)x^2}\quad (\text{分母子を } n \text{ で割る})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

x は定数で $\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{n}+x\right)=2x$, $\lim_{n\to\infty}(n-1)x^2=\infty$ だから, この右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する.

したがって $r=0$ の場合もふくめて

$$\lim_{n\to\infty}|nr^n|=\lim_{n\to\infty}n|r|^n=0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}nr^n=0$$

らしんばん

➡「確率統計」で学ぶ「2項定理」を知っていれば，

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

で，$x>0$ のとき右辺の第4項以下は正だから

$$(1+x)^n\geqq 1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が得られる．

これを知らなくても，あたえられた不等式は「数学的帰納法」で証明することができる．(自分でやってみること——p. 14 参照)

➡ $(*)$を用いると $|r|<1$ のときは $\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ だけでなく

$$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0,\ \lim_{n\to\infty}n^3r^n=0,\ \cdots\cdots$$

について証明することができる．

一般に $\lim_{n\to\infty}n^kr^n=0$ (k は一定の自然数) を証明するには$(*)$の ($k+2$) 項までを用いればよい．本問は $k=1$ の場合である．

これらの証明は本文①の不等式で右辺の第1式にあたる部分を

$$\frac{n^k}{n\text{ の }(k+1)\text{ 次式}} \quad (\longrightarrow 0\ (n\to\infty))$$

でおさえることがポイントになっている．(前定理(3)は $k=0$ の場合である)

例題 6

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$$

によって定義されている．

(1) $0<a_n<2$ を証明せよ．

(2) $|a_{n+1}-2|<\dfrac{1}{2}|a_n-2|$ を証明せよ．

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

解　説　(1) 数学的帰納法で示す．

$n=1$ のときは明らか．

$n=k$ のとき，$0<a_k<2$ であるとする．

$$a_{k+1}-2=\sqrt{a_k+2}-2=\frac{a_k-2}{\sqrt{a_k+2}+2}<0 \quad (\text{有理化})\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$\therefore\quad a_{k+1}<2$

また，$a_{k+1}=\sqrt{a_k+2}>0$ は明らか．

$\therefore\quad 0<a_{k+1}<2$

ゆえにすべての自然数 n に対して $0<a_n<2$ が成り立つ．

(2) ①より

$$|a_{n+1}-2|=\frac{|a_n-2|}{\sqrt{a_n+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}|a_n-2|$$

$\sqrt{a_n+2}+2>2$ であるから

$$0<\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}<\frac{1}{2}\quad\therefore\quad |a_{n+1}-2|<\frac{1}{2}|a_n-2|$$

(3) (2)をくりかえし用いると

$$0<|a_n-2|<\left(\frac{1}{2}\right)|a_{n-1}-2|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n-2}-2|<\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad 0<|a_n-2|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ だから

$\lim_{n\to\infty}|a_n-2|=0$ （はさみうち）　　$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=2$

らしんばん

➡ 数列が漸化式で定義されている場合，**例題4** の(2) (p. 14) のように，その一般項 a_n が n の式 $f(n)$ で示されるときは $\lim_{n\to\infty}f(n)$ をしらべることになるが，本問についてはストレートに a_n を求めることができない．このような場合は「はさみうち」を利用する．

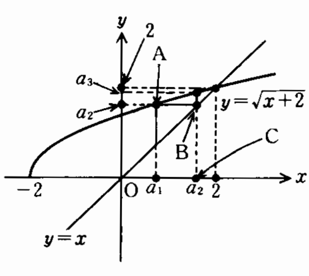
➡ 本問の場合，グラフを用いると $\{a_n\}$ の極限値が2になることを予想することができる．

それには $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ で　a_n を x，a_{n+1} を y とおいて得られる関数

$y=\sqrt{x+2}$ ……………………………………………………………(＊)

のグラフと，直線 $y=x$ のグラフを利用する．

直線 $x=a_1$ と(＊)との交点の y 座標は $\sqrt{a_1+2}=a_2$ で，交点は $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ となる．この点から x 軸に平行にひいた直線 $y=a_2$ と $y=x$ の交点は $\mathrm{B}(a_2, a_2)$ となり，この点Bから x 軸に下した垂線の足が $\mathrm{C}(a_2, 0)$ となる．このような操作を以下同様にくり返していくと，図からわかるように



$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots\cdots$

は次第に $y=\sqrt{x+2}$ と $y=x$ の交点の x 座標，すなわち

$$x=\sqrt{x+2} \qquad \therefore \quad x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore \quad x=2 \quad (\because \ x>0)$$

に接近していくことが読みとれて「$\{a_n\}$ の極限値は2であるらしい」ことがわかる．

➡ 本問の数列 $\{a_n\}$ は，前ページの図からわかるように

$$a_1<a_2<\cdots\cdots\cdots<a_n<\cdots\cdots\cdots<2$$

である．一般に

「すべての $\boldsymbol{n}$ に対して $\boldsymbol{a_n<a_{n+1}}$，$\boldsymbol{a_n<k}$（定数）」

である数列 $\{\boldsymbol{a_n}\}$ を，「単調増加で上に有界である」という．また，この不等号がすべて逆のとき「単調減少で下に有界である」といい，この2つの場合，数列 $\{\boldsymbol{a_n}\}$ は収束する． これは直観的にはごくあたりまえのことである．われわれとしてはこの事実をダマッテ用いることにする．

もう1つ，つけ加えておくと，$\{a_n\}$ が単調で有界ならば

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{単調増加のとき，} \displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n \leqq k} \\ \textbf{単調減少のとき，} \displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n \geqq k}\end{array}\right\} \quad \textbf{（等号に注目!!）}$$

となる――**「不等式と極限に関する定理」(1)**（p. 9 参照）

これらを用いて，本問の数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めてみよう．

まず，$0<a_n<2$ を証明しておく――これは本問(1)．（有界）

次に増減をしらべる．前ページの図から数列 $\{a_n\}$ が n とともに増加することは簡単に予想されるが，これを計算でやると

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+2}-a_n=\frac{(a_n+2)-a_n{}^2}{\sqrt{a_n+2}+a_n}=\frac{-(a_n-2)(a_n+1)}{\sqrt{a_n+2}+a_n}>0$$

$$\therefore \quad a_n<a_{n+1} \quad \textbf{（単調増加）}$$

したがって $\{a_n\}$ は収束する．その極限値を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n+2}=\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n+2} \qquad \therefore \quad \alpha=\sqrt{\alpha+2}$$

平方して整理すると

$$\alpha^2-\alpha-2=(\alpha+1)(\alpha-2)=0 \qquad \therefore \quad \alpha=-1,\ 2$$

$0<a_n<2$ より　$0\leqq\alpha\leqq2$（等号がはいることに注意!!）だから

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=2$$

➡ また p. 13 では「$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$」を示すのに「$(1+h)^n\geqq1+nh$」という不等式を用いたが，ここに述べたハナシを利用することもできる．

$$0<\cdots\cdots<|r|^n<\cdots\cdots<|r|^2<|r|$$

に注目すると　$\{|r|^n\}$ は収束する．

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}|r|^n=\lim_{n\to\infty}|r|^{n+1}=|r|\lim_{n\to\infty}|r|^n \qquad \therefore \quad (1-|r|)\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$$

で，$|r|\neq1$ を考慮すると

$$\lim_{n\to\infty}|r|^n=\lim_{n\to\infty}|r^n|=0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} r^n=0$$

2 無限級数

数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots$ の各項を $+$ でつないだものを「**級数**」という．

有限項の級数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

については「基礎解析」ですでに学んでいるが，ここでは無限項を $+$ でつないだ「**無限級数（単に級数ともいう）**」について学ぶ．

項の数が無限となると順次加えていくという操作はいつまでたっても終わらないので，「その和というのは何か」といったことをあらためて定義しなければならない．

(1) 無限級数の収束・発散と「無限級数の和」

数列 $\{a_n\}$ で，初項から第 n 項までの和（これを「**第 n 部分和**」という）$\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(=S_n$ とおく）を一般項とする無限数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ S_n,\ \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

が収束し「$\lim_{n\to\infty} S_n=S$（有限確定)」であるとき，無限級数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

は「**収束する**」といい，S をその「**和（実は極限値のこと)**」という．

すなわち

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

である．また，(B)を簡単に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とも書く．

(A)が「**発散する**」とき

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} S_n=\infty & ：\text{無限級数 (B) は正の無限大に発散する．} \\ \lim_{n\to\infty} S_n=-\infty & ：\text{(B) は負の無限大に発散する．} \\ \text{その他の場合} & ：\text{(B) は振動する．} \end{cases}$$

という――これらの場合をまとめて「**無限級数 (B) の和はない**」という．

実例をひいて説明する方がわかりやすい．

たとえば，無限級数

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

を考えてみよう．1からはじまって $+$ と $-$ が交互にあらわれる級数（初項

1, 公比 -1 の無限等比数列を初項から順につないだもの）である.

これを次のように計算したとする.

(i)　$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots\cdots$

$\quad=0+0+0+\cdots\cdots\cdots$

0 をいくら加えても 0　　　　$\therefore\quad S=0$

(ii)　$S=1-(1-1)-(1-1)-\cdots\cdots\cdots$

$\quad=1-0-0-\cdots\cdots\cdots$　　　　$\therefore\quad S=1$

(iii)　$S=1-1+1-1+1-\cdots\cdots\cdots$

$S=\quad 1-1+1-1+\cdots\cdots$

これらを辺々加えて

$2S=1+0+0+0+\cdots\cdots\cdots$　　　　$\therefore\quad S=\dfrac{1}{2}$

(i) (ii) (iii)で答がくいちがってくるが，どれが正しいか，というと実はどれも正しくない.

(i)，(ii)では和の結合則 $(a+b)+c=a+(b+c)$（どの部分を先に計算してもよい）を用いているが，これは有限個の加法で成り立つ法則で，無限級数の場合は成立しない.

また，(iii)の場合も無限項のままで加えるという操作はできない.

このように「**無限級数の和というのは有限項の和とは本質的にちがう**」ことをよく理解し，その定義にもとづいて正しく考察しなければならない.

たとえば①では，第 n 項までの和を S_n とすると，数列 $\{S_n\}$ は

$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\cdots\cdots$

となり，振動して収束しないことがわかる．したがって「無限級数①の和はない」のである.

このように「無限級数」では，「**和がある**」か「**和がない**」か，「**和があるとすれば，それはどのような値か**」ということが主なテーマとなる.

(2)　無限等比級数

「無限級数」の典型的なタイプのものとして，「無限等比級数」からハナシをはじめることにする.

初項 a，公比 r の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ からつくられる級数

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\left(=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\right)$$

を「無限等比級数」といい，a をこの無限等比級数の初項，r を公比という.

これが収束する条件は次の定理にまとめられる.

無限等比級数の収束条件に関する定理

$a \neq 0$ のとき，無限等比級数 $\{ar^{n-1}\}$ は

(1) $|\boldsymbol{r}|<\boldsymbol{1}$ のとき**収束**し，その和は $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1-r}}$

(2) $|\boldsymbol{r}|\geqq\boldsymbol{1}$ のとき**発散**する.

解　説　(1) まず第 n 部分和 S_n を求める.

$r\neq1$ のときは，$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}+\left(\dfrac{a}{r-1}\right)r^n$ ……………①

ここで $|r|<1$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ であるから

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$$

(2) (i) $r=1$ のときは，$S_n=na$ $(a\neq0)$ で

$$\begin{cases} a>0 \text{ ならば } \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty \\ a<0 \text{ ならば } \lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\infty \end{cases}$$

のように発散する.

(ii) $r>1$ のとき，①で

$$\begin{cases} a>0 \text{ ならば } \left(\dfrac{a}{r-1}\right)r^n \longrightarrow \infty \ (n\to\infty) \\ a<0 \text{ ならば } \left(\dfrac{a}{r-1}\right)r^n \longrightarrow -\infty \ (n\to\infty) \end{cases}$$

でいずれも発散する.

(iii) $r\leqq-1$ のときは，$n\to\infty$ に対して数列 $\{r^n\}$ は振動し，したがって①をみればこの級数も振動することがわかる.

らしんばん

➡ まず「有限」のハナシとして第 $\boldsymbol{n}$ 部分和 $\boldsymbol{S_n}$ を $\boldsymbol{n}$ の式で表し，その上で $\boldsymbol{n\to\infty}$ としている．すなわち，数列 $\{\boldsymbol{S_n}\}$ の極限の問題に帰着させて考えていることに注目!!

この考え方は他の「無限級数」を扱うときも同様で，このことについてはあとでくわしく述べることにする.

➡ 「無限等比数列」の収束条件は $\boldsymbol{-1<r\leqq1}$ (p. 13) であった．これに対して「無限等比級数」の収束条件は $\boldsymbol{-1<r<1}$ であるから混同しないように注意しなければならない.

例題 7

(1) ある無限等比級数の和は 12 で，その各項を平方して得られる無限級数の和は 36 であるという．はじめの無限等比級数の初項と公比を求めよ．

(2) 次の循環小数を分数になおせ．

(i) $0.\dot{3}\dot{4}$

(ii) $3.1\dot{4}1\dot{6}$

解 説 (1) 初項を a，公比を r とすると，この等比級数は和が 12 だから

$$\frac{a}{1-r}=12 \ (|r|<1) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad a=12(1-r) \quad \cdots\cdots ①'$$

各項を平方した級数は，初項 a^2，公比 r^2 の等比級数で

$$\frac{a^2}{1-r^2}=36 \qquad \therefore \quad \frac{a}{1-r}\cdot\frac{a}{1+r}=36 \quad \cdots\cdots ②$$

①をこれにいれて

$$12\cdot\frac{a}{1+r}=36 \qquad \therefore \quad \frac{a}{1+r}=3$$

$$\therefore \quad a=3(1+r) \quad \cdots\cdots ③$$

$$\therefore \quad 12(1-r)=3(1+r) \quad (\because ①', ③)$$

$$\therefore \quad 4(1-r)=1+r \qquad \therefore \quad r=\boldsymbol{\frac{3}{5}} \ (\text{これは } |r|<1 \text{ をみたす})$$

③に代入して

$$a=3\left(1+\frac{3}{5}\right)=\boldsymbol{\frac{24}{5}}$$

(2)(i) $0.\dot{3}\dot{4}=0.34+0.0034+0.000034+\cdots\cdots$

$$=\frac{34}{100}+\frac{34}{100^2}+\frac{34}{100^3}+\cdots\cdots$$

これは初項 $\frac{34}{100}$，公比 $\frac{1}{100}$ の無限等比級数ゆえ

$$0.\dot{3}\dot{4}=\frac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\boldsymbol{\frac{34}{99}}$$

(ii) $3.1\dot{4}1\dot{6}=3.1+0.0\dot{4}1\dot{6}$

$$=3.1+0.0416+0.0000416+\cdots\cdots$$

$$=3.1+\frac{416}{10^4}+\frac{416}{10^4\cdot 10^3}+\cdots\cdots\cdots$$

第 2 項以下は初項 $\frac{416}{10^4}$，公比 $\frac{1}{10^3}$ の無限等比級数である．

$$\therefore\quad 3.1\dot{4}1\dot{6}=3.1+\frac{\frac{416}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}}$$

$$=3.1+\frac{416}{9990}=\mathbf{\frac{6277}{1998}}$$

らしんばん

➡ (1)で $|r|<1$ ならば $|r^k|<1$ より，収束する無限級数の各項を k 乗して得られる無限級数も収束する．

➡ 既約分数 $\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b\neq 0)$ は，分母の a が 2，5 以外の素因数をもたなければ有限小数で表される——適当に分母子に 2，5 をかけて分母を 10^k の形に変形すればよい．逆に，有限小数は分母が 10^k の形の分数になおせるので，これを既約分数になおしたとき，分母は 2，5 以外の素因数をもたない．まとめると

(既約分数が有限小数になる)⇔(分母が 2，5 以外の素因数をもたない)

このことから分母が 2，5 以外の素因数をもつ既約分数を小数になおすと無限小数になることがわかる．その計算の方法を，正の既約分数 $\frac{b}{a}$ (a，b は正整数) で説明すれば「**a で b を割って〝余り〟を 1 桁くりあげ，さらに a で割る**」という操作をくり返し「**つぎつぎにでてくる〝商〟を書いていく**」わけだが，a で割った余りは 1 から $a-1$ までの $(a-1)$通りしかないので a 回の割算のうち同じ余りが必ずどこかにあらわれるはずである．そこから先の割算は前のくり返しになり，出てくる商も同じくりかえしになる．

すなわち，既約分数 $\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b\neq 0)$ は有限小数かまたは循環小数で，a 個より少ない数字で表される．

➡ 循環小数を分数になおすときは次の公式が成立する．

$$0.\dot{a}_1a_2\cdots\cdots\cdots\dot{a}_n=\frac{a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots\cdots\cdots 9}_{n\text{ 個}}}$$

$$0.a_1a_2\cdots\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\cdots\cdots\dot{b}_n$$

$$=\frac{(a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_mb_1b_2\cdots\cdots b_n)-(a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_m)}{\underbrace{99\cdots\cdots\cdots 9}_{n\text{ 個}}\,\underbrace{00\cdots\cdots\cdots 0}_{m\text{ 個}}}$$

なぜそうなるか，は本問の解と同じように無限等比級数になおして和の公式を

用いれば簡単に証明することができる.

たとえば $3.1\dot{4}1\dot{6}$ を既約分数になおすには

$$0.1\dot{4}1\dot{6}=\frac{1416-1}{9990}=\frac{1415}{9990}=\frac{283}{1998}$$

$$\therefore\quad 3.1\dot{4}1\dot{6}=3+\frac{283}{1998}=\frac{6277}{1998}$$

(3) 無限級数の「一般的な扱い」について

われわれは「無限級数の和」をその第 n 部分和 S_n を一般項とする「無限数列 $\{S_n\}$ の極限値」と定義した.

したがって「**数列の極限に関する定理**」(**p. 5**) はそのまま「**無限級数の和** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$」に適用される.

たとえば2つの無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき, その和をそれぞれ S, T とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S+T \quad (\text{収束})$$

となる. 証明は簡単で, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=S_n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k=T_n$ とすると

$$S_n+T_n=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$$

したがって, S_n+T_n は無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ の部分和であり

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=S+T$$

となる. 他の定理についても同じように考えればよい.

「$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束と $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$」に関する定理

無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ である.

解 説 $\{a_n\}$ の第 n 部分和を S_n とすると, $n\geqq 2$ のときは

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

であった. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するのでその和を S とすると $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$$

らしんばん

この定理の対偶は

「$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する」

となり，これは $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束性をしらべる有力な手がかりとなる．

しかし「この定理の逆」が成立しないことには注意しなければならない．

つまり $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ だからといって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するとは限らない．

たとえば $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ は正の無限大に発散する無限級数の代表的な例の1つであるが

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ である．(このハナシはあとで説明するp. 184)

例題 8

次の級数の収束・発散をしらべ，収束するならばその和を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots\cdots$

(2) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\cdots\cdots\cdots$

(3) $2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\cdots\cdots\cdots$

(4) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{4}{3^4}+\cdots\cdots\cdots$

解　説　第 n 項を a_n，第 n 部分和を S_n とする．

(1) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(\cancel{\sqrt{n}}-\cancel{\sqrt{n-1}})+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$

$$=\sqrt{n+1}-1 \longrightarrow \infty\ (n\to\infty)$$

となり**正の無限大に発散する．**

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$

ゆえに発散する．

特に正の数を次々に加えていくのだから**正の無限大に発散する．**

(3) 第 n 部分和 S_n は n が偶数のときと奇数のときでは形がちがってくる．

$n=2m-1$ のとき

$$S_{2m-1}=2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\cdots\cdots\cdots-\frac{m+1}{m}+\frac{m+1}{m}$$
$$=2$$

$n=2m$ のとき

$$S_{2m}=S_{2m-1}-\frac{m+2}{m+1}=2-\frac{1+\frac{2}{m}}{1+\frac{1}{m}}\longrightarrow 2-1=1\quad(n\to\infty,\ m\to\infty)$$

ゆえに $\lim_{m\to\infty}S_{2m}=1$, $\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=2$ となり一致せず**振動する.**

(4) $$3S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}$$

$$S_n=\quad\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$$

辺々ひくと

$$2S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n}{3^n}$$

$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^n}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{n}{3^n}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{3^n}\right\}$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ だから問題は「$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$ がどうなるか」であるがこれは 例題5 (p. 16) で $|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であったことに注目する. この r を $\frac{1}{3}$ とすると $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ となるので

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

らしんばん

(1)では

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

であるが, この第 n 部分和 S_n は

$$S_n=\sqrt{n+1}-1\longrightarrow\infty\qquad(n\to\infty)$$

で, これは先にのべた定理「**S_n が収束するならば $\lim_{n\to\infty}a_n=0$**」の逆が成立しな

い例の１つである．

また(2)はこの定理の対偶すなわち「$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば S_n は発散する」ハナシの実践である．

➡ (3)については S_{2m}，S_{2m-1} の形が違うことを問題にしているのではない!!

S_{2m} と S_{2m-1} の形が違っても極限値が等しければ級数は収束する．ここでは「$\lim_{m\to\infty} S_{2m} \neq \lim_{m\to\infty} S_{2m-1}$」が問題なのである．

また，この問題を２項ずつカッコでくくって次のような問題にかきかえてみる．

$$\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots\cdots\cdots$$

この無限級数では第 n 項が $\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ となり

$$S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_n=2-1=1$$

となって収束し，和は１となる．

このように，あたえられた無限級数の項を勝手にカッコでくくったりすると全く違う級数のハナシになってしまう——この級数の第 n 部分和は，(3)の級数の第 $2n$ 部分和になっている。したがって，**無限級数を安易にカッコでくくるわけにはいかない．** (p. 21参照)

またこの(3)についても $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ が示せれば(2)と同様の扱いができる．すなわち

$$a_{2m-1}=\frac{m+1}{m}=1+\frac{1}{m} \to 1\neq 0 \quad (m\to\infty)$$

$$a_{2m}=-\frac{m+2}{m+1}=-\frac{1+\dfrac{2}{m}}{1+\dfrac{1}{m}} \to -1\neq 0 \quad (m\to\infty)$$

から「$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$」であることがわかる．したがって第 n 部分和 S_n は「$n\to\infty$」のとき発散し，この「無限級数の和」は存在しない．

➡ (4)については，最初 S_n に３をかけておいて，$3S_n-S_n$ を計算したが，もちろん $S_n-\dfrac{1}{3}S_n$ を計算してもよい．

(4)の「$\dfrac{n}{3^n}\to 0 \ (n\to\infty)$」については，不等式

$$3^n>n(n+1) \quad (n\geqq 2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

をはじめに「数学的帰納法」で証明しておき，これを利用する「ヒント」あるいは「誘導」がつけられる場合もある．

（＊）の証明は次のようにやる．

(i) $n=2$ のときは明らかに成立．

(ii) $n=k$ ($\geqq 2$) で成立すると仮定すれば

$$3^k>k(k+1)$$

$$\therefore \quad 3^{k+1}=3\cdot 3^k>3k(k+1)=k^2+3k+2k^2>k^2+3k+2 \qquad (\because \quad k\geqq 2>1)$$
$$=(k+1)(k+2)=(k+1)\{(k+1)+1\}$$

この不等式を用いると

$$0<\frac{n}{3^n}<\frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ より，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$ がいえる．

第2節 関数の極限

われわれの扱う「関数」はおおむね次のように分類される．

- 代数関数
  - 有理関数
    - 整関数（整式）……………………………………(1)
    - 分数関数……………………………………………(2)
  - 無理関数…………………………………………………(3)
- (初等)超越関数——3 角関数，指数・対数関数 …………………………(4)

(1)，(2)の極限については「基礎解析」でその基本の考え方を学んだ．ここではおもに(3)，(4)の極限について解説し，その上で「関数の連続性」などについて考えることにする．

1 関数の極限

「関数の極限」についての考え方は基本的には「基礎解析」の場合と同じであるが，さらにつけ加えておかなければならないことがいくつかある．そこからハナシをはじめることにする．

(1) 「$x\to\infty$」，「$x\to-\infty$」，「$x\to a\pm 0$」について

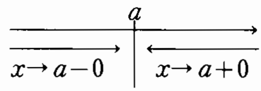
「∞」の記号は，「数列の極限」のところですでに説明したが，数列 $\{a_n\}$ の場合は，a_n は項の番号 n (自然数)の関数 $a_n=f(n)$ とみることができる．

このときの変数 n は自然数の値をとりながら，「とびとびに」変化していく．

これに対して関数 $f(x)$ で「$x\to\infty$」というのは，「x が実数値をとりながら限りなく大きくなっていく状態を表す」記号である．「$x\to-\infty$」の場合も考え方は同じである——「無限大」という数値があってそれに近づく，

というようなことではないので誤解してはならない．

また「基礎解析」では，「$x \to a$」と書いて「x が限りなく a に近づく」といった．しかしこれには大まかに考えて「大きい方から近づくとき」と「小さい方から近づくとき」の2通りの近づき方がある．



「$\boldsymbol{x \to a \pm 0}$ ($\boldsymbol{a=0}$ のときは $\boldsymbol{x \to \pm 0}$ と略記する)」はこのことを一応キチンと区別する表現で，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \to a+0}:\ \boldsymbol{x} \textbf{ が } \boldsymbol{a} \textbf{ より大きい方から } \boldsymbol{a} \textbf{ に限りなく近づく．} \\ \boldsymbol{x \to a-0}:\ \boldsymbol{x} \textbf{ が } \boldsymbol{a} \textbf{ より小さい方から } \boldsymbol{a} \textbf{ に限りなく近づく．} \end{cases}$$

ということを表す記号である．

さて，「基礎解析」では，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ が収束するならばその「**極限値**」を次のように示した．

$$\lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x)=A} \ \textbf{(有限確定値)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

しかし実はこの表し方は，**「$\boldsymbol{x}$ がどのような近づき方をしても ($\boldsymbol{x \to a-0}$ のときも，$\boldsymbol{x \to a+0}$ のときもつねに) $\boldsymbol{f(x)}$ の値が $\boldsymbol{A}$ に限りなく近づくことを意味している」**のである．

注❶　x が a より小さい値をとって a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が B（有限確定値）に限りなく近づくならばこの B を，$f(x)$ の「**左方極限値**」といい

$$\lim_{x \to a-0} f(x)=B \quad \text{または} \quad x \to a-0 \text{ のとき } f(x) \to B$$

と表す．同様に x が a より大きい値をとって a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が C に限りなく近づくならばこの C を，$f(x)$ の「**右方極限値**」といい

$$\lim_{x \to a+0} f(x)=C \quad \text{または} \quad x \to a+0 \text{ のとき } f(x) \to C$$

で表す．

①はこの $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ **がともに** $\boldsymbol{A}$ **に等しい**，ということである．一般には必ずしも $B=C$ ではないので〝$\lim\limits_{x \to a}$〟を考えるときは上に述べた両方の場合を考えなくてはならない．

注❷　発散する場合については

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=\infty$ のとき：「$x \to a$ のとき $f(x)$ **は正の無限大に発散する**」

（あるいは「$f(x)$ の極限は ∞ である」）

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=-\infty$ のとき：「$x \to a$ のとき $f(x)$ **は負の無限大に発散する**」

（あるいは「$f(x)$ の極限は $-\infty$ である」）

という．$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)=-\infty$ などについても同様である．

注❸　「$x \to a$」の場合と同様に「$x \to \infty$」，「$x \to -\infty$」のときの $f(x)$ の極限についても考えることができる．以下実例で説明する．

例題 9

次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n+x^2-x+2}{x^2+x+1}$ (n は正整数)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x(x+\sqrt{x^2-4})$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

解 説 (1) 分母が２次式であることに注目!!

分母子を x^2 で割ると (x は十分大きいと考えられるから $x\neq 0$)

$$\frac{x^n+x^2-x+2}{x^2+x+1}=\frac{x^{n-2}+1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$x\to\infty$ のときは $\dfrac{1}{x}\to 0$, $\dfrac{1}{x^2}\to 0$ であるが x^{n-2} の極限が n の値にしたがって違ってくることに注意すると

$$\begin{cases} \boldsymbol{n=1}\ \textbf{のとき：}\ x^{n-2}=\dfrac{1}{x}\longrightarrow 0\ (x\to\infty)\ \textbf{収束し極限値は 1} \\ \boldsymbol{n=2}\ \textbf{のとき：}\ x^{n-2}=1\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{収束し極限値は 2} \\ \boldsymbol{n\geqq 3}\ \textbf{のとき：}\ x^{n-2}\longrightarrow\infty\ (x\to\infty)\ \textbf{正の無限大に発散する} \end{cases}$$

(2) $x(x+\sqrt{x^2-4})=x\cdot\dfrac{x^2-(x^2-4)}{x-\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{4x}{x-\sqrt{x^2-4}}$ ……………………①

この分母子を x で割るのだが，$x<0$ のときは $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ であるから

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{-\sqrt{x^2}}=-\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}}=-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}$$

($x\to-\infty$ であるから $x<0$ で考えればよい)

$$\therefore\ \lim_{x\to-\infty}x(x+\sqrt{x^2-4})=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}=\mathbf{2}\ \textbf{(収束)}$$

(3) $x\to\infty$ のとき

$$\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{1-2^{-2x}}{1+2^{-2x}}\ (\text{分母子を } 2^x \text{ で割った})\longrightarrow\frac{1}{1}=\mathbf{1}\ \textbf{(収束)}$$

($\because$ $x\to\infty$ のとき $2^{-2x}\to 0$)

らしんばん

➡ (2)で $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}=-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}$ となるところはマチガエやすいから注意すること．

一般に，$A<0$，$B\geqq 0$ のときは，$\sqrt{A^2}=|A|=-A$（根号の規約）であるから

$$\frac{\sqrt{B}}{A}=\frac{\sqrt{B}}{-\sqrt{A^2}}=-\sqrt{\frac{B}{A^2}}$$

である．

逆に，$A<0$，$B\geqq 0$ ならば

$$\sqrt{\frac{B}{A^2}}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A^2}}=\frac{\sqrt{B}}{-A}=-\frac{\sqrt{B}}{A}$$

である．

また，$x=-t$ とおくと，「$x\to-\infty$」のときは「$t\to\infty$」となる．このハナシを本問に用いると

$$\begin{aligned}x(x+\sqrt{x^2-4})&=(-t)(-t+\sqrt{(-t)^2-4})\\&=t(t-\sqrt{t^2-4})\\&=t\cdot\frac{4}{t+\sqrt{t^2-4}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{t^2}}}\end{aligned}\quad\left(\begin{array}{l}\text{今度は } t>0 \text{ で考えて}\\\text{いることに注意!!}\end{array}\right)$$

と変形される．あとは $t\to\infty$ とすればよい――これでやればまちがえない．

➡「不定形」について―― $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ を求める問題では，a を $f(x)$，$g(x)$ にそのまま入れると $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ という形になることが多い．たとえば $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ならば $\dfrac{0}{0}$，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}$ ならば $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になる．このような形になるものを「不定形」という．本問の(1)は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形である――この例でもわかるように $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ などの分母子を安易に約分して1などとしてはいけない．

このほかに「$\mathbf{0}\times\infty$」，「$\infty-\infty$」などの不定形がある．

しかしこれらの形のものは，式変形をうまく工夫すると $\dfrac{0}{0}$ または $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になおすことができて，極限値を調べやすくなることが多い．たとえば，$0\times\infty$ の形を例にとると

$$0\times\frac{1}{\dfrac{1}{\infty}}\quad\text{あるいは}\quad\frac{1}{\infty}\times\infty$$

と変形すれば，それぞれ $\dfrac{0}{0}$ あるいは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の極限として扱うことができる．

また「$\infty-\infty$」の形の不定形では「有理化」がよく利用される．

本問(2)の①の変形で説明すると

$$x(x+\sqrt{x^2-4})=\frac{4x}{x-\sqrt{x^2-4}}\left(=\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}-x}\right)$$

は，その「形だけに注目」すれば

$$-\infty(-\infty+\infty)=\frac{-\infty}{-\infty}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

になっている．「無理関数の極限」を扱う場合の分母または分子の「有理化」には，実はこのような背景があるわけである．

☛ (3)は，「$x\to\infty$」であるから分母子を 2^x で割ったが，「$x\to-\infty$」のときは分母子を 2^{-x} で割り

$$\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}\longrightarrow\frac{-1}{1}=-1\quad\left(\lim_{x\to-\infty}2^{2x}=0\right)$$

と変形することになる．

例題 10

次の極限をしらべよ．

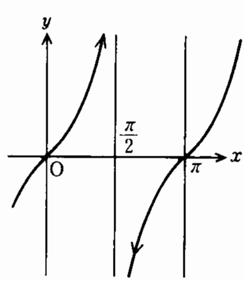
(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-[x])$　（ただし，$[x]$ は x をこえない最大の整数を表す）

解　説 (1) $y=\tan x$ のグラフからわかるように，「x が $\frac{\pi}{2}$ より小さい方から $\frac{\pi}{2}$ に近づく」のだから

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=\infty$$

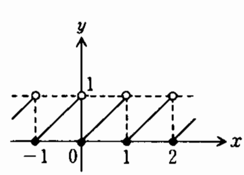
正の無限大に発散する．



(2) n を整数として，

$$n\leqq x<n+1\iff[x]=n$$

であるから，この n に 0，±1，±2，…… を入れて $y=x-[x]$ のグラフをかくと図のような線分群となる．ただし x 軸上の端点をふくみ直線 $y=1$ 上の端点は除くものとする．



このことに注意すると $x=1$ の付近では

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to1+0}(x-[x])=0\\ \displaystyle\lim_{x\to1-0}(x-[x])=1\end{cases}$$

となり「$x\to1-0$」と「$x\to1+0$」とでは，$x-[x]$ が接近していく目標が

くいちがっていることがわかる．

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ というのは，「x が a にどのような近づき方をしても，つねに $f(x)$ の値が1つの確定した値 b に近づく」ということであったから，この場合，極限値は存在しない．

らしんばん

本問(1)では $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$ であることもグラフから明らかである．また(1)で $x \to \frac{\pi}{2}-0$ というのは $\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \to +0$ ということであるから

$\frac{\pi}{2}-x=y\ (>0)$ とおくと $x=\frac{\pi}{2}-y$ で，$y \to +0$ となる．このことから本問(1)を

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \lim_{y \to +0} \tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \lim_{y \to +0} \frac{1}{\tan y} = \infty$$

とやってもよい．このように変数を置きかえて極限をしらべる方法も時には有効である．

(2)については $0 \leqq x < 1$ のとき $[x]=0$，$1 \leqq x < 2$ のとき $[x]=1$ であるから，グラフをかいてみなくても

$$\begin{cases} x \to 1+0 \text{ のとき}: x-[x] \to 0 \\ x \to 1-0 \text{ のとき}: x-[x] \to 1 \end{cases}$$

であることは明らかである．

なお，$x-[x]$ は x の小数部分のことである．

例題 11

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$ を求めよ．

解　説　直観的には，分母が限りなく大きくなって，分子の方は -1 から 1 までの有限の値をとりながら変化するだけなので，この結果が0であるということはほとんど明らかである．しかしこれをキチンとした形で表現するには「数列の極限」のところで述べた「不等式と極限に関する定理」にあたる「関数の極限」の場合の「不等式と極限に関する定理」をはじめに説明しておかなくてはならない．すなわち

定　理

(1)　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき

$f(x) \leqq g(x)$ ならば $\alpha \leqq \beta$

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ のとき

$\boldsymbol{f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)}$ ならば $\boldsymbol{\lim_{x \to a} h(x) = \alpha}$ (「はさみうち」)

である.

ただし,この定理で「$f(x) \leqq g(x)$」とは a を含む適当な実数範囲のどんな x の値に対しても $f(x) \leqq g(x)$ ということである.

本問ではこの定理の(2)——「はさみうち」を利用する.

まず,$x \to \infty$ のときについて考えるのだから $x > 0$ としてよい.

このとき

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1 \qquad \therefore \quad -\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

ここで $\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ であるから

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \mathbf{0}$$

らしんばん

基礎解析の関数の極限のところで出てくる諸定理は $x \to a$ のかわりに $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) としても成り立つ.また,無限数列の極限のところでのべた諸定理も,「$n \to \infty$, a_n」のかわりに「$x \to \pm\infty$ または $x \to a$, $f(x)$」とかきかえれば,そのまま関数の極限についての定理として成立するので,それらの1つ1つについて説明することはしない.

この例題も **例題 2** (p. 9) の「関数版」といったところである.

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

この極限に関する定理は,この先,「3 角関数の微積分」を展開する上で基礎となるきわめて重要な定理である.

「3 角関数の微積分」の基礎となる極限

$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ (ただし,角の単位は「ラジアン (弧度)」とする)

解 説 次に示す図を利用して「△ OAB, 扇形 OAB, △ OAT の面積の大小関係」から証明する.

いま $\boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{2}}$ にとると

$$\triangle \mathrm{OAB} < \text{扇形}\,\mathrm{OAB} < \triangle \mathrm{OAT}$$

であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x < \pi\cdot 1^2\cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sin x < x < \tan x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)} \cdots\cdots\cdots ①$$

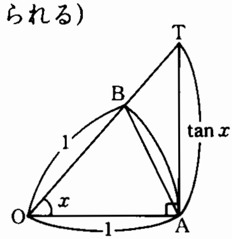
(この不等式は，このままの形でもよく用いられる)

各辺を $\sin x(>0)$ で割ると

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

さらにこの逆数をとると

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



ここで，$\lim\limits_{x\to+0}\cos x = 1$ であるから，間にはさまれた $\dfrac{\sin x}{x}$ についても

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

次に $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ にとり，$x = -x'$ とおくと $x' > 0$ で

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x')}{-x'} = \frac{-\sin x'}{-x'} = \frac{\sin x'}{x'}$$

であるから

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x'\to+0}\frac{\sin x'}{x'} = 1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②，③をあわせて

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

である．

らしんばん

➡ ここで，角の単位が「ラジアン」であることに注目!!

上の公式は，$|x|$ が十分小さいとき

$$\frac{\sin x}{x} \fallingdotseq 1 \qquad \therefore \quad \sin x \fallingdotseq x$$

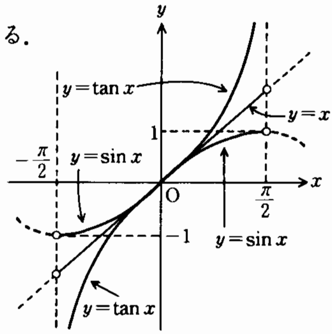
すなわち，x が0に近いとき，$\sin x$ の値は x を「ラジアン」で表した数値に等しい，ということを意味している．

たとえば

$$1^\circ=\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180}\ (\text{ラジアン})$$

$$\sin 1^\circ \fallingdotseq \frac{\pi}{180}\quad \left(\begin{aligned}\sin 1^\circ&=0.0174524\cdots\cdots\\ \frac{\pi}{180}&=0.0174532\cdots\cdots\end{aligned}\right)$$

くわしくは,「$\sin x$ を微分する」ときに説明する.



➡ $-\frac{\pi}{2}<x<0$ のときについては $x=-x'$ とおくと $0<x'<\frac{\pi}{2}$ であるから,①を用いて

$\sin x'<x'<\tan x'$

$\therefore\quad \sin(-x)<(-x)<\tan(-x)$

$\therefore\quad \sin x>x>\tan x$

が得られる.本文の①とあわせてこれらの関係をグラフで示せば,右図のようになる.

例題 12

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\tan\theta$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

解 説

(1) $$\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\longrightarrow\mathbf{\frac{1}{2}}\ (\theta\to 0)$$

(2) $$\frac{\sin(\sin x)}{x}=\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\longrightarrow\mathbf{1}\quad (x\to 0\ \text{のとき}\ \sin x\to 0)$$

(3) $\theta-\frac{\pi}{2}=\varphi$ とおくと,$\theta\to\frac{\pi}{2}$ のとき $\varphi\to 0$,$\theta=\varphi+\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\tan\theta=\varphi\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\varphi}{\tan\varphi}\longrightarrow\mathbf{-1}\ \left(\theta\to\frac{\pi}{2},\ \varphi\to 0\right)$$

(4) 「(和 → 積) の公式」を用いる.

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}}{\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\theta\quad\left(\theta=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\ \text{とおいた}\right)$$

このとき

$$\theta=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\qquad(\text{有理化})$$

であるから $x\to\infty$ のとき $\theta\to 0$，したがって $\dfrac{\sin\theta}{\theta}\to 1$，

また

$$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqq 1\quad(\text{有限})$$

であるから

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\mathbf{0}$$

らしんばん

➡ (1), (2), (4)では $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ であることが基本!!

また，このことから

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}}=1$$

である．

➡ (3)の $\tan\varphi$ に関する極限の公式は次のようにして導く．

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta},\ \frac{1}{\cos\theta}\ \text{の極限値が存在!!}\right)$$

$$=1\cdot 1=\mathbf{1}$$

また，上の説明と同様にして $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}=1$ も示すことができる．

➡ (4)については $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqq 1$ (有限)

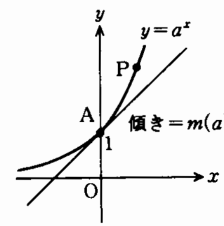
であることがポイント!!

——不定形 $\pm\infty\cdot 0$ にはならない．

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

これは,「指数・対数関数の微積分」を展開する上で,その基礎となる重要な公式である.この公式を説明するためには,ここに用いられている「e」という数について説明しなければならない.その歴史的経緯はともかくとして,ここでは「基礎解析」で学んだ「微分係数」の知識を借りて,その延長上でとりあえずハナシをはじめることにする.

指数関数 $y=a^x$ $(a>1)$ のグラフを描いて,この曲線上の点 $\mathrm{A}(0,1)$ における接線の傾きを $m(a)$,曲線上の動点を $\mathrm{P}(h,a^h)$ とすると接線の定義から



$$m(a)=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-a^0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

ところで,このグラフの概形から a の値として1に近い値をとると $m(a)$ は0に近い値をとり,a の値を大きくしていくと,$m(a)$ の値も大きくなっていくので「**ちょうど $m(a)=1$ となるような定数 a (>1) の値があるにちがいない**」と考えられる.そのような定数 a を e (イー) であらわせば

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

である.

なお **e は無理数で**,その値は

$$e=\underset{(フ\ ナ\ ヒトハチフタハチ\cdots\cdots)}{2.7\,1\,8\,2\,8\,1\,8\,2\,8}\,4\,5\,9\,0\,4\,5\,2\cdots\cdots\begin{pmatrix}\text{鮒一鉢二鉢一鉢}\\ \text{二鉢至極惜しい}\end{pmatrix}$$

であることが知られている.

例題 13

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ として,次の式を証明せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

解　説　(1)　$e^h-1=t$ とおくと $e^h=1+t$ (>0) である.

$$\therefore\quad \log_e(1+t)=\log_e e^h=h$$

$$\therefore\quad \frac{\log_e(1+t)}{t}=\frac{h}{e^h-1}=\frac{1}{\dfrac{e^h-1}{h}}$$

また, $t\to0$ のとき $h=\log_e(1+t)\to0$ であるから

$$\lim_{t\to0}\frac{\log_e(1+t)}{t}=\lim_{h\to0}\frac{h}{e^h-1}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\dfrac{e^h-1}{h}}=1$$

(2)　$\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\log_e(1+x)}{x}$

であるから, これに(1)を用いると

$$\lim_{x\to0}\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$$

$$\therefore\quad \log_e\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=1\quad\therefore\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

(3)　(2)の $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ は「$x\to+0$」のときも「$x\to-0$」のときも成立.

$$\therefore\quad \lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

ここで $x=\dfrac{1}{y}$ とおくと $y=\dfrac{1}{x}$ で, $x\to-0$ のとき $y\to-\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e\quad\therefore\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

らしんばん

➡ (3)で「$x\to+0$」を考えれば

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(*)$$

もなりたつ——本問であたえられた条件の式, それに(1), (2), (3)と, この $(*)$ が, 実は「同じ内容」を表していることに注目!!——$(*)$ を「e」の定義として, (1), (2), (3), そして $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ を示すこともできる.

以下これらを公式として用いてよい.

また, この「e」を底とする対数を「自然対数」といい「高校の微積分」では底を省略して単に「$\log x$」と書くことが多い. 以下そのように書くことにする.

➡ 歴史的には

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ (n\text{ は自然数})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(**)$$

という極限値として「e」は導入された.

この数列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ については次のように考えるとよい．

元金を1万円，利率 $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}$ 年ごとの複利法とする．そうすると1年間では n 回利息がつき，その元利合計は $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 万円となる．

また（＊）の $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ についても同様に考えると，これは「実数 x に対する利率 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x}$ 年ごとの複利法による元利合計」ということになる．

---

2 関数の連続性

(1) 連続・不連続

関数 $y=x^2$，$y=a^x$ $(a>0)$，$y=\sin x$ などは，グラフがその定義域で切れ目のない曲線になっている．

このような関数 $y=f(x)$ では，その定義域の任意の値 a に対して

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)\right) \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

一般に，関数 $y=f(x)$ の定義域のある値 a に対して①をみたすとき「**関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で連続である**」という．

ところが例題 1◐ の(2) (p. 34) で説明したように $f(x)=x-[x]$ などは $\lim_{x\to 1}(x-[x])$ が存在せず，したがって $a=1$ に対して①は成立しない．

「①が成立しない」というのは次の3つのいずれかの場合である．

(i) $f(a)$ が有限確定値として存在しない．

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ が有限確定値として存在しない．

(iii) $f(a)$ も $\lim_{x\to a} f(x)$ も有限確定値として存在するが，これらが等しくない．

このような場合「**$f(x)$ は $x=a$ で不連続である**」という．

また，集合 $\{x \mid a\leqq x\leqq b\}$ を閉区間，集合 $\{x \mid a<x<b\}$ を開区間といい，これらをそれぞれ $[a, b]$，(a, b) で表す．その他にもたとえば $a\leqq x<b$ を

$[a, b)$, $a<x$ を (a, ∞), $x \leqq b$ を $(-\infty, b]$ で表し，これらを総称して「区間」という．**ある区間Iのすべての値について $f(x)$ が連続のとき，「$f(x)$ は区間Iで連続である」という．**

特に閉区間，たとえば $[a,\ b]$ などの端点における連続性については

$\lim_{x \to a+0} f(x)=f(a)$ のとき：　$x=a$ で「右側連続」

$\lim_{x \to b-0} f(x)=f(b)$ のとき：　$x=b$ で「左側連続」

であるという．

関数の連続性については次の定理が成り立つ．

「関数の連続性」についての定理

$x=a$ において，$f(x)$, $g(x)$ が連続であるときは

$$f(x) \pm g(x),\quad f(x)g(x)$$

も $x=a$ で連続であり，さらに $g(a) \neq 0$ のときは

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

も $x=a$ で連続である．

解　説　もう少し具体的に説明すると，たとえば整関数

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

はすべての実数値に対して連続であり，分数関数の場合は分母を0としないすべての実数値に対して連続である．

また，$f(x)=\sqrt{x-1}$ のような無理関数は，その定義域（$x \geqq 1$）で連続である．3角関数 $\sin x$, $\cos x$ は全実数値に対して，$\tan x$ は $n\pi \pm \frac{\pi}{2}$（n は任意の整数）を除くすべての実数値に対して連続であり，指数関数

$a^x (a>0,\ a \neq 1)$ は全実数値に対して，対数関数 $\log_a x$（$a>0$, $a \neq 1$）は $x>0$ において連続である．

したがってこれらの関数は，その「定義域」ではどこでも連続であるといえる．このような関数を「連続関数」という．

また，連続関数の合成関数は当然連続関数である．

らしんばん

➡ このように，高校数学で扱う関数は，特にことわりのない限り「定義域」で「連続」なものがほとんどで，「不連続」が問題となるのは，x の範囲によって，いくつかの関数を「人工的」につなぎあわせた関数の「つなぎ目」に注目する場合などが多い．（発展問題 7（p.55）参照）

(2) 連続関数の性質

連続関数の重要な性質の1つとして次の定理が成り立つ．

連続関数を扱う上での基礎となる定理

閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は次の性質をもつ．

(1) その区間での最大値 M および最小値 m が存在する．

(最大値・最小値の存在定理)

(2) $m<k<M$ である任意の実数 k に対して

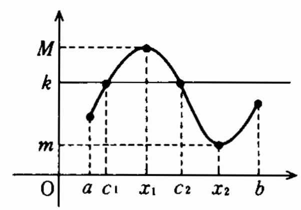
$$k=f(c) \quad (a<c<b)$$

となる実数 c が少なくとも1つ存在する． (中間値の定理)

解 説 (1)(2)ともほとんど直観的に認めるところである．

(1)は「閉区間以外の区間」では連続関数は必ずしも最大値や最小値をもつとは限らないということである．

(2)は $y=f(x)$ のグラフを描くと，これは「切れ目のない曲線」であるから x の値を a から b まで「連続的に」変化させてみると上に述べた状況がよくわかる．



らしんばん

➡ 実をいうと上に述べた2つの定理の厳密な証明は「実数の連続性」とよばれる実数の基本的な性質と深く関連しており高校数学の範囲では手におえない．しかしこれらの定理の主張するところは「直観的には」あまりにも明らかである．

したがってわれわれとしてはとりあえずのところこのことには目をつぶってハナシを進めることにする．そうするとこれらの定理は「連続関数の重要な性質」として

(1) ⟶「ロルの定理(p. 89)」を出発点とする諸定理

(2) ⟶「積分に関する平均値の定理(p. 188)」他

の根処を与えることになり，「微積分の理論構成」という点からもきわめて大きな意味をもつことになる．

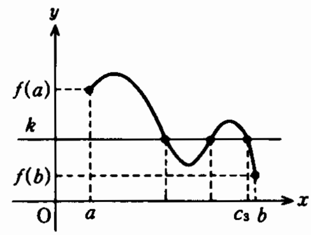
➡ 「中間値の定理」は一般には次のように表される．

定 理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ であるとする．このとき k を $f(a)$ と $f(b)$ との間（中間）の任意の実数とすると

$$f(c)=k \quad (a<c<b) \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

となる c が少なくとも1つ存在する．



本文に述べた定理の(2)はこの表現の a, b を最大値，最小値を与える x の値 x_1, x_2 で置きかえたときのハナシと考えればよい．(x_1 と x_2 との間に少なくとも1つの c がある——前ページの図でいえば c_2)

また（$*$）で $k=0$ にとると $f(a)$ と $f(b)$ は異符号（$f(a)\cdot f(b)<0$）で，「方程式 $f(x)=0$ が a と b との間に少なくとも1つの実数解をもつ」ための条件となりこの形でもよく用いられる——p. 129，149 を参照．

第3節
問題解法の研究

発展問題1—有理化

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 3n^2$ $(n=1, 2, \cdots\cdots\cdots)$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2n-1}}\right)$$

を求めよ．

解　説　$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ とおくと $n \geqq 2$ のときは

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 3(2n-1)$$

$n=1$ のときは，$a_1 = 3\cdot1^2 = 3$ だから，これは $n=1$ のときも成り立つ．

$$\therefore\quad a_n = 3(2n-1)\quad (n \geqq 1)$$

ゆえに $a_{2k} = 3(4k-1)$ であるから

$$a_2 + a_4 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n} = 3\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$$

$$= 3\left(4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = 3(2n^2+n)$$

同様にして $a_{2k-1} = 3(2(2k-1)-1) = 3(4k-3)$ であるから

$$a_1 + a_3 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} = 3\sum_{k=1}^{n}(4k-3)$$

$$= 3\left(4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 3n\right) = 3(2n^2-n)$$

よって求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3(2n^2+n)} - \sqrt{3(2n^2-n)}\right)$$

$$= \sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}$$

（有理化）

$$=\sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

らしんばん

➡ $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ から a_n を求めるには，$n\geqq 2$ と $n=1$ に分けて

$$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)\\ S_1\ (n=1)\end{cases}$$

としなければならない．それは，(∗) が $n=1$ では意味をもたないからである．

——これは「基礎解析」!!

発展問題 2—漸化式と極限

$a_1=b(>2)$，$a_{n+1}=a_n{}^2-2$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $a_n\geqq b$ であることを示せ．

(2) $a_{n+1}-c=a_{n-1}{}^2(a_n-c)$ $(n\geqq 2)$ が成り立つような定数 c を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_{n-1}}\right)^2$ を求めよ．　(やや難)

解　説 (1) 数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき，明らかに成立する．

$n=k(\geqq 2)$ のとき，$a_k\geqq b$ (>2) とすると

$$a_{k+1}-b=a_k{}^2-2-b\geqq b^2-2-b=(b-2)(b+1)>0$$

$$\therefore\quad a_{k+1}>b$$

よって，すべての自然数 n に対して

$$a_n\geqq b$$

が成り立つ．

(2) $a_n=a_{n-1}{}^2-2$ $(n\geqq 2)$ より　$a_{n-1}{}^2=a_n+2$

これと $a_{n+1}=a_n{}^2-2$ を与式に入れて

$$(a_n{}^2-2)-c=(a_n+2)(a_n-c)$$

これを整理して

$$(c-2)(a_n+1)=0$$

(1)より $a_n\geqq b>2$ ゆえ，$a_n+1\neq 0$

$$\therefore\quad c=\mathbf{2}$$

(3) (2)であたえられた式より

$$a_{n+1}-2=a_{n-1}^2(a_n-2)$$
$$a_n\ \ -2=a_{n-2}^2(a_{n-1}-2)$$
$$a_{n-1}-2=a_{n-3}^2(a_{n-2}-2)$$
$$\vdots$$
$$a_4\ \ -2=a_2^2(a_3-2)$$
$$a_3\ \ -2=a_1^2(a_2-2)$$

これらを辺々かけるのだが

$$a_k \geqq b>2 \quad \therefore \quad a_k-2 \neq 0 \ (k=3,\ \cdots\cdots\cdots,\ n)$$

であるから $(a_3-2)(a_4-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a_n-2)$ が約されて

$$a_{n+1}-2=(a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_{n-1})^2(a_2-2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

ここで $a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_{n-1}=p_{n-1}$ とおき

$$a_2=a_1^2-2=b^2-2,\quad a_{n+1}-2=a_n^2-4$$

を代入すると①は

$$a_n^2-4=p_{n-1}^2(b^2-4)$$

$$\therefore \quad \frac{a_n^2}{p_{n-1}^2}-\frac{4}{p_{n-1}^2}=b^2-4 \qquad \therefore \quad \left(\frac{a_n}{p_{n-1}}\right)^2=b^2-4+\frac{4}{p_{n-1}^2}$$

ところで，$a_n \geqq b>2$ より

$$p_{n-1} \geqq b^{n-1}>2^{n-1},\quad \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}=\infty \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} p_{n-1}=\infty$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{4}{p_{n-1}^2}=0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{p_{n-1}}\right)^2=b^2-4$$

らしんばん

➡ (3)で「辺々かける」という操作で $p_{n-1}^2=(a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_{n-1})^2$ を導いたが，これは数列の処理のときよく用いる手法で，たとえば

$$a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}=b_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$a_2-a_1=b_1$$

を辺々加えると

$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

というのと原理的には同じ発想である．

(2)の式で $a_n-2=x_n$ とおくと

$$x_{n+1}=a_{n-1}{}^2x_n \qquad \therefore \quad \frac{x_{n+1}}{x_n}=a_{n-1}{}^2$$ ((1)から x_n, a_{n-1} はすべて正)

で，両辺の対数をとると

$$\log x_{n+1}-\log x_n=2\log a_{n-1}$$
$$\log x_n-\log x_{n-1}=2\log a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$\log x_3 \quad -\log x_2=2\log a_1$$

これらを辺々加えて

$$\log x_{n+1}-\log x_2=2\sum_{k=1}^{n-1}\log a_k=2\log p_{n-1}=\log p_{n-1}{}^2$$
$$\therefore \quad \log x_{n+1}=\log(p_{n-1}{}^2\cdot x_2)$$
$$\therefore \quad x_{n+1}=p_{n-1}{}^2\cdot x_2$$

これは(3)の①の式である．

このように対数ではかけ算がたし算にかわるという性質を考えてみれば，「辺々加える」と「辺々かける」が同じ発想であることが了解される．

発展問題 3―単調・有界

$a_1=0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n{}^2+b)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．ただし，b は定数で $0<b<1$ とする．

(1) $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ．　**(やや難)**

(2) $a_n<1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であることを示せ．

(3) $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

解　説　例題❻ (p. 17) 参照!!

(1) 数学的帰納法で $a_{n+1}>a_n$ を証明する．

まず，$a_1=0$, $a_n>0$ $(n\geqq 2)$ は「帰納的に」明らかである．($\because$ $b>0$)

(i) $a_1<a_2$ は明らか

(ii) $a_{k-1}<a_k$ $(k\geqq 2)$ と仮定すると

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2}(a_k{}^2+b)-\frac{1}{2}(a_{k-1}{}^2+b)$$
$$=\frac{1}{2}(a_k+a_{k-1})(a_k-a_{k-1})>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$\therefore \quad a_k<a_{k+1}$$

したがって，すべての自然数 n に対して $a_n<a_{n+1}$ となる．

すなわち $\{a_n\}$ は単調増加である．

(2) $n=1$ のときは，$a_1=0<1$ で成立する．

$n=k$ のとき $a_k<1$ とすると

$0<a_k{}^2<1$，$0<b<1$ ゆえ　$a_k{}^2+b<2$

$$\therefore \quad a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k{}^2+b)<1$$

よって，すべての自然数 n に対して $a_n<1$

(3) $\{a_n\}$ は単調増加で上に有界ゆえ収束する．

そこで

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

とおくと

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n{}^2+b)=\frac{1}{2}\{(\lim_{n\to\infty} a_n)^2+b\}$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{1}{2}(\alpha^2+b) \qquad \therefore \quad \alpha^2-2\alpha+b=0$$

$a_n<1$ より $\alpha\leqq 1$ で，これをみたす α を求めて

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} a_n=\mathbf{1-\sqrt{1-b}}$$

らしんばん

➡ (1)の①の変形は「定数 b を消去するための変形」である．

これを

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2}(a_k{}^2+b)-a_k$$

$$=\frac{1}{2}(a_k{}^2-2a_k+b)=\frac{1}{2}\{(a_k-1)^2+b-1\}$$

とやると b が残って救い難いことになる．(右辺>0 が示せない)

➡ $y=\dfrac{1}{2}(x^2+b)$，$y=x$ のグラフを用いて，$\{a_n\}$ の変化状態をしらべてみよ．

発展問題 4―$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ の収束性

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の各項は0でないものとする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ は発散することを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ は収束するかどうかをしらべよ．

解　説　(1)　すべての n に対して $a_n \neq 0$ で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するから

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

でなければならない．

　したがって

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} \neq 0$$

　よって，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ は発散する．

(2)　$a_n=1$ とすると，$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 1 \neq 0$ だから $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ も発散する．

　しかし，$a_n = 2^{n-1}$ のときは $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するが，$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

となり，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ は収束する．

　すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ は収束することも発散することもある．

らしんばん

(2)の，$a_n=1$，$a_n=2^{n-1}$ はどこからきたか．

　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が確実に発散するように，とりあえず $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ の例をさがすことにする．

　そこで

「$\lim_{n \to \infty} a_n = k$ (k は 0 でない定数で各 $a_n \neq 0$) ならば $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{k} \neq 0$」

で，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ は発散する．

　ここでは最も簡単な例として $a_n=1$ としてみた．

　ところが $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ (各 $a_n \neq 0$) ならば $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ となり，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ の収束・発散についてはわからない．上の例では　$a_n = 2^{n-1}$　としたので収束したが $a_n = n$ などとすれば発散する．

発展問題 5 ― $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ の収束条件

a，b は実数とする．無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$ が収束するとき点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を求め，これを図示せよ．（やや難）

解　説　$\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$ が収束するためには

$$\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が必要である．

「$a=b$」または「$|a|<1$ かつ $|b|<1$」$\cdots\cdots$②

のときに成り立つことは明らかである．そこで②以外のときをしらべてみる．

(i)　$|a|\geqq 1$，$a\neq b$ のとき

$$a^n-b^n=a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

$a^n\neq 0$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n\neq 1$ ―― 「$\{r^n\}$ の収束・発散に関する定理」(p. 13) より $a=b$ のときのみ等号が成立する ―― ①は成立しない．

(ii)　$|b|\geqq 1$，$a\neq b$ の場合も同様．

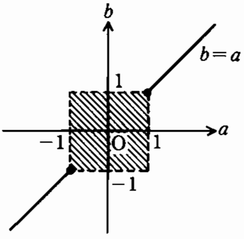
したがって，①が成立するための必要条件は②で，逆に②が成り立つときは

$a=b$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)=0$$

$|a|<1$，$|b|<1$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n-\sum_{n=1}^{\infty}b^n$$
$$=\frac{a}{1-a}-\frac{b}{1-b}$$



となり $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$ は収束する．（十分）

したがって求める範囲は②をみたす図の斜線部分（境界は除く）と直線 $b=a$ である．

らしんばん

➡ 上の解では「$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束と $\lim_{n\to\infty}a_n=0$」に関する定理 (p. 25) を用いて「①が必要である」というところから出発した．$\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$ の部分和 S_n を考え

てもよいが

$a \neq 1$, $b \neq 1$ のときは

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a^k-b^k)=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{b(1-b^n)}{1-b}$$

などとなってやりにくい.

本文②の

「$a=b$」または「$|a|<1$ かつ $|b|<1$」

の否定は

「$a \neq b$」かつ「$|a| \geqq 1$ または $|b| \geqq 1$」

となる――命題に関する「ド・モルガンの法則」という. これはさらに2つに分けられて

「$a \neq b$ かつ $|a| \geqq 1$」または「$a \neq b$ かつ $|b| \geqq 1$」

となる――「分配則」という.

発展問題6―無限級数の和

初項が1の無限級数がある. その偶数番目の項はすぐ前の項の $\frac{1}{5}$ 倍で, 奇数番目の項はすぐ前の項の3倍であるという. この級数の和を求めよ.

解　説　あたえられた無限級数をかきならべてみると

$$1+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$$

第 n 部分和 S_n を求めてみる.

(i)　$n=2m$ のとき

$$S_n=S_{2m}=1+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}$$

$$=\underbrace{\left\{1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\right\}}_{m\text{項}}+\frac{1}{5}\underbrace{\left\{1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\right\}}_{m\text{項}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^m}{1-\frac{3}{5}} \longrightarrow \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=3 \quad (n\to\infty,\ m\to\infty)$$

(ii)　$n=2m-1$ のとき

$$S_n=S_{2m-1}=S_{2m}-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1} \longrightarrow 3-0=3 \quad (n\to\infty,\ m\to\infty)$$

(i), (ii)より

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{m\to\infty} S_{2m}=\lim_{m\to\infty} S_{2m-1}=3$$

らしんばん

本問を次のようにやってはいけない．

$$S=\left\{1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots\cdots\right\}+\frac{1}{5}\left\{1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$
$$=\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=3$$

なぜかというと，21 ページで説明したように，**無限級数では「加える順序をかえてはならない」**からである．

参考までにもう 1 つ例をあげておくと

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0+\frac{1}{2^4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2^5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+0$$
$$+\frac{1}{2^7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\sin\frac{k\pi}{3}=S_n$ とおいて $n=6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, $6m+5$ に対して S_n を求めるのだがまず S_{6m} は

$$S_{6m}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{6(m-1)}}\right)$$
$$\longrightarrow\frac{21}{32}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad(n\to\infty,\ m\to\infty)$$

これを用いると $S_{6m+1}\sim S_{6m+5}$ が順次求められて

$$\left.\begin{aligned}
S_{6m+1}&=S_{6m}+\frac{1}{2^{6m+1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
S_{6m+2}&=S_{6m+1}+\frac{1}{2^{6m+2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
S_{6m+3}&=S_{6m+2}+0\\
S_{6m+4}&=S_{6m+3}-\frac{1}{2^{6m+4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
S_{6m+5}&=S_{6m+4}-\frac{1}{2^{6m+5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}\right\}\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}\quad(n\to\infty,\ m\to\infty)$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sin\frac{k\pi}{3}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

であることがわかる．

この場合には $n=6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, $6m+5$（起こりうるすべての場合）に対する第 n 部分和を求め，$n\to\infty$ $(m\to\infty)$ のときそれらが一致することを確認した上でないと「和」を求めたことにはならないわけである．

発展問題 7—r^n の極限と関数の連続性

関数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+(x^2-1)\sin ax}{x^n+x^2-1}$$

が，すべての実数 x について連続になるような正の定数 a の最小値を求め，そのときの関数のグラフをかけ．

解 説 $f(x)$ でまず注目することはこの式に混入している n が「$n\to\infty$」であること!! ——n を除くことからハナシがはじまる．

(i) $|x|<1$ のとき

$x^n\to 0$, $x^{n+1}\to 0$ $(n\to\infty)$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{0+(x^2-1)\sin ax}{0+x^2-1}=\sin ax\quad(x\neq\pm 1)$$

(ii) $|x|>1$ のとき

$$\frac{x^{n+1}+(x^2-1)\sin ax}{x^n+x^2-1}=\frac{x+\left(\dfrac{1}{x^{n-2}}-\dfrac{1}{x^n}\right)\sin ax}{1+\dfrac{1}{x^{n-2}}-\dfrac{1}{x^n}}\qquad(x\neq 0)$$

ここで

$$\frac{1}{x^{n-2}}\to 0,\quad \frac{1}{x^n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

であるから

$$f(x)=\frac{x+(0-0)\sin ax}{1+0-0}=x$$

(iii) $x=1$ のとき，$f(1)=1$

(iv) $x=-1$ のとき

$$\frac{(-1)^{n+1}+\{(-1)^2-1\}\sin(-a)}{(-1)^n+(-1)^2-1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}=-1$$

であるから

$$f(-1)=-1$$

以上の考察で

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)}\longrightarrow|x|<1\ \text{では} & f(x)=\sin ax\\ \text{(ii)}\longrightarrow|x|>1\ \text{では} & f(x)=x\end{array}\right\}\text{連続!!}$$

であるから，$f(x)$ の連続性が問題になるのは(iii)，(iv)の $x=\pm 1$ のときである．

$x=1$ で $f(x)$ が連続であるための条件は

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1+0} f(x)=f(1)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to1-0} \sin ax=\lim_{x\to1+0} x=1 \qquad \therefore \quad \sin a=1$$

同様に $x=-1$ で $f(x)$ が連続であるための条件を求めると

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1+0} f(x)=f(-1)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to-1-0} x=\lim_{x\to-1+0} \sin ax=-1$$

$$\therefore \quad \sin a=1$$

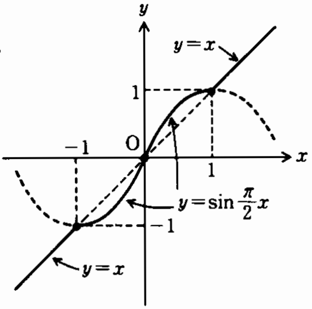
いずれにしても求める条件は $\sin a=1$ で，これをみたす正で最小の a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{\pi}{2}}$$

となり，この a の値に対する $f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2}x & (|x|\leqq1) \\ x & (|x|\geqq1) \end{cases}$$

で，そのグラフは右図のようになる．



らしんばん

➡ $f(x)$ が $x=a$ で連続であるための条件は

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

すなわち

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)}$$

で，このことについてはすでに説明した——p. 42 参照のこと．

➡ 類題をあげておく．

$$f_n(x)=\frac{\tan^{2n+1}x-\tan^n x+1}{\tan^{2n+2}x+\tan^{2n}x+1} \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

のとき $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ として $y=f(x)$ のグラフを描いてみよう．

いま $\tan x=t$ とおくと t は負でない実数をすべてとりうるから，これは次のように場合を分けて考える．

(i) $0\leqq x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき：$0\leqq t<1$ で $t^n\to0$ $(n\to\infty)$

$$\therefore \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=1$$

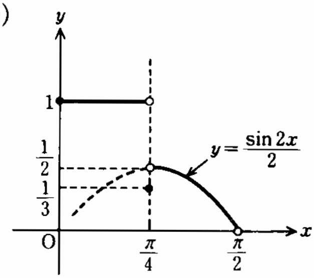
(ii) $x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき：$t=1$ で $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$

(iii)　$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき：$t>1$ で $t^n\to\infty$ $(n\to\infty)$

$$\therefore\quad f_n(x)=\frac{t^{2n+1}-t^n+1}{t^{2n+2}+t^{2n}+1}=\frac{t-\dfrac{1}{t^n}+\dfrac{1}{t^{2n}}}{t^2+1+\dfrac{1}{t^{2n}}}$$

$$\longrightarrow\frac{t}{t^2+1}=\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}\quad(n\to\infty)$$

$$=\cos^2 x\tan x=\cos x\sin x=\frac{\sin 2x}{2}$$



以上より，グラフは図のようになる――グラフでもわかるようにこの関数は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で不連続である．これを計算で確かめる．

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}f(x)=1\\ \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{\sin 2x}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)\ \text{が存在しない}$$

しかし，このときの関数値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ は存在して，上の1でも $\dfrac{1}{2}$ でもない値

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$$

であるところがおもしろい．

発展問題 8―$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

Oを中心とし，半径1の円周を n 等分し，分点を順に A_0, A_1, A_2, ……, A_{n-1} とする．$k=0$, 1, 2, ……, $n-1$ に対し，半径 OA_k 上に A_k から $\dfrac{k}{n}$ の距離にある点 B_k を定める．また，B_n は中心Oとする．このとき，次の極限値を求めよ．

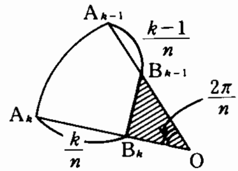
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\triangle OB_{k-1}B_k$ **(やや難)**

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}n\overline{B_{k-1}B_k}^2$ **(やや難)**

解　説　(1)　$\triangle OB_{k-1}B_k=\dfrac{1}{2}\overline{OB}_{k-1}\cdot\overline{OB}_k\sin\dfrac{2\pi}{n}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)k+\frac{k^2}{n^2}\right\}\sin\frac{2\pi}{n}$$



であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}\triangle OB_{k-1}B_k$$

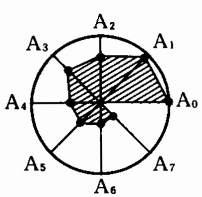
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)(n-1)-\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{n}-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}\sin\frac{2\pi}{n}$$

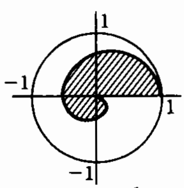
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\triangle OB_{k-1}B_k=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{3n}\right)\cdot 2\pi\left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$



たとえば $n=8$ の場合



単位円の $\frac{1}{3}$

(2) 余弦定理で $\overline{B_{k-1}B_k}^2$ を計算した後で，$\sum_{k=1}^{n}n\overline{B_{k-1}B_k}^2$ をまともに計算するのをさけて，(1)の結果を利用するようにもっていく．

$$\overline{B_{k-1}B_k}^2=\overline{OB_{k-1}}^2+\overline{OB_k}^2-2\overline{OB_{k-1}}\cdot\overline{OB_k}\cos\frac{2\pi}{n}$$

$$=(\overline{OB_{k-1}}-\overline{OB_k})^2+2\overline{OB_{k-1}}\cdot\overline{OB_k}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$=\frac{1}{n^2}+4\cdot\triangle OB_{k-1}B_k\cdot\left(\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}\right)\quad(1\leqq k\leqq n-1)$$

また，$n\overline{\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{B}_n}^2=n\overline{\mathrm{OB}_{n-1}}^2=n\left(1-\dfrac{n-1}{n}\right)^2\to 0$ $(n\to\infty)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\overline{\mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_k}^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} n\overline{\mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_k}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{n}+4n\left(\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}\right)\cdot\triangle\mathrm{OB}_{k-1}\mathrm{B}_k\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n-1}{n}+4n\left(\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\triangle\mathrm{OB}_{k-1}\mathrm{B}_k\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

ここで $\dfrac{2\pi}{n}=\theta$ とすると

$$n\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=n\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=n\cdot\sin\theta\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$=n\theta\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\quad\left(n\theta=n\cdot\frac{2\pi}{n}=2\pi\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$\longrightarrow\pi\quad(n\to\infty \text{ ならば } \theta\to 0)$$

であるから(1)の結果とあわせて②より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\overline{\mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_k}^2=1+4\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{3}=\mathbf{1+\frac{4\pi^2}{3}}$$

らしんばん

➡ (2)は(1)を利用せずに①をスナオに計算して求めることもできる．

$$\overline{\mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_k}^2=\frac{1}{n^2}+2\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}+2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}-\frac{2n+1}{n^2}k+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{n} n\overline{\mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_k}^2=1+2n\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\times\left\{(n+1)-\frac{(2n+1)(n+1)}{2n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right\}$$

$$=1+2n\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2\cdot\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}\cdot(n+1)\cdot\left(1-\frac{2n+1}{2n}+\frac{2n+1}{6n}\right)$$

$$=1+8\pi^2\frac{1-\cos\dfrac{2\pi}{n}}{\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)^2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{2n+1}{2n}+\frac{2n+1}{6n}\right)\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

$$\longrightarrow 1+8\pi^2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(1-1+\frac{1}{3}\right)=1+\frac{4\pi^2}{3}\quad\left(n\to\infty,\ \ \frac{2\pi}{n}\to0\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}(*)\ \text{で}\ \dfrac{2\pi}{n}=\theta\ \text{とおくと}\ n\to\infty\ \text{のとき}\ \theta\to0\ \text{で}\\ \dfrac{1-\cos\dfrac{2\pi}{n}}{\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)^2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\longrightarrow\dfrac{1}{2}\ \boxed{\text{例題}}\,\mathbf{12}\ (1)\ (\text{p. }38)\end{array}\right)$$

発展問題 9 ― $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

一般項が $a_n=\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots\cdots+n^n}{(n+1)^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $a_n<1$ を示せ．

(2) a_{n+1} を n と a_n を用いて表せ．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．（やや難）

解　説　(1)　数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のときは，$a_1=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}<1$

$a_k=\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots\cdots\cdots+k^k}{(k+1)^k}<1$ とすると

$$1+2^2+3^3+\cdots\cdots\cdots+k^k<(k+1)^k$$

であるから

$$a_{k+1}=\frac{1+2^2+3^3+\cdots\cdots+k^k+(k+1)^{k+1}}{(k+2)^{k+1}}<\frac{(k+1)^k+(k+1)^{k+1}}{(k+2)^{k+1}}$$

$$=\frac{(k+1)^k(k+2)}{(k+2)^{k+1}}=\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k<1$$

$$\therefore\quad a_{k+1}<1$$

よって，すべての自然数 n に対して $a_n<1$ となる．

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{(1+2^2+\cdots\cdots+n^n)+(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}$

ところが与式より

$$1+2^2+\cdots\cdots\cdots+n^n=(n+1)^n a_n$$

であるから

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^n a_n+(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}=\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^n}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})^{n+1}}\cdot\{\boldsymbol{a}_n+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\}$$

(3) (2)より

$$a_n=\frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}\cdot(a_{n-1}+n)\quad(n\geqq 2)$$

$0<a_{n-1}<1$ ゆえ

$$\frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}\cdot(0+n)<a_n<\frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}\cdot(1+n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1+n}{n}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<a_n<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

ここで**例題 13**「らしんばん」(p. 41) の公式より $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ であるから，①の両辺は $n\to\infty$ のとき，その極限値が $\dfrac{1}{e}$ となり

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}$$

らしんばん

本問(1)は2項定理を知っていれば，次のように処理してもよい

$$\begin{aligned}(n+1)^n&=n^n+{}_nC_1\cdot n^{n-1}+{}_nC_2\cdot n^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_{n-2}\cdot n^2+{}_nC_{n-1}\cdot n+1\\&\geqq n^n+n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n^2+n+1\cdots(*)\\&>n^n+(n-1)^{n-1}+(n-2)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+2^2+1\ \cdots\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

両辺を $(n+1)^n$ でわると

$$a_n=\frac{1+2^2+\cdots\cdots\cdots+n^n}{(n+1)^n}<1$$

またすべての n について $a_n>0$，$a_1=\dfrac{1}{2}<1$ であるから(2)を先に示しておけば $a_{n-1}<1$ を仮定することにより

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}(a_{n-1}+n)<\frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}\cdot(1+n)\\&=\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}<1\quad(n\geqq 2)\end{aligned}$$

すなわち「帰納的に」$a_n<1$ がいえて，(1)はいくらか簡単に示される.

(3)を示すだけなら上の不等式 (*) と (**) の関係から

$$n^n+n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+n^2+n+1$$

$$>n^n+(n-1)^{n-1}+(n-2)^{n-2}+\cdots\cdots+2^2+1^2>n^n$$

辺々を $(n+1)^n$ で割ると

$$\frac{n^n}{(n+1)^n}\Bigl\{\underbrace{1+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{n}\right)^n}_{\displaystyle = \frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n}}}\Bigr\}>a_n>\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

(初項：1，公比：$\dfrac{1}{n}$ の等比数列)

$$\therefore\quad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<a_n<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n}}$$

ここで $n\to\infty$ とすると $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\longrightarrow e$，$\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0$，$\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\longrightarrow 0$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e}$$ (「はさみうち」)

とやることもできる．

発展問題 10 — $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

$x\neq 1$ に対して，$f_1(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ とおく．

$n=2, 3, \cdots\cdots$ に対して

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)+n$$

によって関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots\cdots$ を定義する．

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(e^{\frac{1}{n}})}{n^2}$ を求めよ．　(やや難)

解　説　まず $f_n(x)$ を求めたい．あたえられた漸化式から「等比関数列」を導くことを考える．

$$f_n(x)+(pn+q)=x\{f_{n-1}(x)+(p(n-1)+q)\}\quad\cdots\cdots①$$

となるような定数 p，q がみつかれば，関数列 $\{f_n(x)+pn+q\}$ は x を公比とする等比関数列となるので

$$f_n(x)+pn+q=(f_1(x)+p+q)\cdot x^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

から $f_n(x)$ が求まる．

そこで，①を整理して

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)+p(n-1)x+qx-pn-q$$
$$=xf_{n-1}(x)+p(x-1)n+q(x-1)-px$$

これと与えられた漸化式を比較して

$$p(x-1)=1,\quad q(x-1)-px=0$$

$x \neq 1$ ゆえ

$$p=\frac{1}{x-1},\qquad q=\frac{x}{(x-1)^2}$$

したがって，②より

$$f_n(x)+\frac{n}{x-1}+\frac{x}{(x-1)^2}$$
$$=\left\{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{(x-1)^2}\right\}\cdot x^{n-1}=\frac{2x^n}{(x-1)^2}$$
$$\therefore\quad f_n(x)=\frac{2x^n-x}{(x-1)^2}-\frac{n}{x-1}$$

となる．

$$\therefore\quad \frac{f_n(e^{\frac{1}{n}})}{n^2}=\frac{2e-e^{\frac{1}{n}}}{\{n(e^{\frac{1}{n}}-1)\}^2}-\frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{e^h-1}{h}=1$ で，$h=\dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)=1\quad\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f_n(e^{\frac{1}{n}})}{n^2}=\frac{2e-1}{1}-\frac{1}{1}=\mathbf{2(e-1)}$$

らしんばん

本問では $f_n(x)+(pn+q)=x\{f_{n-1}(x)+(p(n-1)+q)\}$ となる p，q を求めたが，それは与えられた漸化式が

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)+\underbrace{n}_{\substack{\parallel\\ n\text{の1次式}}}$$

であったからで，もし

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)+\underbrace{(n-1)^2}_{\substack{\parallel\\ n\text{の2次式}}}$$

のように与えられるならば

$$f_n(x)+(pn^2+qn+r)=x\{f_{n-1}(x)+(p(n-1)^2+q(n-1)+r)\}$$

となる p，q，r を求めることになる．

実際にこれを計算すると

$$p=\frac{1}{x-1},\quad q=\frac{2}{(x-1)^2},\quad r=\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

となる.

$f_n(x)=a_n$ と簡略においてみるとあたえられた漸化式は

$$a_n=xa_{n-1}+n \quad \cdots\cdots (*)$$

で，以下基礎解析で学んだように

$$a_{n+1}=xa_n+(n+1) \quad \cdots\cdots (**)$$

として（**）から（*）を引けば

$$a_{n+1}-a_n=x(a_n-a_{n-1})+1$$

ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$$b_n=xb_{n-1}+1$$

となり，この漸化式から b_1 があたえられれば b_n は求められるので

$$f_n(x)=a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

で $f_n(x)$ を求めることもできる. $\left(b_n=\dfrac{2x^n-1}{x-1}\right.$ となる.$\left.\right)$