

第4章

1 次変換

「1次変換」は「ベクトル変換装置」の
ようなものである。

「固有値による1次変換の分類」は
ナイシヨのハナシだから
決して誰にも言わないように……



ナイシヨ、ナイシヨ、ナイシヨ……………

「 $y=ax$ 」から「 $\vec{y}=A\vec{x}$ 」へ——「多変数1次関数」として

最も簡単な形をした1次関数

$y=ax$ —— 中学では「正比例の式」として学んだ

を出発点として、「次数」を「1次式」のままとし、「多変数(われわれの場合は2変数)」で考えたもの、すなわち

$$\vec{y}=A\vec{x} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ あるいは } \begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

が「1次変換」である—— xy 平面上では「点の変換」、あるいは「2次元ベクトルの変換」を表している。

高校数学では、最も簡単な例として、「2次元ベクトル」、「 2×2 の行列」をとりあげ「多変数関数の基本的な性質」を学ぶことが主な目的である。

また、この「線形代数学」の分野は、歴史の上では「解析学」のように古くはないが、いまや、その応用される範囲は「自然科学」にとどまらず、「社会科学」などの分野でもきわめて重要な役割をはたすに至っている。

以下、「基本の考え方」から「点の変換」、「直線の変換」、「領域の変換」、「いろいろな1次変換」など、順を追って解説していくことになるのだが

A^{-1} があるとき ($|A| \neq 0$ —— 行列 A が「正則」)

A^{-1} がないとき ($|A|=0$ —— 行列 A が「正則でない」)

ではハナシが違うので、そのことには特に注意して読み進めてもらいたい。

——実は「変換の行列」の「固有値(実数の場合)」に注目すると、もっといろいろなことがハッキリしてくる。次のように分類して考えるとよい。

(i) $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha\beta \neq 0$	——→	p. 216, 217	}	← $ A \neq 0$
(ii) $\alpha \neq \beta = 1, \alpha \neq 0$	——→	p. 249, 254		
(iii) $\alpha = \beta \neq 0, 1$	——→	p. 250, 251		
(iv) $\alpha = \beta = 1$	——→	p. 255, 256		
(v) $\alpha = 0, \beta = 1$	——→	p. 260	}	← $ A = 0$
(vi) $\alpha = 0, \beta \neq 0, 1$	——→	p. 261, 262		
(vii) $\alpha = \beta = 0$	——→	p. 266		

少しむずかしいかもしれないが、ここまで「ガンバッテ」おけば、これで「平面上の1次変換のほとんどすべて」が解決したことになる。

第1節

1次変換



「1次変換」とは何か、という「最も素朴な問いかけ」からはじめることにする。結論からいうと「1次変換」は、ベクトルの「方向」や「大きさ」をかえる操作であると考えてよい。

高校数学では「2次元列ベクトル」, 「 2×2 行列」による「 xy 平面上の1次変換」を具体的な例として「1次変換」のいろいろな性質を研究するのが主な目的である。ここではその「考え方の基本」について解説する。

(i) 「1次変換」とは何か——まず、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のタテのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

に注目してもらいたい。

(ii) 「1次変換」は「線形写像」である——「直線」と「直線図形（三角形、平行四辺形など）」を例として「1次変換」の基本的な性質を明らかにする。

1 「1次変換」とは何か

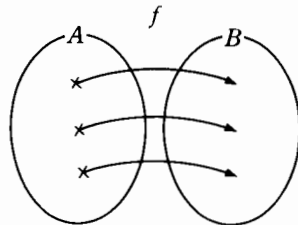
まず、「変換」という「コトバ」の意味から説明しよう。

集合 A の任意の要素に、集合 B の要素を対応させる「規則 f 」が定められているとき、この「 f 」を A から B への「写像」といい

$$f: A \longrightarrow B$$

で表す。

このとき、特に A と B とが同じ集合、たとえば、「 A, B がともに実数の集合」、あるいは、「 A, B がともにベクトルの集合」などのとき、この写



像を「変換」ということばでよんでいる。

「1次変換」というのは「ベクトルの集合からベクトルの集合への変換」のことで、「2次元ベクトル」を例にとると

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるとき

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数}) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

などのように、「 x' 、 y' 」の成分が、「定数項のない x 、 y の1次式（1次同次式という）」で表される場合をいう。

①で与えられる関係を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。

このとき、ベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を「1次変換 f 」による「像」といい、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を「原像」という。

$$\text{図 1} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{y}$$

とおくと上の関係は

$$\vec{y} = A\vec{x} \dots\dots\dots (*)$$

と表せて、これは比例の式「 $y = ax$ 」と同じ形をしていることに注意したい。

図 2 (*) は「ベクトル \vec{x} 」に左から行列 A をかけて、「ベクトル \vec{y} 」がえられる関係で、ここで行列 A の果している役割は、「ベクトル \vec{x} をベクトル \vec{y} に変換する（「長さ」や「向き」をかえる）」ことで、いわば「ベクトル変換装置」のようなものと考えればよい。

例題 1

次の行列で表される1次変換によって、点 $P(3, 2)$ はどんな点にうつるか。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解説

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \therefore P'(4, 5)$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2\alpha \\ 2 \end{pmatrix} \quad \therefore P'(3+2\alpha, 2)$$

らしんばん

➡ 行列の乗法の計算規則で上のように計算される1次変換の「図形的な意味」を調べてみる。

一般の形で表すと、「1次変換」による「像」は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \\ &= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

で与えられ

変換以前のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (**)$$

で、(*) の x, y は (**) の x, y と同じ x, y である。

このことから、(*) で与えられる「1次変換」は、もとのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を、

2つの基本ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ は } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ の1次結合!!}$$

のスカラー倍の和に分解し、その上で、 \vec{e}_1, \vec{e}_2 を、行列を構成する2つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ でおきかえたものであることがわかる。

要するに「基本ベクトル」がかわる（グラフでいうと「軸の傾き」と「目盛」がかわる）と考えればよい——次の図で確かめておくとよい。

たとえば、このことを本問の(1)について図解すると

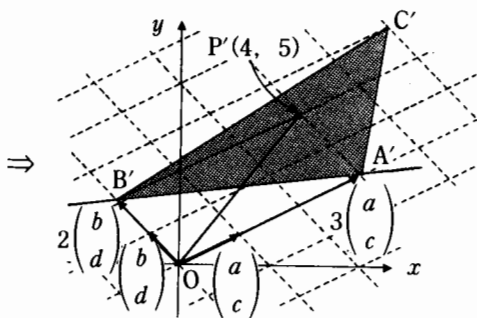
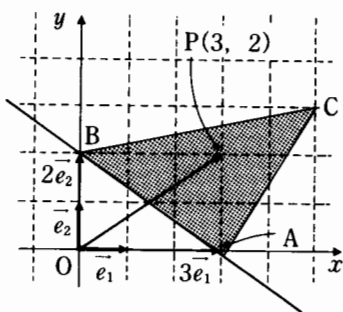
$$x=3, y=2, \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



さらに特徴的なことは、たとえば上の図で

直線 AB \longrightarrow 直線 A'B'

$\triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$

であることは大体(?)予想されるが、これらのことについてのキチンとした説明はもう少しハナシを進めてからにする。

➡ 「平面全体」はどのように変換されるか——

(**)で、「 x, y を任意の実数」とすると、 $P(x, y)$ は「平面全体」を動くことになる。このときPの像 $P'(x', y')$ はどのような点か。そのことを説明するには

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

の関係をしっかりと理解しておかなければならない。それは

$$(i) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

でハナシがまるでちがうからである。

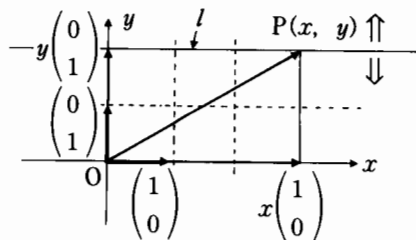
$$(i) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ —— 「1次独立」のとき —— } |A| \neq 0 \text{ (} A^{-1} \text{がある)}$$

このとき、まず「 x の値」を変化させると

$P(x, y)$ は直線 l 上

$P'(x', y')$ は直線 l' 上

を「 x の変化に対応して」動くことは説明するまでもない。

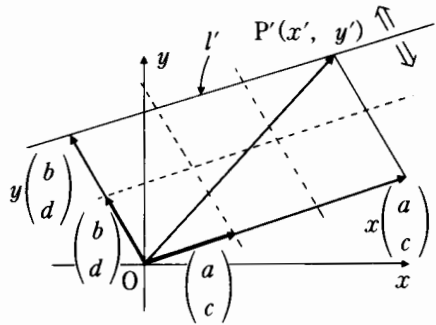


次に「 y の値」を変化させると l は「上」, 「下」に動き, l' はそれに対応して「 \Rightarrow の方向」あるいは「その逆方向」に動く.

すなわち, $P(x, y)$ が「全平面」を動くとき, $P'(x', y')$ も「全平面」を動くことがわかる.

すなわち, 「平面全体」を「1対1の対応」で「平面全体」にうつす.

次のようにまとめられる.



平面全体の変換 ($|A| \neq 0$ のとき)

$|A| \neq 0$ のとき

- (i) 「平面全体」は「平面全体」にうつる ← 「上への写像」である.
- (ii) 「1対1写像」である.

(i)は次のようにして説明される →

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{任意の } (x, y) \text{ に対して } (x', y') \text{ がきまる.}$$

——この x', y' が「任意の実数値」をとり得ることをいえばよい.

いま, 「 A^{-1} 」があるから, これを左からかけると

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{A^{-1}A}_{E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

すなわち, 任意の (x', y') に対して, それを与える (x, y) が存在する.

(集合 X から集合 Y への写像を「 f 」とするとき, 一般に「 $f(X) \subseteq Y$ 」である. 特に「 $f(X) = Y$ 」であるとき, 「 f 」は X から Y への「上への写像」である, という.)

(ii)については →

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

をいえばよい. いま

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とすると, 「 A^{-1} 」があるから, これを左からかけると

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{A^{-1}A}_{E} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{不合理!!}$$

である。

——(i), (ii)とも $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が「1次独立」であることを考えると「あたりまえ」のことである。

(ii) $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ —— 「1次従属」のとき ← $|A|=0$ (A^{-1} ナシ)

「 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \vec{0}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \vec{0}$ ($a=b=c=d=0$)」ならば

「平面全体」は「原点」にうつる

このことはあたりまえだから $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, または $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のときについて

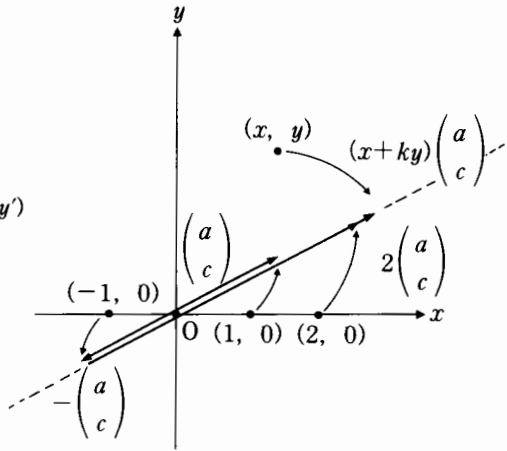
説明する。

いま, 「 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ 」とすると

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

とおくことができるから, (x', y')

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + yk \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ &= (x+ky) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$



となり, 「 $x+ky$ 」は「スカラー」である(「 $(x+ky)$ 倍」ということ)から

「平面全体」は, 原点を通り $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ 方向」の直線上にうつる

ことがわかる——図はいくつかの (x, y) の像をプロットしたものである。

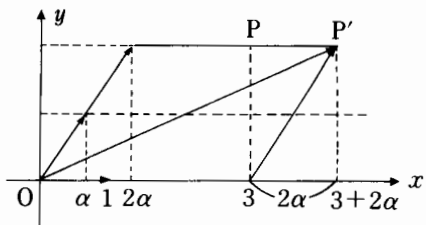


(2)の行列の「図形的な意味」についても調べておこう。

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{これは変わらない}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+2\alpha \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



すなわち

$$P(3, 2) \longrightarrow P'(3+2\alpha, 2)$$

で、 $\alpha > 0$ ならば P は「 2α 」だけ右に「ズレル」ことがわかる。

P を一般の点 $P(x, y)$ におきかえてみると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha y \\ y \end{pmatrix}$$

となり、「 y 座標は変わらず、 x 座標は αy だけふえる」ことになる。

いま、「 $\alpha > 0$ 」とすると

$$\begin{cases} \text{「}y > 0\text{」ならば「右へズレル」} \\ \text{「}y = 0\text{」ならば「動かない」} \\ \text{「}y < 0\text{」ならば「左へズレル」} \end{cases}$$

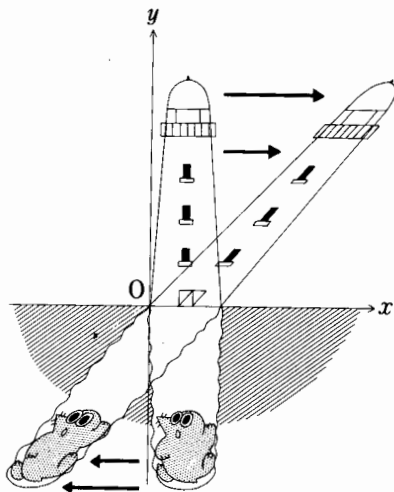
ことがわかり、しかも「 $|y|$ 」が大きいほどそれに比例して大きくズレル」ことがわかる（「 $\alpha < 0$ 」のときは「逆方向」に「ズレル」）。

このように、与えられた行列によって「 xy 平面上の各点がどのように影響されるか」を考えることも大切である。

ちなみに行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

は「 y 方向へのズレ」を表す行列である。



2 「1次変換の合成」と「逆変換」

(1) 1次変換の合成

2つの1次変換 f, g に対応する行列を A, B とする。このとき点 $P(x, y)$ が f によって、点 $Q(x', y')$ にうつり、さらに点 Q が g によって点 $R(x'', y'')$ にうつるとすれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots\dots\dots ①$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \dots\dots\dots ②$$

であるから、①を②に入れると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= B \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \\ &= BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (C=BA) \quad \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

このとき変換

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

も「1次変換」で、これを「1次変換 f と g との合成変換」といい

$$h = g \circ f$$

「1次変換 h に対応する行列 C 」は③でみるように「 g の行列 B 」と、「 f の行列 A 」との積「 BA 」で与えられる——積の順序に注意!!

(2) 逆変換

いま③で

$$BA = E \quad (=AB)$$

とすると、 $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ はもとのベクトル

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と等しくなり

$$B = A^{-1}$$

であるから、②は

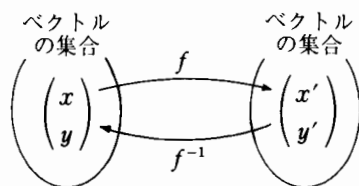
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

つまり、 f の像 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ をもとにもどす「変換 f^{-1} (ここでは g)」も「1次

変換」で、その行列は「 A^{-1} 」であることがわかる——「 f^{-1} 」を「 f の逆変換」という。

さらに、2つの1次変換 f, g が逆変換をもつならば、この合成変換である $g \circ f$ も逆変換をもつ。

これは、 f, g に対応する行列を A, B とすれば、 $g \circ f$ を表す行列は BA であり、 A, B に逆行列があれば、 BA の逆行列が



$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \longleftarrow \underbrace{(A^{-1}B^{-1})(BA)}_{\parallel E} = \underbrace{A^{-1}A}_{\parallel E} = E$$

として存在するからである (p. 153, 154).

例題 2

(1) 1次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって、どんな点が、 $(-2, -3)$ にうつるか。

(2) 1次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって、点 $(2, 1)$ 、 $(-3, 2)$ がそれぞれ点 $(-4, 3)$ 、 $(4, 2)$ にうつるといふ。このとき行列 A を求めよ。

解説

(1) 点 $(-2, -3)$ の「原像」を求める問題であるから、求める点を (x, y) とすると

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

これに左から

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

をかけると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

すなわち、求める原像は点 $(5, -4)$

(2) 与えられた条件を行列を用いて表すと

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{.....①} \\ A \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{.....②} \end{cases}$$

①、②を1つの式にまとめて

$$A \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{.....③}$$

$$\begin{aligned}\therefore A &= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

らしんばん

➡ (2)で用いた「①と②」を③のように「1つの式にまとめる」方法は、すでに p. 161, 168, 183, 184, 188 などでも用いているが、少し「異和感」があるかもしれないので「1次変換」の立場から説明しておく。

「 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 」 とするとき、「1次変換」では

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \dots\dots\dots (*)$$

であることはすでに述べた (p. 197)。

いま、行列 B に対して

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (**)$$

であるとすると、(*) から

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。そこで(**)を本文の①, ②に入れると

$$\textcircled{1}: AB \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \textcircled{2}: AB \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ここで、ふたたび(*)を用いてまとめると

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \longleftarrow B \text{ と } A \text{ との「合成変換」の行列!!}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

となり、本文に述べたことがらが確認される。

このことからわかるように、(2)の意味するところは

「2点の像」が決まれば、「1次変換」が決定する

ということに他ならない。これは平面上の「1次変換」のきわめて基本的な性質の1つである。

➡ (2)は求める行列を「 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 」として

$$\textcircled{1}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} 2a+b=-4 \\ 2c+d=3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} -3a+2b=4 \\ -3c+2d=2 \end{cases}$$

から、 a, b, c, d に関する連立方程式を解いてもよいが、われわれとしては、なるべく成分にバラさないで、まとめたまま扱うことにしたい。

3 「1次変換」と「線形性」

「実数から実数への変換（関数）」のうちで、最も簡単で基本的なものは正比例の関数

$$f: x \longrightarrow ax \quad \longleftarrow \text{「}f(x)=ax\text{」のこゝ!!}$$

であるが、これは次の2つの性質をもつ。

$$(I) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(II) \quad f(kx) = kf(x)$$

これを「線形性」といい、「線形性」をもつ写像を「線形写像」という。

「1次変換」も実は「線形写像」である。次にまとめておく。

「1次変換」は「線形写像」

2次元ベクトルの集合 V_2 から V_2 への写像 f が「1次変換」ならば次の関係が成り立つ。すなわち

$$(I) \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$(II) \quad f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$$

である。

逆に、この関係が成り立つような「変換」は「1次変換」である。

解説

これは「1次変換」を考える上で、きわめて重要な性質である。それは

$$p\vec{x} + q\vec{y} \quad (p, q: \text{実数})$$

で与えられるようなベクトルを変換するときに

$$f(p\vec{x} + q\vec{y}) = f(p\vec{x}) + f(q\vec{y}) \quad \longleftarrow (I)$$

$$= pf(\vec{x}) + qf(\vec{y}) \quad \longleftarrow (II)$$

のような扱いができるためである。

(I), (II)を「行列」を用いて表してみよう。

「1次変換」は「ベクトルに行列を左からかける」ことで表された (p. 196) から、「行列の乗法」にしたがって「 $\vec{x} + \vec{y}$ 」, 「 $k\vec{x}$ 」に「左から行列 A をかけると

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} \quad \longleftarrow \text{分配則}$$

$$A(k\vec{x}) = kA\vec{x} \quad \longleftarrow \text{実数(スカラー)}$$

である——すなわち (I), (II) が成り立つ。

逆に (I), (II) が成り立つような写像, すなわち「線形写像」は「1次変換」であるということもできる。

いま, 2次元ベクトルで考えることにして, 線形写像 f によって基本ベクトル「 \vec{e}_1 」, 「 \vec{e}_2 」が

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \text{ すなわち } f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \text{ すなわち } f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるとする。このとき, 平面上の任意のベクトルを「 \vec{x} 」とすると

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad \longleftarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表されるから

$$f(\vec{x}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)$$

$$= f(x\vec{e}_1) + f(y\vec{e}_2) \quad \longleftarrow \text{(I)}$$

$$= xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) \quad \longleftarrow \text{(II)}$$

$$= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり, 「 f 」は「1次変換」である。

すなわち, (I), (II) が成り立つとき, 「1次変換」は基本ベクトル「 \vec{e}_1 」, 「 \vec{e}_2 」の像「 $f(\vec{e}_1)$ 」, 「 $f(\vec{e}_2)$ 」で決定する。したがって (I), (II) を「1次変換の定義」としてもよい。

らしんばん

➡ 一般のハナシをしておこう。

平面上の「1次独立」である2つのベクトルを「 \vec{a} 」, 「 \vec{b} 」とすると, この平

面上の「任意のベクトル \vec{x} 」は「 \vec{a} 」と「 \vec{b} 」との「1次結合」で一意的に表された (p. 18). すなわち

$$\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

この \vec{x} を「1次変換 f 」で変換すると

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f(x\vec{a} + y\vec{b}) \\ &= xf(\vec{a}) + yf(\vec{b}) \quad \longleftarrow (I), (II) \end{aligned}$$

である. すなわち

「 \vec{a} 」, 「 \vec{b} 」の像「 $f(\vec{a})$ 」, 「 $f(\vec{b})$ 」が決まれば「 \vec{x} 」の像「 \vec{x}' 」が決定する
 これが p. 204 で述べた

「2点の像」が決まれば「1次変換」が決定する
 という内容で、例題 2(2) (p. 203) では

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

から「変換の行列 A 」が決定したわけである.

➡ 「直線の変換」と「線形写像」について——

直線を「ベクトル方程式」で表しておく、その変換には上で述べた「線形性」が利用できて便利である.

直線 l_1 の「方向ベクトル \vec{m} 」と、その「通る点 $A_1(\vec{a}_1)$ 」が与えられると、 l_1 は「ベクトル方程式」

$$\vec{x} = \vec{a}_1 + t\vec{m} \quad (t: \text{実数}, \vec{m} \neq \vec{0})$$

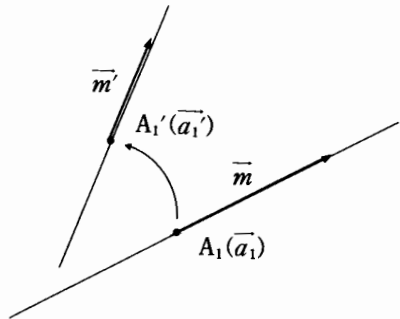
で表される (p. 39, 40).

これを「行列 A による1次変換 f 」で変換すると、「 f 」は線形写像であるから

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f(\vec{a}_1 + t\vec{m}) \\ &= f(\vec{a}_1) + tf(\vec{m}) \\ &= A\vec{a}_1 + tA\vec{m} \\ &= \vec{a}_1' + t\vec{m}' \quad (\vec{a}_1' = A\vec{a}_1, \vec{m}' = A\vec{m}) \quad \cdots \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$

これは点 $A_1'(\vec{a}_1')$ を通り、方向ベクトル \vec{m}' の直線である——ただし、ここでは「 $\vec{m}' \neq \vec{0}$ 」のときに限る（「 $\vec{m}' = \vec{0}$ 」のとき、直線 l_1 の像は「点 $A_1'(\vec{a}_1')$ 」となる）。すなわち

「直線」 \longrightarrow 「直線」



である。

また、 A_1 と異なる点 $A_2(\vec{a}_2)$ を通り、 l_1 に平行な直線を l_2 とすると、「 l_2 の方向ベクトルも \vec{m} 」であるから、 l_2 は

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{a}_2 + t\vec{m} \\ \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f(\vec{a}_2 + t\vec{m}) \\ &= f(\vec{a}_2) + tf(\vec{m}) \\ &= \vec{a}_2' + t\vec{m}' \dots\dots\dots (**) \end{aligned}$$

これは点 $A_2'(\vec{a}_2')$ を通り、方向ベクトル \vec{m}' の直線である。すなわち

「平行な 2 直線」 \longrightarrow 「平行な 2 直線」

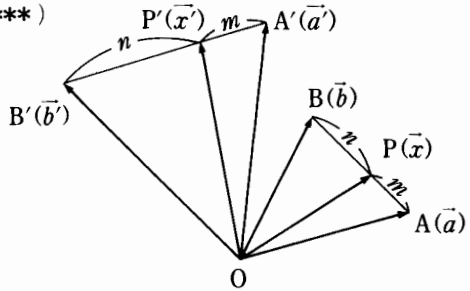
である。

また異なる 2 点を $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$ とするとき、線分 AB を「 $m:n$ 」に分ける点を $P(\vec{x})$ とすると

$$\vec{x} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \dots\dots\dots (***)$$

であるから

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f\left(\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}\right) \\ &= \frac{n}{m+n}f(\vec{a}) + \frac{m}{m+n}f(\vec{b}) \\ &= \frac{n\vec{a}' + m\vec{b}'}{m+n} \end{aligned}$$



となり、 $P'(\vec{x}')$ は線分 $A'B'$ (ただし $A'(\vec{a}')$ 、 $B'(\vec{b}')$) を「 $m:n$ 」に分けることがわかる。すなわち

「分点」 \longrightarrow 「分点」

である。以上、(＊)、(＊＊) の「 \vec{m}' 」を「 $\vec{m}' \neq \vec{0}$ 」としてまとめると

「直線」、「平行な 2 直線」、「分点」

- 「1 次変換」では
- (i) 「直線」は「直線」にうつる。
 - (ii) 「平行な 2 直線」は「平行な 2 直線」にうつる
 - (iii) 「分点」は「分点」にうつる——線分の比をかえない。

となる。

しかし「 $\vec{m}' = \vec{0}$ 」のときはどうなるのか。

このとき (*), (**) は

$$\vec{x}' = \vec{a}_1', \quad \vec{x}' = \vec{a}_2'$$

であるから、2直線 l_1, l_2 はそれぞれ定点 A_1', A_2' にうつることがわかる。

そのときの条件を調べてみると

$$\vec{m}' = f(\vec{m}) = A\vec{m} = \vec{0}, \quad \vec{m} \neq \vec{0}$$

であるから、いま「 A^{-1} がある」とすると、これに左からかけて

$$\underbrace{A^{-1}A\vec{m}}_E = \vec{0} \quad \therefore \vec{m} = \vec{0}$$

これは「 l_1 が直線である条件： $\vec{m} \neq \vec{0}$ 」に反する。すなわち「 A^{-1} 」がない。

$$\therefore |A| = 0$$

である——しかし「この逆」は成立しない。そのことは「反例を示す」ことにより簡単に説明される。

以上のことから上に述べた(i)をキチンとした形で表すと

$$\begin{cases} |A| \neq 0 \text{ のとき: 「直線」} \longrightarrow \text{「直線」} \\ |A| = 0 \text{ のとき: 「直線」} \longrightarrow \text{「直線, または点」} \end{cases}$$

となる。

なお(ii)は (***) を

$$\vec{x} = \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{AB}$$

と表せば基本的には(i)と同じである。

➡ 「直線図形 (平行四辺形, 三角形など)」の変換について——

「線形性」を利用すると、「平行四辺形」, 「三角形」などの変換をかなりスッキリ説明することができる。

一般に「1次独立」である2つのベクトル

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}, \quad (\vec{a} \times \vec{b})$$

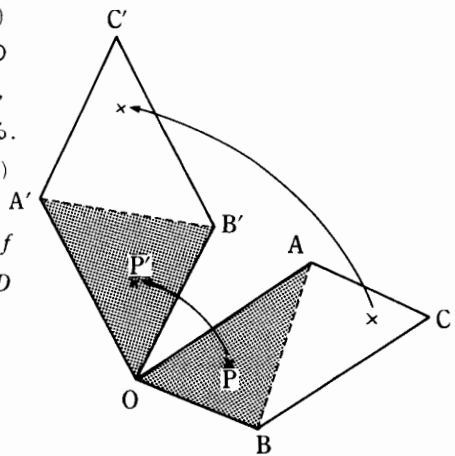
を隣りあう2辺とする平行四辺形の周または内部を「領域 D 」とすると、「 D の点 $P(\vec{x})$ 」は次のように表される。

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad \dots\dots\dots (***)$$

$$(0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1)$$

このことを利用すると「1次変換 f (ただし f^{-1} あり)」による「領域 D の像 D' 」は

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \\ &= \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b}) \end{aligned}$$



$$(0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1)$$

から

$$f(\vec{a}) = \overrightarrow{OA'}, \quad f(\vec{b}) = \overrightarrow{OB'}$$

を隣りあう2辺とする平行四辺形の周または内部であることがわかる。

また $\triangle OAB$ の周または内部の点は (****) の α, β の条件をかえて

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1)$$

で表される (p. 66) から

$$\vec{x}' = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b}) \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1)$$

であることは当然で、上できめた A', B' に対して

$$\triangle OAB \longrightarrow \triangle OA'B'$$

となることも簡単に了解される。

また一般の $\triangle ABC$ については、その周または内部の点を $P(\vec{x})$ とすると

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad (\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC})$$

$$(\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0)$$

で表された (p. 66)。

$$\vec{x}' = f(\vec{x})$$

$$= f(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})$$

$$= \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b}) + \gamma f(\vec{c})$$

$$(\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0)$$

ここで

$$f(\vec{a}) = \overrightarrow{OA'}, \quad f(\vec{b}) = \overrightarrow{OB'}, \quad f(\vec{c}) = \overrightarrow{OC'}$$

とおくと

$$\triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$$

であることもわかる。(もちろん「辺の比の関係」はかわらない—— p. 208)

—— 「線形性」の「威力」を評価したい。

例題 3

$$1 \text{ 次変換 : } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって直線 l が直線 $m : x - 2y + 3 = 0$ にうつされ、またこの1次変換によって、直線 m が直線 n にうつされる。

このとき、直線 l, n の方程式を求めよ。

解 説 (i) l を求める。

l 上の点 (x, y) が、 m 上の点 (x', y') にうつされたたすると

$$x' - 2y' + 3 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

で、変換の関係は

$$\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

であるから、これを①に入れて

$$(2x + 5y) - 2(x + 3y) + 3 = 0 \quad \therefore y = 3$$

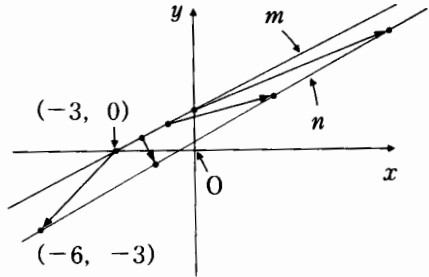
(ii) n を求める。

$$m: x - 2y + 3 = 0$$

これを「ベクトル方程式 (p. 39, 40)」で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(m の傾き $\left[\frac{1}{2}\right]$ から「方向ベクトル」は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, また m は点 $(-3, 0)$ を通る.)



$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= A \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \longleftarrow f(\vec{a} + t\vec{m})$$

$$= A \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + tA \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow n \text{ のベクトル方程式}$$

$$\therefore \begin{cases} x' = 9t - 6 \\ y' = 5t - 3 \end{cases} \quad \longleftarrow n \text{ のパラメータ表示}$$

$$\therefore \frac{x' + 6}{9} = \frac{y' + 3}{5} \quad (=t) \quad \therefore 5x' - 9y' + 3 = 0$$

ゆえに、 n の方程式はダッシュをとって

$$5x - 9y + 3 = 0$$

らしんばん

➡ l の方程式を求めるには、 m 上の (x', y') の関係式が与えられているから、

上に述べた方法が最も簡単であるが、 n を求めるにはいろいろな方法がある。たとえば「 (x, y) の関係から (x', y') の関係を求める」のであるから、まず与えられた関係から、 x, y を x', y' で表すことを考える。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} x = 3x' - 5y' \\ y = -x' + 2y' \end{cases} \end{aligned}$$

(x, y) の関係式は

$$m: x - 2y + 3 = 0$$

であるから、これに代入して

$$(3x' - 5y') - 2(-x' + 2y') + 3 = 0$$

$$\therefore 5x' - 9y' + 3 = 0 \quad \therefore 5x - 9y + 3 = 0$$

などとしてもよい。

あるいは m 上の点を「パラメータ表示」する。

$$m: y = \frac{x+3}{2} \longrightarrow \left(t, \frac{t+3}{2} \right)$$

でもよいが、「分数」はメンドウだから本文(ii)の②から「 $(-3+2t, t)$ 」で表すと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3+2t \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(-3+2t) + 5t \\ -3+2t+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9t-6 \\ 5t-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x' = 9t - 6 \\ y' = 5t - 3 \end{cases} \longleftarrow \text{パラメータ表示!!}$$

として t を消去する。

あるいは、「直線は2点で決定する」ことから、 m 上に適当な2点

$$P(-3, 0), Q(1, 2)$$

をとると

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \therefore P'(-6, -3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix} \quad Q'(12, 7)$$

n は P', Q' を通るから

$$y+3 = \frac{7+3}{12+6}(x+6) \quad \therefore 5x-9y+3=0$$

（この方法は、「1次変換」によって
「直線」 → 「直線」 (p. 207, 208)
をキチンと説明できないと少し気がひける。

などの方法がある。

しかし、これらの方法は、それぞれ一長一短で、いつもどの方法がよいというわけにはいかない——問題によって使い分けられるようにしておかなければならない。

例題 4

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f が与えられている。

f によって自分自身にうつされる直線をすべて求めよ。

解説 いきなり

「求める直線の方程式を $y = mx + n$ とおく」

といきたいところだが、そうはいかない。それは

$$y = mx + n \quad \text{.....①}$$

と書いたとき、すでに①には「 y 軸に平行な直線」すなわち

$$x = k \quad \text{.....②}$$

のタイプのものはすべて除かれてしまっているからである。

われわれとしては「おこりうるすべての場合」について調べたい。

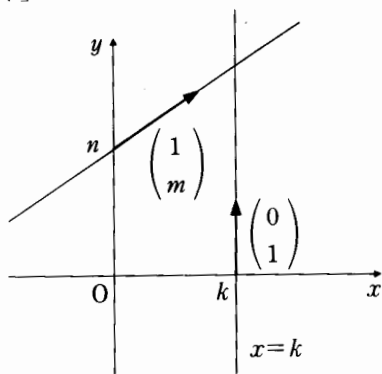
まず、求める直線が「②のタイプ」であるとすると、これを「ベクトル方程式」で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{—— 「方向ベクトル」は } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

「方向ベクトル」に注目して

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{「方向ベクトル」は変換されて「向き」をかえる} \right)$$

したがって、このタイプのものはない。



つまり求める直線は「①のタイプ」である。

これを、「ベクトル方程式」で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \longleftarrow (0, n) \text{ を通り, 方向ベクトルが } \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots ③$$

これを行列 A で変換すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \right] \\ &= tA \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \quad \left(\text{この方法について} \right. \\ &\quad \left. \text{は p. 211 参照!!} \right) \end{aligned}$$

これが、もとの直線と一致する条件を整理すると

$$(i) \ A \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \text{ かつ } (ii) \ A \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \text{ が } ③ \text{ 上} \quad \dots\dots\dots ④$$

となる。

$$\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \bar{0} \text{ のときは「} A^{-1} \text{なし (p. 209)」であった.} \right. \\ \left. \text{——これは本問ではありえない.} \right)$$

(i)について——→

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m \\ -1+4m \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \\ \therefore (1+2m) \cdot m - 1 \cdot (-1+4m) &= 0 \\ \therefore 2m^2 - 3m + 1 &= 0 \\ \therefore (2m-1)(m-1) &= 0 \quad \therefore m=1, \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

(ii)について——→

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ 4n \end{pmatrix}$$

これが③上にある。

$$4n = m(2n) + n \quad \therefore 2mn = 3n \quad \dots\dots\dots ⑥$$

⑤の m の値を⑥に入れると

$$n=0$$

以上のことから求める直線は2つあり

$$y=x, \quad y=\frac{1}{2}x$$

である。

らしんばん

➡ 本問のように、「1次変換」で「自分自身にうつる」直線を、「不動直線」という。ところが場合によると本文④の(i)で

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\text{このときは } A^{-1} \text{ がない})$$

となる場合もおこりうる (p. 209) が、そのときは「直線がつぶれて点になり、しかもそれがもとの直線上にある」ことになって、この場合も広い意味では「不動直線」とよべないこともない。しかしわれわれとしては

「直線 l 」が「直線 l 」にうつる

ということと

「直線 l 上の点」が「直線 l 上の点」にうつる

ということは、違うハナシとして扱うことにしたい。

本問では

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = 6 \neq 0$$

で「 A^{-1} 」があり、そのような心配はない。

➡ 「②のタイプ」がありえないことをいってしまえば「①のタイプ」、すなわち

$$y = mx + n \quad \dots\dots\dots (*)$$

について調べればよい。

この直線上の点 P を「パラメーター表示」すると $P(t, mt+n)$ であるから、

\overline{OP} を行列 A で変換すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t+2(mt+n) \\ -t+4(mt+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2m+1)t+2n \\ (4m-1)t+4n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この点 $P'(x', y')$ が「 t の値にかかわらず (*) 上にある条件」を求めてもよい——すなわち、(*) に

$$x' = (2m+1)t+2n, \quad y' = (4m-1)t+4n$$

を入れて整理すると

$$\begin{aligned} (4m-1)t+4n &= m\{(2m+1)t+2n\} + n \\ &= m(2m+1)t+2mn+n \end{aligned}$$

これが「 t に関する恒等式」であるための条件は、両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} 4m-1=m(2m+1) \\ 4n=2mn+n \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 2m^2-3m+1=0 \\ 2mn=3n \end{cases}$$

結局、本文の⑤、⑥が得られた——意外にスッキリといく方法である。

➡ 直線の方程式を「 $y=mx+n$ 」の形におきたいために「 $x=k$ 」の形のものの説明が必要であった——最初から「 A で方向をかえないベクトル」を求めてはどうか。すなわち

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+4y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore (x+2y) \cdot y - x \cdot (-x+4y) = 0$$

$$\therefore 2y^2 - 3xy + x^2 = 0$$

$$\therefore (y-x)(2y-x) = 0 \quad \therefore y=x, \quad 2y=x$$

これをみたとす x, y の値に対して求める直線の傾き m は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow m=1, \frac{1}{2} \dots\dots\dots (**)$$

このことから、直線の方程式は

$$y=x+k, \quad y=\frac{1}{2}x+l$$

と表される。

以下、この2直線を「パラメーター表示」してもよいし、あるいは

$$\left[A \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 4k \end{pmatrix} \right] \text{ が } [y=x+k] \text{ 上 } \longrightarrow k=0$$

$$\left[A \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 4l \end{pmatrix} \right] \text{ が } [y=\frac{1}{2}x+l] \text{ 上 } \longrightarrow l=0$$

とやれば、本文に述べた結果と同じになる。

➡ 「固有値」, 「固有ベクトル」を学んだ (p. 158) 立場からみる——

「固有方程式」は

$$(1-t)(4-t) - 2(-1) = 0$$

$$\therefore t^2 - 5t + 6 = 0 \quad \therefore (t-2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=2, 3$$

「固有値」 $t=2$ に対して「固有ベクトル」は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore x-2y=0 \quad \therefore \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

「固有値」 $t=3$ に対して「固有ベクトル」は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore x-y=0 \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルは (***) で求めたベクトルに他ならない。

ここで、2つの「固有ベクトル」

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

に注目すると、 \vec{a} と \vec{b} は「1次独立」である。したがって任意のベクトル \vec{x} は \vec{a} と \vec{b} の「1次結合」で表される。すなわち

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

このとき、 f により \vec{x} が \vec{x}' に変換されたとする

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \\ &= \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b}) \\ &= \alpha(2\vec{a}) + \beta(3\vec{b}) \end{aligned}$$

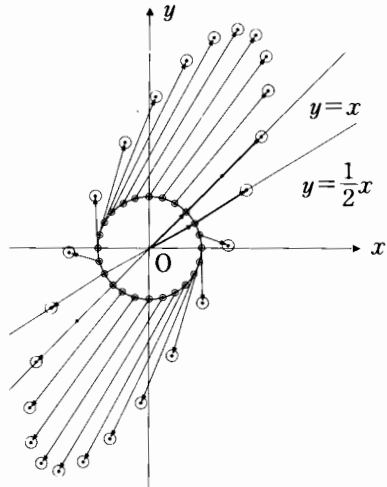
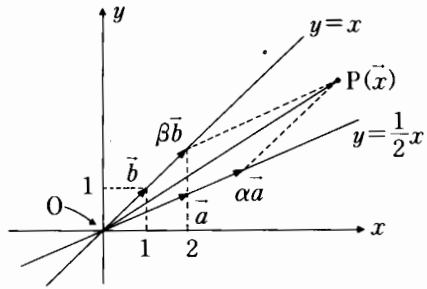
つまり、「 \vec{a} 方向は2倍」、「 \vec{b} 方向は3倍」に変換される——参考までに単位円周上の点の像をコンピューターでプロットしたものをのせておく。

一方、「不動直線」上の点に注目すると、それはこのような変換の特別な場合として

$y = \frac{1}{2}x$ 上の点 \longrightarrow この直線上で O からの距離が「2倍」の点

$y = x$ 上の点 \longrightarrow この直線上で O からの距離が「3倍」の点

に変換されていることがわかる。



例題 5

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ は次の行列による1次変換で、どのような図形にうつるか図示せよ。

また、(1)については面積は何倍になるか。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

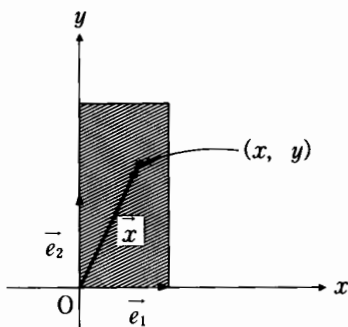
(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解説 「領域 D 」の任意の点を $X(\vec{x})$ とすると

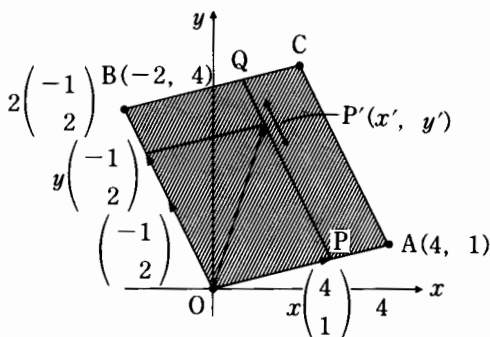
$$\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2) \quad \text{①}$$

(1) X の像 $X'(\vec{x}')$ は

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \\ &= xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) \\ &= xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$



ここで、 $x\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、「 x が 0 から 1 まで変化」するとき、線分 OA 上のベクトルとなるからこれを \vec{OP} とし、いま x を固定して考えると、「 y が 0 から 2 まで変化」するとき、②で与えられる点 $P'(x', y')$ は右図の線分 PQ 上を動く。



次に $0 \leq x \leq 1$ の範囲で x を動かすと、 P は O から A まで動き、したがって線分 PQ が、 OB から AC までスライドして、点 $P'(x', y')$ の存在範囲は、上図の斜線部分（平行四辺形の周および内部）となる。

面積の関係は、 D の面積を S 、図の平行四辺形の面積を S' とすると

$$\left. \begin{aligned} S &= 1 \cdot 2 = 2 \\ S' &= |4 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)| = 18 \end{aligned} \right\} S' \text{ は } S \text{ の } 9 \text{ 倍になる.}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(2x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

このとき

$$2(2x-y) = t$$

とおくと

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$

より

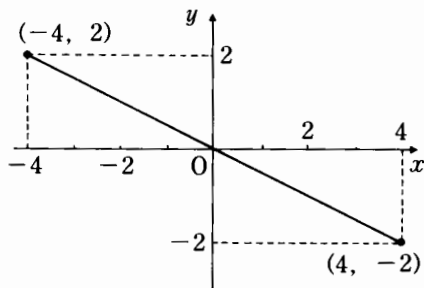
$$-4 \leq 2(2x - y) \leq 4$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(-4 \leq t \leq 4)$$

ゆえに、求める領域は線分

$$y = -\frac{1}{2}x \quad (|x| \leq 4)$$



となる。

らしんばん

⇒ (1)と(2)ではどちらがうか。

$$(1): A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ —— } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (|A| \neq 0)$$

$$(2): A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ —— } \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (|A| = 0)$$

に注目してもらいたい——(1)は「逆変換のある1次変換」、(2)は「逆変換のない1次変換」である。

「 $|A| \neq 0$ 」, 「 $|A| = 0$ 」で「平面全体」がどのように変換されるかについてはすでに p. 198, 199, 200でくわしく説明した。本問の「領域 D 」は「平行四辺形」であるが、当然これも「平面全体」の一部で、実数 x, y に制限が与えられているために領域が制限されているだけのことである。

特に(2)では「領域 D 」が変換されて「線分」になってしまった——

「 $|A| = 0$ 」のときの変換には注目しておきたい。

ちなみに本文③で

$$2(2x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と示したように、ベクトルの部分の「第1成分」が「1」となるように調整しておくとう間違いが少ない。

⇒ 「図形の変換」と「面積」との関係——

本問(1)の行列 A について「 $|A|$ 」を計算してみると

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 9$$

となり、本文に示した「9倍」と一致する——これは単なる「偶然(?)」だろうか。

結論からいうと、これは「偶然」ではない。「1次変換」では「図形の面積」は「 $|A|$ ($|A| < 0$ のときはその絶対値をとる) 倍」に変換されるのである。

このことを一般化しておきたい。

「直線図形」は、すべて「三角形に分割される」ので、「面積」について考えるには「三角形の面積」がどうなるかについて考えればよい。

p. 209, 210の説明によれば「 $|A| \neq 0$ 」のとき

$$\triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C'$$

であった。ここで

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} f(\overline{AB}) &= f(\overline{OB} - \overline{OA}) \\ &= f(\overline{OB}) - f(\overline{OA}) \\ &= \overline{OB'} - \overline{OA'} = \overline{A'B'} \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

同様にして

$$f(\overline{AC}) = \overline{A'C'} \quad \dots\dots (**)$$

である。

ここで「 f 」の行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{A'B'} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A'C'} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

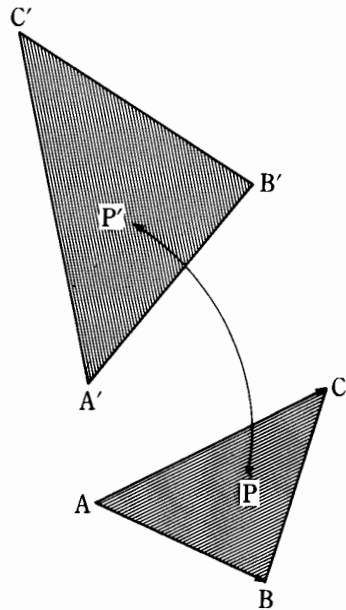
として (*) と (**) を成分で計算すれば

$$\begin{cases} X_1 = ax_1 + by_1 \\ Y_1 = cx_1 + dy_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} X_2 = ax_2 + by_2 \\ Y_2 = cx_2 + dy_2 \end{cases}$$

であるから、「三角形の面積の公式 (p. 49)」を用いて

$$\begin{aligned} \triangle A'B'C' &= \frac{1}{2} |X_1 Y_2 - X_2 Y_1| \\ &= \frac{1}{2} |(ax_1 + by_1)(cx_2 + dy_2) - (ax_2 + by_2)(cx_1 + dy_1)| \\ &= |ad - bc| \cdot \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| \\ &= |ad - bc| \cdot \triangle ABC \end{aligned}$$

すなわち、「面積」は「 $|ad - bc|$ 倍」に変換されることがわかる。



第2節

いろいろな1次変換



「1次変換」の具体的な例としては

- (i) 軸方向の伸縮——「軸」, 「原点」に関する対称移動, 「相似変換」など
- (ii) 原点を中心とする「角 θ 」の回転
- (iii) 原点を通る直線 l に関する対称移動——「折り返し」など
- (iv) それらの応用

などがあげられるが, ここではそれらの1つ1つについて, その「変換の行列」を導き, 「図形的な意味」を明らかにする.

1 軸方向の伸縮

1次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix} \text{ —— 「}x\text{方向に}\alpha\text{倍, }y\text{方向に}\beta\text{倍」する.}$$

は, 「 x 座標を α 倍」, 「 y 座標を β 倍」することを意味している. このような変換を「軸方向の伸縮」という.

α , β の値は0以外の実数であればよく, 「 $\alpha < 0$ 」の場合は x 座標を $|\alpha|$ 倍し, 次にその符号をかえればよい. β についても同様である.

行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるが, 特に α と β に具体的な値を与えると, 次のような変換を表す.

- (i) 「 $\alpha = 1$, $\beta = -1$ 」のとき…… x 軸に関する対称移動

- (ii) 「 $\alpha = -1, \beta = 1$ 」のとき…… y 軸に関する対称移動
 (iii) 「 $\alpha = \beta = -1$ 」のとき……原点に関する対称移動
 (iv) 「 $\alpha = \beta$ 」のとき……原点を中心に α 倍に伸縮——「相位変換」ともいう
 (v) 「 $\alpha = \beta = 1$ 」のとき……恒等変換

原像を $P(x, y)$ とし少し説明しよう。

(iv)については

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\therefore \overline{OP'} = \alpha \overline{OP}$ (ベクトルを「 α 倍に伸縮」)

(v)については

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{ベクトルは不変!!})$$

で、これは平面上のすべての点を動かさない。この変換を「恒等変換」といい、ふつう「 e 」で表す。「 e 」を表す行列は「単位行列 E 」である。

2 原点を中心とする θ 回転

原点を中心とする「角 θ 」の回転は、典型的な「1次変換」である。

例題 6

原点のまわりに θ 回転する 1 次変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

であることを示せ。

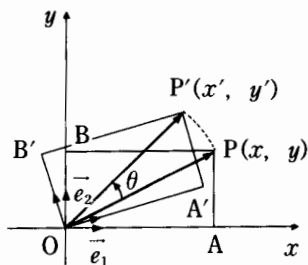
解説

ベクトル \overline{OP} を原点のまわりに θ 回転して、 $\overline{OP'}$ になったとする。

$P(x, y)$ とすれば、「基本ベクトル」を

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として



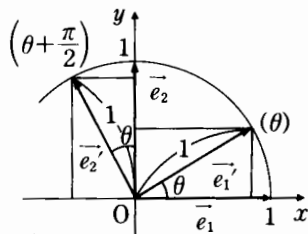
$$\begin{aligned}\overline{OP} &= x\overline{e_1} + y\overline{e_2} \\ \therefore \overline{OP'} &= f(\overline{OP}) \\ &= f(x\overline{e_1} + y\overline{e_2}) \\ &= x f(\overline{e_1}) + y f(\overline{e_2}) \quad \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

ゆえに、 $\overline{e_1}$ 、 $\overline{e_2}$ を θ 回転したときの像

$$f(\overline{e_1}) = \overline{e_1'}, \quad f(\overline{e_2}) = \overline{e_2'}$$

を求めればよい。

そこで、 $\overline{e_1}$ 、 $\overline{e_2}$ 、 $\overline{e_1'}$ 、 $\overline{e_2'}$ の関係を图示すれば、右図のようになり、「 $\overline{e_1'}$ 」と「 $\overline{e_2'}$ 」が x 軸の正方向となす角は、それぞれ「 θ 」、「 $\theta + \frac{\pi}{2}$ 」であるから



$$\overline{e_1'} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad (= f(\overline{e_1}))$$

$$\overline{e_2'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad (= f(\overline{e_2}))$$

これらを①に入れると

$$\therefore \overline{OP'} = x \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

ゆえに、 $P'(x', y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって「原点のまわりに θ 回転する1次変換の行列」は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (= R(\theta) \text{と書いたりするときがある。})$$

で表される。

らしんばん

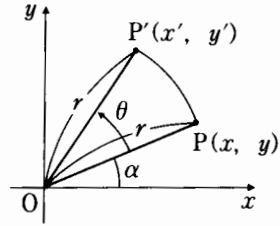
➡ 「三角関数」の「加法定理」を用いて証明することもできる。

点 $P(x, y)$ は「原点 O からの距離」を「 r 」, 「 OP が x 軸の正方向となす角」を「 α 」とすると

$$\begin{cases} x=r \cos \alpha \\ y=r \sin \alpha \end{cases}$$

で表される。

この点を θ 回転して、点 $P'(x', y')$ になるとすれば、「 OP' と x 軸の正方向とのなす角」は「 $\alpha + \theta$ 」であるから



$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\alpha + \theta) \\ &= r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) \quad \leftarrow \text{cos の加法定理!!} \\ &= \underbrace{r \cos \alpha}_{x} \cos \theta - \underbrace{r \sin \alpha}_{y} \sin \theta \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta \quad \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

y' も同様にして

$$\begin{aligned} y' &= r \sin(\alpha + \theta) \\ &= r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \quad \leftarrow \text{sin の加法定理!!} \\ &= \underbrace{r \sin \alpha}_{y} \cos \theta + \underbrace{r \cos \alpha}_{x} \sin \theta \\ &= y \cos \theta + x \sin \theta \quad \dots\dots\dots (**) \end{aligned}$$

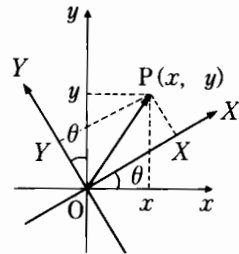
(*), (**) をまとめて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

いずれにしてもこの「回転の行列」は、「1次変換」を表す行列の典型的なものであるから、内容の理解とともに、十分に使えるようになっていなければならない。

➡ 「座標軸の θ 回転」について

図で、ベクトル \overline{OP} は xy 座標で $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表されるものとする。



この「座標軸を原点のまわりに θ 回転」して得られる新しい座標系を XY 軸とする。

この座標系による \overline{OP} の成分を $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

とする。回転する座標軸上からみると、 \overline{OP} が「 $-\theta$ 」だけ回転しているのと同じである——図でいえば P は X 軸に近づいていくように見える。

そこで

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots\dots\dots (***)$$

という関係式が得られる。

(x, y) の関係式が与えられて、 (X, Y) の関係式を求めるには (***) を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について解いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

この x, y を与えられた関係式に代入すればよい——第5章で実際に用いることになる。

3 「 $y=mx$ 」に関する対称変換

原点を通る直線 l に関する「対称変換」, 「正射影」も典型的な「1次変換」である。関連させて理解しておくといよ。

例題 7

直線 $l: y=x$ に関する対称移動を表す式を導き、1次変換であることを示せ。また、その行列を求めよ。

解説 この変換で、点 $P(x, y)$ が、点 $P'(x', y')$ に変換されたとする。このとき「 P と P' とが、 l に関して対称」であるための条件は、

- (i) P と P' との midpoint M は l 上
- (ii) $PP' \perp l$

とまとめられる。

(i) \longrightarrow M の座標を l に代入!!

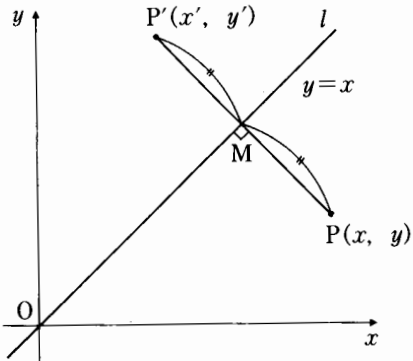
$$M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$$

であるから

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2}$$

$$\therefore x' - y' = y - x \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) \longrightarrow 「垂直条件」を内積で表す!!



l の「方向ベクトル」が、 $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{l} \cdot \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore x'-x+y'-y=0$$

$$\therefore x'+y'=x+y \quad \dots\dots\dots ②$$

①, ②より

$$\begin{cases} x'=y & (=0 \cdot x + 1 \cdot y) \\ y'=x & (=1 \cdot x + 0 \cdot y) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ゆえに、これは「1次変換」で、求める変換の行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

らしんばん

➡ この変換が「1次変換」であることがわかっていれば、「基本ベクトルの像」を求めて

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので、求める行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であることはすぐわかる。

しかし、本問のように、1次変換であるかどうかわからないときに「1次変換は基本ベクトルの像で決まる」は使えない。

「1次変換であるかどうか」を判定するには何を示せばよいか!!

(i) 定義による判定

「 x' , y' が x , y の1次同次式」で与えられることにたちもどって

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}, \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\vec{x}' = A\vec{x})$$

のどれかが示されればよい。

(ii) 「線形性」による判定

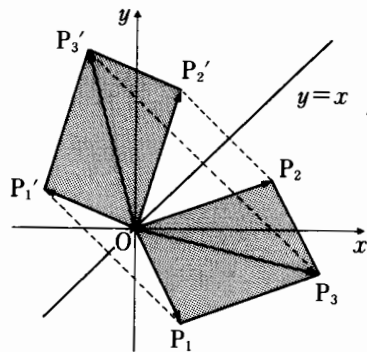
$$(I) \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$(II) \quad f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$$

が成り立つ (p. 205, 206) ことを示してもよい。

本問の解は(i)を示したが、(ii)の方でやると次のようになる。

この変換で、原点 O は動かない。任意の2点を $P_1(\vec{x}_1)$, $P_2(\vec{x}_2)$ とし、第3

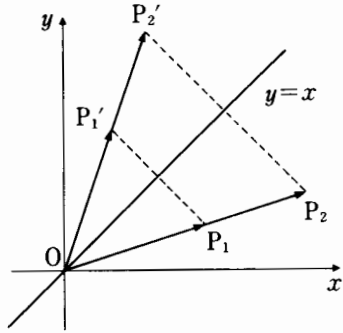


の点を $P_3(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ とすると、四角形 $OP_1P_3P_2$ は平行四辺形である。

この変換を f とし、 f による P_1, P_2, P_3 の像をそれぞれ、 P_1', P_2', P_3' とすると、四角形 $OP_1'P_3'P_2'$ は四角形 $OP_1P_3P_2$ と「 $y=x$ 」に関して対称であるから、やはり平行四辺形で

$$f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$$

が成り立つ。



また、 $O, P_1(\bar{x}_1), P_2(k\bar{x}_1)$ とすると、この3点は1直線上にあり、 f による P_1, P_2 の像を P_1', P_2' とすれば、 O, P_1', P_2' もやはり1直線上にあって

$$\overline{OP_2'} = k\overline{OP_1'}$$

すなわち

$$f(k\bar{x}_1) = kf(\bar{x}_1)$$

も成り立つので、 f は1次変換である。

➡ 一般に「原点を通る直線 $l: y=mx$ に関する対称移動」を表す行列は

$$\frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix}$$

である。

このことを確かめるには、本文に述べたように

(i) PP' の中点 M は l 上

(ii) $PP' \perp l$

を計算してもよいが、なるべく「ベクトル」の立場で考えたい。

$P(\bar{x}), P'(\bar{x}')$ として、 P から l に下ろした垂線の足を H とすると

$$\overline{OH} = (\bar{e} \cdot \bar{x})\bar{e} \dots\dots\dots (*)$$

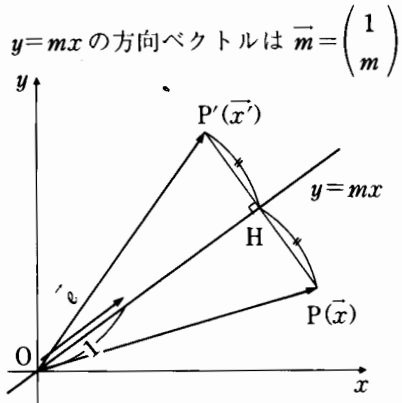
であった (p. 47)。

また、 H は線分 PP' の中点であるから——本文ではこの H を M と書いた。

$$\frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2} = \overline{OH}$$

$$\therefore \bar{x}' = 2\overline{OH} - \bar{x} = 2(\bar{e} \cdot \bar{x})\bar{e} - \bar{x} \dots\dots\dots (**)$$

であった (p. 70, 71, 72)。



ここで、 l の「方向ベクトル」を $\bar{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+my}{\sqrt{1+m^2}}$$

であるから、これを (**) に入れて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= 2 \cdot \frac{x+my}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 2x+2my \\ 2mx+2m^2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として求められる。

ついでに、「H の座標を与える 1 次変換」を表す行列を求めておくと、(*) から、 $H(x', y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{x+my}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である——「 $y=mx$ 上への正射影」を表す「1 次変換」である。

なお、方向ベクトル \vec{m} を

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

にとれば、これを (*), (**) に入れて計算すると「正射影」, 「対称変換」の行列はそれぞれ

$$\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & -(a^2-b^2) \end{pmatrix}$$

などのように表されるが、基本的には同じことである——「 $b=ma$ 」としてみよ。

例題 S

x 軸の正方向と θ の角をなす直線 l に関する対称移動は、1 次変換であることを示し、それを表す行列を求めよ。

解説

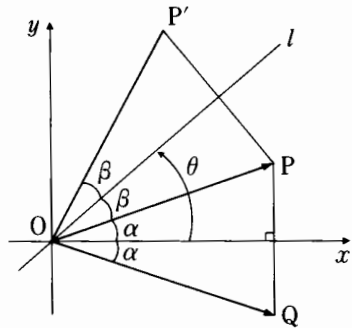
これは前問の説明で、「 $m=\tan\theta$ のとき」であることはすぐにわかるが、ここでは少しやり方を変えて、「2 つの変換の合成」として考えてみることにする。

点 P の l に関する対称点を P' とするとき、右図で

- (i) Q : x 軸に関する P の対称点
- (ii) P' : Q を O のまわりに 2θ 回転した点

$$(2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\theta)$$

とすると、P' を求めるには、「(i)と(ii)を合成すればよいことになる。



(i): $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ← 1次変換 (x 軸対称)

(ii): $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ ← 1次変換 (2θ 回転)

であるから、求める変換は「1次変換」で、その行列は

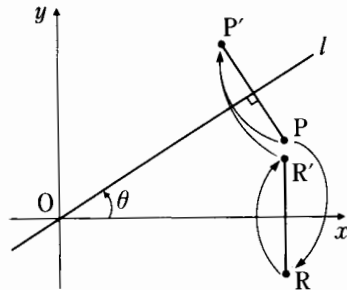
$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となる。

らしんばん

➡ 次に示すように、「3つの1次変換の合成」として求めてもよい。

- (i) P を O のまわりに「-θ」回転した点を R とする。
- (ii) R を x 軸に関して対称変換した点を R' とする。
- (iii) R' を O のまわりに θ 回転すると、l に関する P の対称点 P' となる。



これは(i)で問題を x 軸上の問題としてとらえ、(ii)で対称変換をし、(iii)でもともどすと考えればよい。

(i), (ii), (iii)の変換を表す行列の積をつくると (順序に注意すること)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (*) \\ & = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (**) \end{aligned}$$

ここで、「 l の傾き」は「 m 」であるから、「 $\tan\theta=m$ 」で

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin\theta \cos\theta \\ &= 2 \tan\theta \cdot \cos^2\theta \\ &= 2 \tan\theta \left(\frac{1}{1+\tan^2\theta} \right) = \frac{2 \tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2m}{1+m^2} \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2\theta - 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{1+\tan^2\theta} \right) - 1 = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-m^2}{1+m^2}\end{aligned}$$

であることを用いると (**) は、

$$\frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix}$$

であることが確かめられる。

なお、(*) で、(ii)の行列のかわりに $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ をとると、これは「 x 軸上への正射影」を表す行列であるから、合成した結果は「 l 上への正射影」を表し、その行列は

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (***) \\ &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix} \quad (m=\tan\theta)\end{aligned}$$

となる。

(**), (***) は、前問のらしんばんの(**)と(*) (p.227)で

$$\vec{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

とおいても当然同じ結果となる。

なお、いずれの場合も「 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 」のときは「 $\tan\theta$ 」は定義されず、したがって「 m 」で表された行列ではこのハナシが除かれていることに注意しなければならない。

4 「直交行列」による変換

「ベクトルの長さをかえない」また「ベクトルの内積をかえない(ベクト

ルのなす角をかえないともいえる)」1次変換は1つのタイプとしてまとめることができる。

例題で説明しよう。

例題 9

任意のベクトル \vec{x} , \vec{y} について

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (\text{内積})$$

をみたす1次変換 f がある。

f を表す行列は次の2つのどれかであることを証明せよ。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

解 説

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が「任意のベクトル \vec{x} , \vec{y} 」について成り立つから、「 $\vec{y} = \vec{x}$ 」とおくと、 $\textcircled{1}$ は

$$|f(\vec{x})|^2 = |\vec{x}|^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、「 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 」とし、 f を表す行列を「 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 」とすると

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

であるから、 $\textcircled{2}$ は

$$(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore (a^2+c^2)x^2 + 2(ab+cd)xy + (b^2+d^2)y^2 = x^2 + y^2$$

これが、 x , y の値にかかわらず成り立つことから、 a , b , c , d についての条件は

$$\begin{cases} a^2+c^2=b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

とまとめることができる。このことを行列 A の2つの「タテのベクトル」

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

を用いて表すと、 $\textcircled{3}$ は

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

すなわち \vec{a} と \vec{b} は直交する単位ベクトルである。

このことにより \vec{a} を適当な θ を用いて

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

と表すと、 \vec{a} に対する \vec{b} は2つあって (しかも2つだけ)、これらを \vec{b}_1, \vec{b}_2 とすれば

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = -\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

として求められる。

ゆえに、求める行列 A は

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

逆にこのとき

A_1 : 「原点に関する θ 回転」の行列

A_2 : 「原点を通り、 x 軸の正方向と $\frac{\theta}{2}$ の角をなす直線に関する対称変換」の行列

を表す。

これより、 A_1, A_2 は任意のベクトルの内積をかえない。

らしんばん

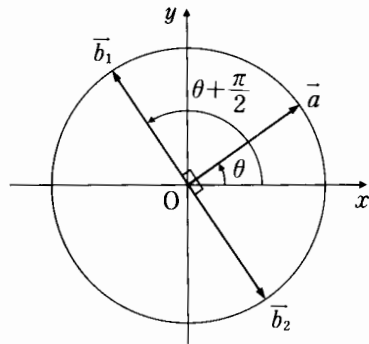
➡ 「任意のベクトル $\vec{x}, \vec{y} \dots$ 」とあることから「 $\vec{y} = \vec{x}$ 」とおくところがポイント——まず「必要条件」を求める。

そして、このようにして求めた行列 A_1, A_2 がシッカリ条件をみたすことを説明しなければならない ← 「十分条件」の確認!!

このような論理の進め方はよく用いられる—— p. 150でも簡単な形で用いた。

➡ このような行列 A を「直交行列」という、 A の2つのタテのベクトル \vec{a} と \vec{b} とが直交する単位ベクトルであることに由来すると考えればよい。

ポイントは③で



$$\begin{cases} a^2+c^2=b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases} \dots\dots\dots (*)$$

このことを行列を用いて表してみる.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくとき, 「A の転置行列 'A (A の行と列とをとりかえた行列 (p. 180, 181))」は

$$'A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

で表される. このとき

$$'AA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

であることがわかる.

まとめると「直交行列」は

$$'AA = A'A = E \dots\dots\dots (**)$$

をみたす行列であるということができる.

したがって (*) が成り立つときは

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$$

も成り立つ—— (**) の「A'A=E」の成分を計算すればよい.

➡ 結局このタイプの1次変換では
図形の「大きさ」も「形」もかわらない
ことがわかる.

例題 10

行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が表す xy 平面の1次変換 f が, 次の条件(a), (b)を

みたすとする.

- (a) f は, 任意の三角形をそれと相似な三角形にうつす.
- (b) f は, 点 $A(1, \sqrt{3})$ を点 $A'(-2, 2\sqrt{3})$ にうつす.

このような行列 M をすべて求めよ.

解説 まず, 「必要条件」を求める—— $\triangle OAB$ をどうとるか.

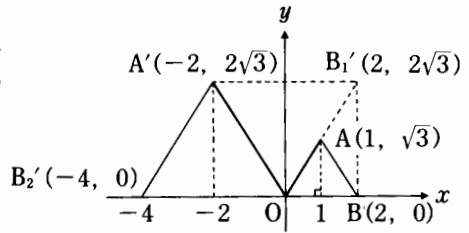
$$A(1, \sqrt{3}) \longrightarrow A'(-2, 2\sqrt{3})$$

から, 「任意の三角形」の1つとして OA を1辺とする「正三角形 OAB 」

を考える。ただし $B(2, 0)$ とする。

これが、 OA' を 1 辺とする「正三角形 $OA'B'$ 」にうつるのだが、このような B は 2 つあり

$B_1'(2, 2\sqrt{3}), B_2'(-4, 0)$ である。



以上求める行列を M_1, M_2 としてまとめると次のようになる。

(i) $B(2, 0) \longrightarrow B_1'(2, 2\sqrt{3})$ のとき

$$\begin{aligned}
 M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
 M_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \therefore M_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore M_1 &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 6 \\ -6 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

(ii) $B(2, 0) \longrightarrow B_2'(-4, 0)$ のとき

$$\begin{aligned}
 M_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
 M_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \therefore M_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore M_2 &= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

逆にこのとき

$$\textcircled{1}: M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = 2R(60^\circ)$$

← 「原点のまわりに 60° 回転」してさらに2倍!!

$$\textcircled{2}: M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← 「 y 軸に関して対称変換」をして、さらに2倍!!

①, ②ともすべての図形について「原点中心の相似変換」である。

ゆえに、すべての図形をそれと相似な図形に変換する

← 「十分条件」についての確認!!

ゆえに、求める行列 M は

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

らしんばん

➡ 「任意の三角形を……」で、まず具体的な三角形を1つとりあげてみる
 —— 「必要条件を求める」ハナシまでは前問の要領でよい。

しかし、「 OA を1辺とする正三角形」をとりあげるところはなかなかむずかしい。とりあえずのところ「思いつかなくてもしかたがない」がこの次のためにあためておきたい問題である—— 「十分条件の確認」を忘れないこと!!

➡ 本問で求めた行列 M_1, M_2 の形に注目してもらいたい。一般に

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \dots\dots\dots (*)$$

の形の行列は、先に述べた「直交行列」のファミリーである。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 \end{aligned}$$

に注目すると、適当な θ を用いて

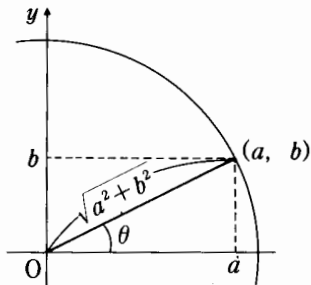
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \theta$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \theta$$

とおくことができ

$$a = \sqrt{a^2+b^2} \cos \theta$$

$$b = \sqrt{a^2+b^2} \sin \theta$$



これらを(*)に入れると

$$M_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

← 「 θ 回転」と「 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 倍」の合成変換!!

$$M_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

← 「原点を通り x 軸の正方向と角 $\frac{\theta}{2}$ をなす直線 l に関する対称変換」と「 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 倍」の合成変換!!

で、結局 M_1, M_2 は原点を中心とする「相似変換」であることがわかる。

➡ 第3章の「行列の n 乗」では触れなかったが、このタイプの行列の「 n 乗」について、ここで説明しておく——意外と簡単にいく。

上に述べた説明で

$$\sqrt{a^2 + b^2} = r, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta), \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = S(\theta)$$

とおくと

$$M_1 = rR(\theta), \quad M_2 = rS(\theta)$$

で、特に

$$(R(\theta))^n = R(n\theta) \quad \leftarrow \text{「}\theta\text{回転」を } n \text{ 回合成!!}$$

$$(S(\theta))^n = \begin{cases} E & (n: \text{偶数}) \\ S(\theta) & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad \leftarrow (S(\theta))^2 = E$$

であることに注目すると

$$M_1^n = r^n R(n\theta), \quad M_2^n = \begin{cases} r^n E & (n: \text{偶数}) \\ r^n S(\theta) & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

となる——知っているると便利のよいときがある。



第3節

問題解法の研究

発展問題1—原点以外の点を中心に回転

平面上に定点 $A(a, 0)$ ($a > 0$) と、動点 $P(x, y)$ ($y \geq 0$) がある。点 P を A を中心に定角 α だけ回転した点を Q 、次に Q を原点を中心に定角 β だけ回転した点を R とする。 $\alpha + \beta = \pi$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) のとき、2点 P, R はある定点に関して対称であることを示し、その定点の座標を求めよ。

解説 「 α 回転」, 「 β 回転」の行列を、それぞれ $R(\alpha), R(\beta)$ とすると、

\overline{AQ} は

$$\overline{AQ} = R(\alpha)\overline{AP} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\therefore \overline{OQ} - \overline{OA} = R(\alpha)\overline{AP}$$

$$\therefore \overline{OQ} = \overline{OA} + R(\alpha)\overline{AP} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

次に \overline{OR} は②を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OR} &= R(\beta)\overline{OQ} \\ &= R(\beta)(\overline{OA} + R(\alpha)\overline{AP}) \\ &= R(\beta)\overline{OA} + R(\beta)R(\alpha)\overline{AP} \\ &= R(\beta)\overline{OA} + R(\beta + \alpha)\overline{AP} \quad \cdots\cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

「 $\alpha + \beta = \pi$ 」より

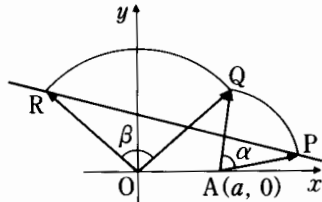
$$R(\beta + \alpha) = R(\pi) = -E \quad (180^\circ \text{ 回転})$$

を③に代入して

$$\overline{OR} = R(\beta)\overline{OA} - \overline{AP}$$

そこで、線分 PR の中点を M とすると

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OR}) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{OP} + R(\beta)\overline{OA} - \overline{AP}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(\overline{OP} + R(\beta)\overline{OA} - (\overline{OP} - \overline{OA})) \\
 &= \frac{1}{2}(R(\beta)\overline{OA} + \overline{OA}) \quad (\text{定ベクトル})
 \end{aligned}$$

したがって、P と R は定点 M に関して対称である。
これを成分を用いて表すと

$$\begin{aligned}
 \overline{OM} &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \cos\beta + a \\ a \sin\beta \end{pmatrix} \\
 \therefore M &\left(\frac{a(\cos\beta + 1)}{2}, \frac{a \sin\beta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

らしんばん

➡ 本問で注意しなければならないことは
「原点以外の点 A を中心とする回転」
ということである——しかし、このことにダマされてはならない。
本文「①」の形で覚えておくとよい。
この式で特徴的なことは「点 A」が両
辺のベクトルの始点になっている、とい
うことである。すなわち

$$\underbrace{\overline{AQ} = R(\alpha)\overline{AP}} \dots\dots\dots (*)$$

(両辺にキチンと
「A」を入れる)

あるいは
 $\overline{AP} = \vec{p}$
とおくと

$$\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA}$$

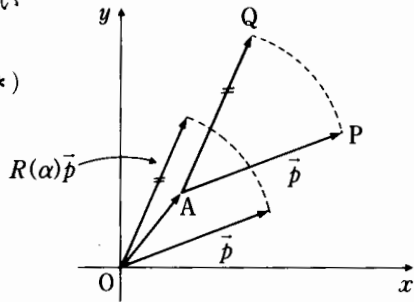
であるから (*) は

$$\overline{OQ} - \overline{OA} = R(\alpha)\vec{p} \quad \therefore \overline{OQ} = \overline{OA} + R(\alpha)\vec{p}$$

と表される。

これは「 \vec{p} 」を「原点を中心に α だけ回転」し、さらに「 \overline{OA} だけ平行移動」したものと考えればよい。

実際に「図形問題」で表れるときは「正三角形」、「正方形」の頂点を表示するときなどが多い。



たとえば右の図で、2点 A, B が決まっています

△ABC : 正三角形

□ABDE : 正方形

ならば

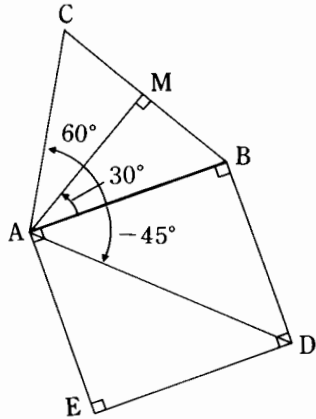
$$\vec{OC} = \vec{OA} + R(60^\circ)\vec{AB}$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}R(30^\circ)\vec{AB}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \sqrt{2}R(-45^\circ)\vec{AB}$$

$$\vec{OE} = \vec{OA} + R(-90^\circ)\vec{AB}$$

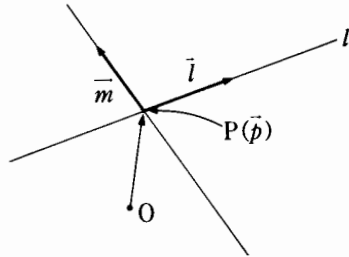
などが使えて、なかなか便利である。



発展問題 2—直線の変換— [$l \rightarrow m, m \rightarrow l$]

座標平面上に原点を通らず、かつ互いに平行でない2直線 l, m がある。この平面上の1次変換 f によって、 l が m にうつり、 m が l にうつるとき、合成変換 $f \circ f$ は恒等変換である。これを証明せよ。

解説 「直線の方程式」も「変換の行列」も具体的に与えられていないので、何とも手のつけにくい問題である—— l と m は必ず交わるから、交点 $P(\vec{p})$ に注目して、まず l, m を「ベクトル方程式」で表すことから考える。



l, m の方向ベクトルを、それぞれ \vec{i}, \vec{m} とすると

$$l : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{i} \quad \leftarrow \vec{i} \neq \vec{0}, \vec{m} \neq \vec{0}, \vec{i} \times \vec{m}$$

$$m : \vec{y} = \vec{p} + s\vec{m}$$

で表されるから、これらを f で変換すると

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= f(\vec{x}) \\ &= f(\vec{p} + t\vec{i}) \\ &= f(\vec{p}) + tf(\vec{i}) \quad (\leftarrow \text{これが } m) \quad \dots\dots\dots ① \\ \vec{y}' &= f(\vec{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(\vec{p} + s\vec{m}) \\
 &= f(\vec{p}) + sf(\vec{m}) \quad (\leftarrow \text{これが } l) \dots\dots\dots ②
 \end{aligned}$$

この2式で $f(\vec{p})$ に注目すると、これは①、②の両方をみたとす(①で「 $t=0$ 」, ②で「 $s=0$ 」)としてみればよい) から「 l 上、かつ m 上」の点、すなわち交点 $P(\vec{p})$ に他ならない。

$$\therefore f(\vec{p}) = \vec{p} \quad \therefore f(f(\vec{p})) = f(\vec{p}) = \vec{p} \quad \dots\dots\dots ③$$

また

$$f(\vec{l}) = \lambda\vec{m}, \quad f(\vec{m}) = \mu\vec{l}$$

とおくと

$$f(f(\vec{l})) = f(\lambda\vec{m}) = \lambda f(\vec{m}) = \lambda\mu\vec{l}$$

$$f(f(\vec{m})) = f(\mu\vec{l}) = \mu f(\vec{l}) = \lambda\mu\vec{m}$$

である。

一方 \vec{l} と \vec{m} とは「1次独立」であるから

$$\vec{p} = \alpha\vec{l} + \beta\vec{m}$$

とおくと

$$f(\vec{p}) = f(\alpha\vec{l} + \beta\vec{m})$$

$$= \alpha f(\vec{l}) + \beta f(\vec{m}) = \alpha\lambda\vec{m} + \beta\mu\vec{l}$$

$$\therefore f(f(\vec{p})) = f(\alpha\lambda\vec{m} + \beta\mu\vec{l})$$

$$= \alpha\lambda f(\vec{m}) + \beta\mu f(\vec{l})$$

$$= \alpha\lambda\mu\vec{l} + \beta\lambda\mu\vec{m} = \lambda\mu(\alpha\vec{l} + \beta\vec{m}) = \lambda\mu\vec{p}$$

これらを③に代入すると「 $\vec{p} \neq \vec{0}$ 」であるから

$$\lambda\mu\vec{p} = \vec{p} \quad \therefore (\lambda\mu - 1)\vec{p} = \vec{0} \quad \therefore \lambda\mu = 1$$

このとき、この平面上の任意の点 $Q(\vec{q})$ は

$$\vec{q} = x\vec{l} + y\vec{m}$$

$$\therefore f(\vec{q}) = f(x\vec{l} + y\vec{m})$$

$$= xf(\vec{l}) + yf(\vec{m}) = x\lambda\vec{m} + y\mu\vec{l}$$

$$\therefore f(f(\vec{q})) = f(x\lambda\vec{m} + y\mu\vec{l})$$

$$= x\lambda f(\vec{m}) + y\mu f(\vec{l})$$

$$= x\lambda\mu\vec{l} + y\lambda\mu\vec{m}$$

$$= \lambda\mu(x\bar{l} + y\bar{m}) = \underbrace{\lambda\mu}_{=1}\bar{q} = \bar{q}$$

ゆえに、合成変換「 $f \circ f$ 」は「恒等写像」である。

(f の行列を A とすると「 $A^2 = E$ 」のことである。)

らしんばん

➡ 「 $l \rightarrow l$, かつ $m \rightarrow m$ 」のときは f が「恒等変換」となる——

本文からこの条件を整理すると

$$\textcircled{1}: \vec{x}' = f(\vec{p}) + tf(\vec{l}) \quad \longleftarrow \text{これが } l$$

$$\textcircled{2}: \vec{y}' = f(\vec{p}) + sf(\vec{m}) \quad \longleftarrow \text{これが } m$$

となるから

$$f(\vec{p}) = \vec{p}, \quad f(\vec{l}) = \lambda\vec{l}, \quad f(\vec{m}) = \mu\vec{m}$$

そこで $P(\vec{p})$ は「1次独立」のベクトル \vec{l} と \vec{m} を用いて

$$\vec{p} = \alpha\vec{l} + \beta\vec{m} \quad \dots\dots\dots (*)$$

(l, m は原点を通らないから $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$)

と表され

$$\begin{aligned} f(\vec{p}) &= f(\alpha\vec{l} + \beta\vec{m}) \\ &= \alpha f(\vec{l}) + \beta f(\vec{m}) = \alpha\lambda\vec{l} + \beta\mu\vec{m} \end{aligned}$$

これと (*) を比較して、 \vec{l} と \vec{m} が「1次独立」であることを用いると

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha\lambda = \alpha & \therefore \lambda = 1 \quad (\alpha \neq 0) \\ \beta\mu = \beta & \therefore \mu = 1 \quad (\beta \neq 0) \end{array} \right\} \longrightarrow f(\vec{l}) = \vec{l}, \quad f(\vec{m}) = \vec{m}$$

となる。

このとき、この平面上の任意の点を $Q(\vec{q})$ とすれば

$$\vec{q} = x\vec{l} + y\vec{m} \quad \longleftarrow \vec{l} \text{ と } \vec{m} \text{ は 1 次独立!!}$$

と表されるから

$$\begin{aligned} f(\vec{q}) &= f(x\vec{l} + y\vec{m}) \\ &= xf(\vec{l}) + yf(\vec{m}) = x\vec{l} + y\vec{m} = \vec{q} \end{aligned}$$

すなわち、 f は「恒等変換」である。

——よく考えてみると「あたりまえ」のことだが、キチンと説明するのはなかなかむずかしい問題である。

発展問題 3—図形の変換と線形写像

1次変換 f によって、 $\triangle ABC$ の3頂点が、 $\triangle DEF$ の3頂点にうつされるとする。ただし、 A の像が D であるとは限らず、異なる頂点はそ

それぞれ異なる頂点にうつされているものとする。

(1) f によって、 $\triangle ABC$ の重心は $\triangle DEF$ の重心にうつされることを示せ。

(2) 3点A, B, Cの座標がそれぞれ, (1, 2), (~~2~~ -2, 1), (-1, 3)で, 3点D, E, Fの座標がそれぞれ, (1, 4), (4, 1), (-3, 3)のとき, 1次変換 f の行列を求めよ。

解説 (1) $\triangle ABC$ の重心をG, $\triangle DEF$ の重心を G' とすると

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{OG'} = f(\overrightarrow{OG})$$

$$= f\left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}\right)$$

$$= \frac{f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OB}) + f(\overrightarrow{OC})}{3} \quad \leftarrow f \text{ は線形写像!!}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}}{3}$$

ゆえに、 $\triangle ABC$ の重心Gは f によって $\triangle DEF$ の重心 G' にうつされる。

(2) A, B, C, D, E, Fを図示すると右図になるが

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

に着目すると

$$f(\overrightarrow{OC}) = f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OB}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから

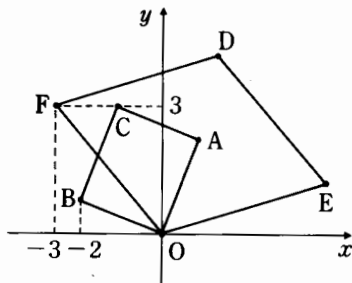
①, ②から

$$(i) \begin{cases} f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OE} \\ f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OF} \end{cases} \quad \text{または,} \quad (ii) \begin{cases} f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OF} \\ f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OE} \end{cases}$$

である。以上から「変換の行列 X 」を求めると

(i)のとき:

$$\left. \begin{array}{l} X \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ X \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \therefore X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}\therefore X &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(ii)のとき：

$$\left. \begin{aligned} X \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ X \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \therefore X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore X &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

らしんばん

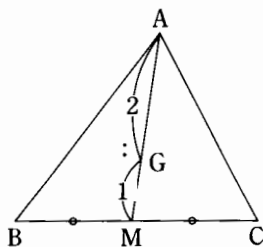
➡ 「1次変換」では「分点」は「分点」に変換された (p. 208, 209).

「 $\triangle ABC$ の重心」は「3つの中線の交点」で、これらの中線を「2:1」に内分する点であるから、上のことは当然のことである。

➡ (2)は「四角形 OACB」と「四角形 OEDF」が「平行四辺形」(実は「四角形 OACB」は「長方形(実は正方形)」)であることに着目する。

条件では3点 A, B, C が全体として3点 D, E, F にうつるというだけで、どの点かどの点にうつるかはわからない。

そこで、本問では「平行四辺形 OACB の対角線 OC」が、「平行四辺形 OEDF の対角線 OD」に対応している(本文①②)ことに注意して、「A が E に、B が F にうつる場合(本文(ii))」と、「A が F に、B が E にうつる場合



(本文(iii))」を考えたわけである。

発展問題 4—不動直線, 不動点, 領域の変換

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする。

- (1) f によって自分自身にうつされる直線の方程式を求めよ。
 (2) 領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \leq 9, y \geq x^2\}$$

とおく, 領域 D の f による像が D に含まれるような a の値を求めよ。

(やや難)

解説

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ によって, 自分自身にうつされる直線

l は

$$x = k \quad \text{または} \quad y = mx + n$$

の形で表される (p. 213).

これを「ベクトル方程式」で表すと

- (i) 「 $x = k$ 」のとき:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= A \left[\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= A \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + tA \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

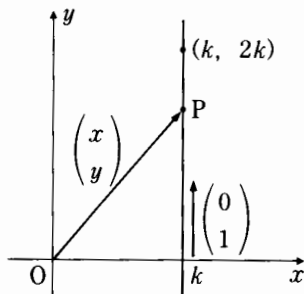
$$\therefore \begin{cases} x' = k \\ y' = 2k + at \end{cases}$$

ゆえに, 求める直線は, 「 $x = k$ 」である。

- (ii) 「 $y = mx + n$ 」のとき:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 &= A\left[\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}\right] \\
 &= A\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} + tA\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

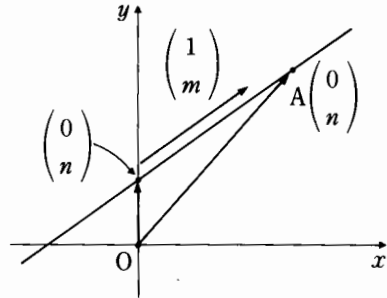
これが l と一致する条件は

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \dots\dots\dots ①$$

かつ

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \text{は「} y=mx+n \text{」上}$$

$$\dots\dots\dots ②$$



である.

①は

$$\begin{aligned}
 A\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2+ma \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \\
 \therefore 1 \cdot m - 1 \cdot (2+ma) &= 0 \\
 \therefore m(1-a) &= 2 \dots\dots\dots ③
 \end{aligned}$$

②は

$$\begin{aligned}
 A\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ na \end{pmatrix} \\
 \therefore na = m \cdot 0 + n &\quad \therefore n(a-1) = 0 \dots\dots\dots ④
 \end{aligned}$$

③, ④を同時にみたす m, n を求めると, ③で $a \neq 1$ であるから

$$m = \frac{2}{1-a}, \quad n = 0 \quad \therefore y = \frac{2}{1-a}x$$

ゆえに, (i), (ii)から

$$\begin{aligned}
 a=1 \text{ のとき: } & x=k \\
 a \neq 1 \text{ のとき: } & x=k, \quad y = \frac{2}{1-a}x
 \end{aligned}$$

(2) $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \leq 9, y \geq x^2\}$

図示して, まず「端の点」に着目して必要条件を求める.

(i) 必要条件

図で $A(3, 9)$ に着目すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6+9a \end{pmatrix}$$

であるから、領域 D の点 A の像 $(3, 6+9a)$ が領域 D に含まれているためには、「 $x=3$ 」に注意すると

$$6+9a=9 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

でなければならない。

(領域 D で、「 $x=3$ 」となるのは「点 A 」)
 (しかないところがおもしろい。)

(ii) 十分条件

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を x, y について解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x = x' \\ y = -6x' + 3y' \end{cases}$$

D の条件を用いると、 D の像 D' は

$$x \geq 0 \longrightarrow x' \geq 0$$

$$y \leq 9 \longrightarrow -6x' + 3y' \leq 9$$

$$\therefore y' \leq 2x' + 3$$

$$y \geq x^2 \longrightarrow -6x' + 3y' \geq (x')^2$$

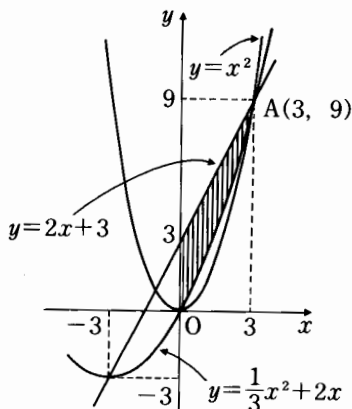
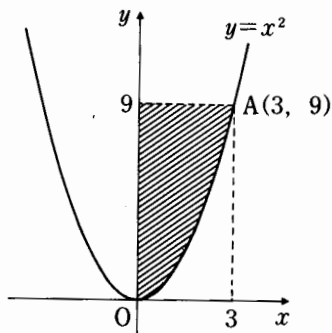
$$\therefore y' \geq \frac{1}{3}(x')^2 + 2x'$$

これより D' は

$$D' = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0, y \leq 2x + 3, y \geq \frac{1}{3}x^2 + 2x \right\}$$

ゆえに、 $D' \subseteq D$ である。

(i), (ii) より求める a の値は、 $a = \frac{1}{3}$



らしんばん

➡ (1)は「不動直線」の問題である。「不動直線の扱い方の基本」については

すでに例題4 (p. 213) で説明したが、本問は少し様子がちがう。

まず、「 $a \neq 1$ 」のときについて調べてみよう。

$$l_1: y = \frac{2}{1-a}x$$

$$l_2: x = k \quad (k \text{ は任意の実数})$$

であった。

l_1 をベクトル方程式で表すと

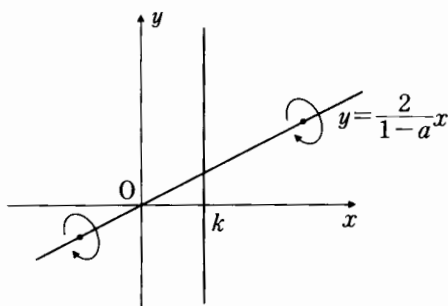
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1-a \\ 2 \end{pmatrix}$$

これを与えられた行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

で変換すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= t \begin{pmatrix} 1 \cdot (1-a) + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot (1-a) + 2a \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1-a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$



すなわち、 l_1 上の点は「この変換で動かない」ことがわかる。このような点をこの「1次変換」の「不動点」という—— l_1 は「不動点の集合」であるような「不動直線」である。

一方 l_2 は、「 k は任意の実数」であるから、 y 軸に平行な無数の直線群を表しており、この中には原点を通るものも、原点を通らないものもある。

このことは次のようにまとめることができる。すなわち

「原点以外の不動点のある1次変換では原点を通らない不動直線がある」

また、この逆も成り立ち

「原点を通らない不動直線のある1次変換では原点以外の不動点がある」

である——ただしこの場合の「不動直線」には「直線全体がその直線上の1点に変換されてしまう場合もいれて考える」ものとする。

ここでは触れないが、これらは一般的なハナシとして証明されることがらである。

さて、このハナシを「固有値」、「固有ベクトル」から説明するとどうなるか。

「固有方程式」は

$$(1-t)(a-t) - 0 \cdot 2 = 0$$

$$\therefore (t-1)(t-a) = 0$$

$\therefore t=1, a (a \neq 1) \longleftarrow$ 「固有値 1」がある!!

(i) $[t=1]$ のとき:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x=x \\ 2x+ya=y \end{cases} \quad \therefore 2x-(1-a)y=0$$

固有ベクトル: $\begin{pmatrix} 1-a \\ 2 \end{pmatrix} (= \bar{x}_1 \text{ とおく}) \longleftarrow$ 不動ベクトル

(ii) $[t=a]$ のとき:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x=ax \\ 2x+ay=ay \end{cases} \quad \therefore x=0$$

固有ベクトル: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (= \bar{x}_2 \text{ とおく}) \longleftarrow$ 「 a 倍」になる

ともかく「方向のかわらないベクトル」と、それぞれ「何倍になるか」だけはわかった。これにしたがって「不動直線」を求める。

(i) \longrightarrow 求める不動直線 l_1 を

$$l_1: y = \frac{2}{1-a}x + n \quad (n: \text{定数})$$

とおくと, l_1 上の点 $(0, n)$ の像は

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ an \end{pmatrix} \longleftarrow \text{これが } l_1 \text{ 上}$$

これを l_1 に代入して

$$an = \frac{2}{1-a} \cdot 0 + n \quad \therefore n(a-1) = 0 \quad \therefore n = 0$$

$$\therefore l_1: y = \frac{2}{1-a}x \longleftarrow \text{「不動点」の集合である「不動直線」}$$

(ii) $\longrightarrow l_2$ は

$$l_2: x = k$$

この上の点 (k, t) の像は

$$A \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k+at \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{「} a=0 \text{」のときは} \\ \text{「} (k, 2k) \text{」にうつる} \end{array} \right)$$

これは確かに l_2 上にある——「 $x=k$ 」は「不動直線」である。

ここまでくると, l_1 上の点は「不動点」であるから問題はないが, l_2 上の各点がどのように変換されて「 $x=k$ (すなわち l_2)」を構成しているか, を調べてみたくなる。

直線 l_2 上に点 P をとり, l_1 と l_2 との交点を Q とすると

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$$

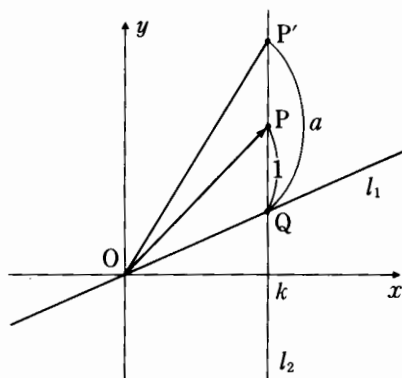
である。

$$\therefore \overline{OP'} = f(\overline{OP})$$

$$\begin{aligned} &= f(\overline{OQ} + \overline{QP}) \\ &= f(\overline{OQ}) + f(\overline{QP}) \\ &= \overline{OQ} + a\overline{QP} \end{aligned}$$

(\overline{OQ} は「 f 」で不変!!)
(\overline{QP} は「 f 」で a 倍!!)

このことから「 $a > 0$ 」として、直線「 $x = k$ 」上の点で Q の「上側」のものと「下側」のものに分けると、「 f 」によりそれらは



「 $a > 0$ 」のとき： {「上側」→「上側」, 「下側」→「下側」}, 「 $a < 0$ 」のとき： {「上側」→「下側」, 「下側」→「上側」}

そして、 l_1 からの距離が「 a 倍」になるように変換されることがわかる。

しかも、このようなことは、「任意の実数 k 」について成立し、したがって平面全体を「 l_1 よりも上側 (A)」、 l_1 よりも下側 (B)」に分けると、「 f 」により

「 $a > 0$ 」のとき： { (A) → (A), (B) → (B) }, 「 $a < 0$ 」のとき： { (A) → (B), (B) → (A) }

となる。

本問(2)で得られた値「 $a = \frac{1}{3}$ 」に対して

は

$$l_1: y = 3x$$

で、この直線上の点は「不動」であり、その他の点は、すべて l_1 上の点から測って「タテ方向に $\frac{1}{3}$ 倍」の点にうつされている。

「その目」で本問(2)の「領域」が変換される状況をながめてみるとよい。

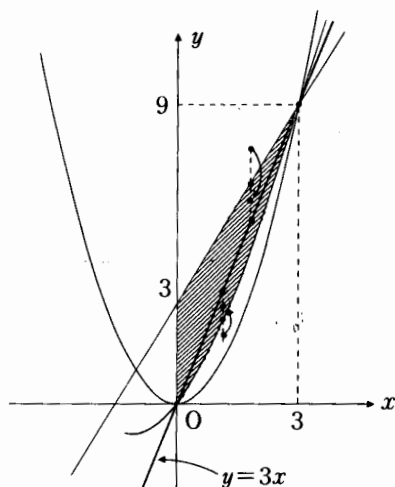
一方「 $a = 1$ 」とするとどうなるか——「固有値」は「 $t = 1$ (重解)」となる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

で、この場合の「不動直線」は「 $x = k$ 」(k は任意の実数)」であった。

このままではわかりにくいので、 A による不動点を求めてみる。

「不動点」を (x, y) とすると

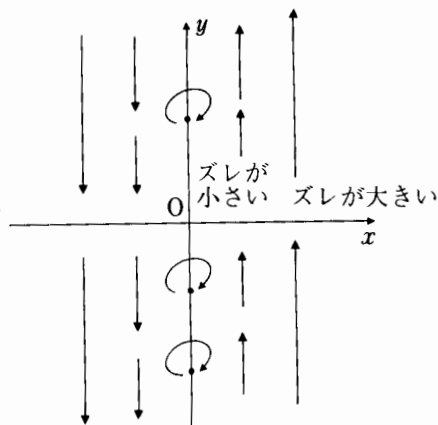


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x=x \\ y=2x+y \end{cases} \quad \therefore x=0$$

すなわち、求めた不動直線の集合「 $x=k$ 」のうちの1本「 $x=0$ 」が「不動点の集合であるような不動直線」であることがわかる。

なお、この A が「 y 方向のズレ」を表す行列であることは p. 201 で説明した。



➡ 「固有値」, 「固有ベクトル」と「不動直線」の関係をまとめておこう。

「固有方程式」が実数解 α, β をもち、それぞれの固有ベクトルを \vec{m}_1, \vec{m}_2 とすると、「不動直線」は次のようになる。

(i) 「 $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 1, \beta \neq 1$ 」のとき

$$\vec{x} = t\vec{m}_1, \vec{x} = t\vec{m}_2 \quad \longleftarrow \text{原点を通るものが2本 (p. 216, 217)}$$

(ii) 「 $\alpha \neq \beta = 1$ 」のとき

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{m}_1, \vec{x} = t\vec{m}_2 \quad (\vec{a} \text{ は任意のベクトル})$$

← 本問 (「 $\alpha \neq 1$ 」) はこれ!!

(iii) 「 $\alpha = \beta \neq 1$ 」のとき

$$\vec{x} = t\vec{m} \quad \longleftarrow \text{原点を通るもの1本}$$

(iv) 「 $\alpha = \beta = 1$ 」のとき

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{m} \quad (\vec{a} \text{ は任意のベクトル})$$

← 本問 (「 $\alpha = 1$ 」) と p. 255, 256 の「たとえば」はこれ!!

以上の通りであるが、これらのうち(iv)以外は「 $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ (つぶれてしまう場合 p. 260, 261, 262)」も起こりうる。

また(iv)の場合は「 $A = E$ (恒等変換)」の場合も考えられ、この場合は「固有ベクトル \vec{m} は不定」で、当然、任意の直線は「不動直線」となる。

(iii)についても事例で説明しておこう。

たとえば

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ によって、自分自身にうつる直線の方程式を求めよ。

これは、すでに p. 186 で解説した行列である。

固有値: $t=2$ (重解), 固有ベクトル: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

であった。したがって、求める直線を

$$y = -\frac{1}{3}x + n \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$$

とおくと、これが「不動直線」であるための条件は

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9n \\ -n \end{pmatrix}$$

が、もとの直線上にあることである。

$$\therefore (-n) = -\frac{1}{3}(9n) + n \quad \therefore n = 0$$

このことから「自分自身にうつる直線」は

$$y = -\frac{1}{3}x \dots\dots\dots (*)$$

だけであることが確かめられる——この直線上の点はすべて「原点から2倍の距離の点」に変換され、そのような点の集合として(*)で表される直線の像が「もとの直線に重なる」ということで、この場合の「不動点」は「原点のみ(原点は(*)上)」である。

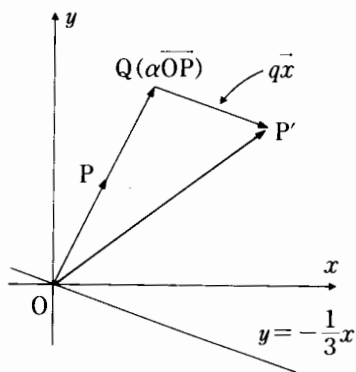
——「直線(*)上以外の点」はどのように変換されるか。

$$\begin{cases} A\vec{x} = \alpha\vec{x} \\ A\vec{y} = \vec{x} + \alpha\vec{y} \end{cases} \longleftarrow \alpha = 2, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{p. 187})$$

を用いて説明する。

\vec{x} と \vec{y} は「1次独立」であるから、この平面上の任意の点をPとすると

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= p\vec{x} + q\vec{y} \quad (p, q: \text{実数}) \\ \therefore \overline{OP'} &= f(\overline{OP}) \\ &= f(p\vec{x} + q\vec{y}) \\ &= pf(\vec{x}) + qf(\vec{y}) \\ &= p \cdot \alpha\vec{x} + q \cdot (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \\ &= \alpha(p\vec{x} + q\vec{y}) + q\vec{x} \\ &= \alpha\overline{OP} + q\vec{x} \end{aligned}$$



すなわち、 $\overline{OP'}$ は「 \overline{OP} の方向に α

倍」に伸縮し、さらに「 \overline{OP} の固定ベクトル方向に $q\vec{x}$ だけのズレ」を合成したものである——作図して確認しておくといよい。

➡ (2)について、少しだけ説明を加えておこう。 a の値は「必要条件」から、ともかく「 $a = \frac{1}{3}$ 」として求まるが、このとき「領域 D' 」が「領域 D 」に確かに含まれるかどうかは確認しないとわからない。

そこで「領域 D' 」を求めることになるのだが、このとき「領域 D 」は「直線

図形]ではないので、簡単に「ベクトル方程式で表して……」というわけにはいかない。

——変換の式を x, y について解きなおし、 x, y の関係式に代入して x', y' の関係式を求めることになる。この方法は知っておかなければならない

——直線については p. 212 で説明した。

発展問題 5— $P_{n+1}=f(P_n)$

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f と、点 $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2,$

$b_2), \dots, P_n(a_n, b_n), \dots$ がある。

f によって、点 P_n は点 P_{n+1} にうつるものとする。ただし $a_1 = a, b_1 = b, a \neq b$ である。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 点 P_n ($n=1, 2, 3, \dots$) はすべて同一直線上にあることを示し、その直線の方程式を求めよ。
- (2) (1)の直線上で、 f によって自分自身にうつる点 Q を求めよ。
- (3) ベクトル $\overline{QP_{n+1}}$ は $\overline{QP_n}$ の定数倍で表されることを示せ。

解 説

$$(1) \overline{OP_{n+1}} = A\overline{OP_n}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overline{P_n P_{n+1}} &= \overline{OP_{n+1}} - \overline{OP_n} \\ &= A\overline{OP_n} - \overline{OP_n} = (A - E)\overline{OP_n} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-a_n + b_n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで「 $a_n \neq b_n$ 」であることを「数学的帰納法」で示しておく。

- (i) 「 $a_1 \neq b_1$ 」であることは明らか ($a \neq b$)
- (ii) 「 $a_k \neq b_k$ 」と仮定すると「 $P_{n+1} = f(P_n)$ 」であるから

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} \\ b_{k+1} = a_k \end{cases}$$

いま「 $a_{k+1} = b_{k+1}$ 」とすると ← 「背理法」

$$\frac{a_k + b_k}{2} = a_k \quad \therefore a_k = b_k$$

となり条件に反する.

$$\therefore a_{k+1} \neq b_{k+1}$$

(i)(ii)からすべての n に対して

$$a_n \neq b_n$$

である.

ゆえに $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ は点 $P_1(a, b)$ を通り「傾き -2 」の直線上にあることがわかり、したがって求める直線の方程式は

$$y - b = -2(x - a)$$

$$\therefore l: y = -2x + 2a + b \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

(2) f による不動点を $Q(x, y)$ とすると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore y = x \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

Q は②上の点でもあるから、②、③を同時にみたす点が求める点である.

②と③を連立して解くと

$$x = y = \frac{2a + b}{3} \quad \therefore Q \left(\frac{2a + b}{3}, \frac{2a + b}{3} \right)$$

(3) $f(\overline{QP_n}) = f(\overline{OP_n} - \overline{OQ})$

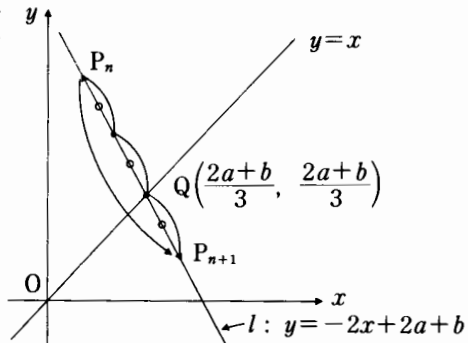
$$\begin{aligned} &= f(\overline{OP_n}) - f(\overline{OQ}) \\ &= \overline{OP_{n+1}} - \overline{OQ} = \overline{QP_{n+1}} \end{aligned}$$

であるから

$$\overline{QP_n} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overline{QP_{n+1}} &= f(\overline{QP_n}) \\ &= Ak \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= kA \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\overline{QP_n}
 \end{aligned}$$

すなわち「 $\overline{QP_{n+1}}$ は $\overline{QP_n}$ の $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍」である。

らしんばん

➡ この行列の「固有値」と「固有ベクトル」を求めてみよう。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから「固有方程式」は

$$\left(\frac{1}{2}-t\right)(0-t)-\frac{1}{2}\cdot 1=0 \quad \therefore t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore 2t^2-t-1=(2t+1)(t-1)=0$$

$$\therefore t=1, -\frac{1}{2} \quad (\text{「固有値」})$$

これらの値に対してそれぞれの「固有ベクトル」を求めると

(i) 固有値：「 $t=1$ 」に対して

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore y=x$$

固有ベクトル： $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← この方向のベクトルは1倍!!

(ii) 固有値：「 $t=-\frac{1}{2}$ 」に対して

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore y=-2x$$

固有ベクトル： $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

← この方向のベクトルは $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍!! (「逆向き」で「 $\frac{1}{2}$ 倍」)

であることがわかる——ここまでは前問とほとんど同じ!!

「固有値1」があることから、この変換による「不動直線」は

$y=x$ ← 「不動点」の集合!!

$y = -2x + n$ (n : 任意の実数) (*)

であることは「前問」でもくわしく説明したから容易に納得するところである。

「本問」では、まず (*) のタイプの「不動直線」の1本である「 l 」上に1点 $P_1(a, b)$ をとり、以下

$$P_{n+1} = f(P_n)$$

をくり返して得られる点列

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

が、すべてこの「 l 」上に、「ある規則にしたがって並んでいる」ことを調べるのが「テーマ」になっている。

しかし、図で「 \overline{OQ} 方向は不動」、
「 l 」の方向のベクトルは $-\frac{1}{2}$ 倍」であるから

$$\overline{OP_n} = \overline{OQ} + \overline{QP_n}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overline{OP_{n+1}} &= f(\overline{OP_n}) \\ &= f(\overline{OQ} + \overline{QP_n}) \\ &= f(\overline{OQ}) + f(\overline{QP_n}) \\ &= \overline{OQ} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overline{QP_n} \end{aligned}$$

となり、 P_{n+1} は l 上で Q に関して「 P_n のある反対側」、しかも「 Q から

の距離が $\frac{1}{2}$ 倍」の点であることがわかる——得られた点列がすべて直線 l 上にあり、しかも n が大きくなるにつれて Q に近づいていくことがよくわかる。

➡ 行列をかえてみよう

たとえば

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で表される1次変換を f とするとき $P_{n+1} = f(P_n)$ で与えられる点列

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

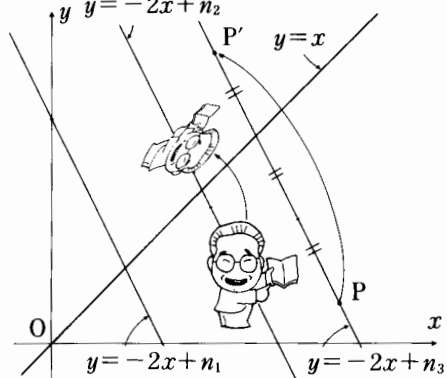
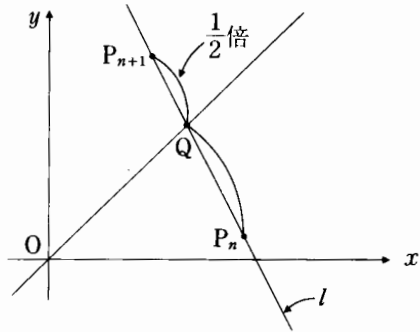
は1直線上にあり、しかも等間隔に並ぶことを示せ。

「固有方程式」は

$$(2-t)(0-t) - 1 \cdot (-1) = 0$$

$$\therefore t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$$

固有値: $t=1$ (重解) ← この値が「1」であることに注目!!



「固有ベクトル」は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore x+y=0$$

固有ベクトル： $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ← この方向のベクトルは 1 倍!!

前問の説明によれば、不動直線は

$$y = -x + k \quad (k: \text{任意の実数})$$

である。

このことをにらみながら本問と同じことをやってみると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_n P_{n+1}} &= \overrightarrow{OP_{n+1}} - \overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{AOP_n} - \overrightarrow{OP_n} = (A - E)\overrightarrow{OP_n} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (a_n + b_n) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで「 $P_{n+1} = f(P_n)$ 」で与えられる 1 次変換では

$$a_n + b_n = p \quad (\text{一定}) \quad \dots\dots (*)$$

であることを「数学的帰納法」で示しておこう。

- (i) $a_1 + b_1 = p$ としておく。
- (ii) $a_k + b_k = p$ を仮定すると

$$P_{k+1} = f(P_k) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{k+1} = 2a_k + b_k \\ b_{k+1} = -a_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{k+1} + b_{k+1} &= (2a_k + b_k) + (-a_k) \\ &= a_k + b_k = p \end{aligned}$$

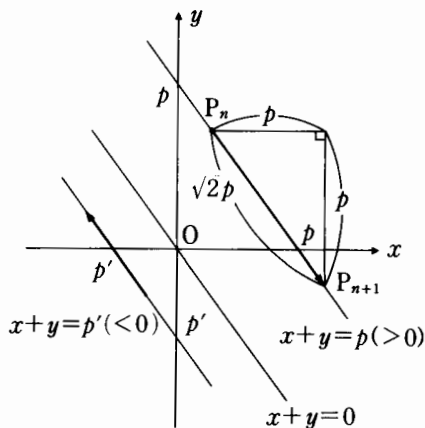
すなわち、すべての n について (*) が成り立つ。

このことからこの場合の点列は直線

$$x + y = p \quad \dots\dots (**)$$

上に、図に示すように「等間隔 ($p=0$ のときは動かない)」に並ぶことがわかる
 —— p の値により「矢印の向き」と「大きさ(間隔)」が違うことに注目して
 おきたい。

ちなみに直線 (**) はその上の点のごとく



$\left\{ \begin{array}{l} [p > 0] \text{ のときは } \sqrt{2}p \text{ だけ右下にズレル} \\ [p < 0] \text{ のときは } -\sqrt{2}p \text{ だけ左上にズレル} \end{array} \right.$
 (「軸方向のズレ」について)

ような「不動直線」であり、「 $p=0$ 」のとき、すなわち「 $x+y=0$ 」だけが「不動点の集合」であるような「不動直線」であることがわかる—— p にいろいろな値を与えることにより、 xy 平面上の点全体の変換としてとらえておくとよい。

➡ 本問を「 $P_n(x_n, y_n)$ と $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ との関係」として「マジメ(?)」に考えてみよう。

$$P_{n+1}=f(P_n) \quad \text{——} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad \longleftarrow \text{連立漸化式!!}$$

このことから

$$\underbrace{2x_{n+1} + y_{n+1}} = (x_n + y_n) + x_n = \underbrace{2x_n + y_n}$$

↑ 公比: 1 ↑

すなわち数列 $\{2x_n + y_n\}$ は「公比: 1」の「等比数列」であるから

$$2x_n + y_n = 1^{n-1} \cdot (2x_1 + y_1) = 2a + b$$

であるから、 $P_n(x_n, y_n)$ は直線

$$2x + y = 2a + b$$

の上にあることも簡単に示される。

また

$$\underbrace{x_{n+1} - y_{n+1}} = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{(x_n - y_n)}$$

↑ 公比: $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ↑

から、数列 $\{x_n - y_n\}$ は「公比: $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 」の「等比数列」であるから

$$x_n - y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x_1 - y_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a - b)$$

x_n, y_n を求めると

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{3} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a - b) + 2a + b \right\} & \longrightarrow \frac{2a + b}{3} \quad (n \rightarrow \infty) \\ y_n = \frac{1}{3} \left\{ -2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a - b) + 2a + b \right\} & \longrightarrow \frac{2a + b}{3} \quad (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

となり、 n を大きくすれば、点 P_n は点 Q に近づいていくことがわかる。

第3章では「 A^n 」についてくわしく述べたが、「その1次変換」は実はこのよ

うな意味をもっていたわけである。

発展問題 6—「平面全体→直線」

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f が、次の 3 条件を同時にみた

すとき、実数 a, b の値を求めよ。

- (i) f によって原点にうつされる点の全体は、ある直線 l_1 である。
- (ii) f によって平面全体は、ある直線 l_2 にうつされる。
- (iii) (i), (ii) における 2 直線 l_1, l_2 は直交する。

解 説 f によって点 (x, y) が点 (x', y') にうつされるとすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots ①$$

ここで $\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]$ とすると、点 (x, y) が平面全体を動く (x, y) が

任意の実数値をとる) とき、 x', y' は実数全体をとり、したがって点 (x', y') は平面全体を動く。

ゆえに「条件(ii)」より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ b \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2 - ab = 0 \quad \therefore b = \frac{1}{4a}$$

これを①に入れると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2a} \end{pmatrix} + ay \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2a} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}x + ay\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2a} \end{pmatrix} \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

(このとき、2つのベクトルの第1成分を「1」)
(にそろえおくとよい (p. 219).)

これが l_2 であり, その「方向ベクトル」が $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2a} \end{pmatrix}$ であることに注意する

と, 「傾きが $\frac{1}{2a}$ 」となるから, その方程式は

$$y = \frac{1}{2a}x \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である.

一方, 「条件(i)」は②の結果が「 $\bar{0}$ 」ということであるから

$$\frac{1}{2}x + ay = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{これが } l_1 \text{ だ!!}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2a}x \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

そこで「条件(iii)」に注目すると, l_1 と l_2 は直交するから「③と④の傾きの積」が「 -1 」である.

$$\therefore \frac{1}{2a} \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right) = -1 \quad \therefore a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{2}$$

このとき

$$b = \pm \frac{1}{2} \quad (\text{複号同順}) \quad \longleftarrow \quad b = \frac{1}{4a}$$

らしんばん

➡ a, b に具体的な数値を入れてみよう. たとえば

$$a = b = \frac{1}{2}$$

とすると, 本文の② (実は①) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ただし, $x+y=2k$)

これはこの1次変換によって

「直線 $x+y=2k$ \longrightarrow 点 (k, k) 」

ということに他ならない.

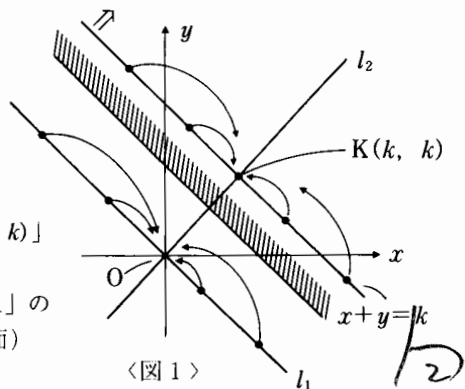
この k の値を, たとえば「 $k \geq 1$ 」の範囲で動かしてみると領域 (半平面)

$$\{(x, y) \mid x+y \geq 2\}$$

が半直線

$$\{(x, y) \mid y=x, x \geq 1\}$$

に変換されていく様子がよくわかる.



<図1>

本問では、「たまたま」点 $K(k, k)$ は直線「 $x+y=2k$ 」上にあることになったが、一般にはそうとは限らない。たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

などとすると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= (x+3y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad K(k, 2k) \\ &\quad (x+3y=k) \end{aligned}$$

となり、 l_1, l_2 は

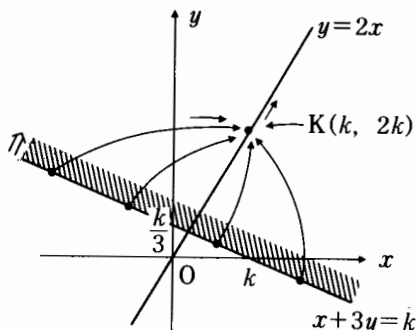
$$l_1: x+3y=0 \quad (y=-\frac{1}{3}x)$$

$$l_2: y=2x$$

(ただし、この場合は本問(iii)の「直交条件」はみたさない。)

で、その変換の様子は〈図2〉のようになる。

これは p. 200 で説明した「平面の変換」の「 $|A|=0$ 」の場合である。



〈図2〉

➡ 本問を「固有値」, 「固有ベクトル」から説明するとどうなるか——

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{「} a=b=\frac{1}{2}\text{」で、当然「} |A|=0\text{」である。}$$

とすると、「固有方程式」は

$$\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\therefore t^2-t=t(t-1)=0$$

$$\therefore t=0, 1 \longleftarrow \text{固有値!!}$$

(i) 固有値：「 $t=1$ 」に対して

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore x-y=0$$

固有ベクトル： $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\longleftarrow l_2$ は「不動点の集合」である不動直線

(ii) 固有値：「 $t=0$ 」に対して

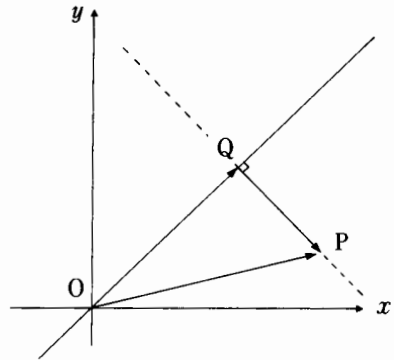
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \longleftarrow \text{この方向は変換されて} \vec{0}$$

このことから、平面上の任意の点 P が変換される状況を調べてみると

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

であるから

$$\begin{aligned} \vec{OP}' &= f(\vec{OP}) \\ &= f(\vec{OQ} + \vec{QP}) \\ &= \underbrace{f(\vec{OQ})}_{\vec{OQ}} + \underbrace{f(\vec{QP})}_{\vec{0}} \quad \dots\dots (*) \\ &= \vec{OQ} \end{aligned}$$



であることがわかる——行列 A は

「 $l_2: y=2x$ 」上への「正射影」を表す行列 (p. 228, 230) であるから、これは「あたりまえ」のことである。

一方、「第2の例」では

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

で、「固有方程式」は

$$(1-t)(6-t) - 3 \cdot 2 = 0$$

$$\therefore t^2 - 7t = t(t-7) = 0$$

$$\therefore t = 0, 7 \quad \longleftarrow \text{固有値!!}$$

であるから

(i) 固有値: 「 $t=7$ 」に対して

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore 2x - y = 0$$

$$\text{固有ベクトル: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \text{この方向に7倍!!}$$

(ii) 固有値: 「 $t=0$ 」に対して

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \therefore x + 3y = 0$$

$$\text{固有ベクトル: } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \text{この方向は} \vec{0}$$

このことから (*) で

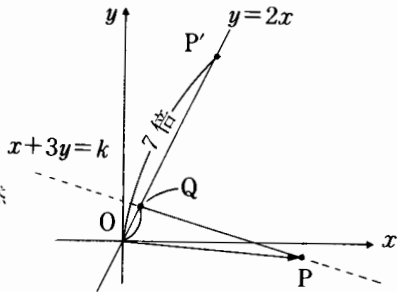
$$f(\overline{OQ}) = 7\overline{OQ}, \quad f(\overline{QP}) = \vec{0}$$

とすればよいから

$$\overline{OP'} = 7\overline{OQ}$$

となることがわかる。

このとき、直線「 $l_2: y=2x$ 」は当然「不動直線」で、この場合の「不動点」は「原点のみ」である。



たとえば

1次変換 f を表す行列 A , 放物線 C が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C: y = \frac{1}{3}(x^2 - 3)$$

で与えられている。 f による C の像を求めよ。

マジメ(?)にやれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+3y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$k = x+3y = x^2 + x - 3$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \geq -\frac{13}{4}$$

$$\therefore y = 2x \quad \left(x \geq -\frac{13}{4}\right)$$

となるが、これを「固有値」, 「固有ベクトル」から説明すると、放物線上の各点が変換される状況をいくらか具体的にとらえることができる——すでに「第2の例」で説明したように

$$P_1, P_2 \longrightarrow P' \quad (\overline{OP'} = 7\overline{OQ})$$

$$P_0 \longrightarrow P_0' \quad (\overline{OP_0'} = 7\overline{OQ_0})$$

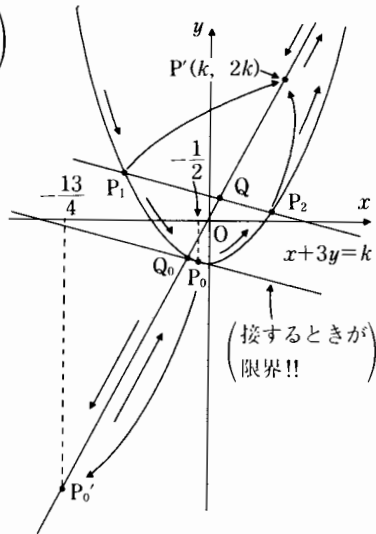
であり、点 P がこの放物線 C 上を

$$\longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow$$

と動くとき、 P の像は、直線「 $y=2x$ 」上を P の動きに対応して

$$\longrightarrow P' \longrightarrow P_0' \longrightarrow P' \longrightarrow \quad (P_0' \text{ で U ターンする})$$

のように動くことがわかる。



発展問題 7— $|A|=0$ のときの変換

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f がある。

- (1) f により円 $x^2+y^2=1$ はどのような図形にうつされるか.
 (2) (1)で、円周上の点が、 f によって1対1にうつされるときがあるか、あればその点を円周上に求めよ。(やや難)

解説 (1) 円周上の点は $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と表されるから、その f による像 $P'(x', y')$ は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \cos\theta \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= (2\cos\theta + \sin\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき、「 $t=2\cos\theta + \sin\theta$ 」とおくと

$$t = \sqrt{5} \cos(\theta - \alpha)$$

$$\left(\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore |t| \leq \sqrt{5}$$

これより、求める図形は

$$y = -2x, \quad |x| \leq \sqrt{5}$$

- (2) θ が0から 2π までかわるとき、「 $\theta - \alpha$ 」は単位円周上を1まわりするから、「 $\cos(\theta - \alpha) = \pm 1$ 」のときだけ「1対1に対応」する.

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \therefore -\alpha \leq \theta - \alpha < 2\pi - \alpha$$

ゆえに、このときの θ の値は

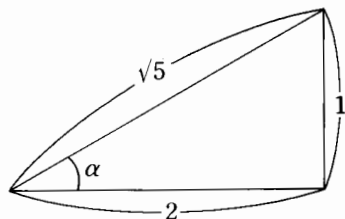
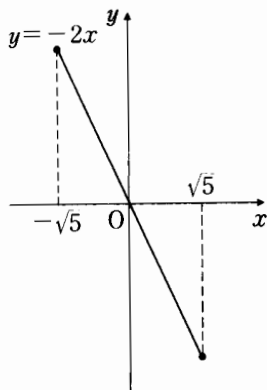
$$\theta - \alpha = 0, \pi \quad \therefore \theta = \alpha, \alpha + \pi$$

- (i) 「 $\theta = \alpha$ 」のときは

$$\begin{aligned} (\cos\theta, \sin\theta) &= (\cos\alpha, \sin\alpha) \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

- (ii) 「 $\theta = \alpha + \pi$ 」のときは

$$\begin{aligned} (\cos\theta, \sin\theta) &= (\cos(\alpha + \pi), \sin(\alpha + \pi)) \\ &= (-\cos\alpha, -\sin\alpha) \\ &= \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$



らしんばん

➡ 「 $|A|=0$ 」であることから、像が
「 $y=-2x$ 」であることは簡単にわかる。
範囲についても問題なしとしよう。

しかし実際にはどのように対応して
変換されていくのかということを確認
しておく必要がある。

たとえば2点

$$A(1, 0), B(0, 1)$$

の像は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

から

$$A'(2, -4), B'(1, -2)$$

であるが、これは、Pが円周上をAから
Bまで動くとき、P'が線分上をA'から
B'まで動くということではない。

その動き方は

$$P: A \rightarrow M \rightarrow B$$

に対して、

$$P': A' \rightarrow M' \rightarrow B'$$

と対応して動き、Pが円周上をAから

Bに向かって1まわりするときに、P'は線分M'N'上を

$$A' \rightarrow M' \rightarrow B' \rightarrow N' \rightarrow A'$$

の順に動いているということになる。したがって、線分上では2点M', N'以外の
各点はすべて円周上の2点に対応していて、本問の求めているものは「M',
N'を与える2点M, N」のことである。

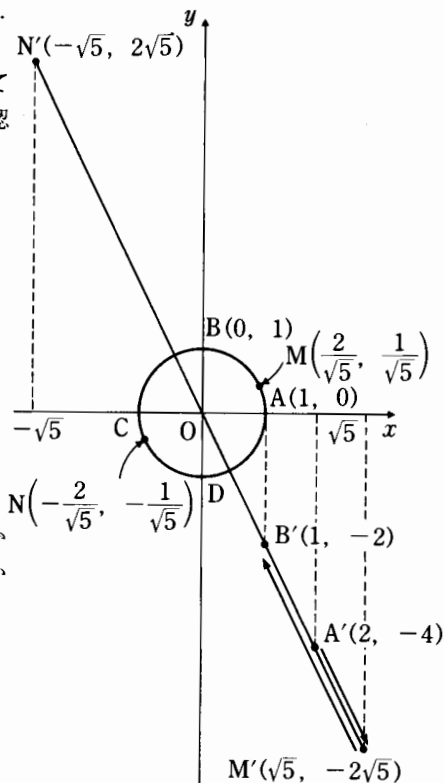
➡ 本問を「パラメーター表示」を用いないでやると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \dots\dots(*)$$

$$(2x+y=k)$$

から、P(x, y)の条件



$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (**)$$

のもとに

$$k = 2x + y \quad \dots\dots\dots (***)$$

の範囲を求める問題ということになる。

「連立して実数解条件 ($D \geq 0$)」としてもよいが, (**), (***) のグラフが共有点をもつ条件として考えればよいから, (***) を

$$2x + y - k = 0$$

と変形して, 原点からの距離を求めると

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \leq 1 \quad \therefore |k| \leq \sqrt{5}$$

として求めることができる。またこのとき接点 T, T' が(2)の求める点で, その座標は, 「法線方向の単位ベクトル」が

$$\frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であることから

$$T \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad T' \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

として簡単に求められる。

(***) にあたる条件が「2次関数 (放物線)」などで与えられる場合もある。しかし考え方は全く同様である。

➡ 「平面全体の像」はどうなるか——

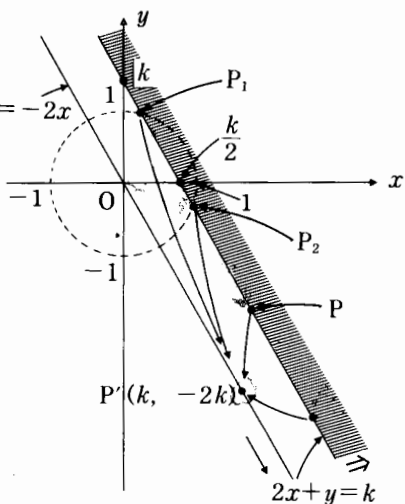
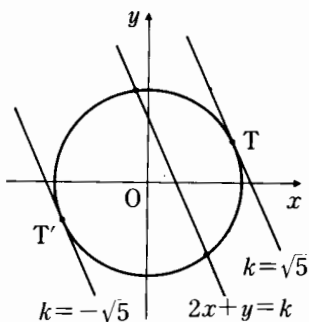
(*) に示した

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= (2x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2x + y = k) \end{aligned}$$

に注目すると

$$2x + y = k \quad \longrightarrow \quad P'(k, -2k) \quad \dots\dots\dots (***)$$

を意味している—— k の値を変化させると, たとえば k を大きくすると直線は「 \Rightarrow 」の方向に動き, 点 P' は「 \rightarrow 」の方向に動くことがわかる。すなわち「平面全体」は (***) のような対応関係で, 直線「 $y = -2x$ 」に変換



されることがわかる。本問は、「見かけ」は「単位円周上の点の変換」であるが、実はそれが「(****)にしたがった変換」であり、結局、直線「 $2x+y=k$ 」と単位円「 $x^2+y^2=1$ 」の「接触」の関係を説明させる問題であったわけである。

ちなみに、「固有値」, 「固有ベクトル」を求めてみると

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

であるから、「固有方程式」は

$$(2-t)(-2-t) - 1 \cdot (-4) = 0 \quad \therefore t^2 = 0 \quad \therefore t = 0$$

すなわち、「固有値」は「重解：0」である。

「固有ベクトル」は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \therefore 2x + y = 0$$

固有ベクトル： $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ← この方向ベクトルは「 $\vec{0}$ 」となる

したがって、この「1次変換」では「不動直線」は存在せず、「不動点」は「原点のみ」であることがわかる。

——この例で、われわれとしては「固有方程式」が「実数解 α, β 」をもつ「1次変換」の「ほとんどすべてのタイプ」を「見た」ことになる。

「 α, β が虚数解」である簡単な例は「 θ 回転の行列」などがあるが、これ以上は触れないことにする。

発展問題 8—固有ベクトルが直交するとき

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を、 $\vec{0}$ でない任意のベクトルとする。

\vec{x} , \vec{y} を、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって変換するとき、

- (1) $(A\vec{x}, \vec{y}) = (A\vec{y}, \vec{x})$ であるための必要十分条件を求めよ。
- (2) このとき、 $A - \lambda E$ が逆行列をもたないとすれば、 λ は実数であることを証明せよ。
- (3) (2) の実数を α, β とするとき

$$A\vec{x} = \alpha\vec{x}, \quad A\vec{y} = \beta\vec{y}, \quad \alpha \neq \beta$$

とすれば、 \vec{x} , \vec{y} は垂直であることを証明せよ。

解 説

$$(1) A\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\bar{A}\bar{x}, \bar{y}) = (ax_1 + bx_2) \cdot y_1 + (cx_1 + dx_2) \cdot y_2 \quad \dots\dots\dots ①$$

同様にして

$$(\bar{A}\bar{y}, \bar{x}) = (ay_1 + by_2) \cdot x_1 + (cy_1 + dy_2) \cdot x_2 \quad \dots\dots\dots ②$$

ゆえに

$$(\bar{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{A}\bar{y}, \bar{x}) \quad \dots\dots\dots ③$$

③に①, ②を代入して整理すると

$$(b-c)(x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

これが \bar{x}, \bar{y} にかかわらず成立するための必要十分条件は

$$b=c$$

$$(2) |A-\lambda E| = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

判別式 D は

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

ゆえに, λ は実数である.

(3) 「 $\bar{A}\bar{x} = \alpha\bar{x}$ 」, 「 $\bar{A}\bar{y} = \beta\bar{y}$ 」を③に入れると

$$(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = (\beta\bar{y}, \bar{x})$$

$$\therefore (\alpha - \beta)(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

$\alpha \neq \beta$ であるから

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \therefore \bar{x} \perp \bar{y}$$

らしんばん

➡ 「2次式の標準化」について――

x と y の2次方程式

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 = c$$

を「標準化 (xy の項のない2次式に変換)」することができる.

左辺の $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = x(ax + hy) + y(hx + by)$$

$$= (x \ y) \begin{pmatrix} ax+hy \\ hx+by \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \quad \dots\dots\dots (*)$$

ここで「 $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} = A$ 」とおくと, これは本問の行列と同じ形で, 「 $h \neq 0$ 」のと

き「固有方程式」は異なる2つの「実数解 (固有値)」 α, β をもち, しかも

「固有ベクトルは直交」している。

そこで、「固有ベクトル」を「単位ベクトル」にとると、適当な θ を用いて

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos\theta \\ \alpha \sin\theta \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \sin\theta \\ \beta \cos\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

と表されるから、この2式をまとめると

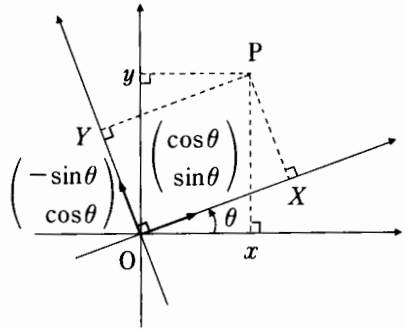
$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \cos\theta & -\beta \sin\theta \\ \alpha \sin\theta & \beta \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta)$$

とおくと、この関係は

$$\begin{aligned} AR(\theta) &= R(\theta) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ \therefore A &= R(\theta) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} R(-\theta) \\ &\dots\dots\dots (**)$$



そこで、この A を $(*)$ に入れると

$$f(x, y) = (x \ y) R(\theta) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \quad \dots\dots\dots (***)$$

であるが

$$R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{座標軸を } \theta \text{ 回転} \rightarrow \text{ p. 224, 225}$$

とおいて、その「転置行列」をつくると

$${}^t \left[R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = (X \ Y) \quad \leftarrow \text{「転置行列」の計算は p. 180, 181}$$

$$\therefore (x \ y) R(\theta) = (X \ Y) \quad \leftarrow {}^t R(-\theta) = R(\theta), {}^t (AB) = {}^t B {}^t A$$

であるから $(***)$ は

$$(X \ Y) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = c \quad \therefore \alpha X^2 + \beta Y^2 = c$$

の形となる。すなわち「標準化」された——第5章で説明する「座標変換

(p. 299, 300, 301)」と読みあわせてもらいたい。

➡ 「座標変換」と「1次変換の正体」について——

「行列Aによる1次変換」を(**)を用いて説明してみよう。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(-\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

さらに、この両辺を次のように書きかえてみると

$$R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{を「O-XY座標系」で見たもの!!}$$

$$R(-\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{を「O-XY座標系」で見たもの!!}$$

すなわち、与えられた「1次変換」は「O-XY座標系（座標軸を角θだけ回転した座標系）」では

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と表され、これは「O-XY座標系」における「1次変換」である「軸方向の伸縮 (p. 221)」に他ならない。

一般的なハナシとして整理しておこう。

2つの座標系 C_1, C_2 で

C_1 : 基本ベクトルを \vec{a}, \vec{b} ← \vec{a} と \vec{b} は「1次独立」

C_2 : 基本ベクトルを

$$\vec{p} = p\vec{a} + r\vec{b}, \vec{q} = q\vec{a} + s\vec{b} \longleftarrow \vec{p} \text{ と } \vec{q} \text{ も「1次独立」}$$

とし、座標系 C_1 における「1次変換」を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots\dots\dots (***)$$

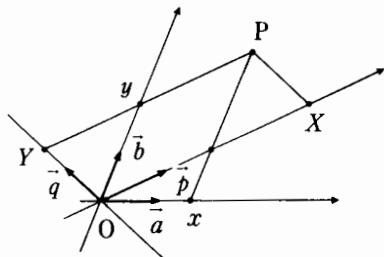
とする。

このとき、座標系 C_1 で $P(x, y)$ と表される点が、座標系 C_2 で (X, Y) と表されるならば

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= X\vec{p} + Y\vec{q} \\ &= X(p\vec{a} + r\vec{b}) + Y(q\vec{a} + s\vec{b}) \\ &= (pX + qY)\vec{a} + (rX + sY)\vec{b} \end{aligned}$$

この \vec{OP} は

$$\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



で、 \vec{a} と \vec{b} が「1次独立」であることに注意すると

$$\begin{cases} x = pX + qY \\ y = rX + sY \end{cases} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = P, |P| \neq 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

全く同様にして座標系 C_1 で $P'(x', y')$ と表される点が、座標系 C_2 で (X', Y') と表されるならば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

で表される——これらを (****) に代入する。

(****) は

$$P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

となり、座標系 C_1 で「行列 A 」を用いて (****) のように表される「1次変換」が、座標系 C_2 では「行列 $P^{-1}AP$ 」で表されることがわかる。

ここで、 \vec{a} , \vec{b} を直交する単位ベクトルにとれば、座標系 C_1 は通常の xy 平面である。このとき

$$\vec{p} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$$

を、それぞれ「固有値 α , β 」に対する「固有ベクトル」ととれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} (=B_1) \longleftarrow \text{対角化!! (p. 183)}$$

特に「 $\alpha = \beta$ 」のときは

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} (=B_2) \longleftarrow \text{p. 188で説明した}$$

であったが、この B_1 は「軸方向への伸縮 (p. 221)」を表し、 B_2 は

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変形することにより、「 α の相似変換」に「 Y 軸方向へのズレ」が加わったものであることがわかる——「実数の固有値」をもつ行列による「1次変換」の正体は、実はこのようなものであったわけである。