第2章

三角関数

「音楽」を聴く……
……「三角関数」を聴く……
……？

「三角関数」を聴く(?)——「三角関数」から「波動の理論」へ

「正弦」,「余弦」などの「三角比」を用いて「三角形に関する計算」を行ったり，公式や定理を体系化する数学の分野は「三角法」とよばれ，最も古くから発達した数学の分野の1つであるが，それは当時の「天文学」や「航海術」などの要請による，極めて「実学的なもの」として誕生したに違いない．しかし，15世紀頃になるとこの「三角法」も現在の形式に近い形に落ちつき，さらに「ネピア」や「ケプラー」の時代を経て「オイラー」に至ってはじめて，その諸定理も現在のように整備されたといわれている．それが「角の概念を拡張する」ことにより「三角形というイメージ」から離れて**「実数を変数とする三角関数」**として認知されたのは「関数の概念の形成」以後のことであろうから「微積分の発見」に較べてそれほど古い時代のことではないと思われる．次に述べる**「オイラーの公式」**は，「指数・対数関数」と「三角関数」を結びつけた，数学の歴史の上でも驚異的な発見である．高校数学，しかも「基礎解析」の範囲でキチンと説明することはできないが，「ハナシ」として知っておくとよい．すなわち

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad \longleftarrow \quad \text{オイラーの公式!!}$$

$$\left(\begin{array}{l} i=\sqrt{-1} \quad \longleftarrow \quad \text{虚数単位!!} \quad \text{「}e=2.718\cdots\cdots\text{」は} \\ \text{「自然対数の底」で,これは「微積分」で学ぶことになる} \end{array}\right)$$

である．また「三角関数」は典型的な「周期関数」である．フランスの工学者**「ジョセフ・フーリエ(1768～1830)」**は，1822年に「熱伝導の数学的解析」の形で「周期：2π」をもつ任意の「周期関数」$f(x)$ が

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots\cdots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots\cdots$$

のように**「三角関数」の「重ね合わせ」で表されることを発表した**——上式の右辺は**「フーリエ級数」**とよばれ，この理論は数理科学の諸分野に広い応用力を持つとともに，「関数概念の昇華」にも大きく貢献した．

ヴァイオリンやフルートの音色が「三角関数」の「重ね合わせ」で表され，「ベートーヴェン」や「モーツァルト」を聴くときの感動が，実は「重ね合わされた三角関数」によって伝えられるなどということは，少し不思議な気もしないではないが，これもなかなか愉快なハナシではないか．

第1節
三角関数

「三角形」を扱っている限りでは，「0°」から「180°」までの「角の範囲」でハナシはすんだ．ここではまず「角の範囲を拡げる」ことから考える———次の手順で解説する．

(i) 「角の定義」———今までの「度」という「角の単位」に加えて「弧度法(ラジアン)」という「角の測り方」を導入し，その上で，「一般角」を定義する．

(ii) 「三角関数($\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$)」を定義し，その「基本的性質」を明らかにする．

(iii) 「三角関数の周期性」に着目し，「三角関数のグラフ」と，「その扱い方」について説明する．

1　「一般角」と「弧度法」

(1)　弧度法

「角の単位」としては日常「度」が用いられている．これは古い歴史をもつもので，「1まわり」を「360°」というのは1年が365日あるのと関係があるといわれている．また，「360という数」が2，3，4，5，6，8，9，10，12などの多くの数で割りきれる便利さも1つの根拠になっているだろう．1°はさらに「分(′)」「秒(″)」に分割されて「1°＝60′」，「1′＝60″」と「60進法」になっているのでこれを「60分法」という．

これに対して，円では「弧の長さ」とそれに対する「中心角の大きさ」が比例することをもとにして，「半径 r の円」の，「長さ r の円弧」に対する中心角を単位(「ラジアン」という)にとる角の測り方があって，これを「弧度

法」という.

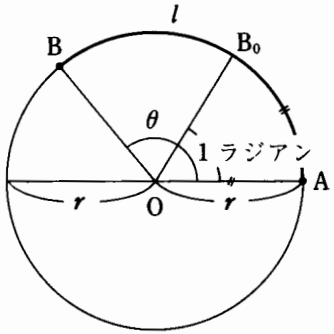
———右図でいうと

$$\theta\ (\text{ラジアン})=\frac{l}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(l：弧の長さ，r：半径)

である(特に「$r=1$」のときは「$\theta=l$」となる).

なお，このように表した「θ」は①の右辺でわかるように「長さ l」と「長さ r」との「比の値」であり，したがって，特にまぎらわしい場合を除いて「単位名ラジアン」を省略して表すのが普通である.



$\angle AOB_0=1$ (ラジアン)

「度」と「ラジアン」の関係

「度」と「ラジアン」の間には次の関係がある.

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ (\text{ラジアン})$$

解　説　この関係を説明するには「半円周」を利用するとよい.

「半円周」に対する「中心角」は「180°」であり，また「半円周の長さ」は，半径を r とすると「πr(周の長さは $2\pi r$)」であるから

$$180^\circ=\frac{\pi r}{r}=\pi\ (\text{ラジアン}) \qquad \therefore\ 1^\circ=\frac{\pi}{180}\ (\text{ラジアン})$$

である.

らしんばん

このことから「x°」を「ラジアン」に換算するには次のようにすればよい.

$$x^\circ=\frac{\pi}{180}x\ (\text{ラジアン})$$

また，上に述べたことから

$$1\ (\text{ラジアン})=\frac{180^\circ}{\pi} \longrightarrow y\ (\text{ラジアン})=\frac{180}{\pi}y^\circ$$

である.

弧の長さ，「扇形」の面積

半径 r の円 O の，中心角 θ の扇形 OAB については

(1)　弧 AB の長さ　———　$l=r\theta$

(2)　**扇形 OAB の面積 ―― $S=\frac{1}{2}r^2\theta$**

である.

解　説　「弧度法」を用いると,「円の弧の長さ」や「扇形の面積」が簡単に表せる利点がある.

(1) ―― 「θ(ラジアン)」を定義した①の分母を払えばよい.

(2)　半径 r の「円の面積」は「πr^2」であるから「$360°=2\pi$(1まわり)」に注目すると

$$S=\pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$$

である.

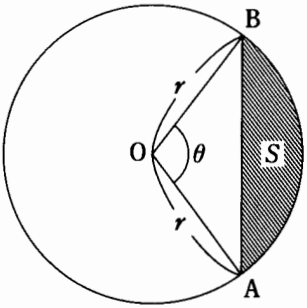
らしんばん

たとえば, 図の「斜線部分の面積 S」を求めるにはどうすればよいか.

$$S=\text{扇形 OAB}-\triangle\text{OAB}$$
$$=\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$$

とすればよい.

時には有効である.



(2)　一般角

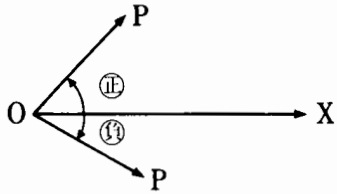
静止している図形を扱うには,「三角形」なら「$0\sim\pi$」,「円の中心角」では「$0\sim2\pi$」で間にあうが, 動く図形, たとえば回転運動を考えると, 1回転で 2π だが, 2回転, 3回転となるとどうなるか. あるいは逆回転もあるので, どうしても**「角の概念」を拡張する必要がある.**

そこで, 角を半直線 OP が O のまわりに回転した量を表すものと考えて,「2π より大きい角」や「負の角」を定義するのである. このように意味を拡げた角を**「一般角」**といい, 回転する半直線 OP を**「動径」**, その最初の位置 OX を**「始線(または基線)」**という.

まず,「角の正, 負」を決める.

動径が「左まわり(反時計まわり)」のときにできる角を「正」,「右まわり」のときにできる角を「負」と決める.

このようにして回転角を測ったとき，始線 OX の位置から O のまわりに角 θ だけ回転した動径を「角 θ の動径」という．



このように考えてくると，「角の大きさ」が与えられれば「動径の位置」は決まるが，「動径の位置」が与えられたとき「角の大きさ」が決まるかというと，そうはいかない．というのは，動径が「角 2π」だけ回転すると 1 回転してもとの位置にもどるからである．このことから，**「動径と始線のなす角の 1 つ」を「α」とすると，「動径の表す一般角」は**

$$\theta=\alpha+2n\pi \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)$$

と表されることになる．

2 「三角関数」の定義

(1) 「一般角」の「三角関数」

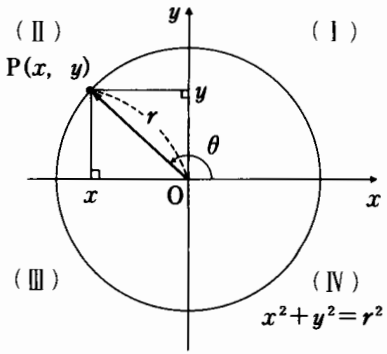
座標平面上で，**原点 O を中心とする，半径 r の円周上の点 P の位置は，「x 軸の正方向を始線」としたときの「動径 OP の回転角 θ」を決めると決まる．**

そこで，$P(x,\ y)$ とすると，「x」，「y」は「角 θ」に対応して決まるので，「$\frac{x}{r}$」，「$\frac{y}{r}$」，「$\frac{y}{x}\ (x\neq0)$」は「θ の関数」で，これらを

$$\frac{y}{r}=\sin\theta,\qquad \frac{x}{r}=\cos\theta,$$

$$\frac{y}{x}=\tan\theta \quad (\text{ただし } r>0)$$

と書く．ただし，「$x=0\ (\cos\theta=0)$」のときは「$\tan\theta$」は定義されない．



また，これらの関数を総称して「**三角関数**」という(特に，$r=1$ のときは $\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$ である)．

この定義から，いろいろなことが引きだせる．

(i)　「$\sin\theta$」,「$\cos\theta$」の値域：　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$,　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

これに対して,「$\tan\theta$」は「実数全体」が値域となる.

(ii)　座標平面を x 軸, y 軸は4つの部分に分割する.

「$(x>0,\ y>0)$」,「$(x<0,\ y>0)$」,「$(x<0,\ y<0)$」,「$(x>0,\ y<0)$」の部分を順に「第1象限」,「第2象限」,「第3象限」,「第4象限」といい, 動径 OP の位置によって「$\sin\theta$」,「$\cos\theta$」,「$\tan\theta$」の「正」,「負」が決まる.

$\sin\theta>0$：	第1, 2象限,	$\sin\theta<0$：	第3, 4象限
$\cos\theta>0$：	第1, 4象限,	$\cos\theta<0$：	第2, 3象限
$\tan\theta>0$：	第1, 3象限,	$\tan\theta<0$：	第2, 4象限

(2)　「三角関数」の相互関係

三角関数の定義から, 次の3つの基本関係が得られる.

「sin」,「cos」,「tan」の基本関係

任意の角 θ に対して

(1)　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　(2)　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(3)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

解　説　定義にしたがって, マジメに計算すればよい.

(1) ⟶　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) ⟶　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\dfrac{x}{r}\right)^2+\left(\dfrac{y}{r}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2}{r^2}=\dfrac{r^2}{r^2}=1$　$(x^2+y^2=r^2)$

(3)は(2)の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\qquad\therefore\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

となる.

この3つの公式があれば,「$\sin\theta$」,「$\cos\theta$」,「$\tan\theta$」のうち1つの値がわかっていて,「θ の存在する象限(⟵ 符号の決定)」が決まれば, 他の2つの値が「ただ1つ」に決まる.

らしんばん

「単位円(原点を中心とする半径1の円)」で考える――

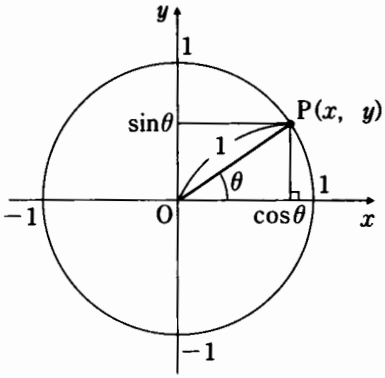
上の定義では, 点 $P(x,\ y)$ を

$$x^2+y^2=r^2$$

上の点としたが，これは「三角形の時代(？)のシッポ」を少し引きずっているわけで，「すべての円が相似」であることを考えれば，「$r=1$」としても問題はない．そうすると

$$\cos\theta=x,\quad \sin\theta=y,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

で，**「$\cos\theta$」，「$\sin\theta$」はそれぞれ「単位円周上の点 $P(x,\ y)$」の「x 座標」，「y 座標」を表し，「$\tan\theta$」は「動径 OP の傾き」を表すことがわかる．**



「三角関数」をこのように定義すると，上に述べたことがらはいくぶんスッキリする．

(2)の両辺を $\sin^2\theta$ で割ると

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1=\frac{1}{\sin^2\theta}\qquad \therefore\ \frac{1}{\tan^2\theta}+1=\frac{1}{\sin^2\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

ここで，「$\sin\theta$」，「$\cos\theta$」，「$\tan\theta$」の逆数をそれぞれ「$\mathrm{cosec}\,\theta$(コセカント)」，「$\sec\theta$(セカント)」，「$\cot\theta$(コタンジェント)」で表すと(3)と上の(＊)は

(3)：　$\mathbf{1+\tan^2\theta=\sec^2\theta}$

(＊)：　$\mathbf{\cot^2\theta+1=\mathrm{cosec}^2\theta}$

である．

例題 1

(A)の条件をあたえるとき，(B)の値を求めよ．

(1)　(A)　$\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$　　(B) $\cos\alpha,\ \tan\alpha$

(2)　(A)　$\tan x=-2,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$　　(B) $\sin^2x+\cos x$

(3)　(A)　$\tan\theta=\sqrt{2}$　　(B) $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}$

解　説　(1)　公式(2)より

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

「$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$」では**「$\cos\alpha<0$」**であるから

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}\qquad\therefore\quad\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$$

(2)　公式(3)より

$$\frac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x=1+(-2)^2=5$$

「$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$」では「$\cos x>0$」であるから

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad\therefore\quad\sin^2x=1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\quad\sin^2x+\cos x=\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4+\sqrt{5}}{5}$$

(3)　$\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{2}{1-\sin^2\theta}$　←――　通分!!

$=2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$　←――　公式(2)

$=2(1+\tan^2\theta)$　←――　公式(3)

$=2(1+2)=6$　$(\tan\theta=\sqrt{2})$

らしんばん

いずれも「公式(1)，(2)，(3)」を用いて式変形する問題である．
――特に「三角関数の公式」はムリに覚えようとするより「使いながら慣れる」ことが大切である．

例題 2

(1)　$\sin x+\cos x=t$ のとき，次の式を t で表せ．

(i)　$\sin x\cos x$　　(ii)　$\sin^3x+\cos^3x$

(2)　$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\sqrt{3}-2$，$0<\theta<\pi$ のとき

$\sin\theta-\cos\theta$

の値を求めよ．

解　説　(1)　(i)　与式を平方する方向で考える．

$$t^2=(\sin x+\cos x)^2$$

$$=\underbrace{\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x}_{1}$$

$$=1+2\sin x\cos x \qquad \therefore\quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

(ii) $\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x}_{1})$

$$=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{t}{2}(3-t^2)$$

(2) まず，与式から「$\tan\theta$」を求める．

$1+\tan\theta=(\sqrt{3}-2)(1-\tan\theta)$

$\therefore\quad (\sqrt{3}-1)\tan\theta=-(3-\sqrt{3})=-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)$

$\therefore\quad \tan\theta=-\sqrt{3}$

ここで，「$0<\theta<\pi$」，「$\tan\theta<0$」より，「$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$」であることに注意すると，「$\sin\theta>0$」，「$\cos\theta<0$」である．

ところで，「$\tan\theta=-\sqrt{3}$」，「$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$」より

$$\theta=\frac{2\pi}{3}$$

であるから

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos\theta=-\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

らしんばん

(1) (ii)は「因数分解」の公式

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

の応用である．

「因数分解」ではないが

$$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$$

を用いてもよい．これでいくと

$$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$$

$$=t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t=\frac{t}{2}(3-t^2)$$

となる――いずれもよく用いられる変形である．

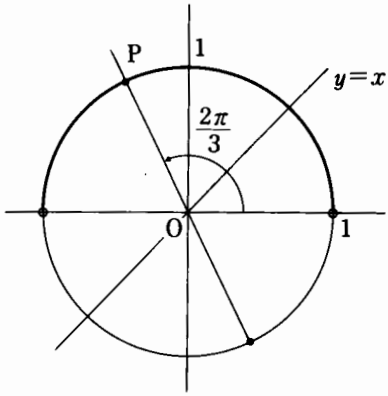
たとえば(2)で

$$t=\sin\theta-\cos\theta$$

とおくと

$$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2$$
$$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1-2\tan\theta\cos^2\theta$$
$$=1-\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$
$$=1-\frac{2(-\sqrt{3})}{1+(-\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$$



となるが，t の値の「正」，「負」がわからない．

結局，「単位円」を用いて

$\sin\theta>\cos\theta$ ←―― 点Pが「$y=x$」よりも上側

を確認しなければならなくなる――「計算式」だけに頼らず「単位円」を利用しながら「具体的な角 θ の値」を追いつめていくことも大切な方法である．

3　「三角関数」の性質

「一般角」の「三角関数」を定義するのに，「単位円周上の点を $\mathbf{P}(x, y)$」として

$$\cos\theta=x,\quad \sin\theta=y$$

とすると，「$\cos\theta$」，「$\sin\theta$」の変化を「x」，「y」の変化としてとらえることができて好都合であることはすでに説明した(p. 55, 56)．

ここで，点Pの

$$\begin{cases} x\text{軸，あるいは}\ y\ \text{軸に関する対称点} \\ \text{原点Oに関する対称点} \end{cases}$$

などを考えると，次の公式群が導かれる．

(1)　「$-\theta$」の三角関数

「$-\theta$」の公式

$$\cos(-\theta)=\cos\theta,\quad \sin(-\theta)=-\sin\theta,\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$$

解　説　図のように $\mathrm{P}'(x', y')$ をとると

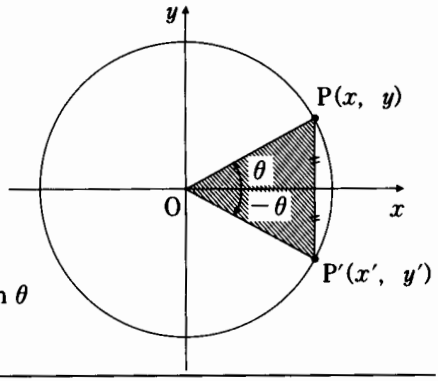
Pと P' は「x 軸に関して対称」であるから

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \cos(-\theta)=\cos\theta \\ \sin(-\theta)=-\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \quad \tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$$

$$=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$



らしんばん

上の図はハナシをわかりやすくするために点Pを「第1象限」にとったが，この単位円周上のどこにあっても同様である――点Pを「第2象限」，「第3象限」，「第4象限」などにおいて考えてみるとよい．

このことから

$\cos\theta$ ――偶関数

$\sin\theta$，$\tan\theta$ ――奇関数

であることがわかる――このことについては，あとでくわしく説明する．

(2) 「$\theta\pm\pi$」の三角関数

単位円を用いて説明する．

「$\theta\pm\pi$」の公式

$$\cos(\theta\pm\pi)=-\cos\theta, \quad \sin(\theta\pm\pi)=-\sin\theta$$

$$\tan(\theta\pm\pi)=\tan\theta$$

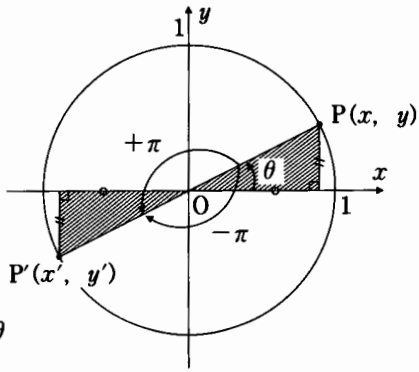
解　説　点 $P(x, y)$ の「原点Oに関する対称点」を $P'(x', y')$ とすると

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \cos(\theta\pm\pi)=-\cos\theta \\ \sin(\theta\pm\pi)=-\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \quad \tan(\theta\pm\pi)=\frac{\sin(\theta\pm\pi)}{\cos(\theta\pm\pi)}$$

$$=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$



である．

らしんばん

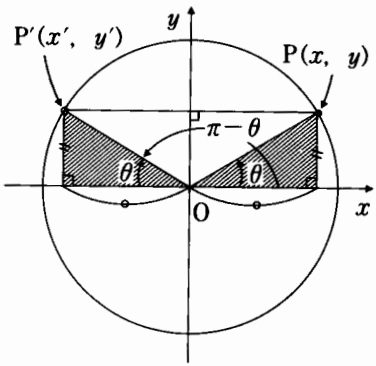
この公式に，「$-\theta$」の公式を用いると

$$\begin{cases} \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta \\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta \end{cases}$$

なども簡単に導くことができる．

「図を描いて確認」しておくと右のようになる――$P(x,\ y)$ と $P'(x',\ y')$ は「y 軸」について対称!!

このように「公式の相互の間の関連」をつかんでおくことも大切である．



(3)　「$\theta\pm\dfrac{\pi}{2}$」の三角関数

これも単位円を用いて説明する．

「$\theta\pm\dfrac{\pi}{2}$」の公式

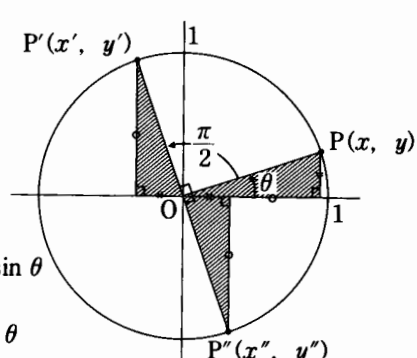
$$\begin{cases} \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta \\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\theta \\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta \end{cases}$$

解　説　$P(x,\ y)$ を

$\dfrac{\pi}{2}$ 回転 ⟶ $P'(x',\ y')$

$-\dfrac{\pi}{2}$ 回転 ⟶ $P''(x'',\ y'')$

とする．右図からわかることは



$P'(x',\ y')$ について：

$$\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta \\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta \end{cases}$$

$P''(x'',\ y'')$ について：

$$\begin{cases} x''=y \\ y''=-x \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\theta \\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta \end{cases}$$

らしんばん

これに「$-\theta$の公式」を用いると

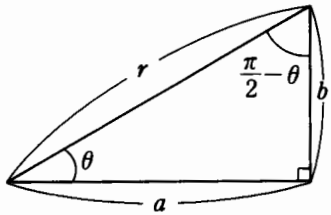
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

も簡単に証明される．

これは「図形問題」で「直角三角形」を扱うときによく用いられる公式である．

右図で確かめておくとよい．



$$\left(\begin{array}{l} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\dfrac{b}{r} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\dfrac{a}{r} \end{array}\right)$$

また

$$\tan\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\theta \quad \left(=-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

は辺々割ればよいだけのことだから「問題ナシ」とする．

また，この公式を用いて「$\theta\pm\pi$」の公式を導くこともできる．たとえば

$$\sin(\theta+\pi)=\sin\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$$

などとなる．

(4) 「$\theta+2n\pi$」の三角関数

nを任意の整数とすると，「θ」と「$\theta+2n\pi$」を与える動径OPの位置が一致することから

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta, \quad \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$$

などが成り立つことは説明するまでもない．

以下，例題で練習しておくとよい．

例題 3

(1) 次の式の値を求めよ．

$\cos(-700°)-\sin 470°+\sin 840°$

(2) △ABCにおいて，$\sin(B+C)=\sin A$，$\cos\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}$であることを示せ．

(3) 次の式を簡単にせよ．

$$\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(\theta-2\pi)}-\frac{\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos(\theta-\pi)}-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\tan(\pi+\theta)$$

解　説　(1)　$-700°=-360°\times2+20°$

$470°=360°+90°+20°$,　$840°=360°\times2+120°$

であるから，与式は

$$\cos 20°-\sin(90°+20°)+\sin 120°=\cos 20°-\cos 20°+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)「$A+B+C=\pi$」だから

$$B+C=\pi-A,\quad \frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad \sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A,\quad \cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$$

(3)　$\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(\theta-2\pi)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$

$$\frac{\sin\left(\theta-\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\theta-\pi)}=\frac{-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{-\cos\theta}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{-\cos\theta}=-1$$

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\tan(\pi+\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$$

$\therefore$　与式$=1-(-1)-(-1)=3$

らしんばん

「公式」は，理解してはいても，いざ使うとなるとまぎらわしくてやっかいである．大切なことは「正確である」ということ!!

したがって慣れるまでは「その都度」図を描いて確認しながら進めるとよい．

4　「三角関数」のグラフ

(1)　周期関数

「p」を「0でない定数」として，すべてのxに対して，つねに

$$f(x+p)=f(x)$$

となるような関数$f(x)$を「p」を「周期」とする「周期関数」という．

このとき

$$f(x+2p)=f((x+p)+p)=f(x+p)=f(x)$$

となり，「$2p$」も $f(x)$ の「周期」である．

このように考えると一般に「np（n は 0 でない任意の整数）」はすべて $f(x)$ の周期であるが，そのうち**「正で最小のもの」を「基本周期」**という．

前に述べたように

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x,\qquad \cos(x+2n\pi)=\cos x\quad (n\text{ は任意の整数})$$

であった．「$2n\pi$」のうち「正で最小」，というと「$n=1$」のときで，**「2π」が「sin」，「cos」の「基本周期」**である．また

$$\tan(x+n\pi)=\tan x$$

であることから「$n=1$」として，**「tan」の「基本周期」が「π」**であることもわかる．

単に「周期」というとき，この「基本周期」のことを意味することが多い．

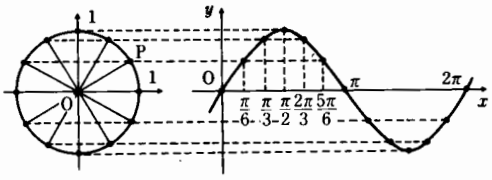
(2)　三角関数のグラフ

三角関数「$y=\sin x$」のグラフを考えてみよう．この関数の**「周期」は「2π」**だから

$$0\leqq x<2\pi \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{幅が「}2\pi\text{」ならば「}-\pi\leqq x<\pi\text{」,}\\ \text{「}\dfrac{\pi}{2}\leqq x<\dfrac{5\pi}{2}\text{」など，どの区間でもよい}\end{array}\right)$$

でのグラフを描けば，あとは**「2π ごとに同じ状態のくり返し」**になる．

次の図は，単位円周上を「正の方向」にまわる点 P をにらみながら，**「角 x の変化」に対応する「点 P の y 座標の変化」**をグラフに表したものである．



$\longrightarrow$ （以下，「正の方向」あるいは「負の方向」へ，この状態のくり返しとなる――）

この図は，「$0\leqq x\leqq\pi$」でいえば，x の値が

$$0,\quad \frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{2\pi}{3},\quad \frac{5\pi}{6},\quad \pi$$

の点をプロットしたものであるが，この他にわれわれがよく扱う「x の値」といえば

$$\frac{\pi}{4},\quad \frac{3\pi}{4}$$

などがある――ここではグラフの「大体の概形」が理解できればよい．

次に「$y=\cos x$」のグラフは，前ページと同様に「単位円」を利用しても描けるが

$$y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

と変形できる(p. 69)ことに注目すると，これは「$y=\sin x$」のグラフを「x軸の方向」に「$-\frac{\pi}{2}$」だけ「平行移動」したものであることが簡単にわかる．

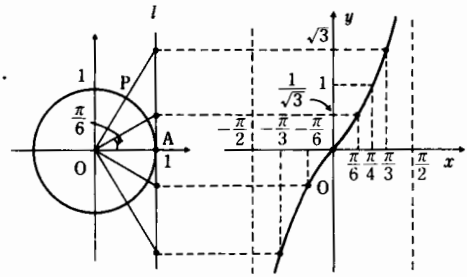
また

$$y=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

←――「周期」は「π」である．

のグラフの概形は次のようになる．

ただし「tan」は「動径 OP の傾き」である――「OA=1」から「$\tan x$」の数値は A における「単位円の接線 l」上にあらわれる．



(3)　「三角関数のグラフ」の性質

「グラフの概形」からわかることを整理しておこう．

「$y=\sin x$」について――

- 「$\sin(-x)=-\sin x$」←――「原点」に関して対称
- 「$\sin(\pi-x)=\sin x$」←――「直線 $x=\frac{\pi}{2}$」について対称
- 「$-1\leqq\sin x\leqq 1$」←――グラフ全体が2直線「$y=\pm 1$」の間

「$y=\cos x$」について――

- 「$\cos(-x)=\cos x$」←――「y軸」に関して対称
- 「x軸方向」に「$\frac{\pi}{2}$」だけずらすと「$y=\sin x$」に重なる．

「$y=\tan x$」について――

- 「$\tan(-x)=-\tan x$」←――「原点」に関して対称
- 「$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$」では「$\tan x$」は定義されない　($\cos x=0$)
- ←――直線「$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$」は，このグラフの「漸近線」である．

(xがこの値に近づくと$|\tan x|$は限りなく大きくなる．)

注❶ この説明でわかるように

$y=\sin x,\quad y=\cos x$

の関数値は，「x の変化にともなって $+1$ と -1 との間を変化(振動)」することがわかる———このような運動を「**単振動**」という．

注❷ 一般に，「$f(-x)=-f(x)$」である $f(x)$ を「**奇関数**」といい，「$f(-x)=f(x)$」である関数を「**偶関数**」という．この性質から「**奇関数のグラフ**」は「**原点に関して対称**」，「**偶関数のグラフ**」は「**y 軸に関して対称**」である．

奇関数の例： $x,\ x^3-x,\ \sin x,\ \tan x,$ etc.

偶関数の例： $|x|,\ x^2,\ \cos x,$ etc.

注❸ われわれが扱う「周期関数」はほとんどが「三角関数」だが，その他にもないわけではない．

「**ガウス記号**」で表された関数

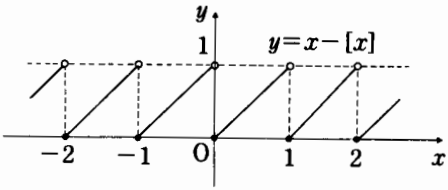
$f(x)=x-[x]$

もその1つで，これは「周期1の周期関数」である．

ただし，$[x]$という記号は，x をこえない最大の整数を表す．すなわち，n を整数とするとき

$n\leqq x<n+1 \rightleftarrows [x]=n$

ということである．



したがって，p を整数として

$[x+p]=[x]+p$

となるので

$f(x+p)=(x+p)-[x+p]=x-[x]=f(x)$

「整数 p のうち正で最小のものは 1」だから $f(x)$ の「基本周期」は1となるのである(たとえば，「$-2\leqq x\leqq 2$」の範囲でグラフを描いてみると，その状態がよくわかる)．

例題 4

次の関数の周期を求め，そのグラフをかけ．

(1) $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$　　(2) $y=\sin\dfrac{\pi}{3}(x+1)+1$

解説 (1) $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)=\mathbf{2\cos 3x}$ ……①

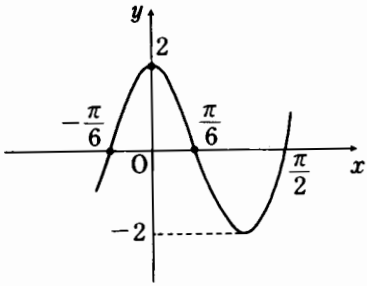
「$\cos 3x$」は「$3x$ が 2π だけ変化する」ごとに同じ値をとる．

したがって「**周期は $\dfrac{2\pi}{3}$**」である．

次に①を

$\dfrac{y}{2}=\cos 3x$

と変形すると，これは「$y=\cos x$」のグラフを「x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍」，「y 軸方向に 2 倍」に「伸縮」したものである――右図.

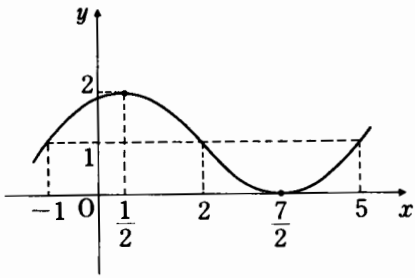


(2)「x が 6 だけ変化する」ごとに「$\frac{\pi}{3}(x+1)$」は「2π だけ変化する」ので，「周期は 6」である.

また

$$y=\sin\frac{\pi}{3}(x+1)$$

のグラフは「$y=\sin\frac{\pi}{3}x$」のグラフを「x 軸方向」に「-1」だけ「平行移動」したものだから



$$y=\sin\frac{\pi}{3}(x+1)+1 \quad \left(y-1=\sin\frac{\pi}{3}(x+1)\right)$$

のグラフは，さらに「y 軸方向」に「1」だけ「平行移動」したものである.

らしんばん

グラフの「軸方向の伸縮」，あるいは「平行移動」などについては p. 20, 21, 22, 23でくわしく説明した――「周期」をグラフの概形から「視覚的に」とらえるには「x 軸方向の伸縮」だけを問題にすればよい.

(1)では，「$y=\cos x$」のグラフを「x 軸方向」に「$\frac{1}{3}$ 倍に縮少」したものであるから「周期」も「$\frac{1}{3}$ 倍」になり，「$\frac{2\pi}{3}$」である.

(2)についても同様に「x 軸方向」に「$\frac{3}{\pi}$ 倍」と考えて「$2\pi\times\frac{3}{\pi}=6$」である.

一般に「周期関数 $f(x)$」については次のことが成り立つ.

$f(ax+b)$ の周期

「p」を $f(x)$ の「周期」とするとき

$$f(ax+b) \quad (a>0)$$

の「周期」は「$\frac{p}{a}$」である.

まず，「周期 p」の「周期関数 $f(x)$」では，任意の x について

$$f(x+p)=f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを最初に確認しておく．このとき

$$f\left(a\left(x+\frac{p}{a}\right)+b\right)=f(ax+b+\underset{\sim}{p})=f(ax+b) \quad (\longleftarrow (*))$$

が任意の x について成り立つ．

すなわち「$\boldsymbol{\frac{p}{a}}$」は「$\boldsymbol{f(ax+b)}$」の「周期」である．

この定理から，たとえば

$$f(x)=\sin ax \quad (a>0)$$

の「周期」が「$\frac{2\pi}{a}$」であることなどはすぐにわかる――「cos」，「tan」などについても同様である．

第2節
「加法定理」とその応用

ここから「三角関数」も「本格的」になる.

(i)　まず「sin」,「cos」,「tan」の「加法定理」を導く.

(ii)　「倍角の公式(半角の公式)」,「(和⇄積)の公式」――「加法定理」から誘導される.

(iii)　「三角方程式」,「三角不等式」――「加法定理」の実践である. これらを解説しながら「加法定理」と「その周辺の諸問題」を整理する.

特にここでは, たくさんの公式が出てくるが, 実はその出発点は1本の公式で, それがいろいろに形をかえて表されているにすぎない. 特にこの点に注意して読み進めてもらいたい.

1　「$\alpha\pm\beta$」の三角関数

次の公式が「加法定理」である.

sin, cos の加法定理

(1)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(2)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(3)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(4)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

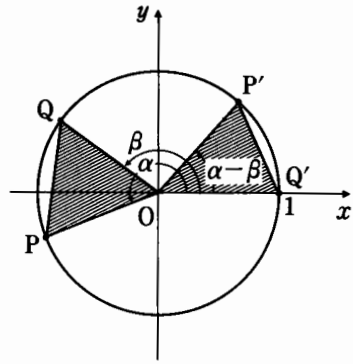
解　説　「1つの平面上の線分PQの長さは, それを定点Oのまわりに任意の角だけ回転してもかわらない」ということから,「加法定理」を導くことができる.

x 軸の正方向を始線として,「一般角 α, β を表す動径(長さ1とする)」を右図のようにOP, OQとすると

$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$

である．「△OPQ（P＝Q なら線分 OP）」を O のまわりに「$-\beta$」回転すると右図の「△OP′Q′」となり，Q′(1, 0) で OP′ は「角 $(\alpha-\beta)$ の動径」となる．



$\therefore\ P'(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta))$

$,\ PQ=P'Q'$

である．「$PQ^2=P'Q'^2$」を成分で表すと

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)$$

これを整理して

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

(2)は「(1)の β」を「$-\beta$」でおきかえればよい．

(3)は「(2)の α」のかわりに「$\frac{\pi}{2}-\alpha$」を入れると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

(4)は「(3)の β」を「$-\beta$」でおきかえればよい．

また，「$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$」を用いると，「tan の加法定理」が得られる．

tan の加法定理

$$\boldsymbol{\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}}\quad\text{（複号同順）}$$

これは(1)，(3)より

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

この右辺の分母，分子を「$\cos\alpha\cos\beta$」で割ると

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

が得られ，「β」を「$-\beta$」でおきかえると，「$\tan(\alpha+\beta)$」が得られる．

らしんばん

「代数・幾何」で学ぶ「1 次変換」で，「回転の行列」を知っていれば，「sin」，「cos」の「加法定理」は簡単に導ける．

あるベクトルを α 回転し，つづいて β 回転すると，結局「$\alpha+\beta$」だけ回転し

たことになるので，

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

右辺を計算して，両辺の成分を比較すると，(2)，(4)の公式が同時に得られる．

「ベクトルの内積」を用いて証明することもできる――

右図で「$\angle POQ=\alpha-\beta$」であるから

「内積の定義」

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\underbrace{|\overrightarrow{OP}|}_{=1}\underbrace{|\overrightarrow{OQ}|}_{=1}\cos(\alpha-\beta)$$

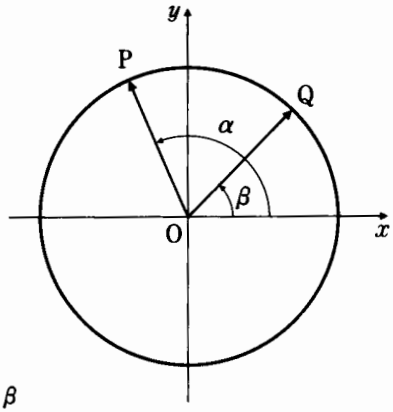
を利用する．

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$$

を入れると

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

すなわち，これは(1)である．



例題 5

(1)　$\sin 75°$，$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(2)　次の式を証明せよ．

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

解　説　(1)　$75°=45°+30°$，$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ に着目すると

$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(45°+30°)\\ &= \sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

(2)　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$\begin{aligned}&=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)\\ &=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha\end{aligned}$$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)$ ←―― **「sin」で統一!!**

$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

らしんばん

➡ (1)の「**75°**」,「$\frac{\pi}{12}=$**15°**」は,「30°」,「45°」,「60°」などに較べると少し「ナジミ」のうすい角であるが,できれば知っておきたい角である――「加法定理」を用いると「sin」,「cos」,「tan」は簡単に求められる.

これらを「素手で求める方法」もなくはない.

右図のような**「直角三角形 ABC」の外側に「二等辺三角形 CBD」**を作ると

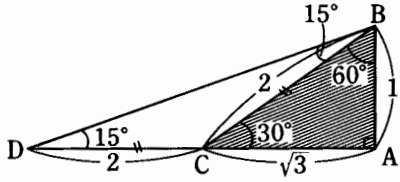
$BD^2=1^2+(2+\sqrt{3})^2$

$=8+4\sqrt{3}$

$=8+2\sqrt{12}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$

$\therefore\ BD=\sqrt{6}+\sqrt{2}$



これより

$$\sin 75^\circ=\frac{AD}{BD}=\cos 15^\circ$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ=\frac{AB}{BD}=\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ ←―― 有理化!!

――「加法定理」を利用する方がずっと簡単である.

これでわれわれとしては「15°」も「75°」も「とり込んで(?)しまった」ことになる.

➡ (2)は「(積→和)公式(p. 75)」を知ってしまえばもう少し簡単にいく.

ここでは「加法定理」の練習として読んでもらえばよい.

2 倍角・半角の公式

倍角の公式

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

解　説　「sin, cos の加法定理(p. 69, 70)」と「tan の加法定理(p. 70)」で「$\beta=\alpha$」とおくと，そのまま上の(1)，(2)，(3)になる．

らしんばん

この「公式(2)」を「読みかえる」と，次の「半角の公式」が得られる．

半角の公式

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

これは上の「公式(2)」の後半

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,\qquad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

を「$\cos^2\alpha$」,「$\sin^2\alpha$」について書きなおしたものである．

この公式で特徴的なことは

「左辺が2次」,「右辺が1次」

ということで，特に「微積分」を学ぶ諸君は「積分」のところでその「ありがたさ」がわかることになる．

例題 6

(1)　$\sin 3\alpha$，$\cos 3\alpha$ をそれぞれ $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の式で表せ．

(2)　$6\cos 2\theta-7\sin\theta+6=0$ で，$\sin\theta>\tan\theta$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3)　$\tan\theta=4$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ の値を求めよ．

解　説　(1)「$3\alpha=2\alpha+\alpha$」と分解して考える．

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)\\
&=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha && \longleftarrow \text{加法定理}\\
&=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha && \longleftarrow \text{倍角公式}\\
&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha && \longleftarrow \text{「sin」で統一!!}\\
&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha&=\cos(2\alpha+\alpha)\\
&=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha && \longleftarrow \text{加法定理}\\
&=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha && \longleftarrow \text{倍角公式}\\
&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha && \longleftarrow \text{「cos」で統一!!}\\
&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha
\end{aligned}$$

――これらは「3倍角の公式」といわれている．特に覚えておく必要はないが，導き方は知っておくとよい．

(2) 「$\sin\theta=x$」とおくと，与式は

$$6(1-2x^2)-7x+6=0 \qquad \therefore\ (3x+4)(4x-3)=0$$

$$x=\sin\theta=\frac{3}{4} \quad (\because\ |x|\leqq 1)$$

次に

$$\sin\theta>\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \therefore\ 1>\frac{1}{\cos\theta} \quad \left(\because\ \sin\theta=\frac{3}{4}>0\right)$$

ここで，「$\cos\theta>0$」とすると，「$\cos\theta>1$」となるので，「$\cos\theta<0$」でなければならない．($\cos\theta\neq 0$)

$$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

(3) $\boldsymbol{\cos 2\theta}=2\cos^2\theta-1$

$$=2\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)-1 \longleftarrow \mathbf{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}} \quad (\text{p. }55)$$

$$=\frac{\mathbf{1-\tan^2\theta}}{\mathbf{1+\tan^2\theta}}=\frac{1-4^2}{1+4^2}=-\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{17}}$$

$\boldsymbol{\sin 2\theta}=2\sin\theta\cos\theta=2\tan\theta\cos^2\theta$

$$=2\tan\theta\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)=\frac{\mathbf{2\tan\theta}}{\mathbf{1+\tan^2\theta}}=\frac{2\cdot 4}{1+4^2}=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{17}}$$

らしんばん

(3)の変形は覚えておきたい．一般には次のように表される．

「$\cos\theta$」，「$\sin\theta$」，「$\tan\theta$」を「$\tan\frac{\theta}{2}$」で表す

$\tan\frac{\theta}{2}=t$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

「$\cos\theta$」，「$\sin\theta$」は，本問(3)の変形をそのまま用いればよい――本問の「2θ」を「θ」におきかえる!!

「$\tan\theta$」については

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \longleftarrow \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

にしたがって計算すればよい――「準公式」としておこう．

3　(和⇄積)の公式

(積→和)の公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

解　説　「sin, cos の加法定理(p. 69, 70)」の(1)～(4)の公式から「積」を「和」に書きかえる公式が導かれる.

(1)＋(2)から

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$

$$\therefore\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

である.

以下「(1)－(2)」,「(4)＋(3)」,「(4)－(3)」から得られたものである.

らしんばん

これらの公式は特に「微積分」を学ぶ諸君が「積分」のところで用いることになる.

(和→積)の公式

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

解　説　先に述べた「(積→和)の公式」で

$$\alpha+\beta=A,\qquad \alpha-\beta=B$$

とおくと

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\qquad \beta=\frac{A-B}{2}$$

である．これを「もとの公式」に入れて書き直したものが上の「(和→積)の公式」である．

らしんばん

「和→積」というコトバをもう少し考えてみよう．

たとえば「2次方程式」

$$x^2-3x+2=0$$

を解くときは，左辺を「因数分解」して

$$\underbrace{(x-1)(x-2)}_{\text{積の形!!}}=0 \qquad \therefore\ x-1=0 \ \text{ or } \ x-2=0$$

$$\therefore\ x=1,\ 2$$

とやった．「不等式」についても同様で

$$x^2-3x+2>0 \qquad \therefore\ \underbrace{(x-1)(x-2)}_{\text{積の形!!}}>0$$

と変形しておいて，2つの「因数」「$x-1$」と「$x-2$」の符号を調べるのが基本的姿勢であった――**「和→積」は，実はこのような目的に沿った式変形であるわけで，この先「三角方程式」，「三角不等式」などを扱う上で重要な役割を果たすことになる．**

「加法定理」にはじまる一連の公式群を振り返ってみよう．

まず，「出発点」は

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (\alpha,\ \beta\text{は任意の角})$$

であった――**以下この α，β をそれぞれ適当な角におきかえることによって，いろいろな公式を次々と導いてきたことに注目してもらいたい．**

もし諸君が，これらの結果をただ暗記しようとするなら，それは全く無意味で，それよりも，その導き方を理解することの方が大切である．また，**問題を解く訓練の中で身につけるようにしないと公式は十分に使いこなせるものではない**――覚えられないことを気にしないで，実際に使うことを考えることが大切である．

例題 7

(1) 次式の「和(差)の形」のものは「積の形」に，「積の形」のものは「和(差)の形」に書きかえよ．

(i) $\cos A-\sin B$　　(ii) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(2)　次の式の値を求めよ.

(i)　$\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\sin 70^\circ$　　(ii)　$\sin 80^\circ\sin 40^\circ\sin 20^\circ$

解　説　(1)　(i)「和(差)を積になおす公式」は「**sin と sin**」あるいは「**cos と cos**」の「同種の三角関数の和(差)」でないと使えない.

そこで,「cos を sin (sin を cos でもよい)」になおして

$$\cos A-\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)-\sin B \longleftarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta \text{ (p. 61)}$$

$$=2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+A+B\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

(ii)　$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos\frac{\pi}{2}\right) \longleftarrow \text{(積→和)の公式}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2x$$

(2)　(i)「**10°**」,「**50°**」,「**70°**」の「三角関数の値」は求められないが,「**10°+50°=60°**」あるいは「その半分の **30°**」なら値が計算できることに着目して

$$\text{与式}=(\sin 10^\circ+\sin 50^\circ)-\sin 70^\circ$$

$$=2\sin 30^\circ\cos 20^\circ-\sin 70^\circ \longleftarrow \text{(和→積)の公式}$$

$$=\cos 20^\circ-\sin(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=\mathbf{0}$$

(ii)　$$\sin 40^\circ\sin 20^\circ=-\frac{1}{2}\{\cos(40^\circ+20^\circ)-\cos(40^\circ-20^\circ)\}$$

$$\longleftarrow \text{(積→和)の公式}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \text{与式}=\frac{1}{2}\left(\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\right)\sin 80^\circ=\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{4}\sin 80^\circ$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-\frac{1}{4}\sin(180^\circ-100^\circ)$$

$$\longleftarrow \text{(積→和)の公式}$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-\frac{1}{4}\sin 100^\circ=\frac{1}{4}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

らしんばん

(1)　(i)は「$\cos A$」に注目して式変形したが,「**sin B**」の方を変形してもよい.

$$\cos A-\sin B=\cos A+\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$$
$$=2\cos\frac{1}{2}\left(A+\frac{\pi}{2}+B\right)\cos\frac{1}{2}\left(A-\frac{\pi}{2}-B\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

でもよい.

「答え」の形が違うように見えるが，実は同じ式である――本文でも用いたが

$$\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) \longleftarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$
$$=\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

が成り立つからである.

(2)は(i), (ii)とも「目標」をキチンと定めて式変形すること!!

4 三角方程式・不等式

(1) 三角方程式

「三角方程式」の解き方を実例で説明しよう.

例題 8

次の方程式を解け.

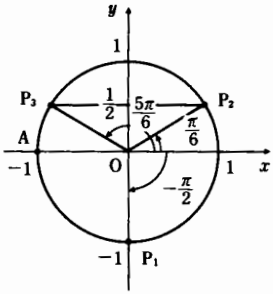
(1) $\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$

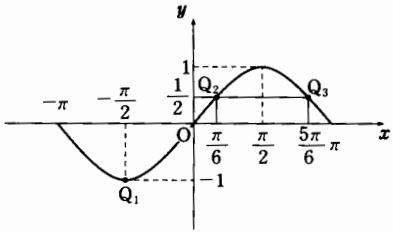
(2) $\tan 2x-3\tan x=0$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

解説 (1) 「$\sin x=t$」とおくと，「$\cos^2 x=1-\sin^2 x$」だから，与式が「tの2次方程式」になることに着目する. ←―― 「$|t|\leqq 1$」に注意!!

$$t=(1-t^2)-t^2$$
$$\therefore\quad (2t-1)(t+1)=0$$
$$\therefore\quad t=\sin x=-1,\qquad t=\sin x=\frac{1}{2}$$

「$-\pi\leqq x\leqq\pi$」の範囲でこれをみたすxの値を決めるには，「単位円」を用いる方法と，「グラフ」を用いる方法と2通りある.





まず，「単位円」を用いる方法から説明すると，「$-\pi \leqq x \leqq \pi$ での動径OP」は左図のAから「正方向」に1回転してAにもどる動きをする．

「単位円」で「Pの y 座標が $\sin x$ の値」だから「$y=-1$」となるのは図の P_1，「$y=\frac{1}{2}$」となるのは図の P_2，P_3 にPがきたときで，したがって

$$x=-\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{6},\quad \frac{5\pi}{6}$$

の3つの解が得られる．

「$y=\sin x$」のグラフを用いる方法は，「$-\pi \leqq x \leqq \pi$」では右図の曲線で

$$y=-1,\quad y=\frac{1}{2}$$

との交点は Q_1，Q_2，Q_3 の3点あり，その x 座標が求める解で，同じ答えが得られる．

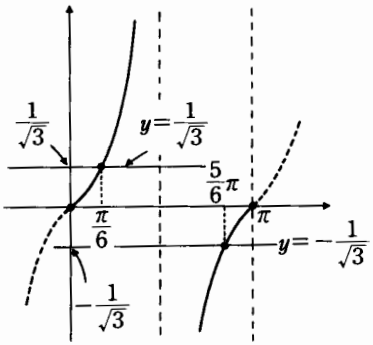
(2) **「$\tan x=t$」とおくと**

$$\tan 2x=\frac{2t}{1-t^2}$$ (p. 72, 73) ⟵ 「tan」の倍角公式!!

だから，与式は「t の分数方程式」で

$$\frac{2t}{1-t^2}-3t=0 \quad (1-t^2 \neq 0)$$

$$\therefore\ t\left(t^2-\frac{1}{3}\right)=0 \quad \therefore\ t=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



以下，「$y=\tan x$」のグラフを用いて x を決める．

「$0 \leqq x \leqq \pi$」ではこのグラフは右図の実線部分で

$$y=0,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

との交点は図の黒丸の点で，求める x の値は

$$0,\quad \frac{\pi}{6},\quad \frac{5\pi}{6},\quad \pi$$

の4つである.

らしんばん

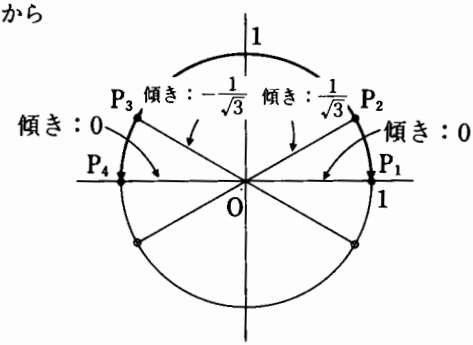
➡ 要するに「三角方程式」を解くには本問の(1),(2)でもわかるように，まず「$\sin x$」や「$\tan x$」の値を求めなければならない．そのために(1)では「$\sin x=t$」とおいて「tの2次方程式」を,(2)では「$\tan x=t$」とおいて「tの分数方程式」を導いたわけである———結局「おきかえ」によって，すでに「数Ⅰ」で学んだいくつかの「方程式」を解くことに帰着させるわけで，このハナシは「指数方程式」,「対数方程式」のところでも説明した(p. 13, 24).

➡ (2)では「$\tan x=t$」であったから

$$\tan x=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

をみたすxの値を求めるわけで，本文では，「$y=\tan x$」のグラフを利用したが，「単位円」を利用してもよい———単位円周上に点Pをとり，「OPの傾き」が

$$0,\quad \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



となるような「動径OP」を「$0\leqq x\leqq\pi$」の範囲でさがせばよいわけである.

$$x=0,\quad \pi,\quad \frac{\pi}{6},\quad \frac{5\pi}{6}$$

は，すぐに求められる.

「グラフを利用する方法」も知っていなければならないが，時によると「グラフを正確に描く」のがメンドウな場合もあるし，次に示す「一般解」などのときは「単位円」の周上をグルグルまわる点をおさえる方が考えやすい———どちらかというと「単位円を利用する方法」にいくらか「分」があるような気もするが，それぞれ一長一短であるので，われわれとしては両方の扱い方を用意しておきたい.

➡ 本問(1)では「$-\pi\leqq x\leqq\pi$」,(2)では「$0\leqq x\leqq\pi$」のように「角xの範囲」が指定されているから，その範囲で考えれば問題はない.

しかし，このように「角の範囲」が指定されていなくても「解」として与えられた「三角方程式」をみたす角を表示する方法がある.

「一般解」について「単位円」を用いて説明しておこう.

たとえば「三角方程式」

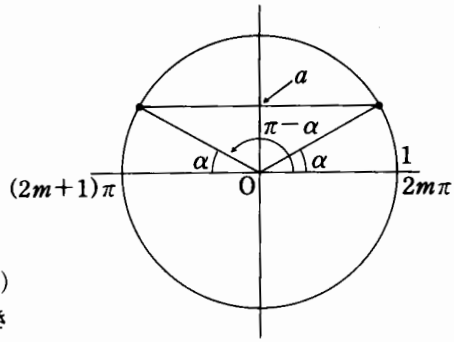
$$\sin x=a\quad (|a|\leqq 1)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

をみたす解の1つを「α」とすると「$\pi-\alpha$」もまた(*)をみたす．この2つの

解を「一般解」で表すと

$$x_1=2m\pi+\alpha$$
$$x_2=2m\pi+(\pi-\alpha)$$

である．これらを1本の式で表すことはできないか――少し工夫をする．



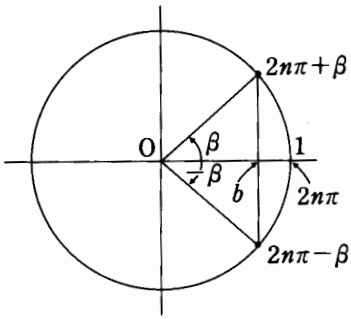
$$\left.\begin{array}{l} x_1=2m\pi+(-1)^{2m}\alpha \\ x_2=(2m+1)\pi+(-1)^{2m+1}\alpha \end{array}\right\}$$

$$\longrightarrow\quad \boldsymbol{x=n\pi+(-1)^n\alpha}\quad \cdots(**)$$

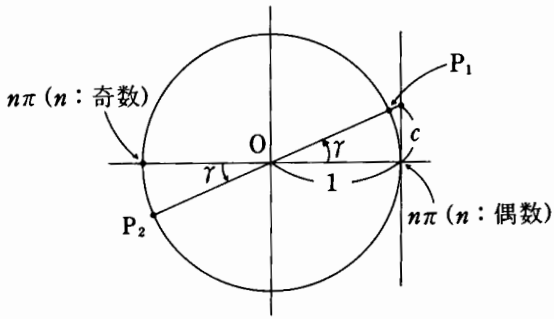
すなわち，(**)は「n が偶数のときは x_1」を，「n が奇数のときは x_2」を表すことがわかる――(**)が(*)の「一般解」を表す表現である．

$$\boldsymbol{\cos x=b}\quad(|\boldsymbol{b}|\leqq 1)\quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{x=2n\pi\pm\beta}\quad\text{――〈図1〉}$$
$$\boldsymbol{\tan x=c}\quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{x=n\pi+\gamma}\quad\text{――〈図2〉}$$

である．次の図を参考にして考えるとよい――「tan」の場合は「単位円」の周上の点をPとして，**「OPの傾き」**に注意する．



〈図1〉



〈図2〉

実例で説明しておこう．本問(1)で「角の範囲」が与えられていなければ「一般解」は

$$\sin x=\frac{1}{2}\quad\longrightarrow\quad x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

であるが，角が「$-\pi\leqq x\leqq\pi$」の範囲で与えられているから

$$-\pi\leqq n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\leqq\pi$$

この不等式は「$n\geqq 2$」，あるいは「$n\leqq -1$」では成り立たないから，「$n=0$, 1」で，これを n の値として(***)に代入すると

$$x=\frac{\pi}{6},\quad\frac{5\pi}{6}$$

の2つの解が得られることになる．

(2) 三角不等式

三角方程式の場合は「$\sin x$」,「$\cos x$」,「$\tan x$」の値を求めることが先決問題であったが，**不等式では，これらの値の範囲を求めなければならない．そのためには「単位円」を用いると動径の動きうる範囲がわかり，「角の範囲」が決められる．あるいは「グラフ」を用いて「解の範囲」を決めてもよい．** 例題 8 の問題を不等式にかえて説明しよう．

例題 9

次の不等式をみたす x の範囲を求めよ．

(1) $\sin x<\cos^2 x-\sin^2 x \quad (-\pi\leqq x\leqq\pi)$

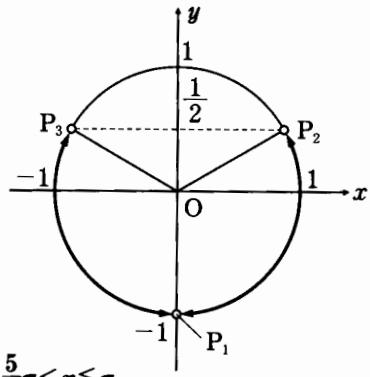
(2) $\tan 2x-3\tan x\leqq 0 \quad (0\leqq x\leqq\pi)$

解　説　(1) では「$\sin x=t$」とおいて，t の不等式を導くと

$$(2t-1)(t+1)<0$$

「$-1\leqq t\leqq 1$」であるから

$$-1<t<\frac{1}{2}$$



したがって，**単位円で考えると，動径 OP の動きうる範囲が P_1 を除く OP_3 と OP_2 の間の弧の部分だから，x の範囲は**

$$-\pi\leqq x<-\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi<x\leqq\pi$$

(2) では，「$\tan x=t$」とおいて，t の不等式を導くと

$$\frac{2t}{1-t^2}-3t\leqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{t(3t^2-1)}{(1+t)(1-t)}\leqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

この不等式は

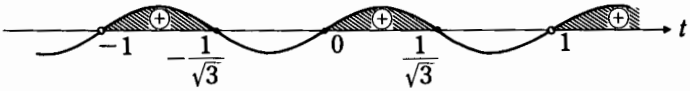
$$t=0\quad (x=0,\ \pi),\qquad t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\quad \left(x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$$

のときに等号が成立し，不等号が成立するのは

$$t(3t^2-1)(1+t)(1-t)<0$$

$$\therefore\quad t(3t^2-1)(t+1)(t-1)>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のときで



この図と，「$t=0$，$t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，$t\neq\pm1$」をあわせて

$$-1<t\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad 0\leqq t\leqq\frac{1}{\sqrt{3}},\quad 1<t \quad\cdots\cdots③$$

「$y=\tan x\ (0\leqq x\leqq\pi)$」のグラフを参照して

$$\frac{3\pi}{4}<x\leqq\frac{5\pi}{6},\quad 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$$

らしんばん

(2)の①で，**「いきなり分母を払う」間違いが多い**．不等式の両辺に「ある数」をかけるときは，それが「正」か，「負」かを確かめなければならない——「負」のときは不等号の向きがかわる!!

「場合分け」をするか(p. 82)，**あるいは「分母を2乗してからかける」**ことになる．本文は①の両辺に

$$(1+t)^2(1-t)^2$$

をかけたわけである——このとき**「分母≠0」から「$t\neq\pm1$」**を忘れてはならない．

また，②から「tの範囲③」を求めるには

$$②:\quad t(t+1)\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(t-1)>0$$

であるから，まず「左辺=0」の点を「数直線」の上におさえておく．

十分大きなtの値に対して「左辺の因数」はどれも「正」，したがって「左辺>0」であるが「tの値」を小さくするにつれて

$$1,\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad 0,\quad -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad -1$$

をトビこえるたびに因数の1つが「負」にかわり，そのことによって「左辺の符号」が変化することがわかる——本文中の「波線」はその状況を示したもので**「数Ⅰ」の「高次の不等式」の扱い方の基本**である．

「③から結論」については「単位円を用いる方法」でも確認しておくとよい．

第3節
問題解法の研究

発展問題1—「cos 36°」の値

(1) $0° < \theta \leqq 60°$, $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ のとき，θ の値を求めよ．

(2) 座標平面上に，原点を中心とする単位円がある．点 A_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，単位円周上に時計の針と反対まわりに点 A_1，A_2，A_3，A_4 をとるとき，五角形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ が正五角形になった．このとき，点 A_2 と点 A_4 の x 座標を求めよ．

解　説　(1)「$0° < \theta \leqq 60°$」であるから

$$0 < 2\theta < 3\theta \leqq 180°$$

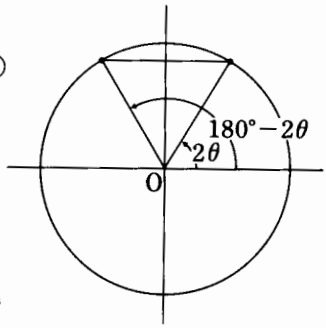
また

$$\sin 3\theta = \sin 2\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

から

$$3\theta = 180° - 2\theta$$

$$\therefore\ 5\theta = 180° \qquad \therefore\ \boldsymbol{\theta = 36°}$$



あるいは

$$y = \sin x$$

のグラフが「$x = 90°$」に関して対称であることから

$$90° - 2\theta = 3\theta - 90°$$

として θ の値を求めてもよい．

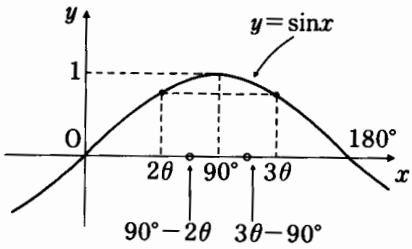
(2) 条件の図を描くと右図のようになる——「正五角形」に注目して

$$\angle A_0OA_1 = 72° \ (= 2\theta = \varphi)$$

とおくと A_2，A_4 の x 座標はそれぞれ

$$\cos 2\varphi, \qquad \cos(-\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．



「三倍角の公式(p. 73)」を用いると

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

で，「倍角公式」から

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

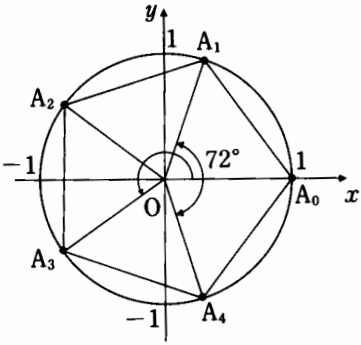
であるから(1)の①は

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

ここで，「$\sin\theta > 0$」から両辺を「$\sin\theta$」で割ると

$$3 - 4\sin^2\theta = 2\cos\theta$$

$$\therefore\quad 3 - 4(1-\cos^2\theta) = 2\cos\theta \qquad \therefore\quad 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$



ここで，「$\cos\theta > 0$」に注意して

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\ (>0)$$

そこで，②の値を求めるのであるが

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi = \cos 2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \longleftarrow \quad \mathbf{A_4}\text{ の }\boldsymbol{x}\text{ 座標}$$

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \longleftarrow \quad \mathbf{A_2}\text{ の }\boldsymbol{x}\text{ 座標}$$

となる．

らしんばん

本問で得られたことを整理してみると

$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\qquad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\quad \left(\cos 144^\circ = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

で，公式「$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$」を用いれば「$\sin 36^\circ$」，「$\sin 72^\circ$」の値も当然計算することができる．ところが

$$\cos 72^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \sin 18^\circ$$

であるから，「$\sin 18^\circ$」の値もわかり，したがって「$\cos 18^\circ$」の値も計算することができる――結局われわれとしては「18°」，「36°」，「72°」の「三角関数の値」を獲得したことになる．

また「$18^\circ = \theta$」とおくと

$$2\theta = 36^\circ,\qquad 3\theta = 54^\circ \qquad \therefore\quad 2\theta + 3\theta = 90^\circ$$

であるから

$$\cos 3\theta = \cos(90^\circ - 2\theta) = \sin 2\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

ここで

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ←―― 三倍角の公式（p. 73）

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

これを(＊)に代入すると

$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

「$\cos\theta > 0$」より両辺を「$\cos\theta$」で割って

$4\cos^2\theta - 3 = 2\sin\theta$

$\therefore\ 4(1-\sin^2\theta) - 3 = 2\sin\theta \qquad \therefore\ \mathbf{4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0}$

$\therefore\ \sin\theta = \mathbf{\sin 18^\circ} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\ (>0)$

となり，先に求めた「$\cos 72^\circ$」の値と一致する．

「$\sin 18^\circ$」を「図形問題」として求めてみよう．

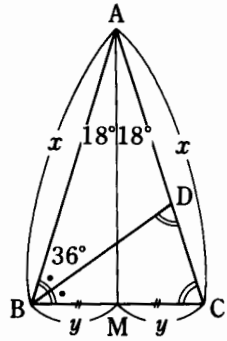
「$\angle A = 36^\circ$」の図のような「二等辺三角形 ABC」を考え

$AB = AC = x$

A から BC に下した垂線の足を M とし

$BM = MC = y$

とおく．



次に「$\angle B\ (=72^\circ)$」の二等分線が AC と交わる点を D とすると，△ABC，△BCD は「対応する角」がすべて等しい「二等辺三角形」で

△ABC ∽ △BCD

$\therefore\ BC : CD = AB : BC \qquad \therefore\ (2y) : CD = x : (2y) \qquad \therefore\ CD = \dfrac{4y^2}{x}$

ところで

$\angle DAB = \angle DBA = 36^\circ \qquad \therefore\ AD = BD = BC$

$\therefore\ x - CD = x - \dfrac{4y^2}{x} = 2y \qquad \therefore\ 4y^2 + 2xy - x^2 = 0 \quad \cdots\cdots(＊)$

(＊)を x^2 でわると

$4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right) - 1 = 0 \longrightarrow \dfrac{y}{x} = \sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\ (>0)$

発展問題 2―$\cos x = X$，$\sin x = Y$ とおく

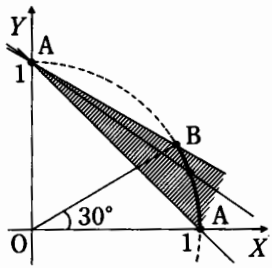
(1) 方程式 $k\cos x + \sin x = 1$ が，$0^\circ \leqq x \leqq 30^\circ$ の範囲で解をもつような正数 k の範囲を求めよ．

(2) $\dfrac{\cos x}{2 - \sin x}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

解　説　(1)　$\cos x=X$, $\sin x=Y$ とおくと，$0°\leqq x\leqq 30°$ であるから

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq X\leqq 1,\ 0\leqq Y\leqq \dfrac{1}{2}\quad (\longleftarrow\ 0°\leqq x\leqq 30°) & \cdots\cdots ① \\ X^2+Y^2=1 & \cdots\cdots ② \\ kX+Y=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

したがって，本問は，「②の円」と「③の直線」が「①の範囲」で共通点をもつ条件を考えればよい．



①より②は「図の円弧 AB（両端を含む）」で，これと (0, 1) を通る直線③が共通点をもつのは，直線③が図の斜線部分にあるときである．「限界」を調べると

(i)　③が A(1, 0) を通るとき：　$k=1$

(ii)　③が $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき：　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}k+\dfrac{1}{2}=1$　　$\therefore\ k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(i)(ii)より

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq 1$$

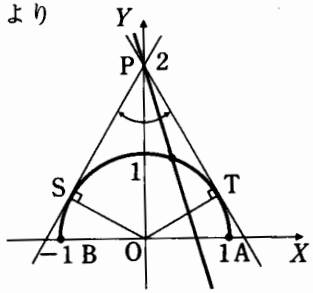
(2)　$\cos x=X$, $\sin x=Y$ とおくと，$0\leqq x\leqq \pi$ より

$$\begin{cases} -1\leqq X\leqq 1,\ 0\leqq Y\leqq 1 & \cdots ① \\ X^2+Y^2=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

また，与式を k とおくと

$$\frac{X}{2-Y}=k\qquad \therefore\ k(2-Y)=X$$

$$X+kY=2k\quad \cdots\cdots ③$$



③は P(0, 2) を通る直線で，①，②は右図の「半円 AB」の部分である．

P から半円にひいた接線の接点を図のように S, T とすると「OT=1」より，「②，③が①の範囲に共有点をもつ条件（直線③が PT から PS までの範囲にあるとき）」は

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqq 1\quad \longleftarrow\ 「点と直線との距離」の公式!!$$

$$\therefore\ 3k^2\leqq 1\qquad \therefore\ |k|\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad \therefore\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

らしんばん

「$\cos\theta$」,「$\sin\theta$」の1次式「$a\cos\theta+b\sin\theta$」の扱い方にはいろいろあるが，そのうちの重要な1つが本問の方法である．まとめると

「$a\cos\theta+b\sin\theta$」の1つの扱い方

$\cos\theta=X$，$\sin\theta=Y$ とおいて

$X^2+Y^2=1$ ⟶ （「$aX+bY=k$」を考える．（「θ の範囲」を確認!!））

となる．たとえば(1)では，「$\sin\theta$」,「$\cos\theta$」に関する問題を「X，Y についての①，②，③」におきかえてしまったところがポイントになっている．

逆に「$X^2+Y^2=1$」が与えられていると

$X=\cos\theta$，　$Y=\sin\theta$

として「三角関数の問題」としてながめるとよく「見える」場合もある．それぞれ「問題文」を読んで「使い分け」ができるようにしておかなければならない．

(2)で

②：　$X^2+Y^2=1$ ……(＊)

③：　$X+kY=2k$ ……(＊＊)

となると，(＊＊)から

$X=2k-kY$

として(＊)に代入したくなる――― X を消去!!

$(2k-kY)^2+Y^2=1$ ……(＊＊＊)

$\therefore$　$(k^2+1)Y^2-4k^2Y+4k^2-1=0$ ……(＊＊＊＊)

これが，Y の2次方程式として「実数解」をもつ条件を求めると

$$\frac{D}{4}=(2k^2)^2-(k^2+1)(4k^2-1)\geqq 0$$

$$\therefore\ 3k^2\leqq 1 \qquad \therefore\ k^2\leqq\frac{1}{3} \qquad \therefore\ |k|\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

とやると，ともかく本文で述べた結果と一致する．

しかし，本文で(2)の最初に示した条件

①：　$-1\leqq X\leqq 1$，　$0\leqq Y\leqq 1$

は，どこへいってしまったのか．あるいは「2次方程式(＊＊＊＊)」で，「Y」は(＊)から

$X^2=1-Y^2\geqq 0$　　$\therefore$　$Y^2\leqq 1$　　$\therefore$　$|Y|\leqq 1$

すなわち「(＊＊＊＊)の実数解 Y_1，Y_2」について，「2次方程式の解の大小（Y_1，Y_2 と1との大小）」について吟味しなくてよいか，などの「不安」が残る．

まず「$|Y|\leqq 1$」についていえば，これは吟味の必要がない．それは(＊)を示したとき，「実数 X，Y」に対して「$|X|\leqq 1$，$|Y|\leqq 1$」の条件はすでに(＊)に含

まれており，(＊＊＊)を経て(＊＊＊＊)に至る過程でもわかるように(＊＊＊＊)から「実数解 Y_1，Y_2」が得られるとすれば，それは「$|Y_1|\leqq 1$，$|Y_2|\leqq 1$」をみたすのは「あたりまえ」だからである．

しかも，その Y_1，Y_2 から得られる

$$X_1=2k-kY_1,\quad X_2=2k-kY_2$$

も(＊＊＊)から当然「$|X_1|\leqq 1$，$|X_2|\leqq 1$」をみたすことになる――ここまでは無条件に認めてもよい．

しかし，「$Y\geqq 0$」については，まだ何もチェックされていない．

そこで，(＊＊＊＊)で「$D\geqq 0\left(k^2\leqq\frac{1}{3}\right)$」のもとに「解と係数の関係」を用いると

$$Y_1+Y_2=\frac{4k^2}{k^2+1}\geqq 0$$

$$Y_1Y_2=\frac{4k^2-1}{k^2+1}\longleftarrow$$ この「正」「負」はわからない．

もう少しくわしく説明すると

$k^2<\frac{1}{4}$ ―― $Y_1+Y_2\geqq 0$，$Y_1Y_2<0$ ―― Y_1，Y_2 は異符号!!

$\frac{1}{4}\leqq k^2\leqq\frac{1}{3}$ ―― $Y_1+Y_2>0$，$Y_1Y_2\geqq 0$ ―― $\begin{cases} Y_1,\ Y_2\text{ の1つは「正」} \\ \text{もう1つは「正または0」}\end{cases}$

となり，ここでやっと(＊＊＊＊)が「$0\leqq Y\leqq 1$」をみたす「実数解」を「少なくとも1つ」はもつことがわかる．計算だけでやると，ここまでやらないとキチンとやったことにならない．

したがって「$\cos\theta=X$，$\sin\theta=Y$」とおいて

$$X^2+Y^2=1$$

を利用するのはよいが，「θ のまま」の場合とちがって点 $(X,\ Y)$ が単位円周上にあることまではわかるが，どの部分にいるのかまではわからない――むしろ「$\cos\theta$」，「$\sin\theta$」のままの方がずっと「具体的」で「エライ(偉い)」のだ，ということは知っておいた方がよい．われわれとしては本文に示したように「θ の範囲」から「目見当」をつけておいて「図形的」にうまく処理することもできるようになっておきたいわけである．

発展問題 3―$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$

$y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+\cos 2x$ とする．

(1)　$y=a\sin(2x+b)$ をみたす実数 a，b を，$a\geqq 0$，$0\leqq b\leqq 2\pi$ の範囲で求めよ．

(2) 関数 y の周期を求めよ．
(3) 関数 y の最大値，最小値およびそのときの x の値を一般角で求めよ．

解　説　(1)　$\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x$

$$=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos 2x$$

$$=\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x \quad \cdots\cdots ①$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right) \longleftarrow \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x+\sin 2x\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a=\sqrt{3},\quad b=\frac{2\pi}{3}}$$

(2)　周期は $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ⟵ p. 67, 68

(3)　「$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\leqq 1$」であるから，$y$ のとり得る値の範囲は

$-\sqrt{3}\leqq y\leqq\sqrt{3}$ ⟶ **y の最大値は $\sqrt{3}$，　最小値は $-\sqrt{3}$**

$y=\sqrt{3}$ のとき：

$$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=1$$

$$\therefore\quad 2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad \therefore\quad \boldsymbol{x=n\pi-\frac{\pi}{12}}\ \text{（}\boldsymbol{n}\text{ は任意の整数）}$$

$y=-\sqrt{3}$ のとき：

同様にして

$$2x+\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad \therefore\quad \boldsymbol{x=n\pi-\frac{7\pi}{12}}\ \text{（}\boldsymbol{n}\text{ は任意の整数）}$$

らしんばん

「三角関数の合成」について――「加法定理」の応用!!

一般に

$$\boldsymbol{a\cos\theta+b\sin\theta} \quad \cdots\cdots(*)$$

は「$a=b=0$」のときはつねに「0」であるが，それ以外のときは

$$\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}=r}$$

とおくと

$$\frac{a}{r}=\cos\alpha,\quad \frac{b}{r}=\sin\alpha$$

をみたす「角 α」が決まり(右図),

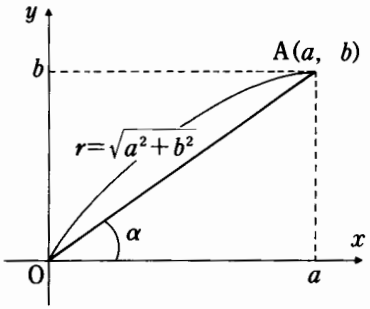
このとき

$$a=r\cos\alpha,\quad b=r\sin\alpha,$$

であるから，これらを(＊)に代入すると

$$a\cos\theta+b\sin\theta$$
$$=r(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$$
$$=r\cos(\theta-\alpha)\quad\longleftarrow\quad \text{加法定理!!}$$

となる.



三角関数の合成公式

$$\boldsymbol{a\cos\theta+b\sin\theta=r\cos(\theta-\alpha)}$$

ただし，$\boldsymbol{r=\sqrt{a^2+b^2}}$,　$\boldsymbol{\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$,　$\boldsymbol{\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

――これは，ぜひ覚えておかなければならない公式の1つである.

この公式の利点は「$\boldsymbol{a\cos\theta}$」,「$\boldsymbol{b\sin\theta}$」という2つの三角関数が，1つの三角関数「$\boldsymbol{r\cos(\theta-\alpha)}$」にまとめられるというところにある.

なお上の公式は「cos」でまとめたが,「sin」でまとめることもできる.

たとえば

$$\frac{a}{r}=\sin\beta,\quad \frac{b}{r}=\cos\beta$$

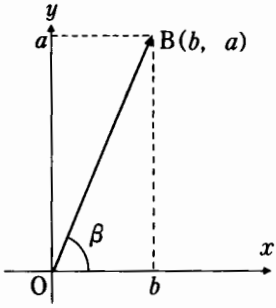
とおくと

$$a=r\sin\beta,\quad b=r\cos\beta$$

であるからこれらを(＊)に代入すると

$$\boldsymbol{a\cos\theta+b\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{=r(\cos\theta\sin\beta+\sin\theta\cos\beta)}$$
$$\boldsymbol{=r\sin(\theta+\beta)}\quad\longleftarrow\quad \text{加法定理!!}$$

となる――どちらの形でも使えるようになっておきたい.



(＊)を「ベクトルの内積」とみる――

(＊)を「内積」で表すと

$$\boldsymbol{a\cos\theta+b\sin\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

である．ここで

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\vec{e},\quad \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\vec{a}$$

とおくと,「$\vec{e}$」は「x 軸の正方向と角 θ をなす単位ベクトル」で,「$\vec{a}$ と $\vec{e}$ のな

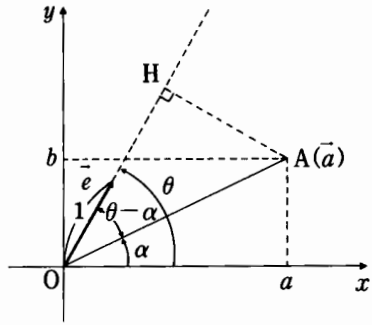
す角」は「$\theta-\alpha$」，また

$$|\vec{a}|=\sqrt{a^2+b^2}=r$$

であるから(＊＊)は

$$\underbrace{|\vec{e}|}_{1}\underbrace{|\vec{a}|}_{r}\cos(\theta-\alpha)=r\cos(\theta-\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(＊＊＊)$$

で，これは先に述べた公式に他ならない――このとき(＊＊＊)の値は「$\vec{a}$ の $\vec{e}$ への正射影」で，図では「OH（負のときもある）」のことである(『諸橋の代数・幾何講義』(p. 47)を参照!!).



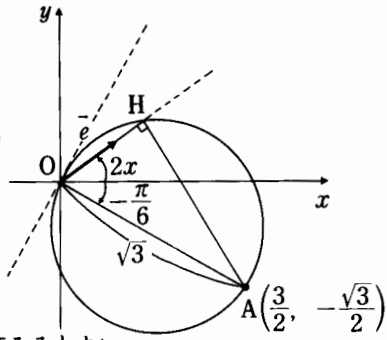
この立場から本問(1)を「図形的」に説明すると

本文①で

$$\vec{e}=\begin{pmatrix}\cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix} \longleftarrow \theta=2x$$

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix} \longleftarrow A\left(\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とおけるから，H は OA を直径とする円周上を動き(∠OHA＝90°)，「①の値(OH の長さ)」は「H が A と一致するとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる」ことがすぐにわかる――「最小値」についても考えてみるとよい.



発展問題 4―三角関数の消去計算

次の各条件をみたす点 $(x,\ y)$ はどんな曲線を描くか.

(1)　$x=\sin 2\theta,\quad y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad (0<\theta<\pi)$

(2)　$\begin{cases} x=2(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta \\ y=3(\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta \end{cases}$

解　説　(1)，(2)ともに「θ」を消去して，x，y の方程式を導けばよいのだが，「三角関数の消去計算」の基本は

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

という公式である.

(1)　まずわかりやすい形に x，y を式変形しておく.

$$x=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \longleftarrow \text{倍角公式} \quad \cdots\cdots①$$

$$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta) \longleftarrow \text{加法定理} \quad \cdots\cdots②$$

「y」に注目して，「y^2」を計算すると

$$y^2=\frac{1}{2}\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2=\frac{1}{2}(\underbrace{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}_{1})$$

$$=\frac{1}{2}(1+2\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}(1+x) \quad \cdots\cdots③$$

$$\therefore\quad x=2y^2-1$$

ただし，このとき「$0<\theta<\pi$」であるから

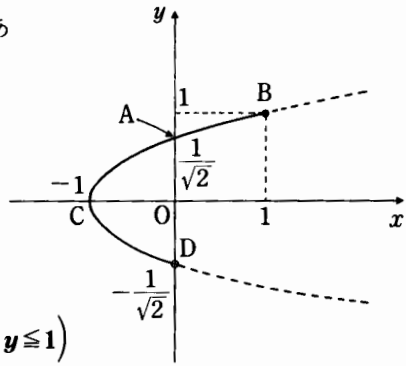
$$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$$

で，「y の範囲」は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<y\leqq 1$$

これより求める曲線は

$$\boldsymbol{x=2y^2-1}\quad\left(\text{ただし，}-\frac{1}{\sqrt{2}}<y\leqq 1\right)$$



(2)　x，y で，「三角関数」の「次数」を下げる方向で計算すると

$$x=2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1+\cos 2\theta+\sin 2\theta \quad \longleftarrow \quad \text{倍角公式，半角公式} \quad \cdots\cdots①$$

$$y=3\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta+3\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \quad \longleftarrow \quad \text{倍角公式，半角公式}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sin 2\theta-\frac{3}{2}\cos 2\theta \quad \cdots\cdots②$$

この2式から「$\sin 2\theta$」「$\cos 2\theta$」を x，y で表すと

①：　$\sin 2\theta+\cos 2\theta=x-1$　……①′

②：　$\sin 2\theta-\cos 2\theta=\frac{2}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right)$　……②′

辺々加えて

$$2\sin 2\theta=x+\frac{2}{3}y-2 \qquad \therefore\quad \sin 2\theta=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1$$

辺々引いて

$$2\cos 2\theta=x-\frac{2}{3}y \qquad \therefore\quad \cos 2\theta=\frac{x}{2}-\frac{y}{3}$$

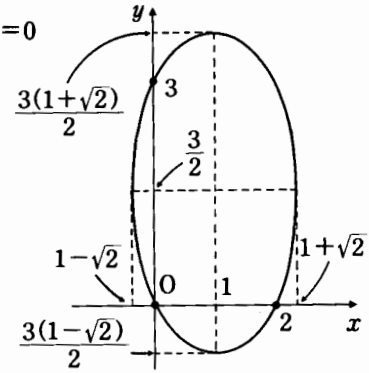
$$\therefore\quad \boldsymbol{\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right)^2+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2=\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2-2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2=0$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{2}+\frac{2}{9}y^2-x-\frac{2}{3}y=0$$

$$\therefore\quad \frac{(x-1)^2}{2}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{2}}=1$$

となり，$(x,\ y)$ はこの「だ(楕)円」上を動く．



らしんばん

(1)，(2)とも「θ」を「媒介変数(パラメーター)」として表された曲線である――「x」，「y」の変化を「θ」がコントロールしていることに注意しなければならない．

「θ の変化」と「x の変化」，「y の変化」の関係をもう少しくわしく調べてみよう．

(1)の「x のとり得る値の範囲」については

①：　$x=\sin 2\theta$

で，「θ の制限」から

$$0<\theta<\pi \qquad \therefore\quad 0<2\theta<2\pi \qquad \therefore\quad -1\leqq x\leqq 1$$

となるが，これを求めた曲線

$$x=2y^2-1$$

の「限界」とするわけにはいかない．それは「本文中に描いたグラフの形」からもわかるように，この不等式だけでは「x 軸より下側の欠落した部分」の説明ができないからである．したがってこの場合の「限界」は「y」を用いて

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<y\leqq 1$$

としなければならない．また「θ の値」を

$$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{3}{4}\pi \longrightarrow \pi$$

と変化させてやると点 $(x,\ y)$ は「θ の変化」に対応して

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$$

と動くことが確かめられる．

(2)では少し工夫をしてみよう――「三角関数の合成公式」を利用する．

①′，②′の左辺に注目すると

$$\begin{cases} x-1=\sin 2\theta+\cos 2\theta=\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right) & \cdots\cdots\cdots\cdots(*) \\ \frac{2}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right)=\sin 2\theta-\cos 2\theta=\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right) & \cdots\cdots\cdots\cdots(**) \end{cases}$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+\left\{\frac{2}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right)\right\}^2=\left\{\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2+\left\{\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2$$

$$=2\left\{\cos^2\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2$$

$$\therefore\quad \frac{(x-1)^2}{2}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{2}}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

のように意外とスッキリとした形になる――「x成分」を「cos(　)」の形で，「y成分」を「sin(　)」の形で合成するのがポイントである．

なお(＊)，(＊＊)は

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right) \\ y=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

と変形される．これを「だ(楕)円(＊＊＊)」の「パラメーター表示」である．

――『諸橋の代数・幾何講義』p. 294，295参照!!

発展問題5―三角不等式

(1)　$A=x\sin y+y\sin x$　　$B=x\sin x+y\sin y$

について，次の問いに答えよ．ただし，$0<x<\frac{\pi}{2}$，$0<y<\frac{\pi}{2}$とする．

(i)　A，Bの大小を比較せよ．

(ii)　$x+y=\frac{\pi}{2}$のとき，$A+B$の最大値を求めよ．

(2)　次の不等式を解け．ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$とする．

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)>\cos 2\theta$$

解　説　(1)　(i)　「大小比較」の基本的な方法の1つは，「$A-B$」の符号を調べることである．

$$A-B=(x-y)(\sin y-\sin x)$$

「$0<\theta<\frac{\pi}{2}$」で「$\sin\theta$」は「増加関数」だから

$$\begin{cases} x>y \longleftrightarrow \sin x>\sin y \\ x=y \longleftrightarrow \sin x=\sin y \\ x<y \longleftrightarrow \sin x<\sin y \end{cases} \quad \therefore \begin{Bmatrix} x>y\text{のとき } A<B \\ x=y\text{のとき } A=B \\ x<y\text{のとき } A<B \end{Bmatrix} \quad \therefore\ A\leqq B$$

(ii)　$A+B=(x+y)(\sin x+\sin y)$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

「$x=y$」のとき，「$\cos\frac{x-y}{2}$ は最大値 1」をとる．ゆえに

$$A+B\text{ の最大値：}\quad \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta\\ &= -(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)\\ &= -\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であるから，与式を変形すると

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\left\{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right\}>0$$

(i) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)>0$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{1}{2}$ のとき：

「$0\leqq\theta\leqq\pi$」より

$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3\pi}{4},\qquad \frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5\pi}{4}$$

であるから

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)>0 \longrightarrow 0<\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3\pi}{4} \qquad \therefore\ \frac{\pi}{4}<\theta\leqq\pi$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{6} \qquad \therefore\ 0\leqq\theta<\frac{11\pi}{12}$$

両方成り立つ θ の範囲を求めて

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{11\pi}{12}$$

(ii) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<0$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{1}{2}$ のとき：

同様の計算で

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<0 \longrightarrow 0\leqq\theta<\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{11\pi}{12}<\theta\leqq\pi$$

これを同時にみたす θ の値はない．

(i)(ii)から求める θ の範囲は

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{11\pi}{12}$$

らしんばん

(2)の「$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\cos 2\theta>0$」の左辺を積の形に書きかえて

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)>0$$

ところが「$0\leqq\theta\leqq\pi$」より

$$-\frac{\pi}{8}\leqq\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\leqq\frac{3\pi}{8}$$

で，この範囲では「$\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)>0$」であるから

$$\sin\left(\frac{3\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)>0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

また

$$-\frac{3\pi}{8}\leqq\frac{3\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\leqq\frac{9\pi}{8}$$

だから，(＊)からの制限は

$$0<\frac{3\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}<\pi \qquad \therefore\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{11\pi}{12}$$

としてもよい．

発展問題 6—$f(\cos\theta)=0$ ——解の個数

x，y 平面において，O を原点，A を定点 (1，0) とする．また P，Q は円周 $x^2+y^2=1$ の上を動く 2 点であって，線分 OA から正の向きにまわって線分 OP にいたる角と，線分 OP から正の向きにまわって線分 OQ にいたる角が等しいという関係が成り立っているものとする．

点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を R，点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする．実数 l ($\geqq 0$) を与えたとき，線分 RS の長さが l と等しくなるような点 P，Q の位置は何通りあるか．

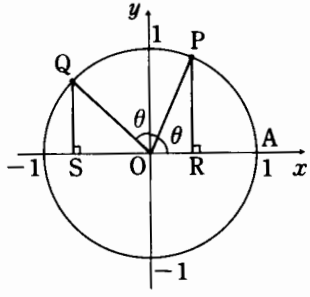
解　説　「$\angle AOP=\theta$」とすると 2 点 R，S の座標は

$$R(\cos\theta,\ 0),\qquad S(\cos 2\theta,\ 0)$$

であるから

$$RS=|\cos 2\theta-\cos\theta|$$
$$=l\ \ (\text{定数})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

をみたす「θ ($0\leqq\theta<2\pi$)」の個数を調べればよい．



「$\cos\theta=t$」とおくと

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$=2t^2-1\quad(\text{ただし}\ |t|\leqq 1)$$

であるから，これを①に入れて整理す

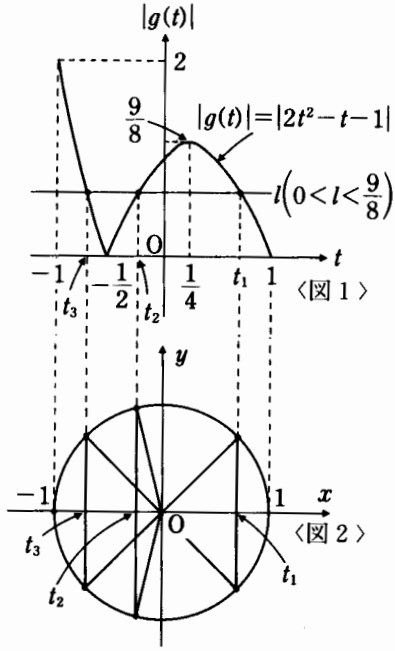
ると

$$|2t^2-t-1|=l\ (|t|\leqq 1)\quad\cdots②$$

ここで左辺の絶対値の中を t の2次関数を $g(t)$ とおくと

$$g(t)=2t^2-t-1$$
$$(=(2t+1)(t-1))$$
$$=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

と変形されるから，$|g(t)|$ のグラフは次のようになり，たとえば「**定数 l $\left(0<l<\frac{9}{8}\right)$**」を与えると，まず「**$t=t_1$, t_2, t_3**」が決まり，その「**t の値**」に対して「**$\cos\theta=t$**」にしたがって「**θ の値**」が決まる——〈図1〉，〈図2〉はその状況を「視覚的」にとらえるためのものである．



〈図1〉

〈図2〉

「θ」が決まれば，P，Q の位置が決まるから，その個数を「表」にまとめると次のようになる．

l	0	…	$\frac{9}{8}$	…	2	…
個　数	3	6	4	2	1	0

らしんばん

求めているものは，「方程式②の解の個数」ではなくて，「方程式①の解の個数」であるから混同しないように注意しなくてはならない．

本問では

$$|g(t)|=l\ (\text{定数})\quad\cdots\cdots(*)$$

の「t」が「$\cos\theta$」であったが，「a^x」，「$\log_a x$」，「$\sin\theta$」，あるいは「2次関数」などで与えられるときもある．「a^x」や「$\log_a x$」は「x とともに単調に変化する関数」であるから，「$a>1$」，あるいは「$0<a<1$」に注意すれば比較的簡単にいく場合が多いが，その他のものは(＊)に相当する方程式で「t の値が1つ決まった」としても「θ の値」，あるいは「x の値」は1つとは限らないから相当メンドウになる場合もある——**「関数の合成」についての「知識」と「センス」を十分みがいておく必要がある．**

発展問題 7―「直線のなす角」と「tan の加法定理」―

xy 平面に2点 A(1, 1), B(4, 4) がある.
y 軸の正の部分に点 P(0, y) をとり, △ABP の ∠P を θ とする.

(1) $\tan\theta$ を y で表せ.

(2) θ が最大となるときの y の値を求めよ.

解　説　(1)　2直線 PA, PB と「x 軸の正方向」とのなす角をそれぞれ「α」,「β」とすると

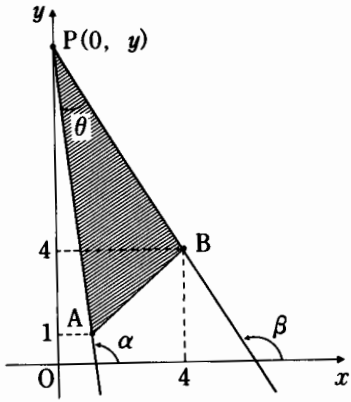
$$0 \leqq \alpha < \pi,\ 0 \leqq \beta < \pi,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2},\ \beta \neq \frac{\pi}{2}$$

で,

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= -(y-1) \\ \tan\beta &= -\frac{y-4}{4} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(「$\tan\alpha$」,「$\tan\beta$」はそれぞれ PA, PB の傾き!!)

このとき「$\tan\theta$」を「$\tan\alpha$」,「$\tan\beta$」で表したい.



〈図1〉

(i) 「$y>4$」または「$0<y\leqq 1$」のとき ―― 〈図1〉

$$\theta = \beta - \alpha$$

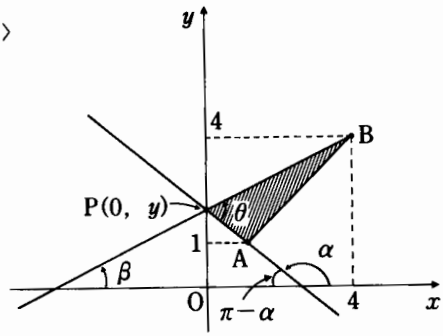
$$\therefore\ \tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} \longleftarrow \text{「tan」の加法定理!!}$$

$$= \frac{-\dfrac{y-4}{4}+(y-1)}{1+\left(-\dfrac{y-4}{4}\right)\{-(y-1)\}} = \frac{3y}{y^2-5y+8} \quad (\because\ ①)$$

(ii) 「$1<y\leqq 4$」のとき ―― 〈図2〉

$$\theta = \beta + (\pi - \alpha)$$
$$= \pi + (\beta - \alpha)$$
$$\therefore\ \tan\theta = \tan\{\pi + (\beta-\alpha)\}$$
$$= \tan(\beta-\alpha)$$
$$= \frac{3y}{y^2-5y+8}$$

((i)の変形と同じ!!)



〈図2〉

(i), (ii)のいずれの場合も

$$\tan\theta=\frac{3y}{y^2-5y+8}\quad(y>0)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

(2) **「$\tan\theta$」は「θの単調増加関数」であるから「$\tan\theta$が最大のときθが最大」である.**

②の分母，分子を「$y\,(>0)$」で割ると

$$\tan\theta=\frac{3}{y-5+\dfrac{8}{y}}=\frac{3}{y+\dfrac{8}{y}-5}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

ここで**「相加平均≧相乗平均」**を利用すると

$$y+\frac{8}{y}\geqq 2\sqrt{y\cdot\frac{8}{y}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}\ (>5)$$

$$\left(\text{等号は「}y=\frac{8}{y}\longrightarrow y=2\sqrt{2}\ (>0)\text{」のときに成り立つ}\right)$$

ゆえに③の分母は「正」で，これが最小のとき「$\tan\theta$」は最大，すなわち「θ」は最大となる.

求めるyの値は$2\sqrt{2}$である.

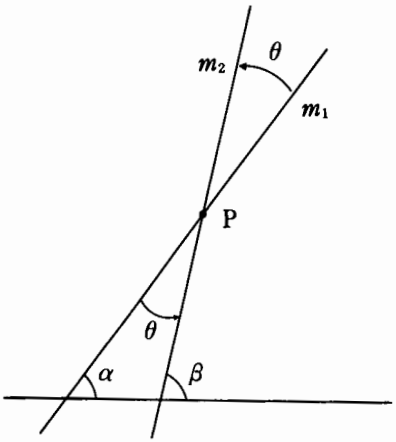
らしんばん

平面上の**「2直線のなす角」**を求めるのは大変まぎらわらしい――本問(1)でもわかるように(i)と(ii)とでは結論は同じだが出発点がちがっている.

そこで，われわれとしては次のようにまとめておくことにする.

「2直線m_1，m_2」が図のように点Pで交わっているとき，**「m_1からm_2に向って角θを測る」**ものとする.

このようにとりきめておくと，m_1，m_2が「x軸の正方向」とそれぞれ「角α」，「角β」で交わるならば「$\tan\theta$」を求めるにはいつでも



$$\tan\theta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad(=\tan(\beta-\alpha)，\text{または}\quad\tan\{\pi+(\beta-\alpha)\})$$

（ただし「$\tan\alpha$」，「$\tan\beta$」は2直線m_1，m_2の「傾き」である）

を計算すればよい.

(1)の**「$\tan\theta$」を「内積」を利用して求めてみよう.**

A(1, 1)，　B(4, 4)，　P(0, y)

であるから

$$\overrightarrow{PA}=\begin{pmatrix}1\\1-y\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{PB}=\begin{pmatrix}4\\4-y\end{pmatrix}$$

ゆえに「$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角を θ」とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}$$

$$=\frac{1\cdot4+(1-y)\cdot(4-y)}{\sqrt{1^2+(1-y)^2}\sqrt{4^2+(4-y)^2}}=\frac{y^2-5y+8}{\sqrt{y^2-2y+2}\sqrt{y^2-8y+32}}$$

ここで

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1 \longleftarrow \tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\quad(\text{p. }55)\quad\cdots\cdots(*)$$

$$=\frac{(y^2-2y+2)(y^2-8y+32)}{(y^2-5y+8)^2}-1=\left(\frac{3y}{y^2-5y+8}\right)^2\quad(y>0)$$

「$\tan\theta>0\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$」を確認した上で

$$\tan\theta=\frac{3y}{y^2-5y+8}\quad(>0)$$

として一応求めることはできる．しかし「内積」の場合は「角 θ」を「**$\cos\theta$（θ の偶関数）**」で求めるために「角の方向性」も決まらず，さらに「$\tan\theta$」を求めるには(＊)の公式を利用するときに「**平方する過程**」もあって「同値関係」も問題になる――「tan の加法定理」でいけばその辺がスッキリするのでかなり有効なときもある．このことは知っておくとよい．

発展問題 8―図形問題――最大・最小

△ABC で，BC＝7，CA＝8，AB＝5 とする．

(1)　∠A を求めよ．

(2)　△ABC に外接する正三角形 PQR をつくるとき，この正三角形の面積の最大値を求めよ．(やや難)

解　説　(1)　三角形の 3 辺が与えられると，「**余弦定理**」を用いて，「$\cos A$」，「$\cos B$」，「$\cos C$」の値を求めることができる．本問では「**∠A**」に注目する．

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

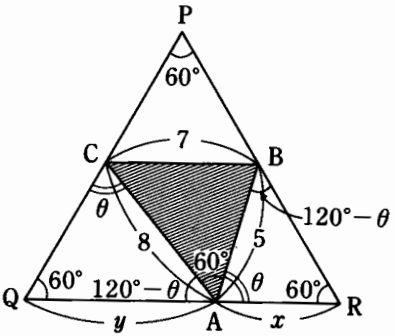
$$=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad\angle A=60^\circ$$

(2)「1 辺の長さが a」の正三角形の面積 S は

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

である――1辺の長さが最大になるときを調べればよい．

図のように，正三角形 PQR が △ABC に外接するものとする．



$\angle BAR=\theta$，$RA=x$，$AQ=y$

← 「$x+y$」が正三角形の1辺!!

とすると

$\angle CAQ=120°-\theta$　　∴　$\angle ACQ=\theta$

また，$\angle ABR=120°-\theta$ であるから，△ABR，△ACQ に「正弦定理」を用いると

$$\triangle ABR \longrightarrow \frac{x}{\sin(120°-\theta)}=\frac{5}{\sin 60°}$$

$$\triangle ACQ \longrightarrow \frac{y}{\sin\theta}=\frac{8}{\sin 60°}$$

この2式から x，y を求めると

$$x=\frac{10\sin(120°-\theta)}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{16\sin\theta}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad RQ=x+y=\frac{1}{\sqrt{3}}\{10\sin(120°-\theta)+16\sin\theta\}$$

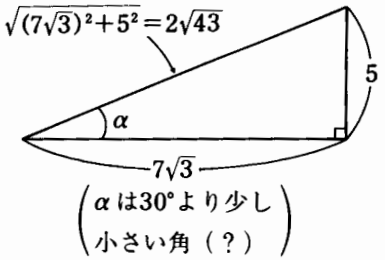
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)+16\sin\theta\right\}$$ ← 加法定理

$$=7\sqrt{3}\sin\theta+5\cos\theta$$

$$=2\sqrt{43}\sin(\theta+\alpha)$$ ← 三角関数の合成!!　……①

ただし，このときの α は

$$\cos\alpha=\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{43}},\quad \sin\alpha=\frac{5}{2\sqrt{43}}$$



であるが，問題は①が最大となるとき

すなわち

$\sin(\theta+\alpha)=1$

となるときがあるか，ということである――「$\theta+\alpha$」の範囲を α の値に注意しながら追いつめていく．

まず，「θ」のとり得る範囲は

$0<\theta<120°$

$\therefore\quad \alpha<\theta+\alpha<120°+\alpha$

これより「$\theta+\alpha$」は「90°」になるときがありうる．

ゆえに

$$\theta+\alpha=90^\circ \qquad \therefore\ \theta=90^\circ-\alpha$$

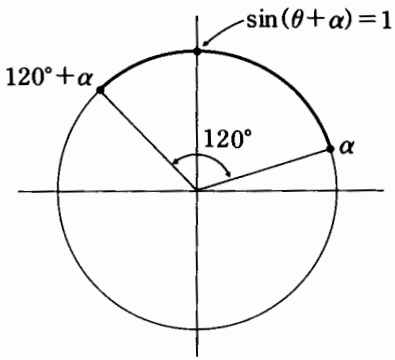
のとき「$x+y$（1辺の長さ）」は

$$\text{最大値：}\quad 2\sqrt{43}$$

をとり，したがって面積は

$$\text{最大値：}\quad \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{43})^2=43\sqrt{3}$$

である．



らしんばん

「3辺」が与えられたときは「$\cos A$」，「$\cos B$」，「$\cos C$」が求められる．

「3辺の比」が与えられたときは，たとえば

$$\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=7:8:5$$

などのときは，「相似形」だから同じようなものだが，それでも

$$\mathbf{BC}=7k,\quad \mathbf{CA}=8k,\quad \mathbf{AB}=5k$$

などとおいて

$$\cos A=\frac{(8k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot(8k)\cdot(5k)}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5}=\frac{1}{2}$$

と書くとよい．

「1辺の長さが a」の正三角形の面積は，「2辺をはさむ角」が「60°」であるから

$$S=\frac{1}{2}a\cdot a\sin 60^\circ=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

である――これはよく用いられる．ほとんど公式として覚えておくとよい．

「三角関数の合成公式」を用いて①まできたとき

$$\cos\alpha=\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{43}},\qquad \sin\alpha=\frac{5}{2\sqrt{43}}$$

をみたすような「α」は，たとえば「30°」，「45°」のようなわれわれがよく出会う(？)角ではないが，それでもかまわない．本文に示したように直角をはさむ2辺として $7\sqrt{3}$，5をとって直角三角形を描くとその「角 α」の大体の大きさがわかる．あとは

$$\alpha<\theta+\alpha<120^\circ+\alpha$$

の範囲に

$$\theta+\alpha=90^\circ \longleftarrow \text{「}\sin(\theta+\alpha)\text{」を最大にする値}$$

が存在することが示されればよい．

発展問題 9—三角形の形状

△ABC において，AC$=b$，AB$=c$ とする．次の関係が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ．

(1) $b\cos B=c\cos C$

(2) $\cos A+\cos C=\sin B$

解　説　(1)　$b\cos B=c\cos C$ ……①

「正弦定理」を利用する．

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ \left(=\frac{a}{\sin A}\right)$$

分母を払うと

$$b=2R\sin B,\qquad c=2R\sin C$$

これらを①に入れると

$$(2R\sin B)\cos B=(2R\sin C)\cos C$$

$\therefore\quad 2\sin B\cos B=2\sin C\cos C$ ←―― R が消えて「角だけの関係」

$\therefore\quad \sin 2B=\sin 2C$ ←―― 倍角公式 ……②

そこで

$\sin 2B-\sin 2C=2\cos(B+C)\sin(B-C)$ ←―― (和→積)の公式

$=2\cos(\pi-A)\sin(B-C)$ ←―― $A+B+C=\pi$

$=-2\cos A\sin(B-C)=0$

$\therefore\quad \cos A=0,\qquad \sin(B-C)=0$

(i)　$\cos A=0$ のとき　：「$\angle A=\frac{\pi}{2}$」の直角三角形

(ii)　$\sin(B-C)=0$ のとき：「$-\pi<B-C<\pi$」に注意して

$B-C=0$　　$\therefore\quad B=C$ ――→ 「$b=c$」の二等辺三角形

(2)　$\cos A+\cos C=\sin B$

$\therefore\quad 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$ ←―― ((和→積)の公式，倍角公式)

……③

ここで A，B，C は「三角形 ABC の内角」であるから

$A+B+C=\pi\qquad \therefore\quad \frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$

$\therefore\quad \cos\frac{A+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{B}{2}\neq 0\quad \left(\because\quad 0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$

これを③に入れて，両辺を約分して整理すると

$\cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{B}{2}$ ……④

$$\therefore\quad \cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{B}{2}=-2\sin\frac{A+B-C}{4}\sin\frac{A-B-C}{4}$$

$$=-2\sin\frac{\pi-2C}{4}\sin\frac{2A-\pi}{4}=0$$

$$\therefore\quad \sin\frac{2A-\pi}{4}=0 \quad \text{または} \quad \sin\frac{2C-\pi}{4}=0$$

ここで「$0<A<\pi$」,「$0<C<\pi$」から

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{2A-\pi}{4}<\frac{\pi}{4},\qquad -\frac{\pi}{4}<\frac{2C-\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$$

であるから

$$\frac{2A-\pi}{4}=0,\ \text{または}\ \frac{2C-\pi}{4}=0 \longrightarrow A=\frac{\pi}{2},\ \text{または}\ C=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに△ABCは「$\angle A=\frac{\pi}{2}$, または　$\angle C=\frac{\pi}{2}$」の直角三角形である.

らしんばん

「三角形の形状」を求める問題では，特別な場合を除けば，その結論として

二等辺三角形，　正三角形，　直角三角形，　直角二等辺三角形

のどれかになることを予想して「式変形」を進めてもよいだろう.

方法としては

(i)　**「辺だけの関係式」に整理する**

(ii)　**「角だけの関係式」に整理する**

ということになるが,「基本的には」(i)は「数Ⅰ」で処理できるものが多く，(ii)でなければ手におえないものは「基礎解析」の範囲のものと考えてよい.

「扱い易さ」という点でいえば多少計算がメンドウであっても(i)でやる方がよい（「数と式の計算」で間にあう）. 本問(1)を「(i)の方法」でやってみよう.

$$b\cos B=c\cos C$$

の両辺に「$\cos B$」,「$\cos C$」があることに注目して「余弦定理」を用いる.

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\qquad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

を入れると

$$b\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)=c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \longleftarrow \text{「辺だけの関係式」に整理!!}$$

$$\therefore\quad b^2(c^2+a^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$\therefore\quad c^4-a^2c^2+b^2(a^2-b^2)=0 \longleftarrow \text{「c」について整理!!}$$

$$\therefore\quad (c^2-b^2)\{c^2-(a^2-b^2)\}=0 \longleftarrow \text{因数分解!!}$$

$$\therefore\quad b=c,\qquad a^2=b^2+c^2$$

となり，本文と同じ結果が得られる.

「角の関係」だけで「ガンガン」やるには，今までに説明してきた「公式

群」についての「確実な知識」と「角の範囲」についての十分な配慮が要求される.

たとえば本文②で

$$\sin 2B=\sin 2C \longrightarrow 2B=2C$$

などと安易にやるわけにはいかない. それは

$$0<2B<2\pi,\quad 0<2C<2\pi \longleftarrow B,\ C\text{は三角形の内角!!}$$

から「$2B=2C$」の他に「$2C=\pi-2B$」のときも考えられるからである.

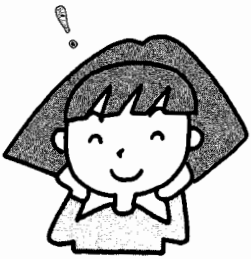
(2)の④でも同様のことがいえて

$$\cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{B}{2} \longrightarrow \frac{A-C}{2}=\frac{B}{2}$$

とはいえない. 角の範囲を調べると

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{A-C}{2}<\frac{\pi}{2},\quad 0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$$

であるから

$$\frac{A-C}{2}=\pm\frac{B}{2}\quad\left(\begin{array}{l}\text{角の範囲をキチンとおさえていないと片方をとりこぼ}\\\text{すことになりかねない}\end{array}\right)$$

としなくてはならない——これなら④の先のメンドウな計算からにげることもできる. しかし, われわれとしては「ラク」をすることよりも「確実」な方をとりたい.