第3章

行　　列

「固有値」、「固有ベクトル」をどうしよう……
……やっぱり書いてしまった——

困ったナ…………

「数を長方形に並べてセットにしたもの」を「行列」という

第1章では「2次元ベクトル」,「3次元ベクトル」のように「数をいくつか直線的に並べてセットにして扱う」ことを学んだ．ここではこの考え方をさらに進めて,「数を平面的にいくつか並べてセットにして扱う」ことを考える．たとえば,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

などを一つの単位として**「いくつかの量を1まとめにして，あたかも一つの数のように扱う」**ことにする．このように「数を長方形に並べてカッコをつけたもの」を**「行列」**といい，その数の一つ一つのことを**「成分」**，ヨコの並びのことを**「行（ぎょう)」**，タテの並びのことを**「列（れつ)」**という———上の例のように2行3列で構成される行列を「2×3型の行列」，あるいは「2×3行列」といい，一般には「$m \times n$ 型の行列」で表されるが，われわれ高校数学の立場では，その中の最も簡単な形をした**「2×2型の行列」**をとりあげ，それのもつ「行列としての本質」にかわりがないことに注目し，そこから「行列の基本的性質」を学びとろうというわけである．

具体的には次の2点に注目してもらいたい．

(i) **行列に＋，－，×，÷の「四則演算」を定義する．**

(ii) **(i)を踏まえて「1次変換」への準備をする．**

———実をいうと，この章を書くにあたって最も心を砕いたことは**「固有値」,「固有ベクトル」の問題をどうするか**，ということであった．このことについて少し説明しておかなければならない．それは，この分野がもともとは高校数学の範囲外という約束であったにもかかわらず，いろいろな誘導がつけられて出題されているのが毎年の入試の実情であり，しかもそのほとんどが「行列の n 乗」というテーマに限られていて，この約10年の間，全国的に「その方法の開発」に血道をあげてきたことは，いささか「こっけい」にさえ見えるほどである．もとより「固有値」,「固有ベクトル」はそのためにのみあるわけでもなく，実はそれなりに意味のあるハナシであって，とりあえず**「手持ちの道具」**だけで**「せまれるところまでせまってみよう」**というのが本書の基本的な考え方であると思ってもらいたい．

第1節 「行列」と「その演算」

まず，「行列」を定義し，これに「演算」を定義する．

具体的には次の通りである．

(i) 「加(減)法」，「実数(スカラー)倍」を定義する．

(ii) 「乗法」を定義する――ここから「数ベクトル」とちがってくる．

(iii) 実数の「除法」にあたる演算を定義する――そのために「逆行列」の考え方を導入する．

「数でないもの」に「あたかも数のような」演算を定義する――このハナシは「数ベクトル」の導入のところでも少し説明した――「実数の演算」と「どこが同じ」で「どこがちがうか」に注意して読み進めてほしい．

1 「加(減)法」と「実数(スカラー)倍」

これは，ほとんど「ベクトルの扱い」に準ずると考えてよい．

(1) 「相等」：２つの行列の型が等しく，対応する成分が等しいこと．

(2) 「加法」：２つの行列の型が等しいとき，対応する成分を加える（「減法」についても同様である．）

加法については次の計算法則が成り立つ．

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \quad \text{（交換則）}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \quad \text{（結合則）}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$$

（ただし，$\boldsymbol{O}$ は $\boldsymbol{A}$ と同型の行列で，各成分が $\mathbf{0}$（ゼロ）の行列であり，「零（ゼロ）行列」という――「実数の計算」の「0（ゼロ）」にあたると考えればよい．）

(3) **「実数（スカラー）倍」：行列 $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{k}$ 倍（$\boldsymbol{k}$ は実数）は各成分の $\boldsymbol{k}$ 倍**である．実数（スカラー）倍については，次の計算法則が成り立つ．

$$\boldsymbol{k(lA)=(kl)A}$$

$$\boldsymbol{(k+l)A=kA+lA}$$

$$\boldsymbol{k(A+B)=kA+kB}$$

例題 1

$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&0\end{pmatrix}$ とする．

(1) $2X+A=3(X+B)$ ………………① をみたす行列 X を求めよ．

(2) 次の2式を同時にみたす行列 X, Y を求めよ．

$$\begin{cases}3X+Y=A & \cdots\cdots② \\ X-Y=B & \cdots\cdots③\end{cases}$$

解　説 (1) $2X+A=3X+3B$

$\therefore\ 2X-3X=3B-A \qquad \therefore\ X=A-3B$

これに A, B を入れると

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&-2\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&-6\\-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-5}&\mathbf{8}\\\mathbf{3}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

(2) 「②+③」より

$$4X=A+B \qquad \therefore\ \boldsymbol{X=\frac{1}{4}(A+B)} \qquad \therefore\ \boldsymbol{Y}=X-B=\boldsymbol{\frac{1}{4}(A-3B)}$$

（以下 A, B を入れて成分計算をすればよい．自分でやること!!）

らしんばん

➡ このように行列は，大文字 A, B, C, X, Y, Z などを用いて表すことが多い．「いくつかの数をまとめて扱っている」というイメージをしっかりとらえてほしい．

たとえば(1)で，「$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}$」とおき，両辺をすべて成分で表せば，「左右両辺の4つの成分を比較すること（相等）」により4つの方程式がつくられ，これ

を解いて x, y, z, u を求めれば，ともあれ行列 X は求められる．しかしこれはウマイやり方ではない．

まず，(1)では X を未知の行列とする方程式と考え，それを X について解き，既知の行列 A, B で表す．その上で，A, B の成分を用いて，X を具体的に求めるのがよい———**できるだけ，行列を「ひとまとまりとしてとらえる」ことが，われわれの基本的態度**である．

(2)についても同様に，X, Y を 2 つの未知の行列とする連立方程式と考えて，まずふつうの連立方程式のように解くことができる．

このようなことができるのは，**「行列の演算」**で，**「加(減)法」**と**「実数(スカラー)倍」については，「実数の演算」と同様な演算法則が成り立つ**からである．

---

2 行列の乗法

ここからは少しやっかいになる．**まず，「乗法」の計算規則に慣れること!!**

2×2 行列の「乗法」の計算規則は次のように定義される．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & az+bu \\ cx+dy & cz+du \end{pmatrix}$$

この計算で，右辺の各成分が，どのようにして求められたのか，4 つの計算を分解して書いてみよう．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \cdot \\ y & \cdot \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad 1\text{行}1\text{列}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & z \\ \cdot & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cdot & az+bu \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad 1\text{行}2\text{列}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \cdot \\ y & \cdot \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ cx+dy & \cdot \end{pmatrix} \quad 2\text{行}1\text{列}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & z \\ \cdot & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & cz+du \end{pmatrix} \quad 2\text{行}2\text{列}$$

いずれも，**「左側の行ベクトル（ヨコ）」と，「右側の列ベクトル（タテ）」の「内積」**で与えられていることに注意すること!!

$$(\text{ヨ}\ \text{コ})\begin{pmatrix} \text{タ} \\ \text{テ} \end{pmatrix}=(\text{ヨ}\times\text{タ}+\text{コ}\times\text{テ})$$

がポイントであるが，これは慣れてしまうまで「目」と「アタマ」がおかし

くなるから，少し練習してみなくてはならない．

例題 2

次の行列の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　　(4) $(3 \quad -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(3 \quad -1)$　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$　　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

解　説　(1)，(2)，(6)，(7)，(8)は上の計算の約束にしたがってやればよい．

(3)は**「1次変換」で用いる型であるから，特に慣れておくこと．**

(4)，(5)は「2×2型」でない行列の乗法（「2×2型」と比較!!）

以下結果を書いておくから，各自確かめること．

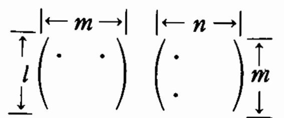
(1) $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$　(4) 5

(5) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

らしんばん

➡ 一般のハナシをすると，行列 A と B の間に乗法 AB が定義されるのは

A が「$l \times m$ 型」のとき
B が「$m \times n$ 型」であること



しかし，このとき乗法 BA が定義されるとは限らない．

BA が定義されるためには，$l=n$ でなくてはならない．

しかし，**高校数学では「2×2型」の行列までしか扱わない．**

➡ **AB，BA が定義されたとしても，「$AB=BA$」とは限らない．（「交換則」は不成立）** すなわち，**「$AB \neq BA$」**のときがある――(1)，(2)を比較してみよ．

これは「実数の計算」とは決定的に違うところである.

➡ 行列では,「$A \neq O$, $B \neq O$」でも,「$AB=O$」となるときがある――このとき,A と B は「互いに零因子」であるという.

これも,実数の計算とはちがうところである.

たとえば(8)の2つの行列は,「互いに零因子」である.

➡ (6),(7)の $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$ (I と書くときもある)は,任意の「2×2行列」と乗法に関して交換可能である.このとき E を「単位行列」といい,「実数の計算」の「1」にあたる.

例題 3

(1) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ は正しいか.

(2) $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (ただし,$a \neq b$) とするとき,$AX=XA$ をみたす2×2行列 X を求めよ.

解 説 (1) $A+B$ をひとまとめにして

$$(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B$$

$$=A^2+BA-AB-B^2 \quad (\longleftarrow \text{「}AB=BA\text{」とは限らない})$$

この式は,「$AB=BA$」のときにのみ,「A^2-B^2」となる.

したがって一般には成立しない.

(2) $$AX=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & az \\ by & bu \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

$$XA=\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & bz \\ ay & bu \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ②$$

①,②の成分を比較すると

$$(a-b)y=0, \quad (a-b)z=0$$

$a \neq b$ であるから,

$$y=z=0$$

$$\therefore \quad X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \quad (x,\ u \text{ は任意の実数}) \quad \cdots\cdots ③$$

らしんばん

➡ 行列 A を n 回かけたものを,「A^n（A の n 乗）」で表す.

➡ 行列の「乗法」では,「交換則」は成立しないときがあるが，次の法則は成立する.

(i) $A(BC)=(AB)C=ABC$ （結合則）

(ii) $(kA)B=A(kB)=kAB$ （k：実数）

(iii) $A(B+C)=AB+AC$ （分配則）

これらは「1次変換（線形写像）」を扱うときに，きわめて重要な役割を果すことになる.

➡ さらに，**任意の「2×2行列」と「乗法」に関して「交換可能」な行列は**どんな形をしているであろうか.

まず，A と「交換可能」であるから，X は「本文③の形」をしていなければならない．次にもう1つ簡単な形をしているもの，たとえば

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

などとすると，これとも「交換可能」であるから

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

成分をくらべると,「$x=u$」でなければならない．すなわち

$$X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=xE \quad \text{（必要条件）}$$

このような形の行列を**「単位形」の行列**という.

これが，すべての「2×2行列」と「交換可能」であることは明らかである（十分条件）.

3 逆行列

さて，**行列の計算に「除法（割り算）は定義」できないか**――「除法」が「乗法」の「逆演算」であることに注意しよう.

たとえば，数の計算では,「$b \div a$」とは,「$ax=b$」をみたす x を求めることであった.

つまり，これを求めるにはこの式の両辺に a の逆数

$$\frac{1}{a}\ \left(a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1\right)$$

をかければよかった――このことに注意する.

実際, 行列の計算に,「除法（割り算)」はないが,「逆行列」を用いて, それに相当することができる. すなわち,「2×2行列」である $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E} \quad (\boldsymbol{E}\text{は単位行列}) \quad \cdots\cdots①$$

となるような行列「B」が存在するとき, $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{A}$ の「逆行列」といい,「$\boldsymbol{A}^{-1}$」で表す.

まず, このような B を求めてみよう.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列, $B=\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix}$ が存在するとして, ①の左側の等式,「$AB=E$」に入れてみると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立たなければならない（必要条件）から, これを成分で表すと

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax+by=1} & \cdots\cdots② \\ \boldsymbol{cx+dy=0} & \cdots\cdots③ \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{az+bu=0} & \cdots\cdots④ \\ \boldsymbol{cz+du=1} & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

これを解いて, x, y, z, u を求める.

②, ③については

②$\times d-$③$\times b$: $(ad-bc)x=d$ ⋯⋯⑥

③$\times a-$②$\times c$: $(ad-bc)y=-c$ ⋯⋯⑦

④, ⑤については

④$\times d-$⑤$\times b$: $(ad-bc)z=-b$ ⋯⋯⑧

⑤$\times a-$④$\times c$: $(ad-bc)u=a$ ⋯⋯⑨

いま,「$ad-bc=0$」とすると, ⑥〜⑨の式で,「$a=b=c=d=0$」

このとき②, ⑤は成立しない. したがって, このような x, y, z, u が存在するためには,「$\boldsymbol{ad-bc\neq 0}$」でなければならない.

このとき

$$x=\frac{d}{ad-bc},\quad y=\frac{-c}{ad-bc},\quad z=\frac{-b}{ad-bc},\quad u=\frac{a}{ad-bc}$$

となり, これで「$AB=E$」となる B が求められたことになる.

分母は共通だからくくりだすと

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{ad-bc}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \quad (=\boldsymbol{A}^{-1})$$

この B が①式の右半分,「$BA=E$」をみたすこと（十分条件）は代入して

簡単に確かめることができる．以上まとめて

逆行列

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき，**「A の逆行列 A^{-1} が存在する条件」**は，**「$ad-bc\neq 0$」**で，このとき

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる．

解　説　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，**「$ad-bc$」**を A の**「行列式」**といい

$$|A|,\ \text{または}\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

で表すが，これを**「デターミナント（Det.）」**とよんだりする．

また，**「$|A|\neq 0$」のとき（「逆行列がある」とき）**

「A は正則な行列である」，または**「A は正則である」**

などという．

らしんばん

➡ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のタテのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ に注目!!

$$\left.\begin{array}{lll} ad-bc\neq 0 & \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} & (\text{1 次独立!!}) \\ ad-bc=0 & \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} & (\text{1 次従属!!}) \end{array}\right\} \longleftarrow \ (\text{p. 17})$$

これは「1 次変換」で重要な意味をもつことになる．

例題 4

2 × 2 行列 A，B がある．ただし，E は単位行列とする．

(1)　$A+B=AB$ で，$A-E$ が逆行列をもつならば，それは $B-E$ であることを示せ．

(2)　(1)で，$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，$A-E$ の逆行列を求めて，B

を計算せよ．

解　説　(1)　$A+B=AB$

$\therefore\quad AB-A-B=O$

$\therefore\quad AB-A-B+E=E$

$\therefore\quad (A-E)(B-E)=E$

$\therefore\quad (A-E)^{-1}=B-E \longleftarrow$ $\boldsymbol{AA^{-1}=A^{-1}A=E}$ であった

(2)　$A-E=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad (A-E)^{-1}=\frac{1}{(-4)\times1-2\times(-3)}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}=B-E$$

$$\therefore\quad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

らしんばん

➡ (1)について——A，B が互いに「逆行列」であるための条件は

$\boldsymbol{AB=BA=E}$

であった（p. 151）．したがって本問も変形して

$(\qquad)(\qquad)=E$

の形にならないか，と考える．

例題 5

行列 A，B，C がすべて逆行列をもつとき，次のことを証明せよ．

(1)　A の逆行列はただ1つに限る．

(2)　$(A^{-1})^{-1}=A$

(3)　$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

(4)　$ABC\neq O$　（O は零行列）

解　説　(1)　A の「逆行列」が2つ以上あるとして，そのうちの異なる2つを $\boldsymbol{A_1^{-1}}$，$\boldsymbol{A_2^{-1}}$ とすると逆行列の定義から

$A_1^{-1}A=E$ ……………………………………①

$AA_2^{-1}=E$ ……………………………………②

①に右から A_2^{-1} をかけて

$$A_1^{-1}AA_2^{-1}=A_2^{-1}$$

②に左から A_1^{-1} をかけて

$$A_1^{-1}AA_2^{-1}=A_1^{-1}$$

この2式より「$A_1^{-1}=A_2^{-1}$」で，これは**不合理**.

(2) 「$(A^{-1})A=E$」より「$(A^{-1})^{-1}=A$」

(3)
$$(ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1})=AB\{\underbrace{C(C^{-1}}_{=E}B^{-1}A^{-1})\}$$
$$=A\underbrace{B(B^{-1}}_{=E}A^{-1})=AA^{-1}=E$$

$$\therefore\quad (ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

(4) 「$ABC=O$」とすると

左から A^{-1} をかけて

$$A^{-1}(ABC)=BC=O$$

左から B^{-1} をかけて

$$B^{-1}(BC)=O \qquad \therefore\quad C=O$$

C は逆行列をもつから，これはあり得ない.

$$\therefore\quad ABC\neq O$$

らしんばん

➡ (1)はなかなか導きにくい.
「$\boldsymbol{AB=BA=E}$」をうまく用いる工夫をする ←── 「**背理法**」を利用!!

➡ (3)について，特に「$\boldsymbol{ABC}$」と，「$\boldsymbol{C^{-1}B^{-1}A^{-1}}$」の順序に注意!!──これはあとで出てくる「1次変換の合成」と，「その逆変換」とに関連させて理解しておくとよい.

例題 6

(1) $AB=O$, $A\neq O$, $B\neq O$ のとき，A, B は正則でない（逆行列がない）ことを示せ.

(2) $|A|=0$, $A\neq O$ である任意の行列 A に対して，$AX=O$, $X\neq O$ をみたす X があることを示せ.

(3) $|A|=0$ のとき，$A\neq O$, $AB=AC$ であっても，$B=C$ とはいえな

いことを示せ.

解 説 (1) これは「**零因子**」が「**逆行列**」をもたないことの証明——「**背理法**」で証明する.

A^{-1}があると仮定すると,「$AB=O$」に左からかけて

$$A^{-1}(AB)=O \qquad \therefore \quad B=O$$

条件より,「$B \neq O$」であるから, これは**不合理**.

ゆえにA^{-1}がなく, 同様にしてB^{-1}はない.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}, \ |\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{bc}=\boldsymbol{0}$

とする.

このとき, 行列Xを「$X=\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} (\neq O)$」として$AX$を計算すると

$$AX=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & az+bu \\ cx+dy & cz+du \end{pmatrix}$$

これが「O」となるような, x, y, z, uが存在すればよい.

いま,「$x=d$, $y=-c$, $z=-b$, $u=a$」とおくと,「$ad-bc=0$」であるから,「$A \neq O$, $AX=O$」をみたすXが

$$X=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \neq O \longleftarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{の形と比較!!}$$

として存在する.

よって証明された.

(3) これが「実数の計算」ならば, 両方をアッサリとAでわってしまうところであるが,「**行列の計算**」ではそうはいかない——(2)を利用する.

$$AB=AC \qquad \therefore \quad AB-AC=A(B-C)=O$$

この式の「$B-C$」を, (2)のXと考えれば,「$B-C=X$ $(\neq O)$」が存在することになり,「$B=C$」とはいえない.

らしんばん

➡ (2)は,「$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$」であっても,「**行列の計算**」では「実数の計算」のようにすぐに「$X=O$」とすることができない. いいかえると本問は

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$のとき

「$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O} \longrightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$」 $\rightleftarrows$ 「$\boldsymbol{A}^{-1}$**がある**」

であることの確認である.

例題 7

行列を用いて，次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x+ay=1 & \cdots\cdots ① \\ ax+y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解　説　①，②は行列を用いて，次のように表される．

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ③$$

「$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}=A$」とおくと

(i)　「$|A|=1-a^2\neq 0$」のとき，「$a\neq\pm 1$」で，このとき A^{-1} があるから，これを③の左からかけると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1-a \\ 1-a \end{pmatrix}=\frac{1}{1+a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=y=\frac{1}{1+a}} \quad (\boldsymbol{a\neq\pm 1})$$

(ii)　「$|A|=1-a^2=0$」のとき，$a=\pm 1$

「$a=1$」ならば，③より

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{x+y=1} \quad \cdots\cdots \text{不定}$$

（x，y は「$x+y=1$」をみたす任意の実数）

「$a=-1$」ならば，③より

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore\quad \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{不能}$$

（解なし）

らしんばん

➔ 連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

は，「行列の積の定義」を用いて，次のように表すことができる．すなわち

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0 \text{ のときに注意!!}\right)$$

この例では，「$|A| \neq 0$」のとき A^{-1} があるから，これを

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$$

に左からかけて

$$\underbrace{A^{-1}A}_{\boldsymbol{E}}X=A^{-1}B \qquad \therefore \quad X=A^{-1}B$$

であった．しかし

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$$

をみたす X を求めるには，A^{-1} を右からかけて

$$X\underbrace{AA^{-1}}_{\boldsymbol{E}}=BA^{-1} \qquad \therefore \quad X=BA^{-1}$$

としなければならない．

第２節
「ケーリー・ハミルトンの定理」，他

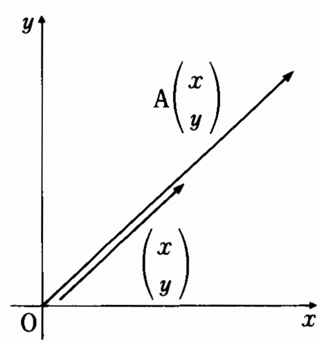
「固有値」，「固有ベクトル」については，一応「高校数学の範囲外」ということにはなっているが，実際の入試には「誘導」がついたり，あるいは「それらしくない表情」をしたりしながら出題されている例が多い．われわれとしてはある程度はキチンとした形で対応せざるを得ないと考える———とにかく簡単に触れておく．次の手順で解説する．

(i)「固有値」，「固有ベクトル」について———「１次変換」を読んでからにしてもよい．

(ii)「ケーリー・ハミルトンの定理」———積極的に利用する方向でハナシを進める．

(ii)「行列の n 乗」を求める———「固有値」，「固有ベクトル」を利用するもの，「ケーリー・ハミルトンの定理」を利用するものなどがある．

1 固有値，固有ベクトル



行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\vec{0} \quad\cdots①$$

であるとき，①をみたす t の値と，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の方向は，与えられた行列 A によって決定する．

———「２×２型行列 A では基本的には２つある」と考えてよい．

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$の意味は，１次変換のところでくわしく説明する．

このとき，**tの値をAの「固有値」**，ベクトル$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$を「固有ベクトル」という．

これらを求めるには，①を左辺に整理して

$$(A-tE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{0},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\vec{0} \quad\cdots\cdots②$$

このとき，**「$(A-tE)^{-1}$」があるとすると，**左からかけて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{0}$$

となって，**不合理**であるから，「$(A-tE)^{-1}$」はない．

$$\therefore\quad |A-tE|=\begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix}$$

$$=(a-t)(d-t)-bc=0$$

$$\therefore\quad t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0 \quad\cdots\cdots③$$

これが，①のtの値を与える「**固有方程式**」で，２つの解α，βを「固有値」という———われわれの場合はα，βが実数のときに限定しておくことにする（回転の行列などは虚数になる）．

これらα，βの値を，①または②に代入すると，それぞれの場合についてのx，yの関係式が求められ，「**固有ベクトル（方向）**」を求めることができる．

例題 8

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$のとき，固有値と，固有ベクトルを求めよ．

解　説　固有方程式は

$$t^2-6t+5=0 \qquad \therefore\quad (t-1)(t-5)=0$$

$$\therefore\quad t=1,\ 5\quad（これが A の「固有値」）$$

(i)　**$t=1$ のとき**

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore\quad \begin{cases} 3x+4y=x \\ x+3y=y \end{cases}$$

２式はいずれも，「$x+2y=0$」となるから，これをみたすx，yを１組

とって，「$x=2$，$y=-1$」とすれば固有ベクトルの1つが求まったことになる．

すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad t=1 \text{ の「固有ベクトル」}$$

(ii) $t=5$ のとき

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 3x+4y=5x \\ x+3y=5y \end{cases}$$

2式はいずれも，「$x-2y=0$」となるから，同様にして

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad t=5 \text{ の「固有ベクトル」}$$

らしんばん

➡ 「固有値」の1つに対する「固有ベクトル」は1つとは限らない．たとえば，(i)については，「$t=1$」で，x と y は，「$x+2y=0$」をみたすことが条件であるから

$$k\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

がすべて「$t=1$ に対する固有ベクトル」で，本文ではこれらを代表して，「$k=1$」のときを示したわけである．

➡ 本問で求めた2つの「固有ベクトル」は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad 1\text{次独立!!}$$

である．

一般に，行列 A の「固有値」を t_1，t_2 として，それぞれの「固有値」に対する「固有ベクトル」を $\vec{x_1}$，$\vec{x_2}$ とすると，「$t_1 \neq t_2$」ならば $\vec{x_1}$ と $\vec{x_2}$ は「1次独立 (p. 16，17)」である———このことを示すにはどうすればよいか．

まず，

$$A\vec{x_1}=t_1\vec{x_1}, \quad A\vec{x_2}=t_2\vec{x_2}, \quad (\vec{x_1}\neq\vec{0},\ \vec{x_2}\neq\vec{0},\ t_1\neq t_2) \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

このとき

$$\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{x_2}=\vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

が成り立つならば「$\alpha=\beta=0$」を示せばよい（逆は明らかに成り立つ）．

（$**$）に左から A をかけて（$*$）を用いると

$$A(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{x_2})=\alpha A\vec{x_1}+\beta A\vec{x_2}$$

$$=\alpha t_1\vec{x_1}+\beta t_2\vec{x_2}=\vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

ここで

$$\vec{x_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ \vec{x_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とおいて（**）と（***）に入れると

$$\left.\begin{array}{ll} (**): & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\vec{0} \\ (***): & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1\alpha \\ t_2\beta \end{pmatrix}=\vec{0} \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & t_1\alpha \\ \beta & t_2\beta \end{pmatrix}=O$$

ここで$\begin{pmatrix} \alpha & t_1\alpha \\ \beta & t_2\beta \end{pmatrix}^{-1}$があるとすると，これを右からかけて

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=O \qquad \therefore \quad \vec{x_1}=\vec{0},\ \vec{x_2}=\vec{0}$$

となって条件に反する $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{t_1\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{t_2\beta} \end{pmatrix}^{-1}$ なし!!

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} \alpha & t_1\alpha \\ \beta & t_2\beta \end{vmatrix}=\alpha\cdot(t_2\beta)-(t_1\alpha)\cdot\beta=0$$

$$\therefore \quad \alpha\beta(t_2-t_1)=0 \qquad \therefore \quad \alpha\beta=0 \quad (\because \quad t_1\neq t_2)$$

$\therefore$　$\alpha=0$，または　$\beta=0$

これを（**）に用いる．たとえば，「$\alpha=0$」とすると

$$(**): \quad 0\cdot\vec{x_1}+\beta\vec{x_2}=\beta\vec{x_2}=\vec{0}$$

「$\vec{x_2}\neq\vec{0}$」であったから，「$\beta=0$」がいえる（「$\beta=0$」としても同様である）．

$$\therefore \quad \alpha=\beta=0$$

すなわち

2つの固有ベクトル $\vec{x_1}$，$\vec{x_2}$ は1次独立

であることがわかる．

このことは意外に重要である――― xy 平面上の任意のベクトル $\vec{x}$ は，「固有ベクトル $\vec{x_1}$，$\vec{x_2}$ の1次結合」として

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{p}\vec{\boldsymbol{x}_1}+\boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{x}_2} \quad (\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}\text{は実数})$$

の形で表されることがわかる．以下「固有値」，「固有ベクトル」の問題では $\vec{x_1}$，$\vec{x_2}$ の方向に注目して考えることになる．

[2] ケーリー・ハミルトンの定理

これは高校の教科書では定理としては出てこないが，入試ではこの証明や応用がよく出てくる．

ケーリー・ハミルトンの定理

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つ．

解　説　これを「ケーリー・ハミルトンの定理」という——これが，先にのべた，**「固有方程式」と同じ形をしていることに注目!!**

証明は，行列 A をそのまま代入して，成分計算をしてもよいが，次のように変形するといくらかスッキリする．

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A+adE&=(A-aE)(A-dE) \\ &=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}=bcE \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

らしんばん

➡ この定理で注意することは，**「逆」が成立しない**こと——次の例題でこれを確かめることにする．

例題 9

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$a+d=t$，$ad-bc=\delta$ とする．

ただし，a，b，c，d は実数とする．

(1)　$A^2-5A+6E=O$ のとき，t，δ を求めよ．

(2)　$A^3=E$ のとき，t，δ の値を求めよ．

解　説　(1)「ケーリー・ハミルトンの定理」より

$A^2-tA+\delta E=O$ ……………………………………①

$A^2-5A+6E=O$ ……………………………………②

「②−①」より

$$(t-5)A=(\delta-6)E$$

(i)　「$\boldsymbol{t=5}$」のとき：　$\delta=6$

(ii)　「$\boldsymbol{t\neq 5}$」のとき：　両辺を「$t-5$」で割ると

$$A=\frac{\delta-6}{t-5}E=\lambda E \quad \left(\lambda=\frac{\delta-6}{t-5}\right)$$

これを②に代入すると

$$(\lambda E)^2-5(\lambda E)+6E=(\lambda^2-5\lambda+6)E=O$$

$$\therefore \quad \lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$\therefore \quad (\lambda-2)(\lambda-3)=0 \qquad \therefore \quad \lambda=2,\ 3$$

「$\lambda=2$」のときは，$A=2E$　　$\therefore$　$\boldsymbol{t=4,\ \delta=4}$

「$\lambda=3$」のときは，$A=3E$　　$\therefore$　$\boldsymbol{t=6,\ \delta=9}$

以上より，

$$\boldsymbol{(t,\ \delta)=(5,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 9)}$$

(2)　①より

$$A^2=tA-\delta E$$

これを用いて $\boldsymbol{A^3}$ の「次数を下げる」ことを考える．

$$A^3=AA^2=A(tA-\delta E)$$
$$=tA^2-\delta A=t(tA-\delta E)-\delta A$$
$$=(t^2-\delta)A-t\delta E$$

これを E とおいて，整理すると

$$\therefore \quad \boldsymbol{(t^2-\delta)A=(t\delta+1)E} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで，(1)と同様にして

(i)　「$\boldsymbol{t^2=\delta}$」のとき：　$t\delta+1=0$

2式から，δ を消去すると

$$t^3+1=0 \qquad \therefore \quad (t+1)(t^2-t+1)=0$$

このとき

$$t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \quad (t\text{ は実数})$$

であるから

$$t=-1, \quad \delta=1$$

(ii)　「$\boldsymbol{\delta\neq t^2}$」のとき：　「$t^2-\delta\neq 0$」であるから，③の両辺をこれで割ると

$$A=\frac{t\delta+1}{t^2-\delta}E=\lambda E \quad \left(\lambda=\frac{t\delta+1}{t^2-\delta}\right)$$

これを「$A^3=E$」に入れると

$$(\lambda E)^3=E \qquad \therefore \quad (\lambda^3-1)E=O$$

$$\therefore \quad (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$$

λ は実数であるから

$$\lambda^2+\lambda+1>0$$

$$\therefore \quad \lambda=1 \qquad \therefore \quad A=E \qquad \therefore \quad t=2,\ \delta=1$$

以上より

$$(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{\delta})=(-\mathbf{1},\ \mathbf{1}),\ (\mathbf{2},\ \mathbf{1})$$

らしんばん

➡ 「$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$」のとき，「$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}\ (=\boldsymbol{t})$」のことを「トレース（Tr.)」とよんでいる．

➡ (1)について，まちがいの例を2つあげておく．

(i) ①，②を較べて，いきなり，「$t=5,\ \delta=6$」とやりたいところだがこれはいけない．これは「**十分条件**」ではあるが「**必要条件**」ではないからである．他にも②をみたすものがあるかもしれない———事実この場合はこれ以外のものが「$\boldsymbol{A=2E,\ 3E}$」として存在する．

「$\boldsymbol{t=5,\ \delta=6}$」がいえるのは，$\boldsymbol{A}$ が「単位形（$\boldsymbol{A=kE}$ の形)」でないときに限る———「ケーリー・ハミルトンの定理」の逆は成り立たない．

(ii) もう1つのまちがいの例としては，②を因数分解して

$$(A-2E)(A-3E)=O \qquad \therefore \quad A=2E,\ 3E$$

とやる例である．これもやってはいけない．

「$A\neq 2E,\ 3E$」であっても②が成り立つときがある———「$\boldsymbol{A-2E}$」，「$\boldsymbol{A-3E}$」が「**零因子**」のとき———「$t=5,\ \delta=6$」のときがそれである．

———**両方の場合を「とりこぼさないように」おさえなければならない．**

➡ (2)について

本文の説明では，「**ケーリー・ハミルトンの定理**」を用いて，A^3 の次数を下げたが，これを「**行列で与えられた多項式**」と考えると，**ここには $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{E}$ しかあらわれず，しかも乗法についての「交換則（$\boldsymbol{AE=EA}$)」が成立することから，ふつうの整式と同じように扱うことができる．**

3次式「x^3-1」を2次式「$x^2-tx+\delta$」でわると

$$x^3-1=(\boldsymbol{x^2-tx+\delta})(x+t)+(t^2-\delta)x-(t\delta+1)$$

この x を行列 A，1を E でおきかえると

$$A^3-E=(\boldsymbol{A^2-tA+\delta E})(A+tE)+(t^2-\delta)A-(t\delta+1)E$$

ここで「**ケーリー・ハミルトンの定理**」を用いると

$$A^2-tA+\delta E=O$$

であるから

$$A^3-E=(t^2-\delta)A-(t\delta+1)E=O$$

$$\therefore\quad (t^2-\delta)A=(t\delta+1)E$$

となる.

例題 10

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき

(1)　$A^2=O$ であるための必要十分条件は，$a+d=0$，$ad-bc=0$ であることを示せ.

(2)　$A^n=O$ のとき，$A^2=O$ であることを示せ.

解　説　(1)「$a+d=t$」,「$ad-bc=\delta$」とすると,「ケーリー・ハミルトンの定理」より

$$A^2-tA+\delta E=O \quad \cdots\cdots ①$$

この式で「$A^2=O$」とすると

$$tA=\delta E$$

「$t\neq 0$」とすると,「$A=\dfrac{\delta}{t}E=\lambda E \quad \left(\lambda=\dfrac{\delta}{t}\right)$」とおけるから

$$A^2=(\lambda E)^2=\lambda^2 E=O \qquad \therefore\quad \lambda=0 \qquad \therefore\quad A=O$$

このとき,「$t=0$」となってこれは不合理である. したがって

$$t=0 \qquad \therefore\quad \delta=0 \text{（必要条件）}$$

逆に,「$t=\delta=0$」のとき, ①より,「$A^2=O$」(十分条件)

ゆえに求める「必要十分条件」は

$$\boldsymbol{a+d=0,\ ad-bc=0}$$

(2)　$\delta=|A|\neq 0$ とすると A^{-1} がある. これを n 回かけると

$$(A^{-1})^n A^n=(A^{-1}A)^n=E^n=O \qquad \therefore\quad E=O$$

これは不合理であるから,「$\delta=0$」となる.

$$\therefore\quad A^2=tA \qquad \therefore\quad A^3=tA^2=t^2A$$

これをくり返すと

$$A^n=t^{n-1}A$$

ここで「$t\neq 0$」とすると,「$A=O$」となり不合理である.

$$\therefore\quad t=0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{A^2=O}$$

らしんばん

A^n の求め方は，次にくわしく述べるが，本問のように「$\boldsymbol{\delta=ad-bc=0}$」のときは，「$\boldsymbol{A^2=tA}$」から

$$\boldsymbol{A^n=t^{n-1}A} \quad (\boldsymbol{t=a+d})$$

と簡単に導くことができる（「数学的帰納法」で証明しておくこと）.

3 行列の n 乗

行列 A が与えられるとき，A^n を求める問題は入試問題の典型的なタイプになっている．ここではその扱い方の基本を説明する.

(1) 数学的帰納法を利用する

例題 11

$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ とするとき，A^n, B^n を求めよ.

解説 A, A^2, A^3, ………を求めてみる.

$$A^2=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}\alpha^3 & 0\\ 0 & \beta^3\end{pmatrix},\quad \cdots\cdots\cdots$$

であるから，$A^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$ と推定することができる.

(i) 「$\boldsymbol{n}=1$」のときは明らかに成立する.

(ii) 「$\boldsymbol{n}=k$」のときに成り立つと仮定すると

$$A^k=\begin{pmatrix}\alpha^k & 0\\ 0 & \beta^k\end{pmatrix}$$

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}\alpha^k & 0\\ 0 & \beta^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^{k+1} & 0\\ 0 & \beta^{k+1}\end{pmatrix}$$

ゆえに，「$\boldsymbol{n}=k+1$」のときも成立し，推定は正しい.

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$$

同様にしてBについても，「$B^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$」を確認することができる.

らしんばん

A のように対角線上にある成分以外の成分がすべて0であるような行列を「対角行列」という.

「対角行列」の計算は,「和」についても,「積」についても「対角要素の和」,「積」を求めればよいので「実数の演算」と同じに扱うことができる.

(2) 「固有値」,「固有ベクトル」,他

例題 12

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき,A^n を求めよ.

解 説 この行列は例題8 (p. 159) の行列である. この A では

「固有値」1 に対して「固有ベクトル」は $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

「固有値」5 に対して「固有ベクトル」は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

であった.

一方「固有値」と「固有ベクトル」の関係は

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

であったから,これに A を左からかけると

$$A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=tA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore\quad A^3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t^2A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t^3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これをくり返し用いると帰納的に

$$A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

本問については,「$t=1$」,「$t=5$」であるから

$$\begin{cases} A^n\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=1^n\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=5^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 5^n \\ 5^n \end{pmatrix} \end{cases}$$

まとめて

$$A^n\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2\cdot 5^n \\ -1 & 5^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix} 2 & 2\cdot 5^n \\ -1 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2\cdot 5^n \\ -1 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2\cdot 5^n & -4+4\cdot 5^n \\ -1+5^n & 2+2\cdot 5^n \end{pmatrix}$$

らしんばん

本問については，上の方法が最も簡単であるが，**実際の入試問題には，出題の意図にしたがった誘導がついている場合が多いから，**そのようにやればよい．

ここでは A^n を，**「ケーリー・ハミルトンの定理」**を既知のものとして，「x の多項式の計算方法」を利用して求めるやり方を説明しておく．

まず，x^n を2次式「$x^2-tx+\delta$」で割るときの商を $q(x)$ とし，このときの余りを「$lx+m$」で表すと恒等式

$$x^n=(x^2-tx+\delta)q(x)+lx+m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

このとき「固有値」α, β に対して

$$\boldsymbol{x^2-tx+\delta=0} \longleftarrow \textbf{固有方程式!!}$$

であるから，これを（$*$）に代入すると，右辺の第1項は消えて

$$\alpha^n=l\alpha+m$$

$$\beta^n=l\beta+m$$

これを l, m について解くと，「$\alpha\neq\beta$」のときは l, m が求まり

$$l=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha},\qquad m=\frac{\beta\alpha^n-\alpha\beta^n}{\beta-\alpha}$$

つまり，（$*$）は

$$x^n=(x^2-tx+\delta)q(x)+\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}x+\frac{\beta\alpha^n-\alpha\beta^n}{\beta-\alpha}$$

この恒等式の「x を行列 A」，「1 を E」におきかえると

$$A^n=\underbrace{(A^2-tA+\delta E)}_{\substack{\| \\ O}}q(A)+\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}A+\frac{\beta\alpha^n-\alpha\beta^n}{\beta-\alpha}E$$

$\longleftarrow$ **ケーリー・ハミルトンの定理!!**

$$\therefore\quad \boldsymbol{A^n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}A+\frac{\beta\alpha^n-\alpha\beta^n}{\beta-\alpha}E}$$

例題 13

$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，A^n を計算せよ．

解　説　「固有方程式」をつくってみると

$$t^2-6t+9=0 \qquad \therefore \quad (t-3)^2=0 \qquad \therefore \quad t=3 \quad (\text{重解})$$

このように「**固有方程式**」が重解のときは，少し事情が違ってくる．

そこで

$$A^2-6A+9E=O$$

を次のように変形する．

$$A(A-3E)=3(A-3E)$$

$$\therefore \quad A^n(A-3E)=3^n(A-3E)$$

$$\therefore \quad A^{n+1}-3A^n=3^n(A-3E)$$

両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{A^{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{A^n}{3^n}=\frac{1}{3}(A-3E)$$

$$\therefore \quad \frac{A^n}{3^n}=\frac{A}{3}+(n-1)\frac{A-3E}{3} \longleftarrow \text{「等差数列」の公式を参照!!}$$

$$\therefore \quad A^n=n3^{n-1}A-(n-1)3^nE$$

$$=3^{n-1}\left[n\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-3(n-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$=3^{n-1}\begin{pmatrix} n+3 & n \\ -n & -n+3 \end{pmatrix}$$

らしんばん

➡ 上の方法が最も簡単にいくが，参考までに「**多項式**」を利用する方法も説明しておく．

前問と同じように

$$x^n=(x-\alpha)^2q(x)+lx+m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

とおいて，l，m を決めればよい．その方法は「**整式の扱い**」と同じであると考えてよい．

（＊）を微分して

$$nx^{n-1}=2(x-\alpha)q(x)+(x-\alpha)^2q'(x)+l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

（＊），（＊＊）で $x=\alpha$ とおくと

$$l=n\alpha^{n-1}, \qquad \therefore \quad m=\alpha^n-l\alpha=-(n-1)\alpha^n$$

$$x^n=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)q(x)+n\alpha^{n-1}x-(n-1)\alpha^n$$

で,「x を行列 A」,「1 を E」におきかえると(*)は

$$A^n=\underbrace{(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{\alpha A}+\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{E})}_{=O}q(A)+n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE$$

$\longleftarrow$ ケーリー・ハミルトンの定理!!

$$=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE$$

➡ 「確率・統計」を学んでいる諸君ならば「2項定理」を用いることができる.

$$A^2-2\alpha A+\alpha^2E=O$$

のときは

$$(A-\alpha E)^2=O$$

であるから

$$A-\alpha E=B \qquad \therefore\ \boldsymbol{A=B+\alpha E}\ \text{(ただし, }\boldsymbol{B^2=O}\text{)}$$

とおくことができる.

$$\therefore\ \boldsymbol{A^n=(B+\alpha E)^n}$$

$$={}_n\mathrm{C}_0\boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{\alpha E})^n+{}_n\mathrm{C}_1\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha E})^{n-1}$$

$$\underbrace{+{}_n\mathrm{C}_2B^2(\alpha E)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nB^n(\alpha E)^0}_{=0}$$

$$=\alpha^nE+n\alpha^{n-1}B$$

$\longleftarrow$ $\boldsymbol{B^k=O}$ ($\boldsymbol{k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n}$)

$$=\alpha^nE+n\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$$

$$=\boldsymbol{n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE}$$

第3節
問題解法の研究

発展問題1―行列の乗法

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$について，次の問いに答えよ．

ただし，a, b, c, dはいずれも0でない実数とする．

(1)　$AB=BA$が成立する条件を求めよ．

(2)　(1)の成立するAに対し

$$A^2-5AB-6B^2=O$$

をみたす行列Aを求めよ．

解　説　(1)「マジメ(？)に」成分計算をしてもよいが，

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$B=I+2J$$

したがって，「$AB=BA$」は

$$A(I+2J)=(I+2J)A$$

$$\therefore\ A+2AJ=A+2JA \qquad \therefore\ AJ=JA$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \therefore\ \boldsymbol{b=c,\ a=d}$$

(2)　(1)より

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=aI+bJ,\ B=I+2J$$

で，「$AB=BA$」であるから

$$A^2-5AB-6B^2=(A-6B)(A+B)=O \quad \cdots\cdots\cdots\text{①}$$

(i)「$A=6B$」,「$A=-B$」のときはそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) 「$A-6B$」,「$A+B$」が零因子のとき,「$(A-6B)^{-1}$」,「$(A+B)^{-1}$」は存在しない（p. 154, 155).

$$\therefore\quad |A-6B|=(a-6)^2-(b-12)^2=0$$

$$\therefore\quad (a-b+6)(a+b-18)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$|A+B|=(a+1)^2-(b+2)^2=0$$

$$\therefore\quad (a-b-1)(a+b+3)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

②, ③をまとめると

$$\begin{cases} a-b+6=0, \\ a+b+3=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b-18=0 \\ a-b-1=0 \end{cases}$$

これを解くと

$$(a,\ b)=\left(-\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{19}{2},\ \frac{17}{2}\right)$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 17 & 19 \end{pmatrix}$$

このとき，①は成り立つ.

らしんばん

(1)については B の対角要素に注目して

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{J} \quad \left(\text{ただし } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\text{とする}\right)$$

と変形してから計算すると有効な場合の例である．この場合

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

←—— （J は「$\boldsymbol{y=x}$ に関する対称変換」を表す行列.
——くわしくは p. 225を参照!!）

であるが

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ←—— （このときの J は「90° 回転」を表す行列.
「$\boldsymbol{\theta}$ 回転」の行列については p. 222参照!!）

などにとれるときは

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I$$

となり，「複素数」の「虚数単位 i」で

$$i^2=-1 \quad (i=\sqrt{-1})$$

の計算と似ていておもしろい．

➡ (2)で

$$A^2-5AB-6B^2=(A-6B)(A+B)$$

と「因数分解できる」わけは(1)で「$AB=BA$」が保証されているからである．

また，「**零因子が逆行列をもたない**」ことについては p. 154，155でくわしく説明した．しかし，このハナシは「**逆**」が**成り立たない**（「**必要条件**」でしかない）．

本文の最後の「このとき，①は成り立つ」は「$\boldsymbol{A-6B}$」と「$\boldsymbol{A+B}$」とが確かに「**零因子**」であることの**確認**である．

発展問題 2―行列の方程式

行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ が方程式

$$(X-E)^2(X+2E)=O$$

をみたすとき，x，y の値を求めよ．

解　説　$(X-E)^2(X+2E)=O$ ……………………………………①

これは行列 X に関する方程式である．しかもすでに「因数分解」されている．

(i)「$\boldsymbol{(X-E)^2=O}$ または $\boldsymbol{X+2E=O}$」のとき，①は明らかに成り立つ．

ここで「$X+2E=O$」ならば

$$X=-2E \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x=-2,\ y=0}$$

で x，y の値が簡単に求まる．

次に「$\boldsymbol{(X-E)^2=O}$（$\boldsymbol{X=E}$ とは限らない）」のときを考える．

$$(X-E)^2=X^2-2X+E=O \quad \cdots\cdots②$$

また「ケーリー・ハミルトンの定理」より

$$X^2-tX+\delta E=O \quad (t=2x,\ \delta=x^2-y^2) \quad \cdots\cdots③$$

「②−③」より X^2 を消去すると

$$(t-2)X=(\delta-1)E$$

「$\boldsymbol{t=2}$」とすると「$\delta=1$」であるから

$$\therefore \begin{cases} 2x=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=0} \end{cases} \quad (X=E)$$

「$\boldsymbol{t\neq 2}$」のときは，両辺を「$t-2$」で割って

$$X=\frac{\delta-1}{t-2}E=\lambda E \quad \left(\lambda=\frac{\delta-1}{t-2}\right)$$

これを②に入れると

$$(\lambda E)^2-2(\lambda E)+E=(\lambda^2-2\lambda+1)E=O$$

$$\therefore \quad \lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0 \qquad \therefore \quad \lambda=1$$

$$\therefore \quad X=E \quad \longleftarrow \quad \text{これは「}t\neq 2\text{」に反する．}$$

(ii) 「$(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E})^2\neq\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$」のとき―― $(X-E)^2$, $X+2E$ は「零因子」で，これらはともに「逆行列」をもたない．すなわち

$$|(X-E)^2|=(|X-E|)^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots④$$

$$\therefore \quad \{(x-1)^2-y^2\}^2=0 \qquad \therefore \quad y^2=(x-1)^2 \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

さらに

$$|X+2E|=0$$

$$\therefore \quad (x+2)^2-y^2=0 \qquad \therefore \quad y^2=(x+2)^2 \quad \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥から

$$(x-1)^2=(x+2)^2$$

$$\therefore \quad 6x=-3 \qquad \therefore \quad x=-\frac{1}{2}$$

これを⑤に入れる．

$$\therefore \quad y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \therefore \quad y=\pm\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \pm 3\\ \pm 3 & -1\end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \text{これらは①をみたす．}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}},\ \boldsymbol{y}=\pm\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}$$

らしんばん

本文④の

$$|(X-E)^2|=|X-E|^2$$

については，「デターミナント」に関する公式

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}| \quad (|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}|^2) \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を用いたものである――これは知っておくと便利である．

成分を用いて証明しておく．

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$$

とするとき

$$AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad |AB|=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)$$
$$=(ad-bc)(ps-qr)$$
$$=|A|\cdot|B|$$

➡ 「**零因子と逆行列**」についてはすでに説明した通りである（p. 154, 155）.

「$\boldsymbol{AB=O}$」**が成り立つ条件を整理する**と

$$\boldsymbol{AB=O} \quad \begin{cases} A=\boldsymbol{O}, \text{ または } B=\boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A \neq O}, \text{ かつ } \boldsymbol{B \neq O} \longleftarrow \quad \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \text{ は「零因子」} \end{cases}$$

本文の説明では A, B を

$$A=(X-E)^2, \quad B=X+2E$$

として考えたわけである.

ところで本問を

$$X-E=A, \quad X+2E=B$$

とおいて，シンプルな形で表すと

$$\boldsymbol{A^2B=O} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

となり，これをみたす A, B についての条件を求めるハナシになる.

「$A=O$」または「$B=O$」のとき，（$**$）が成り立つことは明らかだから，これは「別ワク」として「$A \neq O$」,「$B \neq O$」のときを考える.

いま,「$|A| \neq 0$」とすると A^{-1} があるから，（$**$）の左からこれを２回かけると

$$\underbrace{(A^{-1})^2A^2}_{E}B=O \qquad \therefore \quad B=O$$

となって不合理がおこる．このことから「$\boldsymbol{|A|=0}$」としてよい.

ここで，何とかして「$|B|=0$」はいえないか.

「$|B| \neq 0$」とすると B^{-1} があるから，これを（$**$）の右からかけて

$$A^2\underbrace{B(B^{-1})}_{E}=O \qquad \therefore \quad A^2=O \quad (\text{ここですぐに「}A=O\text{」とはいえない})$$

ここで「何らかの形」で「$A^2=O$」がおこりえないことを示したい．そこで本文では③の「**ケーリー・ハミルトンの定理**」ということになったわけである.

あるいはこの部分を「成分計算」でやると次のようになる.

$$A^2=\begin{pmatrix} x-1 & y \\ y & x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 & y \\ y & x-1 \end{pmatrix} \quad \left(A=X-E=\begin{pmatrix} x-1 & y \\ y & x-1 \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} (x-1)^2+y^2 & 2y(x-1) \\ 2y(x-1) & y^2+(x-1)^2 \end{pmatrix}=O \qquad \therefore \quad x=1, \ y=0$$

このような X は「$X=E$」，すなわち「$A=O$」となって条件に反する.

$$\therefore \quad \boldsymbol{|B|=0}$$

となる．すなわち，まとめると

$$\begin{cases} |A|=|X-E|=(x-1)^2-y^2=0 \\ |B|=|X+2E|=(x+2)^2-y^2=0 \end{cases} \longrightarrow \quad x=-\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{3}{2}$$

である———いずれにしても（＊＊）で「2乗の因子」があるため，相当やっかいなことになる．

3つの異なる行列 A，B，C ではどうなるか———

$$\boldsymbol{ABC=O} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

これも「$A=O$ または $B=O$ または $C=O$」のときは（＊＊＊）は成立するから「$A\neq O$，かつ $B\neq O$，かつ $C\neq O$」のときについて調べればよい．

もし $|\boldsymbol{A}|\neq\boldsymbol{0}$ とすると「A^{-1}」があるから，（＊＊＊）の左から A^{-1} をかけて

$$\underbrace{A^{-1}(A}_{E}BC)=O \qquad \therefore \quad BC=O$$

ここで，$B\neq O$，$C\neq O$ であるから $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ は**「零因子」**である．

$\therefore \quad |\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{0},\ |\boldsymbol{C}|=\boldsymbol{0}$ （「零因子」は「逆行列」をもたない——— p. 154, 155）

$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$ のときは，「BC」に着目して，「$|BC|\neq 0$」とすると「$(BC)^{-1}$」があるから，これを（＊＊＊）に右からかけると

$$A\underbrace{BC(BC)^{-1}}_{E}=O \qquad \therefore \quad A=O$$

これは不合理である．すなわち「$(BC)^{-1}$」なし!!

$\therefore \quad |BC|=|B|\cdot|C|=0 \quad (\longleftarrow (*))$

$\therefore \quad |\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{0}$，または $|\boldsymbol{C}|=\boldsymbol{0}$

まとめると次のようになる．

$ABC=O$

「$ABC=O$」ならば次のことが成り立つ．

(i) $A=O$，または $B=O$，または $C=O$

(ii) $A\neq O$，$B\neq O$，$C\neq O$ のとき

$$\begin{cases} |A|\neq 0 \text{ ならば，} |B|=|C|=0 \\ |A|=0 \text{ ならば，「} |B|=0, \text{ または } |C|=0 \text{」} \end{cases}$$

このことは「ABC」の右端の「C」に注目しても同様で，そのときの(ii)は

$|C|\neq 0$ ならば　$|A|=|B|=0$

$|C|=0$ ならば　「$|A|=0$，または $|B|=0$」

となる．

また（＊＊）はこの定理の「$\boldsymbol{A=B}$」である**「特別な場合」**と考えればよい．

これを用いると「うまく」いく例をあげておく.

たとえば

$A^3=A$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のとき,「$a+d$」の値を求めよ.

まず「因数分解」をする.

$$\boldsymbol{A^3-A=A(A+E)(A-E)=O}$$

(i) $A=O$, または$A=\pm E$のとき $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=0, \end{cases}$ または$\begin{cases} 2 \\ 1, \end{cases}$ または$\begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

(ii) $A\fallingdotseq O$, $A\fallingdotseq\pm E$のとき

「$|A|\fallingdotseq 0$」のときは

$$|A+E|=(a+1)(d+1)-bc=(ad-bc)+(a+d)+1=0$$

$$|A-E|=(a-1)(d-1)-bc=(ad-bc)-(a+d)+1=0$$

この2式を$a+d$, $ad-bc$について解くと

$$a+d=0,\quad ad-bc=-1$$

「$|A|=0$」のとき

$$|A+E|=0,\ \text{または}\ |A-E|=0 \qquad \therefore\ a+d=\pm 1$$

(i), (ii)から「$a+d$」の値を求めると

$$a+d=0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

➡ 本問は「因数分解」をした形で示したが, 左辺を展開すれば

$$(X-E)^2(X+2E)=X^3-3X+2E=O$$

のことである. 本文③に示した「ケーリー・ハミルトンの定理」

$$\boldsymbol{X^2-tX+\delta E=O}\quad (\boldsymbol{t=2x},\ \boldsymbol{\delta=x^2-y^2})$$

の用い方としては

(i) $\boldsymbol{X^2=tX-\delta E}$ を代入して「3次式(左辺)」の「次数」を下げる.

(ii) 「整式の扱い」にならって「割り算」をする.

$$X^3-3X+2E=\underbrace{(X^2-tX+\delta E)}_{\substack{\parallel \\ O}}(\cdots\cdots)+\underbrace{aX+bE}_{1\text{次式}}$$

などの方法があり, p.164, 168, 169, 170などでくわしく説明した.

「方法」としては, むしろこの方が「より確実」という「フシ」もないではないが, しかし, ここでは「零因子」としての扱い方も説明しておきたかったので,「あえて」このような形でとりあげた. どちらの考え方も「一長一短」であるが, それぞれ重要な意味をもっているので, そのつもりで読んでもらいたい.

発展問題3—逆行列

Aは2次の正方行列で, $A^2+A+E=O$をみたしている.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) p を実数とするとき，$A-pE$ の逆行列を A を用いて表せ．
(2) $A^2-3A+2E$ の逆行列を A で表せ．

解　説 (1) 「$A-pE$」の逆行列を求めるのであるが，これがどんな形をしているのか今のところわからない．そこでこの「$A-pE$」と「$A-qE$」をかけてみる．$\longleftarrow$ 「$(A-pE)B=E$」のとき「$B=(A-pE)^{-1}$」である

$$(A-pE)(A-qE)=kE \quad \cdots\cdots ①$$

となるような実数 q，k が存在するなら，①の両辺を k で割って

$$(A-pE)\left(\frac{A-qE}{k}\right)=E$$

と変形すれば，この q と k の値を用いて

$$(A-pE)^{-1}=\frac{A-qE}{k}$$

（「$AB=E$ $(=BA)$」のとき，B を A の逆行列 A^{-1} と定義した（p. 151参照））

とすることができる．

そこで①を整理すると

$$A^2-(p+q)A+(pq-k)E=O \quad \cdots\cdots ②$$

また

$$A^2+A+E=O \qquad \therefore \quad A^2=-A-E \quad \cdots\cdots ③$$

であるから，これを②に代入して整理すれば

$$(p+q+1)A=(pq-k-1)E \quad \cdots\cdots ④$$

ここで「$p+q+1 \neq 0$」とすると

$$A=\lambda E \quad \left(\lambda=\frac{pq-k-1}{p+q+1},\ \lambda \text{ は実数}\right)$$

③に代入すると

$$(\lambda E)^2+(\lambda E)+E=(\lambda^2+\lambda+1)E=O$$

$$\therefore \quad \lambda^2+\lambda+1=0$$

これをみたす実数 λ は存在しないから「$p+q+1=0$」である．

$$\therefore \quad q=-p-1$$

このとき④から，「$pq-k-1=0$」であるから

$$k=pq-1$$
$$=p(-p-1)-1=-(p^2+p+1)$$

すなわち，実数 q，k の値は存在して

$$(A-pE)^{-1}=-\frac{1}{p^2+p+1}(A+(p+1)E)$$

(2) $A^2-3A+2E=(-A-E)-3A+2E$

$$=-4\left(A-\frac{1}{4}E\right)$$

(1)を用いて

$$\left(A-\frac{1}{4}E\right)^{-1}=-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)+1}\left(A+\left(\frac{1}{4}+1\right)E\right)$$

$$=-\frac{16}{21}\left(A+\frac{5}{4}E\right)$$

$$\therefore\quad (A^2-3A+2E)^{-1}=\left(\frac{1}{-4}\right)\left(A-\frac{1}{4}E\right)^{-1}$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\right)\left\{-\frac{16}{21}\left(A+\frac{5}{4}E\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{21}(4A+5E)}$$

らしんばん

➡ (1)は「**逆行列**」の定義から

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

を利用!!

同じことだが(1)は次のようにやるとよい．

$$\boldsymbol{A-pE=X}$$

とおくと

$$\boldsymbol{A=X+pE,\quad A^2+A+E=0}$$

であるから，A を第2式に代入する．

$$(X+pE)^2+(X+pE)+E=0$$

$$\therefore\quad X^2+(2p+1)X+(p^2+p+1)E=0$$

$$\therefore\quad X(X+(2p+1)E)=-(p^2+p+1)E$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{X\left(-\frac{X+(2p+1)E}{p^2+p+1}\right)=E}$$

$$\therefore\quad X^{-1}=-\frac{X+(2p+1)E}{p^2+p+1}=-\frac{1}{p^2+p+1}\{A+(p+1)E\}$$

としてもよい．

➡ (2)は先に因数分解すると

$$A^2-3A+2E=(A-E)(A-2E)$$

であるから

$$(A^2-3A+2E)^{-1}=\{(A-E)(A-2E)\}^{-1}$$

$$=(A-2E)^{-1}(A-E)^{-1}$$

と変形してから，(1)を2回用いてもよい．

なお，「$\boldsymbol{kA}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}$」は

$$(kA)B=E \qquad \therefore\ A(kB)=E$$

$$\therefore\ kB=A^{-1} \qquad \therefore\ \boldsymbol{B=\frac{1}{k}A^{-1}} \longleftarrow \frac{1}{k}\text{をわすれやすい!!}$$

である.

発展問題 4—転置行列

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，${}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$と定義する.

また，2次の正方行列全体の集合をMとし，Mの部分集合SおよびS'をそれぞれ

$$S=\{A\in M \mid {}^tA=A\}$$
$$S'=\{A\in M \mid {}^tA=-A\}$$

とするとき，次の各問いに答えよ.

(1) $S\cap S'$を求めよ.

(2) $B_1\in S$, $B_2\in S$, $C_1\in S'$, $C_2\in S'$のとき，$B_1+C_1=B_2+C_2$ならば，$B_1=B_2$, $C_1=C_2$であることを証明せよ.

(3) $A\in M$のとき，$A+{}^tA\in S$を証明せよ.

(4) Mの任意の元Aは，$A=B+C$（ただし，$B\in S$, $C\in S'$）と，ただ1通りに表される．BおよびCをAと${}^tA$を用いて表せ.

解　説 (1) $A\in S\cap S'$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l} {}^tA=A \\ {}^tA=-A \end{array}\right\} \qquad \therefore\ A=-A \qquad \therefore\ A=O$$

$$\therefore\ \boldsymbol{S\cap S'=\{O\}}$$

(2) 「${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$」（計算で確かめておくこと）を用いる.

$$B_1+C_1=B_2+C_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の両辺の「転置行列」を考えて

$${}^tB_1+{}^tC_1={}^tB_2+{}^tC_2 \qquad \therefore\ B_1-C_1=B_2-C_2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

「①+②」,「①−②」をつくれば

$$B_1=B_2,\ C_1=C_2$$

(3) ${}^t(A+{}^tA)={}^tA+{}^t({}^tA)$

$$={}^tA+A=A+{}^tA$$

$$\therefore\ A+{}^tA\in S$$

(4) 「$A=B+C$ $(B\in S,\ C\in S')$」とすると

$${}^tA={}^tB+{}^tC=B-C$$

2式を B, C について解いて

$$\boldsymbol{B=\frac{1}{2}(A+{}^tA),\quad C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)}$$

逆に，この $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ は

$$\boldsymbol{B\in S,\quad C\in S',\quad B+C=A}$$

をみたす．

らしんばん

行列 A の「行」と「列」をいれかえたものを A の「転置行列」といい，「${}^t\boldsymbol{A}$」で表す．

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

である．

「転置行列」には次の性質がある――「成分計算」で確かめておくとよい．

(i)　${}^t({}^tA)=A$

(ii)　${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$

(iii)　${}^t(AB)={}^tB{}^tA$

(iv)　${}^t(kA)=k{}^tA$

(v)　$|{}^tA|=|A|$

発展問題5―対角行列を利用して A^n を求める

$A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき

(1)　$P^{-1}AP$ を求めよ．

(2)　A^n を求めよ．

(3)　$B_n=E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-1}$ を計算せよ．

解　説　(1)　$P^{-1}=\dfrac{1}{3-4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\therefore\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)　「$P^{-1}AP=B$」とおいてこれを n 乗すると

$$\underbrace{(P^{-1}A}_{}\underbrace{P)(P^{-1}}_{E}\underbrace{AP)(P^{-1}}_{E}\underbrace{AP)\cdots\cdots(P^{-1}}_{E}AP)=B^n$$

$$\therefore\quad P^{-1}A^nP=B^n \qquad \therefore\quad A^n=PB^nP^{-1}$$

ここで

$$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix} \qquad \therefore\quad B^n=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-3\cdot2^n+4\cdot3^n}&\boldsymbol{-3\cdot2^{n+1}+2\cdot3^{n+1}}\\\boldsymbol{2^{n+1}-2\cdot3^n}&\boldsymbol{2^{n+2}-3^{n+1}}\end{pmatrix}$$

(3) $B_n=E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-1}$ ……………………①

$\therefore\quad AB_n=A+A^2+A^3+\cdots\cdots+A^{n-1}+A^n$ ……………②

「①−②」を求めると

$$(E-A)B_n=E-A^n$$

$$\therefore\quad B_n=(E-A)^{-1}(E-A^n)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6\\-2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3\cdot2^n-4\cdot3^n&3\cdot2^{n+1}-2\cdot3^{n+1}\\-2^{n+1}+2\cdot3^n&1-2^{n+2}+3^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1-3\cdot2^n+2\cdot3^n}&\boldsymbol{3-3\cdot2^{n+1}+3^{n+1}}\\\boldsymbol{-1+2^{n+1}-3^n}&\boldsymbol{-\frac{5}{2}+2^{n+2}-\frac{1}{2}\cdot3^{n+1}}\end{pmatrix}$$

らしんばん

➡ 行列 A の「**固有方程式**」は

$$(6-t)(-1-t)-6\cdot(-2)=0$$

$$\therefore\quad t^2-5t+6=0 \qquad \therefore\quad t=2,\ 3 \quad (\text{「**固有値**」})$$

であることに注意!!

また「**固有ベクトル**」を求めると

(i) 「$t=2$」のとき：

$$\begin{pmatrix}6&6\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad \therefore\quad 2x+3y=0 \qquad \therefore\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{-3}\\\boldsymbol{2}\end{pmatrix}$$

(ii) 「$t=3$」のとき：

$$\begin{pmatrix}6&6\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad \therefore\quad x+2y=0 \qquad \therefore\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{-1}\end{pmatrix}$$

これより，「$P=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$」を構成する列ベクトル $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ は「固

有ベクトル」であることがわかる.

一般に A の「固有値 α, β $(\alpha \neq \beta)$」に対する「固有ベクトル」をそれぞれ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\left.\begin{array}{l} A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta x_2 \\ \beta y_2 \end{pmatrix} \end{array}\right\rangle \longleftarrow \text{まとめる!!}$$

となり，それらをまとめると

$$A\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \beta x_2 \\ \alpha y_1 & \beta y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\therefore \quad AP = PB \qquad \therefore \quad P^{-1}AP = B$$

$$\therefore \quad P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \longleftarrow \text{行列 } A \text{ の「対角化」という}$$

の形に変形することができる．このとき

$$B^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \longleftarrow$$ 例題 11 (p. 166) 参照!!

であるが，これは厳密には「数学的帰納法」で証明しなければならない.

(2)については，「等比数列の和」を求める公式

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

「$(*)-(**)$」より

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

を思い出してほしい.

発展問題 6—漸化式と行列の n 乗

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対し，ベクトル

$$\overrightarrow{x_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

を考える．次の各問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{x_2}=A\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_3}=A\overrightarrow{x_2}$ をみたす行列 A を求めよ．

(2) A は，すべての自然数 n に対して，$\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}$ をみたすことを示せ．

(3) $A^2-4A+3E=O$ を示せ．

(4) A^n を求めよ．

解　説 (1) 「$a_1=1$, $a_2=2$」であるから

$$a_3=4a_2-3a_1=5$$

$$a_4=4a_3-3a_2=14$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\14\end{pmatrix}\end{array}\right\rangle \longrightarrow A\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\5&14\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}2&5\\5&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-3&4\end{pmatrix}$$

(2) $$A\overrightarrow{x_n}=\begin{pmatrix}0&1\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\-3a_n+4a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_{n+2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{x_{n+1}}$$

(3) $$(A-E)(A-3E)=\begin{pmatrix}-1&1\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\-3&1\end{pmatrix}=O$$

(4) 「$A^2-4A+3E=O$」を2通りに変形する．

$$\begin{cases}A(A-E)=3(A-E)\\A(A-3E)=A-3E\end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{cases}A^n(A-E)=3^n(A-E)\\A^n(A-3E)=1^n(A-3E)\end{cases}$$

辺々引くと

$$2A^n=(3^n-1)A-(3^n-3)E$$

$$=(3^n-1)\begin{pmatrix}0&1\\-3&4\end{pmatrix}-(3^n-3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3^n+3&3^n-1\\-3^{n+1}+3&3^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

らしんばん

「漸化式と行列の $\boldsymbol{n}$ 乗」について――

「連立漸化式」

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{n+1}=ax_n+by_n} \\ \boldsymbol{y_{n+1}=cx_n+dy_n} \end{cases}$$

を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{n+1}} \\ \boldsymbol{y_{n+1}} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_n} \\ \boldsymbol{y_n} \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftarrow \text{「}\boldsymbol{a_{n+1}=ra_n}\text{」と比較!!}$$

「等比数列」と同様に考えて

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{「}\boldsymbol{a_n=ar^{n-1}}\text{」と比較!!}$$

で，結局 A^{n-1} を求めることに帰着する.

本問の場合は，「3 項間漸化式」

$$\boldsymbol{x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\ast)$$

において，「$x_n=y_{n+1}$」とおくと，上式は

$$\begin{cases} x_{n+1}=px_n+qy_n \\ y_{n+1}=x_n \end{cases}$$

行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=B^{n-2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=B^{n-2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (y_2=x_1)$$

で，これも B^{n-2} を求めることに帰着する.

なお，行列 B の「固有方程式」は

$$(p-t)(0-t)-q=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{t^2=pt+q}$$

で，（$\ast$）の x_{n+2}，x_{n+1}，x_n をそれぞれ t^2，t，1 とおいてえられる方程式と一致する――『諸橋の基礎解析講義』の「3 項間漸化式」を参照!!

参考までに

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0,\ a_1=1,\ a_2=2$$

をといてみる.

$$t^2-4t+3=0 \qquad \therefore\ t=1,\ 3$$

ゆえに，与えられた式は「次の 2 通りに変形」される.

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=3\cdot(a_{n+1}-a_n) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=1\cdot(a_{n+1}-3a_n) \end{cases}$$

数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$，$\{a_{n+1}-3a_n\}$ はそれぞれ等比数列であるから

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n=3^{n-1}(a_2-a_1)=3^{n-1} & \cdots\cdots\cdots (\ast\ast) \\ a_{n+1}-3a_n=1^{n-1}(a_2-3a_1)=-1 & \cdots\cdots\cdots (\ast\ast\ast) \end{cases}$$

「$(\ast\ast)-(\ast\ast\ast)$」をつくれば

$$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$$

この解法と，本問(4)の解法との類似性をよく観察しておいてほしい．

発展問題 7―「固有方程式」が「重解」をもつとき

行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

について，

(1) $A^n\vec{b}=n2^{n-1}\vec{a}+2^n\vec{b}$ となることを証明せよ．

(2) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ をみたす実数 x, y を求めよ．

(3) $A^n\vec{c}$ を求めよ．

ただし，n は自然数とする．

解　説　(1)「数学的帰納法」で証明する．

(i)「$n=1$」のとき両辺は $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ となって成立し，このとき

$$A\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$$

(ii)「$n=k$」のとき成立すると仮定すると

$$A^k\vec{b}=k2^{k-1}\vec{a}+2^k\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad A^{k+1}\vec{b}&=A(k2^{k-1}\vec{a}+2^k\vec{b}) \\ &=k2^{k-1}A\vec{a}+2^kA\vec{b} \\ &=k2^{k-1}(2\vec{a})+2^k(\vec{a}+2\vec{b}) \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{A\vec{a}=2\vec{a}} \\ &=(k+1)2^k\vec{a}+2^{k+1}\vec{b} \end{aligned}$$

ゆえに，与えられた式は，「$n=k+1$」のときにも成立．

(i), (ii)より証明された．

(2) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=2,\ y=1$$

(3)　$A^n\vec{c}=A^n(2\vec{a}+\vec{b})$

$=2A^n\vec{a}+A^n\vec{b}$　$(\because\ \ A^n\vec{a}=2^n\vec{a})$

$=2(2^n\vec{a})+n2^{n-1}\vec{a}+2^n\vec{b}$

$=(n+4)2^{n-1}\vec{a}+2^n\vec{b}$

$$=\begin{pmatrix}(3n+2)2^{n-1}\\ -n2^{n-1}\end{pmatrix}$$

らしんばん

「行列の n 乗」の問題だが，少し様子が違っている．

$$A=\begin{pmatrix}5 & 9\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

の「**固有方程式**」をつくってみると

$(5-t)(-1-t)-(-1)9=0$

$\therefore\ \ t^2-4t+4=0$　　$t=2$ ←―― **重解**

「固有ベクトル」は

$$\begin{pmatrix}5 & 9\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\qquad \therefore\ \ x+3y=0$$

$\therefore\ \ \begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$ ←―― これは本問で与えられた $\vec{a}$

である．このとき，(1)の式がどこからきたかを考えてみたい．

「**固有方程式**」が「**重解 $\boldsymbol{\alpha}$**」をもつとき，「**ケーリー・ハミルトンの定理**」より

$A^2-2\alpha A+\alpha^2E=O$　　$\therefore\ \ (A-\alpha E)^2=O$

$\therefore\ \ (A-\alpha E)(A-\alpha E)\vec{y}=\vec{0}$

（ただし，$\vec{y}$ は A の「固有ベクトル」以外の任意のベクトル）

とおくことができる．

そこで，あらためて「$\boldsymbol{(A-\alpha E)\vec{y}=\vec{x}}$」とおくと

$$\begin{cases}(A-\alpha E)\vec{x}=\vec{0}\\ (A-\alpha E)\vec{y}=\vec{x}\end{cases}\qquad \therefore\ \ \begin{cases}A\vec{x}=\alpha\vec{x}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\\ A\vec{y}=\vec{x}+\alpha\vec{y}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(**)\end{cases}$$

（ただし，$\vec{x}$ は A の「**固有ベクトル**」）

(**) に左から A をかけて式を用いることをくり返すと

$A^n\vec{y}=n\alpha^{n-1}\vec{x}+\alpha^n\vec{y}$

が導かれ，本問の $\vec{a}$，$\vec{b}$ は上で説明した $\vec{x}$，$\vec{y}$ にあたるのであるが，(*) と (**) から実際に計算してみよう．

「$\alpha=2$」であるから

$$(*):\quad \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore\ x+3y=0$$

固有ベクトル $\longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}\ (=\vec{\boldsymbol{a}})$

$$(**):\quad \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore\ x+3y=1$$

これをみたすベクトルの1つ $\longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}\ (=\vec{\boldsymbol{b}})$

であることがわかる.

以下

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ \vec{y}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とおくと (*), (**) は

$$(*):\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha x}_1 \\ \boldsymbol{\alpha y}_1 \end{pmatrix}$$

$$(**):\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}+\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\alpha x}_2 \\ \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{\alpha y}_2 \end{pmatrix}$$

であるから1本の式にまとめると

$$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 & x_1+\alpha x_2 \\ \alpha y_1 & y_1+\alpha y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

と変形される. そこで

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=P$$

とおくと

$$AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \therefore\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}$$

から,「**固有方程式**」が「**重解**」をもつときの「**$\boldsymbol{A^n}$ を求める方法**」が工夫される.

すなわち

$$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

で

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^n & \boldsymbol{n\alpha}^{n-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}^n \end{pmatrix} \longleftarrow$$ (**例題11** (p. 166) 参照)

から A^n が計算できる.

発展問題 8—射影分解

$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p+q & p-q \\ p-q & p+q \end{pmatrix}$ のとき A^n を求めよ． **(やや難)**

解 説 このままでは手がつけられない．そこで少し工夫をする．

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p+q & p-q \\ p-q & p+q \end{pmatrix}=p\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+q\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=X,\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=Y$$

とおくと

$$A=pX+qY \quad \cdots\cdots ①$$

で，この X と Y のみたす関係式は

$$X+Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=E \quad \cdots\cdots ②$$

$$XY=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=O \quad \cdots\cdots ③$$

$$YX=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=O \quad \cdots\cdots ④$$

ここで②に左から X をかけると

$$X^2+\underbrace{XY}_{=O}=X \qquad \therefore\ X^2=X \qquad \therefore\ X^k=X \quad \cdots\cdots ⑤$$

（数学的帰納法!!）

左から Y をかけると

$$\underbrace{YX}_{=O}+Y^2=Y \qquad \therefore\ Y^2=Y \qquad \therefore\ Y^k=Y \quad \cdots\cdots ⑥$$

（数学的帰納法!!）

以上「②～⑥」を用いて A^n を求める——**推定して数学的帰納法!!**

$$A^2=(pX+qY)(pX+qY)$$
$$=p^2\underbrace{X^2}_{=X}+pq\underbrace{XY}_{=O}+qp\underbrace{YX}_{=O}+q^2\underbrace{Y^2}_{=Y}=p^2X+q^2Y$$

これらのことから

$$A^n=p^nX+q^nY \quad \cdots\cdots ⑦$$

と推定する．

以下「数学的帰納法」で証明する．

(i) 「$n=1,\ 2$」のときは成立する．

(ii) 「$n=k$」のとき成立すると仮定すれば

$$A^k=p^kX+q^kY$$

$$\therefore\quad A^{k+1}=(pX+qY)(p^kX+q^kY)$$

$$=p^{k+1}\underbrace{X^2}_{\substack{\parallel\\X}}+pq^k\underbrace{XY}_{\substack{\parallel\\O}}+qp^k\underbrace{YX}_{\substack{\parallel\\O}}+q^{k+1}\underbrace{Y^2}_{\substack{\parallel\\Y}}$$

$$=p^{k+1}X+q^{k+1}Y$$

ゆえに「推定」⑦は正しい．

$$A^n=p^nX+q^nY$$

$$=p^n\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+q^n\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}p^n+q^n&p^n-q^n\\p^n-q^n&p^n+q^n\end{pmatrix}$$

らしんばん

➡ 「A^n を求める問題」もこうなるとどこから手をつけてよいのかわからない．しかし，それにはそれなりの理由があって，結論からいうと**本問の数値 p，q が実は与えられた行列 A の「固有値」になっているのである**―――以下の説明は少しむずかしいので，第4章の「1次変換」を読んでからにしてもよい．

ポイントを整理してみよう

$$①:\quad A=pX+qY \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\left.\begin{aligned}②:&\quad X+Y=E\\③:&\quad XY=O\\④:&\quad YX=O\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

まず行列 A が与えられるとき，A を（$**$）をみたす X，Y を用いて（$*$）の形に表すのであるが，このとき **p，q が行列 A の「固有値」である**ことをどのようにして説明すればよいか―――①，②を X，Y について解くと

$$X=\frac{A-qE}{p-q},\quad Y=\frac{A-pE}{q-p}$$ （ただし「$p\neq q$」とする―――「$p=q$」なら「$A=pE$」であるから A^n は簡単に求まる．）

このとき X，Y は③をみたすから

$$XY=\frac{A-qE}{p-q}\cdot\frac{A-pE}{q-p}=O$$

$$\therefore\quad (A-qE)(A-pE)=A^2-(p+q)A+pqE=O \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

（このとき「$YX=O$」も当然成り立つ）

一方，行列 A を「$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$」とおくと「**ケーリー・ハミルトンの定理**（p. 162）」より

$$\boldsymbol{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ast\ast\ast\ast)$$

ここで（$\ast\ast\ast$）と（$\ast\ast\ast\ast$）から A^2 を消去する――「（$\ast\ast\ast\ast$）－（$\ast\ast\ast$）」を計算すると

$$\{(p+q)-(a+d)\}A=\{pq-(ad-bc)\}E$$

であるが，ここで「$p+q \neq a+d$」とすると，両辺を「$(p+q)-(a+d)$」で割ることができて　⟵　「$A=pE$　または　$A=qE$（p. 164）」

$$A=\frac{pq-(ad-bc)}{(p+q)-(a+d)}E=kE \quad \longleftarrow \quad \textbf{単位形!!}$$

この場合は A^n は簡単に求められるから，問題にしなくてよい.

これ以外のときは　⟵　「$\boldsymbol{A-pE}$」と「$\boldsymbol{A-qE}$」が「**零因子**」（p. 164）

$$\boldsymbol{p+q=a+d}, \quad \therefore \quad \boldsymbol{pq=ad-bc}$$

であるから，p，q を２つの解とする２次方程式は

$$\boldsymbol{t^2-(a+d)t+ad-bc=0}$$

これは行列 A の「**固有方程式**」に他ならない（p. 159参照）.

すなわち p，q は行列 A の「**固有値**」である.

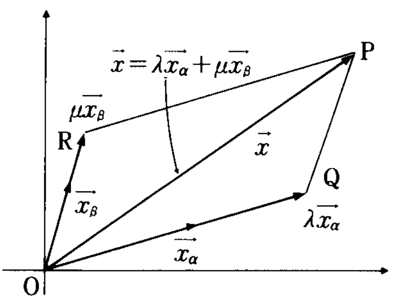
以下，p，q を α，β と書くことにする.

あらためて

$$\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}=X, \quad \frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}=Y$$

がいったい何を意味するかを考えてみよう.

ここで行列 A の固有値 α，β に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{x_\alpha}$，$\overrightarrow{x_\beta}$ とおくと，「$\alpha \neq \beta$」のとき，$\overrightarrow{x_\alpha}$ と $\overrightarrow{x_\beta}$ は１次独立である.



ここで，任意のベクトルを $\vec{x}$ とおくと，$\vec{x}$ は $\overrightarrow{x_\alpha}$，$\overrightarrow{x_\beta}$ の「１次結合」で表され

$$\boldsymbol{\vec{x}=\lambda\overrightarrow{x_\alpha}+\mu\overrightarrow{x_\beta}}$$

（λ，μ は実数）

である．このベクトルを行列 A で変換することを考える（「１次変換」については p. 195参照）.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= A[\lambda\overrightarrow{x_\alpha}+\mu\overrightarrow{x_\beta}] \\ &= \lambda A\overrightarrow{x_\alpha}+\mu A\overrightarrow{x_\beta} \\ &= \lambda\alpha\overrightarrow{x_\alpha}+\mu\beta\overrightarrow{x_\beta} \end{aligned}$$

（「固有ベクトル」と「固有値」の関係
$A\overrightarrow{x_\alpha}=\alpha\overrightarrow{x_\alpha}$，$A\overrightarrow{x_\beta}=\beta\overrightarrow{x_\beta}$ ―― p. 159，160参照）

また

$$\beta\vec{x}=\beta[\lambda\vec{x_\alpha}+\mu\vec{x_\beta}]$$
$$=\lambda\beta\vec{x_\alpha}+\mu\beta\vec{x_\beta}$$

であるから，これらの辺々を引くと

$$(A-\beta E)\vec{x}=\lambda(\alpha-\beta)\vec{x_\alpha} \qquad \therefore \quad \underbrace{\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}}_{\displaystyle \| \atop X}\vec{x}=\lambda\vec{x_\alpha}$$

$\therefore \quad \boldsymbol{X\vec{x}=\lambda\vec{x_\alpha}}$ ←—— 行列 X は図の $\overline{\mathbf{OP}}$ を $\overline{\mathbf{OQ}}$ にうつす!!

同様にして

$\boldsymbol{Y\vec{x}=\mu\vec{x_\beta}}$ ←—— 行列 Y は図の $\overline{\mathbf{OP}}$ を $\overline{\mathbf{OR}}$ にうつす!!

ことがわかる．

以下，行列による「1次変換」では「固有ベクトル」の方向に注目して考えることが大きな意味をもつことになる．

➡ このハナシの読み方を少しかえてみよう．$\vec{\boldsymbol{x}}$ を「**任意のベクトル**」としてこれを

$$B=(A-\alpha E)(A-\beta E)$$

で1次変換すると

$$B\vec{x}=(A-\alpha E)(A-\beta E)\vec{x}=(A-\alpha E)\lambda(\alpha-\beta)\vec{x_\alpha}$$
$$=\lambda(\alpha-\beta)(A\vec{x_\alpha}-\alpha\vec{x_\alpha})=\lambda(\alpha-\beta)(\alpha\vec{x_\alpha}-\alpha\vec{x_\alpha})=\vec{0}$$

である．すなわち

$$B=O$$
$$\therefore \quad (A-\alpha E)(A-\beta E)=\boldsymbol{A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E=O}$$

これが「ケーリー・ハミルトンの定理」の「図形的意味」に他ならない．

➡ なお，本文では「①～⑥」を用いて A^n を「推定」し，「数学的帰納法」を用いてそれを証明したが，「確率・統計」を学んで「**2項定理**」を用いられる諸君はそれでやってみてもよい．それは

$$XY=YX=O$$

により X と Y の「積に関する交換則」が保証されているからである．

すなわち

$$A=pX+qY$$
$$\therefore \quad A^n=(pX+qY)^n$$
$$={}_nC_0(pX)^n+\underbrace{{}_nC_1(pX)^{n-1}(qY)}_{\displaystyle \| \atop O}+\cdots+\underbrace{{}_nC_r(pX)^{n-r}(qY)^r}_{\displaystyle \| \atop O}+\cdots+{}_nC_n(qY)^n$$
$$=p^nX^n+q^nY^n=p^nX+q^nY$$

となる．