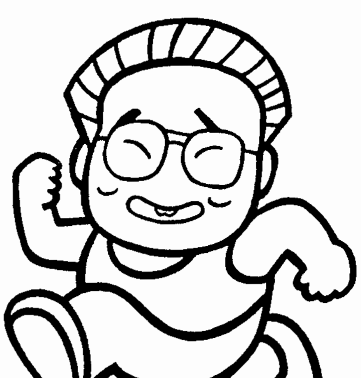
第5章

三角比

「三角比」は
主に「図形問題の総まとめ」だが
「三角関数」への展開を前提に
解説する.



〈「三角比」から「三角関数」への展開〉

「三角比」を用いて「図形のいろいろな性質」を研究することは，ずいぶんと古い時代から行われて来たものと思われる．しかし，今日(こんにち)ではこの「三角比」が威力を発揮するのは，本来の出発点であった図形を離れて

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

を「xの関数」と見る「**三角関数（基礎解析）**」としての**立場**であり，**この「数Ⅰ」の「三角比」は「三角関数への発展」を踏まえたものでなくてはならない**と考える．したがってこの章の構成は

第1節　三角比———「三角比」を定義し，「角の範囲」を拡張する

第2節　図形への応用———図形問題の処理

第3節　問題解法の研究

としたが，特に**第1節**では，まず「直角三角形」を描いて「鋭角の三角比」を定義し，次に「単位円」を用いて「**角の範囲を180°まで拡張する**」のだが，その過程を「丁寧(ていねい)に」解説した．これは一般の「三角関数」において「角の範囲を360°まで，あるいは一般角（『諸橋の基礎解析講義』p.54以下）まで拡張する」ための伏線であると考えてもらえばよい．もちろん「角の単位」には「度」を用い，「弧度法(同書 p.51)」を用いることは避けたが，「三角方程式，三角不等式」については「単位円」を利用する方法でその考え方の基本について解説することにした．

第2節では「**正弦定理**」，「**余弦定理**」を用いて「三角形を解く(本文 p.420)」ことがハナシの中心である．「**三角形の面積を求める公式**」とその**週辺の諸問題**も加えて，「**図形問題の総まとめ**」と考えてもらいたい．特に「三角形」は「多角形の中で最もシンプルなもの」であり，他の図形が(直線図形でないものは近似的にではあるとしても)有限個の三角形に分割され得ることを考えると「図形問題の中で三角比の占める役割」はきわめて大きいと考えなくてはならない．

第3節は**発展問題**を2題だけ用意した———**発展問題1**は「**$\sin x$をxの関数と見た合成関数**」，**発展問題2**は「**数Ⅰ**」の**範囲で扱える**「**加法定理(本来は基礎解析)**」である．いずれにしても「**三角比**」から「**三角関数**」への**展開を孕(はら)んだハナシ**である．

いずれにしてもこの分野の本格的な展開は「基礎解析」の「三角関数」を経て「微積分」ということになる．

第1節
三角比

「三角比」を用いて「三角形の辺と角の間の量的な関係」を調べたり，「与えられた条件に適する三角形」を決定したりする研究を**「三角法」**という．「三角法」の歴史はきわめて古く，古代のエジプト，バビロニア，中国などですでにその断片的知識が散見されるが，それはその土地，その時代の人々の「天文学」，「占星術」，「土地の測量」などの実用上の要請から用いられたもので，もちろん今日のような完成された形のものではなかったにちがいない．今日ではギリシァの数学者「ヒッパルコス(B.C.150年頃)」が「三角法の創始者」と考えられている．その後，エジプトの「プトレマイオス(A.C.150年頃)」の著書「アルマゲイト」には「正弦表」，「加法定理」なども見られるが「余弦定理」は500年頃のインド人の著書にはじめて登場し，「正接」などは10世紀の後半になってアラビア人によって用いられたといわれている．しかしまだ「記号」なども不統一で「$\sin x$」，「$\cos x$」のように**「xの関数(三角関数)」として理解されるのは17世紀になって「関数の概念」が形成されてから**のことになる．また，三角形の3つの角A，B，Cの対辺をa，b，cで表して「公式」を簡単化し，「三角法」を「解析学」の一部として論じたのは「オイラー(1707～1783)，スイス→ロシア」であったといわれている．

1　三角比

図形の性質の多くは，「線分の長さ」や「角の大きさ」の間の「相互関係」としてとらえられるところが多い．**最も簡単な図形である「三角形」について「辺と角の間の関係」を「直接に」とらえようとするところに「三角比」の考え方が生まれることになる**——「相似の概念」にもとづいて，「比例」で土地の測量を行った古代の考え方が，「三角比」の導入により，単純な計算でしかも「直接的に」行うことが出来るようになったわけである．

(1) 正接(タンジェント), 正弦(サイン), 余弦(コサイン)

とりあえず, 鋭(えい)角 θ ($0° < \theta < 90°$) に対して「$\tan\theta$(タンジェント)」, 「$\sin\theta$(サイン)」, 「$\cos\theta$(コサイン)」を定義する. 鈍(どん)角の場合は p.407以下で説明する.

$\tan\theta$, $\sin\theta$, $\cos\theta$ の定義

図のような直角三角形 ABC で

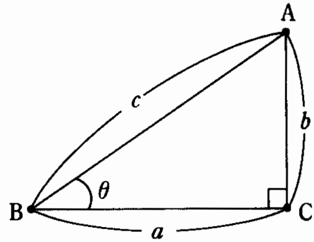
BC$=a$, CA$=b$, AB$=c$

とする. このとき鋭角 θ ($0° < \theta < 90°$) に対して「$\tan\theta$」, 「$\sin\theta$」, 「$\cos\theta$」を次のように定める.

すなわち

$$\tan\theta = \frac{b}{a},\quad \sin\theta = \frac{b}{c},\quad \cos\theta = \frac{a}{c}$$

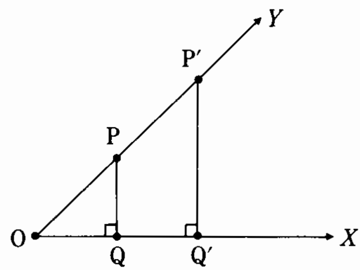
である.



解 説 たとえば右図のように, 2つの半直線 OX, OY のなす角が鋭角 θ ($0° < \theta < 90°$) であるとすると, 辺 OY 上の2点 P, P′ から辺 OX 上にそれぞれ垂線 PQ, P′Q′ を下すと

$\triangle \mathrm{POQ} \backsim \triangle \mathrm{P'OQ'}$

である. このとき**「対応する辺の相似比が等しい」**から



$$\frac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{Q'P'}}{\mathrm{QP}} \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{Q'P'}}{\mathrm{OQ'}}\ (=t\ とおく) \cdots\cdots ①$$

で, **「①の比の値 t」は「OY 上の点 P の位置に関係なく, 角 θ のみによって定まる数値」**であることがわかる. この「t の値」のことを**「角 θ」**の**「正接(タンジェント)」**といい, **「$\tan\theta$」**で表す.

あらためて「①の比の値 t」を「$\tan\theta$」と書くと

$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} = \tan\theta \qquad \mathrm{QP} = \mathrm{OQ}\tan\theta \longleftarrow \text{QP は OQ に比例!!}$$

であるから, 「角 θ に対する $\tan\theta$」が与えられ, 「OQ の長さ」がわかれば「QP の長さ」が自動的に決まることもわかる.

同様にして**「$\triangle$POQ と $\triangle$P′OQ′ の辺の比の関係」**から

$$\frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{Q'P'}}{\mathrm{QP}} \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{Q'P'}}{\mathrm{OP'}}\ (=s\ とおく) \cdots\cdots ②$$

で, **「②の比の値 s」**も**「OY 上の点 P の位置に関係なく, 角 θ のみによっ**

て定まる数値」であり，この「s の値」のことを「**角 $\boldsymbol{\theta}$**」の「**正弦(サイン)**」といい，「**$\boldsymbol{\sin\theta}$**」で表す．

「②の比の値 s」を「$\sin\theta$」と書くと

$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OP}}=\sin\theta \qquad \therefore \quad \mathrm{QP}=\mathrm{OP}\sin\theta \longleftarrow \text{QP は OP に比例!!}$$

である．

全く同様にして「**$\triangle$POQ と $\triangle$P′OQ′** の辺の比の関係」から

$$\frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OQ}} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OP'}}\ (=c\ \text{とおく})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

であり，「**③の比の値 $\boldsymbol{c}$**」も「**OY 上の点 P の位置に関係なく，角 $\boldsymbol{\theta}$ のみによって定まる数値**」であり，この「c の値」のことを「**角 $\boldsymbol{\theta}$**」の「**余弦(コサイン)**」といい，「**$\boldsymbol{\cos\theta}$**」で表す．このときも同様に

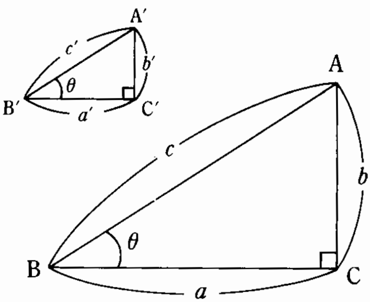
$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\cos\theta \qquad \therefore \quad \mathrm{OQ}=\mathrm{OP}\cos\theta \longleftarrow \text{OQ は OP に比例!!}$$

である．以上のことから，右図のような直角三角形 ABC があるとき

$$\tan\theta=\frac{b}{a} \qquad \therefore \quad b=a\tan\theta$$

$$\sin\theta=\frac{b}{c} \qquad \therefore \quad b=c\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{a}{c} \qquad \therefore \quad a=c\cos\theta$$



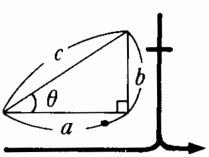
であり，この $\triangle$ABC と相似な直角三角形においては，注目する頂角 θ についての「$\tan\theta$」,「$\sin\theta$」,「$\cos\theta$」の値は，どの三角形においても等しい．

らしんばん

➡ 要するに「**$\boldsymbol{\tan\theta}$, $\boldsymbol{\sin\theta}$, $\boldsymbol{\cos\theta}$**」は，**直角三角形の「辺の比の値」**である．
次のように覚えるとよい．すなわち，「t, s, c」の筆記体にあわせて

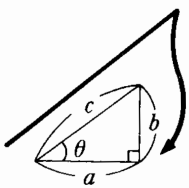
$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{b}{a}}$

⇩



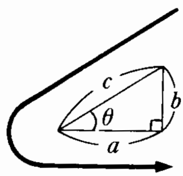
$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{b}{c}}$

⇩



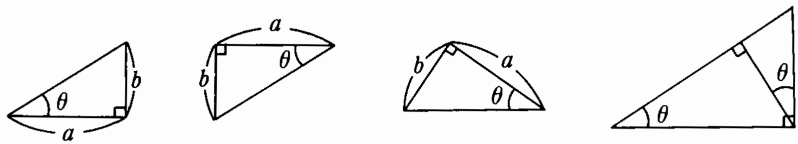
$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{a}{c}}$

⇩



である．そもそもこれが「tanθ，sinθ，cosθ」の頭（かしら）文字に由来するともいわれているが，その辺は定かではない．しかし，「いろいろな時代」の「いろいろな人々」がこうして覚えたに違いないことを思えば，何ともしみじみとして愉快ではないか．

➡ ここまでは，「注目する直角三角形」を，「右下が直角」「左カドが θ」のように置いて説明して来た――この置き方は「標準的」といえるほどにわかり易い．しかし，「三角比(sinθ，cosθ，tanθ)」は「直角三角形の３辺の比」であるので，どのように置いても「角θがどの角か」さえ決まればこの３つの値は決定してしまう．「いろいろな位置」に置かれてもダマされてはならない――図を描いて確かめておくとよい．



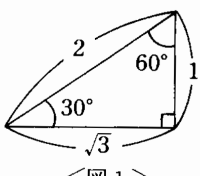
➡ **必ず覚えておかなければならない「三角比」がある――それは「30°，45°，60°の三角比の値」**で

$$\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ \sin30^\circ=\frac{1}{2},\ \ \cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

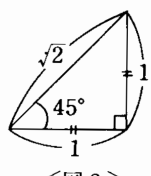
$$\tan45^\circ=1,\ \ \sin45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan60^\circ=\sqrt{3},\ \ \sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

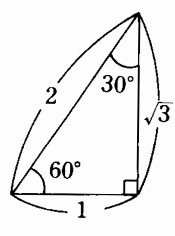
である．これは次の図のように**「典型的な直角三角形」**を描いてみれば簡単に了解することが出来る．



<図１>



<図２>



<図３>

ここで注目しておくことは

$$\sin30^\circ=\cos60^\circ=\frac{1}{2},\ \ \cos30^\circ=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

で，これは<図１>と<図３>とが，実は同じ図であり(裏返しにすれば重ね合せることが出来る)，「注目している角」が違うだけのハナシである．

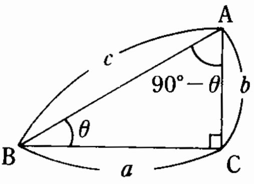
一般には次のように説明される．

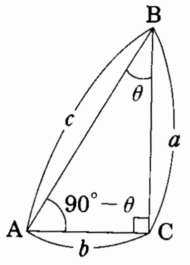
すなわち，右図で

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta \quad \left(=\frac{a}{c}\right)$$

$$\cos(90°-\theta)=\sin\theta \quad \left(=\frac{b}{c}\right)$$

$$\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta} \quad \left(=\frac{a}{b}\right)$$



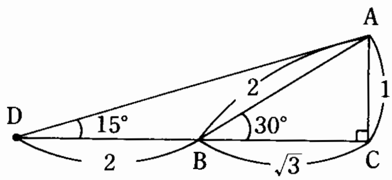


である．これは「直角三角形」では，
「直角以外の他の2つの角の和が90°（余角をなす）」であるから，図を描いてみれば「あたりまえ」のことである．

「15°，75°の三角比の値」も求めることが出来る．

たとえば

右の直角三角形を利用して$\sin 15°$，$\cos 15°$の値を求めよ．



まず，「ピタゴラスの定理」を用いてADの長さを求めておく．

すなわち

$$AD^2=CA^2+CD^2 \longleftarrow \text{ピタゴラスの定理}$$
$$=1^2+(2+\sqrt{3})^2=8+4\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad AD=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} \longleftarrow \text{2重根号(p.35以下)!!}$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \sin 15°=\frac{AC}{AD}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (=\cos 75°) \longleftarrow \text{有理化!!}$$

$$\cos 15°=\frac{CD}{AD}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} \longleftarrow \text{有理化!!}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad (=\sin 75°)$$

である——われわれは**「15°，75°の三角比の値」もここで獲得した**わけである．

これらは「基礎解析」で「加法定理」を学べば

$\sin(45°\pm30°)$，$\cos(45°\pm30°)$

の計算で簡単に求められる数値であるが，図のような三角形を描くと，「数Ｉ」の範囲で求められるところがおもしろい——『諸橋の基礎解析講義(p.71)』参照!!

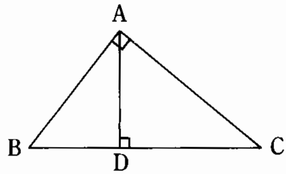
「初等幾何」でよく用いられる定理がある．

直角三角形の性質

図のような $\angle A=90°$ の直角三角形 ABC では

$$\mathbf{AD^2=BD\cdot CD}$$
$$\mathbf{AB^2=BD\cdot BC}$$
$$\mathbf{AC^2=CD\cdot BC}$$

が成り立つ.



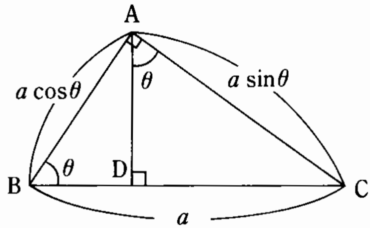
適当に「座標軸」を決めて,「図形と方程式の問題」として扱ってもよいが,「三角比」を用いると簡単にいく.

$\mathrm{BC}=a,\ \angle\mathrm{ABD}=\theta$

とおくと

$\mathrm{AB}=a\cos\theta,\ \mathrm{AC}=a\sin\theta$

であるから



$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos\theta=a\cos^2\theta$

$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin\theta=a\sin^2\theta$

$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\theta(=\mathrm{AC}\cos\theta)=a\sin\theta\cos\theta$

(ただし, $\cos^2\theta=(\cos\theta)^2$, $\sin^2\theta=(\sin\theta)^2$ である)

すなわち

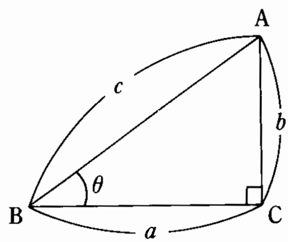
$\mathbf{AD^2=BD\cdot CD,\ AB^2=BD\cdot BC,\ AC^2=CD\cdot BC}$

である. これは「公式」として用いてよい.

本文では

$\cos\theta=\dfrac{a}{c},\ \sin\theta=\dfrac{b}{c}\quad\cdots\cdots(*)$

であった. △ABC は「$\angle C=90°$」の「直角三角形」であるから,「ピタゴラスの定理」より



$c^2=a^2+b^2\quad\therefore\quad c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore\quad \boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

$\therefore\quad \cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1\qquad\therefore\quad \boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

である. また, $(*)$から

$a=c\cos\theta,\ b=c\sin\theta$

とおくと

$\tan\theta=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c\sin\theta}{c\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

が導かれる――もちろんこれらも「公式」として用いてよい(p.412参照!!).

このことがわかると，「三角比($\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$)」の１つが与えられると「他の２つ」を簡単に求めることが出来る――このとき図を描くとよい．

たとえば

$$\sin\theta=\frac{3}{5}$$

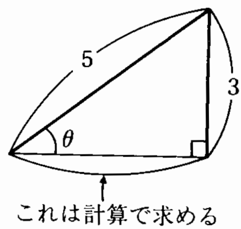
が与えられるときは，**「斜辺が５」**，**「直角をはさむ１辺が３」**，他の１辺を

$$\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$$

と計算して「直角三角形」を作り，「標準の位置(？)」に置いてみると

$$\cos\theta=\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{3}{4}$$

が「すぐに」わかる――この方法はなかなか重宝するときがある．



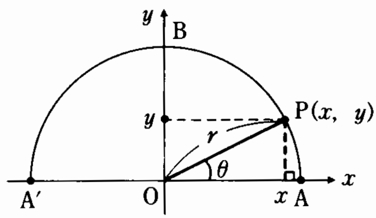
(２)「角の範囲」の拡張

これまでは「鋭角」に対しての「三角比」を考えたが，**「三角形一般の性質」を調べるためには，「鈍角」や「直角」の「三角比」も必要である．そこでこれらの角に対してもその「三角比」を定義することを考える．**

「x-y 平面」上で，x 軸よりも上の部分に，原点 O を中心とする半径 r の半円を描き，この半円と x 軸との交点を図のように

$$A(r,\ 0),\ A'(-r,\ 0)$$

とし，y 軸との交点を $B(0,\ r)$ とする．このとき，半円周上の動点 $P(x,\ y)$ に対し，「$\angle AOP=\theta$」とすると，点 P が A から B までの「円弧」上にあるとき，「θ は鋭角」で



$$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である――ここまでは「鋭角の三角比」で定義した通り!!

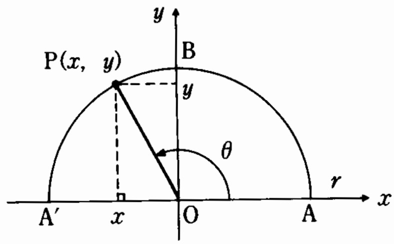
さらに点 P が，この半円周上の点 B の位置に来たときは **「$\theta=90°$」** であり，点 B から点 A′ までの「円弧」の上にあるときは **「θ は鈍角」** である．

実は，これらの場合についても「三角比」を「①と同じ式」で定義しようというわけである．

一般的に **「$0°\leqq\theta\leqq180°$」** の **「角 θ」** に対して **「$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$」** の値

を「①」で定義する．

それは，このように定義しても，これらの値は「**$\boldsymbol{\theta}$ の値**」によってのみ定まり，最初に与えた「**半径 $\boldsymbol{r}$ の値**」には関係しないからである．



たとえば「$\theta=135°$」として

$$r=\sqrt{2},\ r=2$$

の2つの場合を考えてみよう．当然

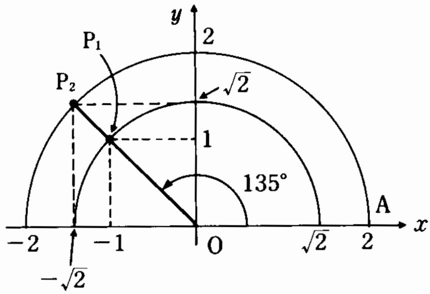
$$\angle AOP_1=\angle AOP_2=135°$$

で，2点 P_1，P_2 の座標は

$$P_1(-1,\ 1),\ P_2(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$$

であるから，①にしたがって

「sin135°，cos135°，tan135°」を求めてみると



P_1 において①は───→

$$\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 135°=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tan 135°=\frac{1}{-1}=-1$$

P_2 において①は───→

$$\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 135°=\frac{-\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tan 135°=\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-1$$

となり，「三角比の値」が「半径 r」に関係しないことがわかる．ただし，**「鈍角」の場合は「$\boldsymbol{\cos\theta}$，$\boldsymbol{\tan\theta}$」が「負の値」となる**ことには注意しなければならない．これらは「①」と「動点 $P(x,\ y)$ の x，y 座標」をにらみあわせれば簡単に判断することが出来る．

なお，「$\theta=0°$，90°，180°」のときは，点Pはそれぞれ3点A，B，A′と一致するから

$\sin 0°=0$，$\cos 0°=1$，$\tan 0°=0$

$\sin 90°=1$，$\cos 90°=0$，$\tan 90°$は定義されない

$\sin 180°=0$，$\cos 180°=-1$，$\tan 180°=0$

となる．これも「$P(x,\ y)$ の x，y 座標」と「①」との関係から簡単に確認されることがらである．

このように「角の範囲」を拡張すると，さらに新しい「公式」も導かれる．

「$0°\leqq\theta\leqq 180°$」である「角 θ」に対して，半円周上の点 $P(x,\ y)$ と点 $P'(x',\ y')$ を

$\angle AOP=\theta$, $\angle AOP'=180°-\theta$

にとれば，2点P，P′は「y軸に対して対称」であるから

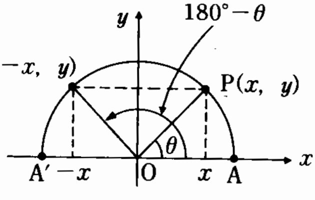
$x'=-x$, $y'=y$

である．このことから次の等式が成り立つ．すなわち

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta \quad \left(=\frac{y}{r}\right)$$

$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta \quad \left(=-\frac{x}{r}\right)$$

$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta \quad \left(=-\frac{y}{x}\right)$$

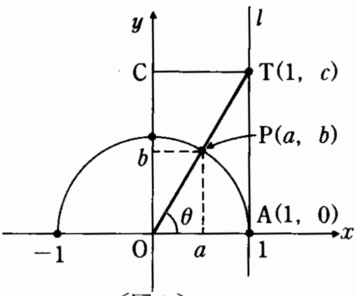


である．この「公式」を用いると「鈍角の三角比」を「鋭角の三角比」で表すことが出来る．

注　ここでは「角の範囲の拡張」を「0°≦θ≦180°」としたが，実は全く同様にして「180°以上の角，あるいは負の角に対する三角比」も定義される．しかしそれは「基礎解析」の範囲となるので『諸橋の基礎解析講義(p.51以下)』を参照されたい．

(3) 「三角比」の性質

「sinθ, cosθ, tanθの値」は「θの値」のみによって定まり，「円の半径r」に関係しないことはすでに述べた(p.408)．そこで，利用する円を「単位円(原点を中心とする半径1の円)」に決めておくと都合がよい——以下いろいろな場面で「単位円」を利用することになる．



<図1>

「単位円」とx軸の正の部分との交点をA(1, 0)とし，「0°≦θ≦180°」である「角θ」が与えられたとき，この「単位円」の周上の点P(a, b)をとって，「$\angle AOP=\theta$」とすると「cosθ, sinθの値」は

$\boldsymbol{\cos\theta=a,\ \sin\theta=b}$ ←——点P(a, b)のx, y座標!!

である．

「tanθ」については

$\theta\neq 90°$←——tan90°は定義されない!!

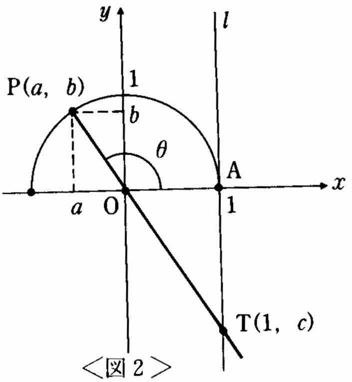
として，点A(1, 0)におけるx軸の垂線lと直線OPとの交点をT(1, c)

とすると「$\tan\theta$ の値」は

$$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{c}{1}=c \longleftarrow \left(\begin{array}{l} l\text{上にあ} \\ \text{らわれる} \end{array}\right)$$

である――「$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値」を「作図」することが出来た!!

以上のことをまとめると，P(a, b) は「単位円」の周上で「x 軸よりも下でない部分」を動くから，また点 T は「直線 l」上の全域を動くから



＜図 2＞

$$-1\leqq a\leqq 1 \iff -1\leqq\cos\theta\leqq 1$$
$$0\leqq b\leqq 1 \iff 0\leqq\sin\theta\leqq 1$$
$$c：\text{全実数} \iff \tan\theta：\text{全実数をとり得る}$$

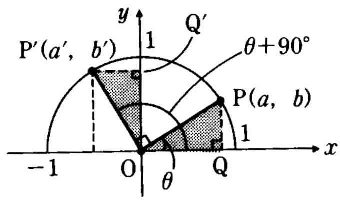
ことがわかる――＜図 1＞は「$0°\leqq\theta<90°$」の場合で，＜図 2＞は「$90°<\theta\leqq 180°$」の場合である．

また，「$0°<\theta<90°$」のとき，右図のように

$$\angle\mathrm{POQ}=\theta,\ \angle\mathrm{P'OQ}=90°+\theta$$

となる点 P(a, b)，P′(a', b') をとると

$$\triangle\mathrm{OPQ}\equiv\triangle\mathrm{OP'Q'}$$
$$\therefore\ a'=-b,\ b'=a$$



である．したがって「鋭角 θ」に対して次の「公式」が成り立つ．

$$\begin{cases} \sin(90°+\theta)=\cos\theta \\ \cos(90°+\theta)=-\sin\theta \\ \tan(90°+\theta)=-\dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

p.409の「３つの公式」とあわせて覚えておくとよい．

注❶ 「$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値」を「単位円周上の点の座標の値」としてとらえる考え方は，きわめて重要である――「三角方程式(三角比で与えられる方程式)」，「三角不等式(三角比で与えられる不等式)」などでは最も有効な解法といってもよい．

詳しくは「基礎解析」で研究してもらうとして，簡単な例をあげておく．

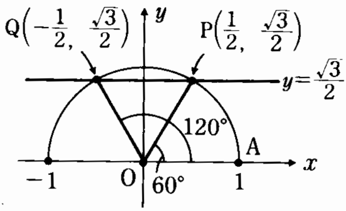
たとえば

> $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($0°\leqq\theta\leqq 180°$) を満たす θ の値を求めよ．

「y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$」であるような単位円周上の点は

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \therefore \quad x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow P\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ Q\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



として交点が求まるから，求める角は2つあり，それは

$$\angle \mathbf{AOP}=\mathbf{60°},\ \angle \mathbf{AOQ}=\mathbf{120°}$$

である．

これは「三角方程式」の例であるが「三角不等式」ではどうなるか．たとえば

$$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow 60°<\theta<120°$$

$$\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow 0°\leqq\theta<60°,\ 120°<\theta\leqq180°$$

は「単位円周上の2点P，Q」をにらめば一目瞭然である．

注❷ 「**θの変化**」に対する「**単位円周上の点Pの動き**」に注目してみよう．

$$\theta: 0° \longrightarrow 90° \longrightarrow 180°$$

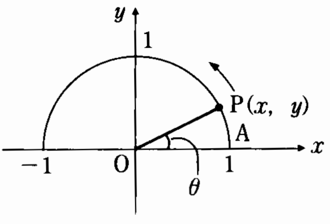
に対して

$$x: 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow -1$$

（単調減少）（単調減少）

$$y: 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$

（単調増加）（単調減少）



すなわち「$x(=\cos\theta)$，$y(=\sin\theta)$」が「**θの関数**」となっていることがわかる――つまり，「**三角関数**」である!!

「**基礎解析**」では，「**角の範囲**」を

動点Pが単位円周上をグルグル(右にも左にも)まわることが出来る

ように拡張し，1回転して点Aにくればあとは「くり返し」の状況までとらえ，「三角関数の最も基本的な性質」の1つとして「**周期性**」が問題にされたりするわけである．もちろんそのようにとらえた「**三角関数(sinθ，cosθ，tanθ)のグラフ**」も描くことが出来るが，それらについては『諸橋の基礎解析講義(p.64以下)』を参照されたい．

ここでは「数Ⅰ」として，「$0°\leqq\theta\leqq180°$」で考えることにする．

上に述べたことからわかることは

(i) 「**cosθ**」**は単調減少関数**$\longrightarrow$

$$\alpha<\beta \iff \cos\alpha>\cos\beta$$

(ii) 「**sinθ**」は「**90°**」で「**増加，減少**」**が入れかわる．**

α, βがともに「鋭角」： $\alpha<\beta \iff \sin\alpha < \sin\beta$（$\sin\theta$は単調増加）

α, βがともに「鈍角」： $\alpha<\beta \iff \sin\alpha > \sin\beta$（$\sin\theta$は単調減少）

(iii) **「$\tan\theta$」は単調増加関数（$\theta \fallingdotseq 90°$）**——p.409，410の＜図１＞，＜図２＞を参照!!

$\alpha<\beta \iff \tan\alpha < \tan\beta$

（ただし，α, βは「ともに鋭角」，または「ともに鈍角」とする）

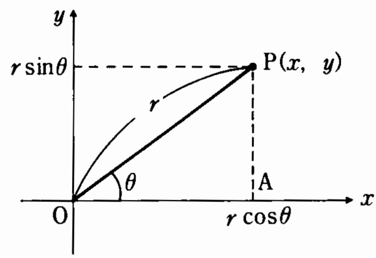
注❸ 本文では，基準にする円の半径rを「$r=1$」にすると都合がよいことを述べたが，「図形と方程式」などの扱いは必ずしもその限りではない．たとえば「x-y平面」上の点を$P(x, y)$とするとき，「角の範囲」を**注❷**に述べたように「自由にとれる」ところまで拡張すれば

$OP=r \qquad \angle AOP=\theta$（図!!）

などのときは

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$\longrightarrow P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$



とおく方が都合のよい場合もある——特に「円，楕(だ)円（２次曲線）のパラメーター表示」によく用いる方法である．p.264，277以下「２次曲線」については『**諸橋の代数・幾何講義**(p.310以下)』を参照されたい．

注❹ やはり「角の範囲」を「自由にとれる」ところまで拡張した状況で考えよう．そうするとp.410で述べた「$\tan\theta$」の定義

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \quad \left(=\frac{c}{1}\right)$$

は「**直線OPの傾き**」に他ならない．

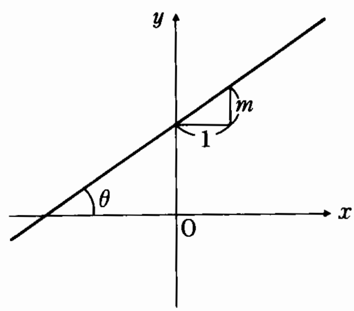
一般に，直線

$y=mx+n$

と，「**x軸の正方向**」とのなす角をθとすると

$$\tan\theta=\frac{m}{1}=m$$

である——これはすでにp.304で用いている．



（４）「三角比（$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$）」の相互の関係

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$の相互の関係

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$の間には次の関係が成り立つ．

(1) $\displaystyle \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

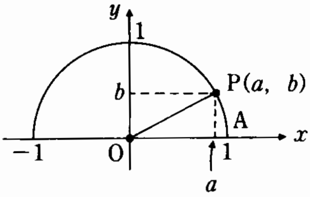
解説 (1) やはり「単位円」で考える．

単位円周上の点を P(a, b) とし「$\angle AOP=\theta$」とおくと

$a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$　…………①

∴　$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

⟵ (「$\theta=90^\circ$」のときは「$a(=\cos\theta)=0$」だから「$\tan\theta$」は存在しない)



(2)　①を用いて計算すると

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=a^2+b^2=1$　⟵ P(a, b) は単位円周上!!

∴　$\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

らしんばん

この定理から,「$\sin\theta$」,「$\cos\theta$」,「$\tan\theta$」のうち1つが与えられれば他の2つを計算することが出来る(p.406の方法と比較せよ).

たとえば

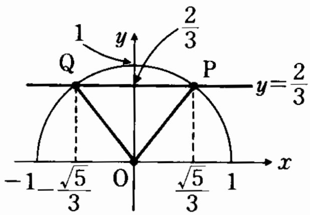
$\sin\theta=\frac{2}{3}$ であるとき, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ.

まず「$\sin\theta$」と「$\cos\theta$」の関係では「公式(2)」を用いる.

$\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

∴　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

∴　$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$



ここで,「$\cos\theta$」の値が2つ出て来る理由は

$\sin\theta=\frac{2}{3}$

を満たす点を単位円周上にとるとき, 図のように2点P, Qが対応していることによるものである. これらの値から「$\tan\theta$ の値」を求めるには「公式(1)」を用いて

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2}{3}}{\pm\frac{\sqrt{5}}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

としてもよいし, 図のP, Qの座標から「OP, OQの傾き」を計算してもよい.

なお「公式(2)」の両辺を「$\boldsymbol{\cos^2\theta}$」で割ると

$$\boldsymbol{\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

となり,「**$\cos\theta$ と $\tan\theta$ との直接の関係式**」が得られる. もちろんこれも「公式」として用いてよい.

例題 1

(1) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3+2\sqrt{2}$ $(0°<\theta<180°)$ のとき，$\tan\theta$，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0°<\theta<180°)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(i) $\sin\theta\cos\theta$　　(ii) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

解説

(1) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3+2\sqrt{2}$　$(0°<\theta<180°)$ ……①

「$\cos\theta=0$」とすると「$\sin\theta=1$」であるからこれは①を満たさない．
そこで「$\cos\theta\fallingdotseq 0$」として①の左辺の分母子を「$\cos\theta$」で割ると

$$\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=3+2\sqrt{2}\qquad\therefore\ \tan\theta+1=(3+2\sqrt{2})(\tan\theta-1)$$

$\therefore$　$2(1+\sqrt{2})\tan\theta=2(2+\sqrt{2})$　⟵ $\tan\theta$ について整理!!

$\therefore$　$\boldsymbol{\tan\theta=\sqrt{2}}$

$\therefore$　$1+(\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　⟵ $\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$ (p.413)

$\therefore$　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$　$\therefore$　$\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ……②

ところが「**θ の範囲**」が「**$0°<\theta<180°$**」であるから「**$\sin\theta>0$**」で

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{2}\qquad\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta>0$$

$\therefore$　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　⟵②

$\therefore$　$\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(2) (i) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$(0°<\theta<180°)$ ……③

両辺を 2 乗したいが，まず左辺の 2 乗を計算すると

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\underbrace{\boldsymbol{\sin^2\theta}+2\sin\theta\cos\theta+\boldsymbol{\cos^2\theta}}_{1}$$

$$=1+2\sin\theta\cos\theta$$　⟵ $\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$ (p.413)

これが「右辺の 2 乗$\left(=\dfrac{1}{2}\right)$」に等しいから

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　$\therefore$　$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}}$ ……④

(ii)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\boldsymbol{\sin^2\theta}-\sin\theta\cos\theta+\boldsymbol{\cos^2\theta})$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}\longleftarrow\text{(i)で求めた数値を用いた!!}$$

らしんばん

➡ (1)では「**角$\boldsymbol{\theta}$の範囲**」が「**$0°<\boldsymbol{\theta}<180°$**」であることをキチンと押えるところが1つのポイントになる．本文に示した②から

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\longrightarrow\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\sqrt{2}\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

と「機械的に(？)」やりたいが，そうはいかない．それは

$\boldsymbol{\tan\theta=\sqrt{2}>0}$（←──図の点P）……………………………………（＊）

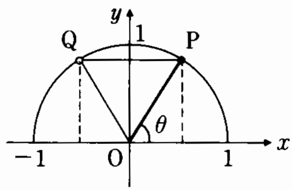
であるにもかかわらず，「公式」

$\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$(p.413)　　∴　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

に(＊)を入れて得られる「$\cos\theta$の値」には

$\tan\theta=-\sqrt{2}$（←──図の点Q）

の場合も含まれてしまうからである．



このように「2乗する」という操作がはいるときは大変キケンで，必ず最初の条件(本問では(＊))にもどって「同値関係」を確認しなければならない．

➡ (2)の(i)は「本文③」を2乗して「本文④」を得る．すなわち

$$③:\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow④:\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$$

であるが，このときは「2乗したまま」であるから問題はない──基本的には「平方根に開くとき」に問題が起こって来る．

たとえば

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0°<\theta<180°)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(i)　$\sin\theta-\cos\theta$　　　　(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

(i)「$\sin\theta-\cos\theta=t$」とおくと

$$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=1-2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\longleftarrow\text{本文④}:\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}<0$$

$$\therefore\quad t=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

しかし，「$0^\circ<\theta<180^\circ$」であることに注意すると「$\sin\theta>0$」であるから

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}<0 \longrightarrow \cos\theta<0$$

$$\therefore\quad t=\underbrace{\sin\theta}_{(+)}+\underbrace{(-\cos\theta)}_{(+)}>0 \qquad \therefore\quad t=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

となる．ちなみに「$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の和と積」が与えられているから，実際にこれらの値を求めることも出来る――「2次方程式の解と係数の関係(p.119以下)」を用いると，2次方程式は

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4} \longrightarrow \boldsymbol{t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{1}{4}=0}$$

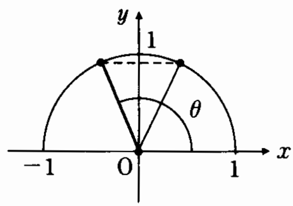
$$\therefore\quad 4t^2-2\sqrt{2}t-1=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$$

となり「$\boldsymbol{\sin\theta>0,\ \cos\theta<0}$」から

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore\quad \sin\theta-\cos\theta=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$



であることでもわかる．

(ii) 「本文(ii)」と同様に与えられた式を因数分解すると

$$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\boldsymbol{\sin^2\theta}+\sin\theta\cos\theta+\boldsymbol{\cos^2\theta})$$

1

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

となる．また，他の方法としては

$$\sin^3\theta\pm\cos^3\theta=(\sin\theta\pm\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta\pm\cos\theta)$$

$$\longleftarrow \quad \boldsymbol{a^3\pm b^3=(a\pm b)^3-3ab(a\pm b)}$$

の変形を利用してもよい．この式変形についてはすでにp.78で述べてある．

例題 2

次の方程式，不等式を解け．ただし，$0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\cos^2x-\sin x-1=0$

(2) $\sqrt{2}\sin x\leqq 1,\ \tan x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $|2\sin^2x-1|-\cos x<0$

解　説　(1)　$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$　…………①

まず，①の左辺を「**sin*x* の式**」に統一する．

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \longleftarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

であるから

$2(1-\sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$　$\therefore$　$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$　……②

ここで「**sin*x*=*t***」とおくと

$0° \leqq x \leqq 180° \longrightarrow 0 \leqq t \leqq 1$

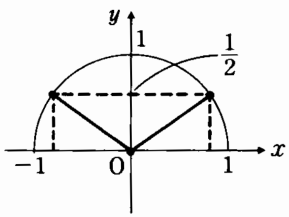
で，この条件のもとに方程式は

$\boldsymbol{2t^2 + t - 1 = 0}$　$\therefore$　$(2t-1)(t+1) = 0$　…………③

「$t+1>0$」であるから

$t = \dfrac{1}{2}$　…………④

$\therefore$　$\boldsymbol{\sin x = \dfrac{1}{2}}$　…………⑤



これを満たす x の値は

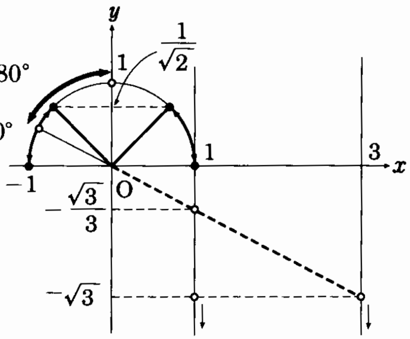
$\boldsymbol{x = 30°,\ 150°}$

(2)「連立不等式」の例である．

$\sqrt{2}\sin x \leqq 1$　$\therefore$　$\sin x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\longrightarrow 0° \leqq x \leqq 45°,\ 135° \leqq x \leqq 180°$

$\tan x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow 90° < x < 150°$



これらを同時に満たす x の範囲は

$\boldsymbol{135° \leqq x < 150°}$

(3)　$|2\sin^2 x - 1| - \cos x < 0$　……⑥

(i)「$2\sin^2 x \geqq 1$」のとき：$\sin x \geqq 0$ より

$\sin x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore$　$45° \leqq x \leqq 135°$

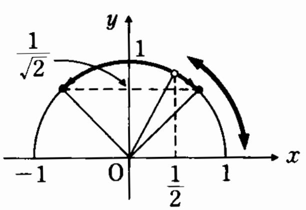
この条件のもとに⑥は

$2\sin^2 x - 1 - \cos x < 0$

$\therefore$　$2(1-\cos^2 x) - 1 - \cos x < 0$

$\therefore$　$2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$

$\therefore$　$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) > 0$



$\therefore$　$\cos x > \dfrac{1}{2}$　$(\longleftarrow \cos x + 1 \geqq 0)$　$\therefore$　$0° \leqq x < 60°$

条件に適する x の値は

$45° \leqq x < 60°$ ……………………………………………………⑦

(ii) 「$2\sin^2 x < 1$」のとき：$\sin x \geqq 0$ より

$0 \leqq \sin x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $0° \leqq x < 45°$, $135° < x \leqq 180°$

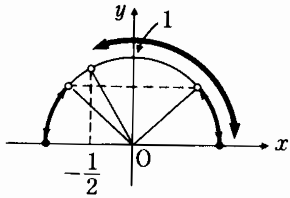
この条件のもとに⑥は

$-(2\sin^2 x - 1) - \cos x < 0$ ∴ $-2(1-\cos^2 x) + 1 - \cos x < 0$

∴ $2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$ ∴ $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) < 0$

∴ $-\dfrac{1}{2} < \cos x < 1$

∴ $0° < x < 120°$



条件に適する x の値は

$0° < x < 45°$ …………………⑧

以上まとめると求める x の値は「⑦，または⑧」であるから

$\mathbf{0° < x < 60°}$

である．

らしんばん

➡ 「三角方程式」，「三角不等式」の問題である．(1)の手順は

(i) 与えられた方程式を「**sin$x$（または cos$x$）**」に統一する（←―②）

(ii) 「sin$x$（または cos$x$）」を t とおくと「**t の整方程式**」になる（←―③）

(iii) 「**t の整方程式**」を解く．ただし本問では「$\mathbf{0 \leqq t \leqq 1}$」である（←―④）

(iv) **t の値が求まり，これより x の値を求める**（←―⑤）

であり，注目すべきポイントは

「**t の整方程式**」を「**範囲つき**」で解く．そして三角方程式!!

という点にあり，「**三角方程式（あるいは三角不等式）の部分**」については「**単位円**」を描いて「**適する x の値**」を求めるとよい――この考え方は「基礎解析」になって「角の範囲」がさらに拡張された場合でも同様である．

➡ 「連立不等式」は，与えられた２つ以上の不等式をそれぞれ解いて，それらを同時に満たす x の範囲を示せばよい．

なお，「**tan$x$ の値**」は慣れるまでは「**本文の図**」に示したように「**y 軸に平行な直線上にその値**」を求めると間違いが少ない．本問で言えば

$\tan x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\longleftarrow \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \tan x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right.$ も考えてみるとよい$\left.\right)$

であるから

「$x=1$」上に$\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，あるいは「$x=2$」上に$(2,\ -\sqrt{3})$

をとればよい．

「絶対値」をつけてみた──「場合分け」が必要なために相当メンドウであるが，本文に述べたようにコツコツとやれば「正解」にたどりつく．しかし，「絶対値」の性質

$$|\boldsymbol{x}| \leqq \boldsymbol{a} \iff -\boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{a} \quad (a \geqq 0) \longleftarrow \text{p.199}$$

を用いるといくらかスッキリといく．本問では

$$|2\sin^2 x - 1| < \cos x \quad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\cos x < 2\sin^2 x - 1 < \cos x} \quad \cdots\cdots(**)$$

(i)　第1の不等式について──→

$$-\cos x < 2\sin^2 x - 1 \quad \therefore \quad -\cos x < 2(1-\cos^2 x) - 1$$

$$\therefore \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$$

$$\therefore \quad (2\cos x + 1)(\cos x - 1) < 0 \quad \therefore \quad -\frac{1}{2} < \cos x < 1$$

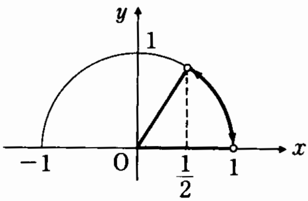
(ii)　第2の不等式について──→

$$2\sin^2 x - 1 < \cos x \quad \therefore \quad 2(1-\cos^2 x) - 1 < \cos x$$

$$\therefore \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$$

$$\therefore \quad (2\cos x - 1)(\cos x + 1) > 0$$

$$\therefore \quad \cos x > \frac{1}{2} (\longleftarrow \cos x + 1 \geqq 0)$$



すなわち，(i)，(ii)を同時に満たす $\cos x$ は

$$\frac{1}{2} < \cos x < 1 \quad \therefore \quad \boldsymbol{0° < x < 60°}$$

となる──(＊)で特に「$\cos x \geqq 0$」を示さなかったが，これは「不等式(＊＊)」の両端に注目すると

$$-\cos x < \cos x \quad \therefore \quad 2\cos x > 0 \quad \therefore \quad \cos x > 0$$

として，すでに「不等式(＊＊)に含まれる条件」となっているからである．

「絶対値」のこのような用い方は「三角不等式」によらず，他の場合にも利用出来る．覚えておくと便利なときがある．

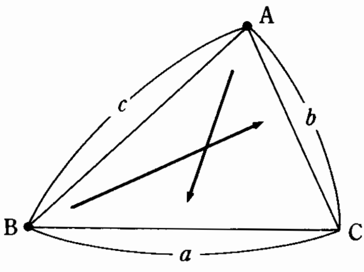
第2節 「三角比」の図形への応用

「三角形」はあらゆる図形の中で最もシンプルで基本的なものの１つであるが，ここでは**「三角比」**を用いて**「三角形のいろいろな性質」**を研究するのが主な目的である――「三角形」についてはあらためて説明するまでもなく，**注目すべきは「３つの辺の長さと３つの角の大きさ(三角形の６要素という)」**であり，**「三角形の諸性質」**は**「それらの関係」**として表されるということである．そして，その最も基本的なものが**「正弦定理」**と**「余弦定理」**である．

「三角形の６要素」のうちのいくつかが与えられるとき，残りのものを求めることを**「三角形を解く」**という．

以下，順を追って「三角形」を解析していくことにする．

1 正弦定理



一般に，△**ABC** では**「３つの角の大きさ」**を**「大文字 A, B, C」**で表し，それらの**「対辺の長さ」**を**「小文字 a, b, c」**で表しているが，**「辺と角の対応関係」**もすぐにわかるので，なかなか便利のよい表現である．

以下，そのように表すことにする．

正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とするとき

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

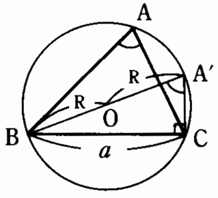
が成り立つ．

解　説　まず，等式のうちの1つである

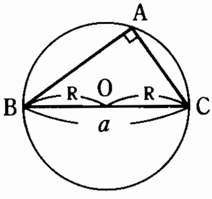
$$\frac{a}{\sin A}=2R \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を示せば他のものも同様にして示される——まず①を証明することを考える．

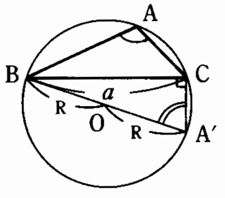
「角 A」が「鋭角，90°，鈍角」によって状況がちがうので，この3つの場合に分けて示すことにする．



＜図1＞



＜図2＞



＜図3＞

(i)「$0°<A<90°$」のとき——＜図1＞

「直径BA′」をとると

$\angle$A′CB$=90°$，$A=A'$(円周角!!)←—— $\sin A$ を $\sin A'$ で考える!!

$$\therefore\quad \sin A=\sin A'=\frac{BC}{A'B}=\frac{a}{2R} \qquad \therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R$$

(ii)「$A=90°$」のとき——＜図2＞

$$\left.\begin{array}{l}\sin A=\sin 90°=1\\ a=2R\ \ (=BC)\end{array}\right\} \longrightarrow \frac{a}{\sin A}=2R$$

(iii)「$90°<A<180°$」のとき——＜図3＞

「直径BA′」をとると，「四角形ABA′Cは円に内接」する．

$$\therefore\quad A+A'=180° \qquad \therefore\quad \sin A=\sin(180°-A')=\sin A'$$

$$\therefore\quad \sin A=\sin A'=\frac{BC}{A'B}=\frac{a}{2R} \qquad \therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R$$

以上のことから，いずれの場合も①が成り立つ．

他の場合も同様であるから，△ABCにおいて

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ (R\text{ は外接円の半径})$$

が成り立つ．

らしんばん

➡「各辺の長さとその対角の正弦(sin)の比」が「外接円の直径($2R$)」で与えられるところが面白い．この定理を実際に用いるときは分母を払って

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$$

←── 「辺の関係」から「角の関係」がほしいとき!!

あるいは

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

←── 「角の関係」から「辺の関係」がほしいとき!!

などの形で「与えられた等式」に代入する場合が多い.

この変形からわかるように

$$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}=a:b:c$$

である. すなわち「正弦定理」は,「三角形の性質」の1つとして

「3つの角の大きさ」が決まれば「3つの辺の長さの比」が決まる

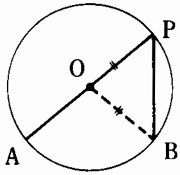
ことを数式を用いて「キチンとした形」に表したものであることがわかる.

➡ 本文(i)で用いた**「円周角不変の定理」**や(iii)で用いた**「円に内接する四角形の性質」**は中学で学んだことがらである──「カルク(?)」復習しておく.

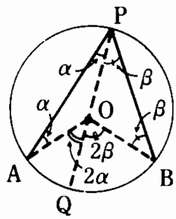
円周角と中心角

「円周角」はその同じ弧に対する**「中心角」**の半分に等しい.

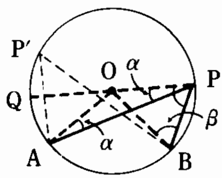
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角を「∠APB」, 中心角を「∠AOB」とする. 点Pの位置によって次の3つの場合が考えられる.



<図1>



<図2>



<図3>

(i) **円の中心Oが「∠APBの辺上」にあるとき**──<図1>

∠OPB=∠OBP ←── OP=OB

∴ ∠AOB=∠OPB+∠OBP ←── ∠AOBは△OBPの外角!!

=2∠OPB=2∠APB

∴ $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

(ii) **中心Oが「∠APBの内部」にあるとき**──<図2>

∠OPA=∠OAP(=αとおく)←──OP=OA

∠OPB=∠OBP(=βとおく)←──OP=OB

∴ ∠AOB=∠AOQ+∠BOQ

$=2\alpha+2\beta$ ←── (∠AOQ は △OPA の外角 / ∠BOQ は △OPB の外角)

$=2(\alpha+\beta)$

$$=2(\angle \mathrm{OPA}+\angle \mathrm{OPB})=2\angle \mathrm{APB}$$

$$\therefore\quad \angle \mathrm{APB}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$$

(iii) **中心Oが「∠APBの外部」にあるとき**——＜図3＞

Oを通る直線PQを引いて

$$\angle \mathrm{OPA}=\angle \mathrm{OAP}=\alpha,\quad \angle \mathrm{OBP}=\angle \mathrm{OPB}=\beta$$

とおくと

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{AOB}&=\angle \mathrm{BOQ}-\angle \mathrm{AOQ}\\&=2\beta-2\alpha \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\angle \mathrm{BOQ}\text{ は }\triangle \mathrm{OBP}\text{ の外角}\\ \angle \mathrm{AOQ}\text{ は }\triangle \mathrm{OAP}\text{ の外角}\end{array}\right)\\&=2(\beta-\alpha)\\&=2\angle \mathrm{APB}\end{aligned}$$

（点Pが＜図3＞のP′のような位置にあるときはαとβの立場が入れかわる）

以上が「$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$が劣弧」のときの証明である．「$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$が優弧」のときは「(ii)のタイプ」となり，そのまま適用される——図を描いて確認しておくとよい．

この定理を用いると次に示す**「円に内接する四角形」の重要な性質**の1つが証明される．

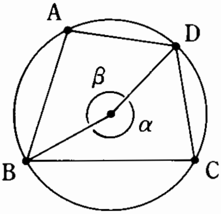
円に内接する四角形の性質

円に内接する四角形の相対する角は，互いに補角をなす．

四角形ABCDが円Oに内接しているとき，$\overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BAD}}$に対する中心角をそれぞれ$\alpha$，$\beta$とすると

$$\alpha+\beta=360°$$

であるが，このとき



$$\angle \mathrm{BAD}=\frac{\alpha}{2},\quad \angle \mathrm{BCD}=\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore\quad \angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{360°}{2}=180° \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{2つの角が加えて180°のとき，}\\ \text{「互いに補角をなす」という}\end{array}\right)$$

同様にして

$$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ADC}=180°$$

である——これは「本文(iii)」に用いた．

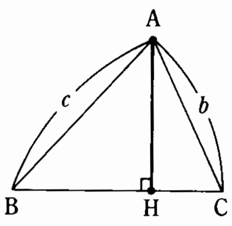
➡ 「外接円の直径」との関係を特に必要としなければ，別の証明の方法もある．

△ABCでAから対辺BCに垂線AHを下すと

$$\mathrm{AB}\sin B=\mathrm{AC}\sin C\ (=\mathrm{AH})$$

$$\therefore\quad c\sin B=b\sin C$$

$$\therefore\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



Bから対辺CAに垂線を下して同様に

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

まとめると本文に述べた結果と同じ等式が得られる．すなわち

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{ただし,「外接円の直径と}\\ \text{の関係」はわからない}\end{array}\right)$$

例題 3

(1)　△ABC において，$a=12$，B＝75°，C＝60°のとき，この三角形の外接円の半径を求めよ．また c を求めよ．

(2)　△ABC において

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$$

が成り立つとき，この三角形はどんな形の三角形か．

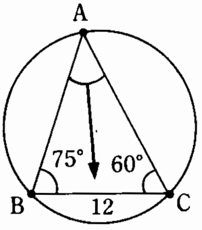
解　説　(1)　まず，A を求めなくてはならない．

A＝180°－(B＋C)　⟵「三角形の内角の和」は180°!!

　＝180°－(75°＋60°)＝45°

$$\therefore\quad 2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{12}{\sin 45^\circ}=12\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad R=6\sqrt{2}$$



また，c の大きさは

$$\boldsymbol{c=2R\sin C}$$

$$=12\sqrt{2}\sin 60^\circ=12\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{6}$$

(2)　これは与えられた「角の関係」を「辺の関係」になおすことを考える．

$$\sin \boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{a}}{2\boldsymbol{R}},\quad \sin \boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{R}},\quad \sin \boldsymbol{C}=\frac{\boldsymbol{c}}{2\boldsymbol{R}}$$

を代入すると

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2\qquad \therefore\quad a^2+b^2=c^2$$

これより △ABC は **「C＝90°の直角三角形」** である．

らしんばん

➡ (1)は，まず「2 角 B，C」が与えられていることから「三角形の形（かたち）」が決まっている――「2 角」が与えられれば **「内角の和が180°」** から残りの 1 つの角も決まる．そこに「1 辺の長さ」を与えるから「三角形が決定する」わけである．慣れるまでは「正弦定理」の公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad \longleftarrow \text{△印は既知の数!!}$$

を書いておいて「**与えられているものはどれか**」，「**求めるものは何か**」をながめてみるとよい――「やるべきこと」が見えて来る．

(2)について――「どんな形の三角形か」ときいているから，考えられるものとしては大体のところ

直角三角形，２等辺三角形，直角２等辺三角形，正三角形

にキマッテいるからその辺を目標に式変形をしていくわけである．その「示し方」としては

(i)　**角の関係で示す**　　(ii)　**辺の関係で示す**

のいずれかになるが，「角の関係」をキチンと扱うには「基礎解析」の「三角関数」まで精通していてもなかなかむずかしい．少なくとも「数Ｉ」の「三角比」の範囲で扱う限りにおいては「**辺の関係**」で**処理する方が有利**と考えてよい．

2　余弦定理

「２辺の長さとそのはさむ角」が定まると「三角形」が決定する――これは「三角形の決定条件」の１つで，このハナシを計量化したものが「**余弦定理**」である．

余弦定理

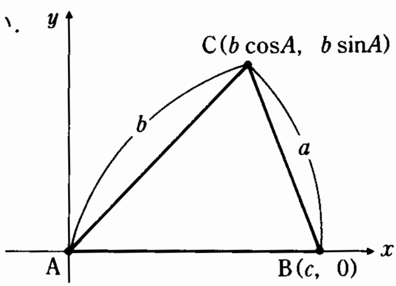
△ABC では次の等式が成り立つ．

$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

解　説　①が証明されれば②，③は全く同様にして証明されるから，まず①を示すことにする．その方法はいろいろあるが，**△ABC に対して適当に座標軸を設定して考えるのが簡単でよい**．



図のように，△ABC の頂点 A を原点，B を x 軸上にとると

$\mathrm{B}(c,\ 0)$，$\mathrm{C}(b\cos A,\ b\sin A)$

であるから「**2点間の距離の公式** (p.296)」を用いると

$a^2=\mathrm{BC}^2$

$$= (c - b\cos A)^2 + (0 - b\sin A)^2$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) = \boldsymbol{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

「b^2」,「c^2」についても同様に計算すると②, ③が得られる.

いずれも,「三角形」の「2辺の長さとそのはさむ角」を与えて「第3辺の長さ」を求める公式である.

らしんばん

➡ △ABCの3辺 a, b, c が与えられているならば,「余弦定理①, ②, ③」は

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}},\ \boldsymbol{\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}},\ \boldsymbol{\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} \cdots (*)$$

であるから, これを用いて「$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ (A, B, C の大きさ)」を知ることが出来る. 第1式に注目すると

A が鋭角 $\iff$ $\boldsymbol{b^2+c^2>a^2}$

A が直角 $\iff$ $\boldsymbol{b^2+c^2=a^2}$ ⟵「ピタゴラスの定理」そのもの!!

A が鈍角 $\iff$ $\boldsymbol{b^2+c^2<a^2}$

である——「余弦定理」を「ピタゴラスの定理の拡張」と見ることも出来る.

もちろん,「角の関係」として与えられた条件を「辺の関係」としてとらえるときにも重宝な「公式」である.

➡ **「三角形の成立条件」と「余弦定理」について——**

「3つの正の数 a, b, c」が「三角形の3辺の長さ」であるときは

$\boldsymbol{|b-c|<a<b+c}$ ……………………………………………… $(**)$

が成り立つ. しかしこの逆, すなわち

$(**)$を満たす3正数 a, b, c を用いて三角形を作ることが出来る

ことは「余弦定理」を用いると次のように証明することが出来る. つまり

「$(**)$の各辺は負でない」から, 2乗しても「同値関係」はくずれない.

$\therefore\ (b-c)^2<a^2<(b+c)^2 \qquad \therefore\ b^2-2bc+c^2<a^2<b^2+2bc+c^2$

$\therefore\ -2bc<b^2+c^2-a^2<2bc \qquad \therefore\ -1<\boldsymbol{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}<1$

すなわち

$\boldsymbol{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A} \qquad \therefore\ b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$

$\therefore\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

を満たす「角 A ($0°<A<180°$)」が存在する——「b, c を2辺の長さ」とし,「A をそのはさむ角」にとれば「第3辺の長さ」が a となる——**「三角形」が出来た**.

なお,「不等式$(**)$」についてもう少し詳しく説明すると,「$(**)$の第1の不等式」は

$|b-c|<a \qquad \therefore\ -a<b-c<a$

$\therefore\quad a+b>c,\ c+a>b$

これらと「(**)の第 2 の不等式」をあわせて

$\boldsymbol{a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b}$ ……………………………(***)

で，これは

「三角形」の 2 辺の和は他の 1 辺より大きい

ことを，「1 つの三角形の 3 つの場合」について述べたものであり「(**)と同値」である．

したがって「(***)($\Longleftrightarrow$(**))」は当然

$|c-a|<b<c+a,\ |a-b|<c<a+b$

なども「同値」となり，このハナシをまとめると

「三角形の成立条件」は(**)または(***)で表される

ことがわかる．

特に**「$\boldsymbol{a}$ が最大」**のときは不等式**「$\boldsymbol{b+c>a}$」**のみを示せばよい．これはこの不等式が成り立てば「(**)または(***)のこれ以外の不等式」が自動的に成立してしまうからである．

なお，これらのことがらを「図形的にナットクする」には「**2 つの円の位置関係**(p.348)」を参考にするとよい．

➡ 1 つの三角形における「頂角の大小」と「対辺の大小」は次のような関係である．

たとえば

△ABC において「$a>b$」ならば「$A>B$」である．
これを証明せよ．

「余弦定理」は

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\quad \longleftarrow(*)$$

であった──「$\cos A$」と「$\cos B$」の差をとって「辺の関係」でとらえてみる!!

$$\therefore\quad \boldsymbol{\cos A-\cos B}=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$=\frac{a(b^2+c^2-a^2)-b(c^2+a^2-b^2)}{2abc}\quad \longleftarrow \text{通分!!}$$

$$=\frac{(a-b)c^2-(a-b)ab-(a^3-b^3)}{2abc}$$

$$=\frac{(a-b)\{c^2-ab-(a^2+ab+b^2)\}}{2abc}\quad \longleftarrow \text{分子を因数分解!!}$$

$$=\frac{(a-b)\{c^2-(a+b)^2\}}{2abc}=\frac{(a-b)(a+b+c)\{c-(a+b)\}}{2abc}$$

ここで

$abc>0,\ a+b+c>0$

$c-(a+b)<0$ ←── 「三角形の成立条件(p.426, 427)」より「$a+b>c$」!!

であるから「$\cos A-\cos B$」と「$a-b$」の符号は逆になる．すなわち

$$\cos A<\cos B \iff a>b$$

ところが「$\cos\theta$ は $0°<\theta<180°$ で単調減少(p.411)」であるから

$$\cos A<\cos B \iff A>B$$

$$\therefore\ a>b \iff \cos A<\cos B \iff A>B$$

である――「この範囲で $\cos\theta$ が単調減少である」ことに注目しておきたい．

「$\sin\theta$」ではこうはいかない．

「第１余弦定理」について――実は「余弦定理」がもう１つある．それを「第１余弦定理」といい，そのときは本文に述べたものを「第２余弦定理」という．ただ「余弦定理」というときは「第２余弦定理(本文)」をさすことになっている．

第１余弦定理

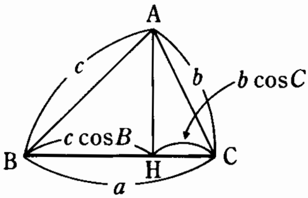
△ABC においては次の等式が成り立つ．

$a=c\cos B+b\cos C$, $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$

右図は「B, C が鋭角のとき」について示したものである．

$$\mathrm{BH}=c\cos B,\ \mathrm{CH}=b\cos C$$

から「第１式」の成立はほとんど明らかといってよい．「第２式」,「第３式」についても同様である．



「B または C が鈍角のとき」については,「$\cos B$ または $\cos C$ の符号」に注意すればこれも「問題ナシ」としてよいだろう――図を描いてみるとよい．

この「第１余弦定理」から「第２余弦定理」を導くには

$$\text{第２式} \longrightarrow \cos C=\frac{b-c\cos A}{a},\quad \text{第３式} \longrightarrow \cos B=\frac{c-b\cos A}{a}$$

であるから，これらを「第１式」に代入すれば「$\cos A$ と a, b, c のみの式」となり，整理すれば「本文の①」が得られる．「②, ③」についても「$\cos B$」,「$\cos C$」を残すように式変形をすれば，方法は全く同様である．

逆に「第２余弦定理」を変形した「(＊)($\cos A$, $\cos B$, $\cos C$)」を「第１余弦定理」の右辺にそれぞれ代入すれば「成り立つ」ことが，簡単に確かめられる．

要するに，これらは実は「同じ定理(同値)」なのだが,「第２余弦定理」では

１つの頂角だけを他の頂角から分離して扱うことが出来る

ところが「ありがたい」わけである――メンドウな「角の扱い」を避けたい!!

ただ,「第１余弦定理」を用いることによってスッキリといく例もないではない．

例題 4

(1)　3角形ABCにおいて，$\angle B=60^\circ$，$AB=3$，$BC=10$とする．BCを2：3に内分する点をD，ADの延長が3角形ABCの外接円と交わる点をEとするとき，AE，CEの長さを求めよ．

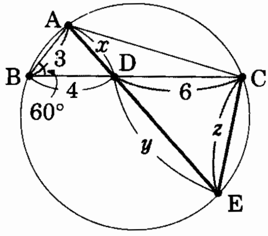
(2)　△ABCにおいて

$AB=AC=4$，$BC=6$

とする．AB上に「$CP=5$」に点Pをとるとき AP はいくらか．

解説　(1)　$\angle B=60^\circ$，$AB=3$，$BC=10$

で，DはBCを2：3に内分するから



$$BD=10\times\frac{2}{2+3}=4$$

$$DC=10\times\frac{3}{2+3}=6$$

「$AD=x$」として△ABDに余弦定理を用いると

$$x^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos60^\circ=13$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{13}$$

次に「$DE=y$」として「方べきの定理(p.345以下)」を用いると

$$x\cdot y=4\cdot6\qquad\therefore\quad y=\frac{24}{\sqrt{13}}=\frac{24\sqrt{13}}{13}$$

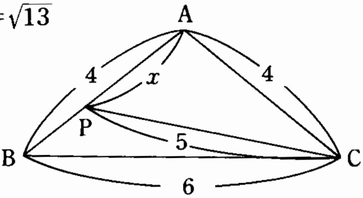
$$\therefore\quad AE=x+y=\sqrt{13}+\frac{24\sqrt{13}}{13}=\frac{37}{13}\sqrt{13}$$

次に「$CE=z$」とおいて「$\triangle DAB\backsim\triangle DCE$」に注目すると

$$x:6=3:z\qquad\therefore\quad x\cdot z=6\cdot3$$

$$z=\frac{18}{x}=\frac{18}{\sqrt{13}}=\frac{18\sqrt{13}}{13}\longleftarrow\quad x=\sqrt{13}$$

(2)　△ABCに「余弦定理」を用いると



$$\cos A=\frac{4^2+4^2-6^2}{2\cdot4\cdot4}=-\frac{1}{8}$$

次に「$AP=x$」とおいて△APCに「余弦定理」を用いると

$$5^2=4^2+x^2-2\cdot4\cdot x\cos A$$

$$\therefore\quad 25=16+x^2+x\quad \left(\longleftarrow \cos A=-\frac{1}{8}\right)$$

$$\therefore\quad x^2+x-9=0\qquad \therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$$

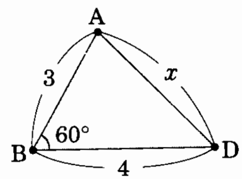
x の範囲は「$0<x<4$」としてよいから求める「AP$(=x)$」は

$$\mathbf{AP=\frac{-1+\sqrt{37}}{2}}$$

らしんばん

(1) ではまず BD を求めた上で △ABD に注目したい――「典型的な余弦定理のタイプ（角 B の対辺が求めるもの）」をした三角形になっている．

AD が求まれば，あとは「方べきの定理(p.345以下)」，「三角形の相似と辺の比の関係」と初等幾何の基礎的な知識を用いれば簡単に解決する．



$$x^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos60^\circ$$

(2)は「$\cos A$」を求めておいて，これを使わせるところが面白い．そのとき「$\angle A$ の対辺」がいきなり未知数というわけではない．すなわち

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

の「$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$」がいつも求めるものとは限らない

「△APC の決定条件」として何をどう求めるかをキチンと読みとることが大切である．

3 三角形の面積

「三角形の 2 辺」と「そのはさむ角」が決定すると「三角形」が決定し，したがって「面積」も決定する．

三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

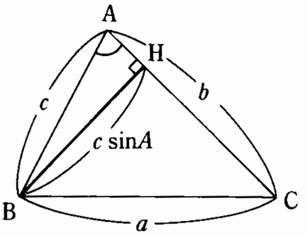
$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A\quad\left(=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\right)}$$

である．

解　説　△ABC で B から AC へ垂線 BH を下すと **△ABC の面積 S** は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\left(\longleftarrow \frac{1}{2}\times(\text{底辺})\times(\text{高さ})\right)$$



である．ところが

$$\mathrm{BH}=c\sin A$$

であるから，これを①に入れると

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A}$$

となる．他の場合も同様にして示される．

また，この公式は $\angle A$ が鈍角でも成り立つことは証明するまでもないが，各自図を描いて調べておくとよい．

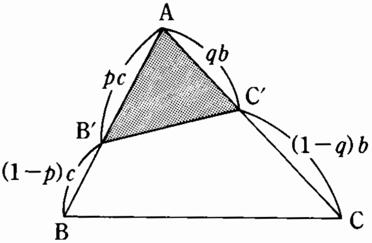
らしんばん

➡ これは，なかなか「応用範囲」の広い「公式」である．

2辺 AB，AC 上に

$$\mathbf{AB'}:\mathbf{B'B}=\boldsymbol{p}:(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$$
$$\mathbf{AC'}:\mathbf{C'C}=\boldsymbol{q}:(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$$

であるように2点 B′，C′ をとると △**AB′C′** の面積 $\boldsymbol{S'}$ は



$$S'=\frac{1}{2}\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{AC'}\sin A$$
$$=\frac{1}{2}(pc)\cdot(qb)\sin A=pq\cdot\frac{1}{2}bc\sin A=\boldsymbol{pqS}$$

であることもわかる．これもなかなか重宝である．ベクトルで「分点公式」などを用いるようになると「ふんだんに」使うことになる——**『諸橋の代数・幾何講義(p.54)』**を参照!!

➡ **「正弦定理」の助けを借りると「三角形の面積」はもっと簡単に表される．**

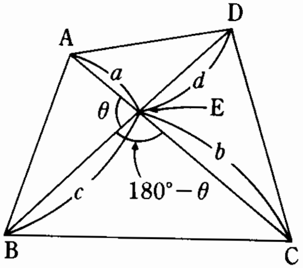
$$\frac{a}{\sin A}=2R \qquad \therefore \quad \sin A=\frac{a}{2R} \quad \longleftarrow \text{正弦定理!!}$$

であった(p.422)．これを代入すると

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}=\boldsymbol{\frac{abc}{4R}}$$

となり，なかなかキレイな式である．ただし，この場合は「△ABC の外接円の半径 R」が与えられているときのハナシである．

➡ **「四角形の対角線の長さ $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$」と，その「なす角 $\boldsymbol{\theta}$」が与えられるとその「四角形の面積」**が求められる．



右図で

$$AC=a+b=l,\ \ BD=c+d=m$$

とおくと

$$S=\triangle \mathrm{EAB}+\triangle \mathrm{EBC}+\triangle \mathrm{ECD}+\triangle \mathrm{EDA}$$

$$=\frac{1}{2}ac\sin\theta+\frac{1}{2}cb\sin(180^\circ-\theta)$$

$$+\frac{1}{2}bd\sin\theta+\frac{1}{2}da\sin(180^\circ-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta(ac+bc+bd+da) \longleftarrow \mathbf{\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\{c(a+b)+d(a+b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta(a+b)(c+d)=\boldsymbol{\frac{1}{2}lm\sin\theta}$$

である．これはよく用いられる．

「ヘロンの公式」を導く――この公式を用いないと解けないような問題はまず出題されることはないと考えてよいが，中学で学んで来た「初等幾何」における「長さ，角，面積」などの「総仕上げ」と考えられ，なかなか学ぶべきものがある．

ヘロンの公式

△ABC の面積を S とすると

$$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},\ \text{ただし}\ \boldsymbol{2s=a+b+c}$$

である．

まず

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

であるが，ここで

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1+\boldsymbol{\cos A})(1-\boldsymbol{\cos A})$$

で，これに「余弦定理」の

$$\boldsymbol{\cos A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

を入れると

$$\sin^2 A=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}(2s)(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)$$

$$=\frac{4}{b^2c^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$$

これを(＊)に代入すると

$$S=\frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{4}{b^2c^2}s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\boldsymbol{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

が得られる——どこかで役に立つときがあるかもしれない.

ついでに「円に内接する四角形の面積」を与える公式についても触れておこう.

円に内接する四角形の面積

円に内接する四角形で

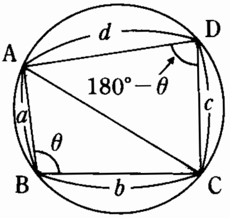
$$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{BC}=b,\ \mathrm{CD}=c,\ \mathrm{DA}=d,\ a+b+c+d=2s$$

とおくと，この四角形の面積は

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

で与えられる.

右図のように「$\angle B=\theta$」とおくと「$\angle D=180°-\theta$」である——**補角**!!



このとき

$$S=\triangle\mathrm{BAC}+\triangle\mathrm{DAC}$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin(180°-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta \quad \cdots\cdots(\ast\ast)$$

である．このとき「対角線 AC」に注目して「余弦定理」を用いると

$$\triangle\mathrm{BAC} \longrightarrow \mathrm{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

$$\triangle\mathrm{DAC} \longrightarrow \mathrm{AC}^2=c^2+d^2-2cd\cos(180°-\theta)=c^2+d^2+2cd\cos\theta$$

$$\therefore\quad a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2+d^2+2cd\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \quad \cdots\cdots(\ast\ast\ast)$$

ここで

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$$

$$=\left\{1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right\}\left\{1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right\} \quad (\longleftarrow(\ast\ast\ast))$$

$$=\frac{1}{4(ab+cd)^2}(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)$$

$$\times(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$$

$$=\frac{1}{4(ab+cd)^2}\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$$

$$=\frac{1}{4(ab+cd)^2}(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$

$$=\frac{1}{4(ab+cd)^2}(2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)$$

$$=\frac{4}{(ab+cd)^2}(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

これを(**)に入れると

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\frac{4}{(ab+cd)^2}(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

となるが，これは「もちろん」覚える必要はない．

例題 5

△ABC において

AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5

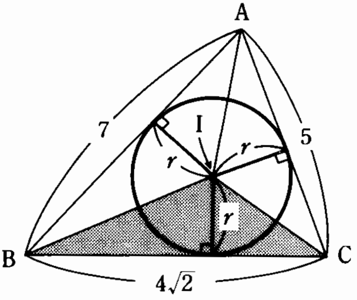
とする．このとき

$\cos A=$ [ア]，$\sin A=$ [イ]，△ABC の面積＝[ウ]，

外接円の半径＝[エ]，内接円の半径＝[オ]

である．

解　説　まず「余弦定理(p.425)」から



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{5^2+7^2-(4\sqrt{2})^2}{2\cdot5\cdot7}$$

$$=\frac{3}{5}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(ア)$$

$$\therefore\quad \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(イ)$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A \longleftarrow \text{p.430}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\frac{4}{5}=14\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(ウ)$$

「外接円の半径」は「正弦定理(p.420)」から

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{4\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}=5\sqrt{2} \qquad \therefore \quad R=\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{エ})$$

「内接円の半径」を求めるには少し工夫がいる，それは「内心」をＩとして

$$\triangle \mathbf{ABC}=\triangle \mathbf{IBC}+\triangle \mathbf{ICA}+\triangle \mathbf{IAB} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

すなわち，求める半径を r とすると

$$14=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 7\cdot r \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}(4\sqrt{2}+5+7)r=14$$

$$\therefore \quad r=\frac{7}{3+\sqrt{2}}=3-\sqrt{2} \quad (\longleftarrow \text{分母を有理化!!}) \quad \cdots\cdots(\text{オ})$$

となる．

らしんばん

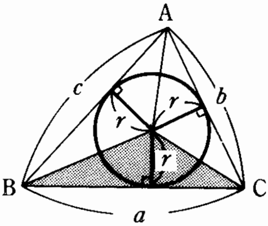
「三角形の面積」，「３辺の和」，「内接円の半径」の間には深い関係がある．
本文①を一般のハナシとしてまとめておこう．

$$\triangle \mathbf{ABC}=\triangle \mathbf{IBC}+\triangle \mathbf{ICA}+\triangle \mathbf{IAB}$$

は，△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$\therefore \quad r=\frac{2S}{a+b+c}$$



である．しかし，「頂角の１つが 90°」のときはもう少し簡単になる．

図のように，３辺 BC，CA，AB と内接円の接点をそれぞれ P，Q，R とすると

$$AQ=AR=r$$

であるから

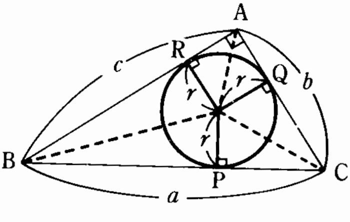
$$BP=BR=c-r \qquad CP=CQ=b-r$$

ここで BC に注目すると

$$BC=BP+CP$$

$$\therefore \quad a=(c-r)+(b-r)$$

$$\therefore \quad 2r=b+c-a \qquad \therefore \quad r=\frac{b+c-a}{2}$$



となる．

例をあげておく．

たとえば

△ABC において

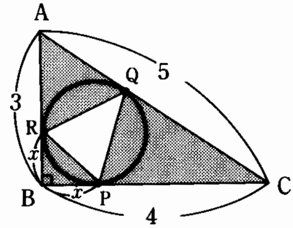
$$AB=3,\ BC=4,\ CA=5$$

とするとき，△ABC の内接円の接点を頂点とする三角形の面積を求めよ．

まず，内接円の半径を x として，これを求める．下図で

$$BP=BR=x$$

であるから



$$AQ=AR=3-x$$

$$CQ=CP=4-x$$

ここで「AC=5」であるから

$$(3-x)+(4-x)=5$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=1}$（＝内接円の半径）

また，△ABC の面積 S は

$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$ ←—— △ABC は $\angle B=90°$ の直角三角形!!

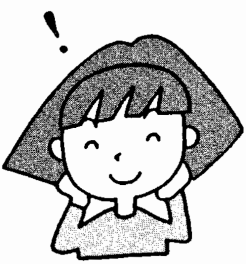
△PQRを「△ABC から △AQR，△BRP，△CPQ を除いたもの」としてとらえると

$$\left.\begin{aligned}\triangle AQR&=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot S=\frac{8}{5}\\ \triangle BRP&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot S=\frac{1}{2}\\ \triangle CPQ&=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot S=\frac{27}{10}\end{aligned}\right\} \longleftarrow \boldsymbol{S'=pqS}\text{(p.431)}$$

これより

$$\triangle PQR=6-\left(\frac{8}{5}+\frac{1}{2}+\frac{27}{10}\right)=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

となる．



第3節　問題解法の研究

発展問題1―三角比で表された関数

x の関数

$$f(x)=\cos^2 x-2a\sin x-a \quad (\text{ただし，}0°\leqq x\leqq 180°\text{とする})$$

について次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値 $\boldsymbol{m}(a)$ を求め，$\boldsymbol{m}(a)$ のグラフを描け．また，$\boldsymbol{m}(a)$ の最小値を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

解　説 (1) 与えられた関数

$$f(x)=\cos^2 x-2a\sin x-a \quad \cdots\cdots①$$

は，「**sin x**」と「**cos x**」とが同時に含まれた式であるから，どちらか一方に統一することを考える――①は，「cos x については2次，sin x については1次」であるから「**sin x**」で統一する．すなわち

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x \longleftarrow \boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1} \ (\text{p.412})$$

これを①に入れて

$$f(x)=(1-\sin^2 x)-2a\sin x-a=-\sin^2 x-2a\sin x+1-a \quad \cdots①'$$

ここで，「**sin $x=t$**」とおくと①′は

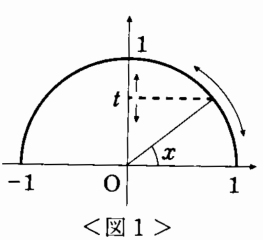
$$f(x)=\boldsymbol{-t^2-2at+1-a} \longleftarrow \boldsymbol{t}\text{の2次関数!!}$$
$$=-(t+a)^2+a^2-a+1 \quad (=g(t)\text{とおく}) \quad \cdots\cdots②$$

で，これは「**t の2次関数**」である．

ただし，「**t の範囲**」が

$$\boldsymbol{0\leqq t\leqq 1} \longleftarrow \boldsymbol{0°\leqq x\leqq 180°}\text{<図1>}$$

であることには注意しなければならない．



<図1>

②の $g(t)$ を Y とおくと，放物線

$$Y=-(t+a)^2+a^2-a+1 \quad (=g(t))$$

のグラフの対称軸は「$t=-a$」であるから次のように場合を分けて考える．

(i)　$-\boldsymbol{a} \leqq \mathbf{0} \iff \boldsymbol{a} \geqq \mathbf{0}$ のとき：

〈図２〉に示すように，「$t=0$ で $g(t)$ は最大」となるから

$$m(a)=g(0)=1-a$$

(ii)　$\mathbf{0} \leqq -\boldsymbol{a} \leqq \mathbf{1} \iff -\mathbf{1} \leqq \boldsymbol{a} \leqq \mathbf{0}$ のとき：

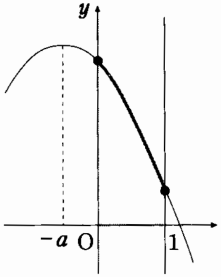
〈図３〉に示すように「$t=-a$ で $g(t)$ は最大」である．

$$\therefore \quad m(a)=g(-a)=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \ \left(\geqq \frac{3}{4}\right)$$

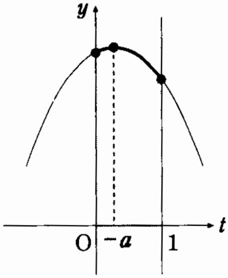
(iii)　$-\boldsymbol{a} \geqq \mathbf{1} \iff \boldsymbol{a} \leqq -\mathbf{1}$ のとき：

〈図４〉に示すように「$t=1$のとき $g(t)$ は最大」となる．

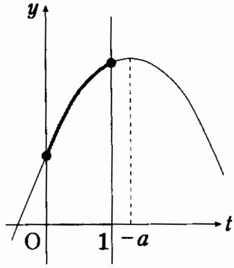
$$\therefore \quad m(a)=g(1)=-1-2a+1-a=-3a$$



＜図２＞



＜図３＞



＜図４＞

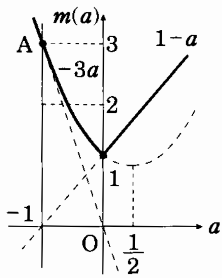
以上(i)，(ii)，(iii)より

$$\boldsymbol{m(a)}=\begin{cases} -3\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a} \leqq -1) \cdots\cdots ③ \\ \boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}+1 & (-1 \leqq \boldsymbol{a} \leqq 0) \cdots ④ \\ 1-\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a} \geqq 0) \end{cases}$$

である．これらを図示すれば〈図５〉が得られ，$m(a)$の最小値は

最小値：　1　($\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$)

である．



＜図５＞

なお〈図５〉の点Ａにおける「つながり」の状況は③，④を連立して

$$-3a=a^2-a+1 \qquad \therefore \quad a^2+2a+1=0$$

$$\therefore \quad (a+1)^2=0 \qquad \therefore \quad a=-1 \ (\longleftarrow \ \text{重解})$$

であることから「**直線：　$\boldsymbol{m(a)=-3a}$**」と「**放物線：　$\boldsymbol{m(a)=a^2-a+1}$**」とが「**接している**」ことが確認される．

(2)　調べることは

方程式 $\boldsymbol{f(x)=0}$ の異なる実数解の個数

であるが，「**方程式：　$\boldsymbol{f(x)=0}$**」から実数解の求まる構造は

$$f(x)=0 \iff g(t)=0,\ t=\sin x$$

の関係であるから，これに着目すると，まず，「方程式：　$g(t)=0$」から「解：　$t=t_1$」が求まり，この t_1 に対して「方程式：　$\sin x=t_1$」から「x の値が求まる」ことになる．そこで，方程式

$$g(t)=0,\ 0\leqq t\leqq 1 \longleftarrow \text{2次方程式!!}$$

の実数解を調べることからハナシをはじめるとよい．

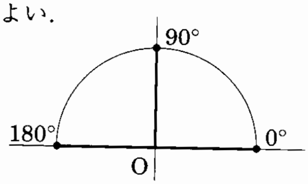
(i)　まず，$t=0$，1が解であるときを調べる．

$g(0)=1-a=0$　　$\therefore\ a=1$

$t=\sin x=0 \longrightarrow x=0°,\ 180°$

$g(1)=-3a=0$　　$\therefore\ a=0$

$t=\sin x=1 \longrightarrow x=90°$



＜図6＞

この場合をまとめると

$a=0$ のとき：　実数解1個，　$a=1$ のとき：　実数解2個

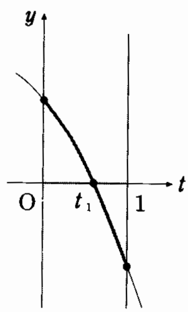
(ii)　**$0<t<1$ の実数解をもつときを調べる．**

以下は「2次方程式の解の大小についての理論」であるが，これは**第3章の発展問題2**（p.267）に詳しく解説した．

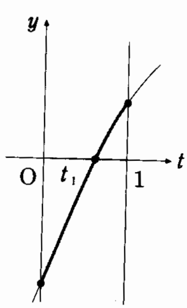
〈1〉　実数解を1つもつとき：

$g(0)\cdot g(1)=(1-a)(-3a)<0$ ←――〈図7〉，〈図8〉

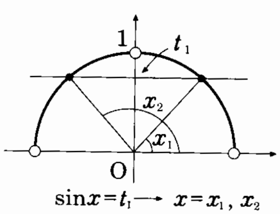
$\therefore\ a(a-1)<0,$　　$\therefore\ 0<a<1$



＜図7＞



＜図8＞



＜図9＞

〈2〉　実数解を2つもつとき：

実数解条件：　$\dfrac{D}{4}=a^2+(1-a)=a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

←――　成立する!!

軸の条件：　$0<-a<1$　　$\therefore\ -1<a<0$

$g(0)$，$g(1)$ の条件：

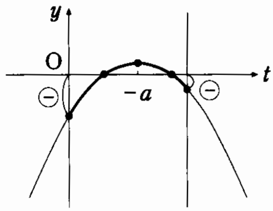
$$g(0)=1-a<0 \quad \therefore \quad a>1$$
$$g(1)=-3a<0 \quad \therefore \quad a>0$$

$\therefore \quad a>1$

これらを同時に満たす実数 a の値は存在しない.

以上より

$0<a<1$ のとき：　実数解 2 個



(ありえない!!)

＜図10＞

(i), (ii)を a の値に従ってまとめると次の表となる.

a	$a<0$	0	$0<a<1$	1	$a>1$
個数	0	1	2	2	0

らしんばん

本問は**第 3 章の発展問題 5**（p.278）の「バージョンアップ(？)版」である.

まず(1)では与えられた「**x の関数**」である.

$$\boldsymbol{f(x)=\cos^2 x-2a\sin x-a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$
$$(=-\sin^2 x-2a\sin x+1-a)\ (0°\leqq x\leqq 180°)$$

が,「**t の 2 次関数**」

$$\boldsymbol{g(t)=-t^2-2at+1-a}$$

と「**三角比（三角関数）**」

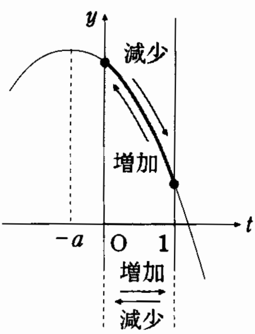
$$\boldsymbol{t=\sin x\ (0°\leqq x\leqq 180°)}$$

との「**合成関数**」であることをシッカリと見抜いてもらいたい. したがって(1)は「**2 次関数の範囲つき最大・最小**（p.252以下)」の問題である. ただ, x が 0° から 180° まで「連続的に」変化するとき, それに対応する t の値の変化は

x	0° ⟶ 90° ⟶ 180°
t	0 ⟶ 1 ⟶ 0 減少　増加

であり（本文の〈図 1〉), これに対応する $g(t)$ の変化の内訳は, 本文(i)の例で説明すると

x	0°		90°		180°
t	0	⟶	1	⟶	0
$g(t)$	$1-a$	⟶	$-3a$	⟶	$1-a$
		減少		増加	



＜図 2′＞

となる——〈図 2′〉

これは(ii), (iii)についても同様である.

また，(＊)で

$\cos x = X,\ \sin x = Y \quad (0° \leqq x \leqq 180°)$

とおくと

$$f(X,\ Y) = X^2 - 2aY - a,\ X^2 + Y^2 = 1,\ Y \geqq 0 \longleftarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

のような「2変数関数の最大・最小 (p.254)」の問題とも読みかえられる——いろいろと考えてみるとよい．

(2)については，求めているのは

$$f(x) = \cos^2 x - 2a\sin x - a = 0 \longleftarrow \text{三角方程式!!} \quad \cdots\cdots(**)$$

の実数解の個数であって

$$g(t) = -t^2 - 2at + 1 - a = 0 \longleftarrow \text{2次方程式!!} \quad \cdots(***)$$

の実数解の個数ではない．混同しないように「特に注意」しなければならない．

それには，まず(＊＊＊)から「解： $t = t_1\ (0 \leqq t_1 \leqq 1)$」が求まり，$t_1$に対して

$$\sin x = t_1 \longrightarrow (**)\text{の解が求まる}$$

という構造をシッカリと理解することが大切である．このハナシは**第3章の発展問題5** (p.278) でも詳しく説明したことがらである．

発展問題2—面積公式から「加法定理」へ

(1)　図のように互いに60°の角をなす半直線OX，OY，OZを引き，これらとA，B，Cで交わる直線を引く．

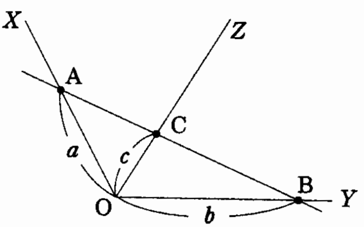
このとき

$OA = a,\ OB = b,\ OC = c$

とすると

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

が成り立つことを証明せよ．



(2)　さらにOXと60°の角をなす他の半直線OWを引き，Cを通る直線がOXと交わる点をE，OWと交わる点をDとし

$OD = d,\ OE = e$

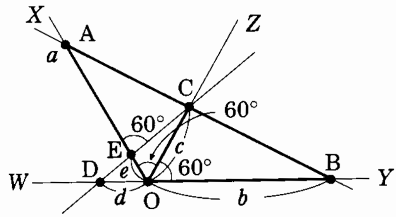
とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{1}{e}$$

解　説　(1)　右図で「三角形の面積」に注目すると

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．ところが



$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

$$\triangle \mathrm{OAC}=\frac{1}{2}ac\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}ca$$

$$\triangle \mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

であるからこれらを入れると

$$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{\sqrt{3}}{4}ca+\frac{\sqrt{3}}{4}bc \qquad \therefore \quad ab=ca+bc$$

両辺を「abc」で割ると

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a} \qquad \therefore \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

(2)　考え方は(1)と同様である．すなわち

$$\triangle \mathbf{OCD}=\triangle \mathbf{OCE}+\triangle \mathbf{ODE}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}cd\sin 120^\circ=\frac{1}{2}ce\sin 60^\circ+\frac{1}{2}de\sin 60^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{4}cd=\frac{\sqrt{3}}{4}ce+\frac{\sqrt{3}}{4}de \qquad \therefore \quad cd=ce+de$$

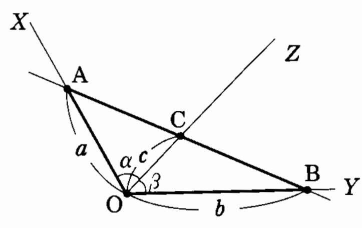
両辺を「cde」で割ると

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{d}+\frac{1}{c} \qquad \therefore \quad \frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{e}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{1}{e}}$$

らしんばん

本問を一般の形で表すと図のようになる．すなわち



$$\triangle \mathbf{OAB}=\triangle \mathbf{OAC}+\triangle \mathbf{OBC} \cdots (*)$$

で，△OAB，△OAC，△OBC の面積は

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)$$

$$\triangle \mathrm{OAC}=\frac{1}{2}ca\sin\alpha$$

$$\triangle \mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc\sin\beta$$

これらを(＊)に入れると

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ca\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta$$

両辺を「abc」で割ると

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c}=\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\beta}{a}$$

$$\longrightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\cdot\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

このとき，直線ABを半直線OZに垂直になるように引いておけば図を描くまでもなく

$$\frac{c}{b}=\cos\beta,\ \frac{c}{a}=\cos\alpha$$

であるから$(**)$は

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

となり，**「加法定理」**が導かれる——「加法定理」については「数Ⅰ」では扱わない．詳しくは**『諸橋の基礎解析講義**(p.69以下)**』**を参照されたい．

また，上の図で

$\triangle OAC:\triangle OBC=AC:BC$ ←——「高さ」が共通!!

であるから

$$AC:BC=\frac{1}{2}ca\sin\alpha:\frac{1}{2}bc\sin\beta=a\sin\alpha:b\sin\beta$$

が成り立つ．

特に

$\alpha=\beta \quad \therefore \quad \sin\alpha=\sin\beta$ ←—— **OCが∠AOBを2等分!!**

のときは

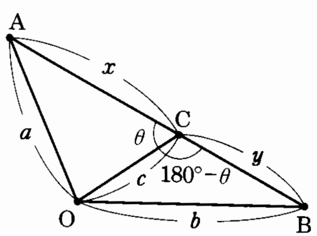
$$\boldsymbol{AC:BC=a:b}$$

となるのは「あたりまえ」のことである．このハナシはp.335ですでに用いたことがらである．

なお，図で∠ACO，∠BCO，がOCをはさんで

$$\angle ACO=\theta,\ \angle BCO=180^\circ-\theta$$

のように表されるので



△ACOに余弦定理——→

$$\boldsymbol{a^2=x^2+c^2-2xc\cos\theta}$$

△BCOに余弦定理——→

$$\boldsymbol{b^2=y^2+c^2-2yc\cos(180^\circ-\theta)}$$
$$=y^2+c^2+2yc\cos\theta$$

であるから**「$\cos\theta$」**が消去出来て

$$\frac{\boldsymbol{a^2-x^2-c^2}}{\boldsymbol{-2xc}}=\frac{\boldsymbol{b^2-y^2-c^2}}{\boldsymbol{2yc}}\ (=\boldsymbol{\cos\theta})$$ ←—— 2式を$\cos\theta$について解いた!!

$$\therefore \quad -y(a^2-x^2-c^2)=x(b^2-y^2-c^2)$$

すなわち，a，bが定数ならば$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{c}$の３文字のうち２文字に具体的な数値を与えれば他の１文字が決まることがわかる．―――本問の「$\alpha=\beta=60°$」は，実はxとyの値を与えてcを求めさせる条件であったわけである．

上に述べた「θの消去」はよく用いられる方法である．

索　　引

ア

イ

ウ

エ

オ

カ

キ

へ

ホ

マ

ミ

ム