## 第4章

# 微分法とその応用

「微積分」の考え方の基本は「関数」と「極限」の概念…… ……「瞬間速度」を どうとらえるか……



### 「微分」―――「極限」の概念をどうナットクするか

直線上の運動で「速度」が

<u>進んだ距離</u> ← (「単位時間(たとえば1時間)」に進ん が要時間 だ距離------「平均速度」という

この章を学ぶにあたっての、最も大きな「困難」は

「極限」の概念をどうナットクするか

という点にある――これはそのまま「ニュートン」や「ライプニッツ」が 直面した「困難そのもの」でもあったわけで、われわれ高校数学の立場とし ては**多少の異和感は「あってあたりまえ**」のことである。むしろ「その先に 得られるもの」を遠目に「にらむ」ようなつもりで読み進めてもらいたい。

「第2節」になるとハナシが具体的になって,「微分法の威力」をいくらか シッカリした形で了解することができる.

いずれにしても、「ルネッサンス」以後の宗教的、あるいは社会的変動の中で、「数学」は既存の社会秩序のすべてを検証し、新しい秩序を打ち立てる道具としての役割を演じたことは確かなことであり、われわれとしては「微積分」を学んではじめて、現代の「解析学に関連する諸科学」の入り口に立つことが許されると言っても決して過言ではない。

## 第1節

## 関数の極限と微分法

шкарынары капентатын аштентатын аштааны аштаанын жаны жаны жанын аштаанын жанын аштааны жаны аштаны жана актаа

IIIIIKANIIIA III SAKAINIA MARKIII SAMI SAMII SAMII SAMII SAMII SAMII KANDA KANDA MARKII MARKI



「関数」と「極限」の概念は「微積分」を学ぶ上で欠くことのできない重要な考え方である.「基礎解析」では主に「整関数」を素材として「微積分の考え方の基本」を解説する. ここで解説する内容はその「入門編」と考えてもらいたい.

- (i) 「関数」について―――「数 I 」以来いろいろな関数を扱ってきたが、ここでは「やや古典的な考え方」をも踏まえてこの「関数」をながめてみる。
- (ii) 「極限」について―――ここではじめて学ぶ概念であるから「多少の異和感」はしかたがない、まず先に読み進め、その上であらためて考えてみるとよい。
- (iii) 「微分係数」と「導関数」―――この先のハナシを展開する上での出発点となる。

### 1 関数

「関数」の概念は17世紀になって「微積分学の発見」とともに形成されたものである。たとえば「幾何学」においては学問の典型ともよばれている「幾何学原本」を残したギリシアの数学は「関数の概念」をもっていなかったし、15世紀の後半にスコットランド人「ネピア」が「対数」を発見し、大いに利用されたが今日のような「対数関数」の形をとっていたわけではない。結局この「関数」という概念は「ルネッサンス」という「文芸復興」の思潮が「科学」の分野にも浸透し、科学における歴史上の諸発見とも呼応しながら、「数学」が「運動と変化」をその考察の対象とするようになったことによる「時代の要求」から生まれたものである――「関数」という「ことば」がはじめて用いられたのは「ライプニッツ」が1694年に発表した論文の中であったといわれている。

それ以来.「関数の定義」は時代とともにいろいろとかわり、今日では、 数学の一般論では「関数」を「写像(対応)」と全く同じ意味に用いられると ころまできてしまっている.しかし、それでは「高校微積分」を学ぶわれわ れとしては、「関数」そのものが「運動と変化を述べる手段」として登場し た歴史的経緯をいまだに長く引きずっていることもあって、何ともその説明 に「つらい」ものがある.

そこで本書では、主として次に述べる「ディレクレ(1805~1859)」による 「関数の定義」を用いることとし、必要に応じて「対応しの考え方をとり入 れることにする.

関数の定義

2つの変数x, yがあって、xの値を定めると、それに応じてyの値 が1つ定まるとき、[y]を[xの関数]といい

y = f(x)

と書く.

このとき、xを「独立変数(または単に変数)」といい、yを「従属変 数」という.また,変数のまの値の範囲を「定義域」といい,それに 応ずる y の値の範囲を「値域」という。

解 説  $\mathbb{I}$  たとえば、半径 x cm の円の面積を y cm<sup>2</sup> とすれば

 $y = \pi x^2$ 

という関係式によって「x の値に対する y の値が定まる | から「y は x の関 数である | というハナシである.

この関数の「定義域」も「値域」も、ともに「正の実数全体の集合」であ る.

#### らしんばん



➡ 本文に述べた「関数を表す記号」

は「ライブニッツ」が発明したといわれていて、なかなか便利のよい記号であ るが、この「f(x)」には次の2つの意味があることに注意しておきたい。

- (i) xの関数  $\longrightarrow x$ の式、あるいは対応関係の説明
- (ii) 関数値 ----xの値に対応する「従属変数 yの値」

上の例でいうと

 $f(x) = \pi x^2$   $\longrightarrow$   $f(1) = \pi \cdot 1^2$ ,  $f(2) = \pi \cdot 2^2$ ,  $f(3) = \pi \cdot 3^2$ などとなる.

2つの変数xとyの関係を「視覚的に」とらえるためには、適当に座標軸

次関数 | までは「数 I | でやったので、「基礎解析」の「微分」では「3次」、 「4次」などの「整関数のグラフ」を描くことが主なテーマになる.

### ② 関数の極限

#### (1) 「極限 | の考え方について

「極限」については、大なり小なり「異和感」があるのが当然で、それは また「微積分の歴史そのもの」であったということもできる.

まず「速度」を例として、「極限」の概念とその周辺の諸問題を説明して おくことにする.

誰もがよく知っているように「速度」は

<u>進んだ距離</u> = 速度 (← 「単位時間」に進む距離!!) …①

で与えられる、このとき、その時間の間「速度」が一定ならば、これで正確 な「速度」が得られたといってよい.しかし,「速度」が刻々と変化すると きは「①」をどのように理解すればよいか―――この場合「①」で計算され るものは「所要時間」に対する「平均の速度」ということになる.

問題は、「速度」が刻々と変化するとき、それぞれの瞬間における「瞬間 速度」を求めるにはどうすればよいかということである―――走りはじめて まだ5分もたたないときでも「クルマのスピードメーター」は「**時速**50km」 をさすではないか!!

「瞬間速度」を考える場合の困難は次の点にある.

「①」で「速度」を考えるとすれば「所要時間」という、ある「時間の幅」 が想定されている―――この「時間の幅」がある限り「瞬間速度」というこ とにはならない.実をいうとこの矛盾は,もともと「瞬間速度」という考え 方自身の中に含まれていて、これを解決する方法が「極限」という考え方に 他ならないのである―――次のように考える.

たとえば、tを時刻とするとき、x軸上を正の方向に運動している点Pを 考えると、その x 座標は t とともに変化している----tが決まれば x が決 まり、xは「tの関数 | である、このことを

x=f(t)

と書いて、「t=toにおける瞬間速度」を求めてみよう、

まず「有限の時間の幅」をんとすると

$$t_0 \leq t \leq t_0 + h \quad (h > 0)$$

における「平均の速さ」は、その間に進んだ距離が「 $f(t_0+h)-f(t_0)$ 」であるから「①」をそのまま用いると

を計算すればよい―――その上で「hをだんだん小さくする」のである.

速度が一定でない以上は「hを小さくしていく」につれて「②」の「平均速度」は大体一定の値に近づき、hを「限りなく」小さくしていけば「bる一定値」に「限りなく」近づいていく。

簡単な例として、点Pのx座標が「tの関数」として

$$x=t^2 (=f(t))$$

で与えられる場合について考えてみよ う.

t が時刻「 $t=t_0$ 」から「 $t=t_0+h$ 」まで変化する間に点 P が進んだ距離は

$$f(t_0+h)-f(t_0) = (t_0+h)^2-t_0^2=2ht_0+h^2$$

であるから、この時間の「平均速度」は

$$\frac{2ht_0+h^2}{h}$$

となるが、このときhは非常に小さい値であるが、[0に近い」としても [0]ではない」から「分母と分子で約分」できて

 $t_0 + h$ 

$$2t_0+h$$

となる. そこでんを「限りなく 0 に近づける」と、この場合「平均速度」は「限りなく  $2t_0$  に近づく」ことになり、このことを「 $\lim (リミットと読む)$ 」を用いて

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(t_0+h)^2-t_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2t_0+h) = 2t_0$$

と表す.

「微積分」の創始者である「ニュートン」や「ライプニッツ」も当時このような計算をしていたらしい――――「異和感」を感じるのは

- (i) 「hは0でない」から分母と分子で約分する
- (ii) 「h は限りなく小さい数 | だから「0 | とする

という点にあって、当時の人々に「インチキ」と見えても当然のハナシで、 あった――実際にこれは正確な議論ではなく、厳密な論証は「混乱の18世 紀 | を経て19世紀になって完成するわけである.

「ニュートン」や「ライプニッツ」の考えは、その意味では不完全であっ たわけであるが、それにしても本質的な点をキチンとおさえていたことは実 に驚異といわなければならない。

われわれ「高校微積分 | の立場としては、この「h | が「0 であるか |、「0 でないか」という議論をしてもあまり意味はなく、「んが限りなく小さい量 である」と考えることによって、たとえば「瞬間速度」という考え方そのも ののもつ矛盾を「うまく」解決していくことの方が大切である―――「極限 計算|の中に含まれているように見える矛盾は「運動や変化|それ自身のも つ矛盾の反映であると考えておけばよい.

#### (2) 「関数の極限」とその計算

関数 f(x) において、変数 x が a と異なる値をとりながら限りなく a に 近づく|とき、f(x)が限りなく「一定な値A|に近づくならば

[x if a に近づく] ときの [f(x)] の極限値は A である] といい

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$
 ………①
$$(x \to a \text{ obs} f(x) \to A, \text{ あるいは } f(x) \to A(x \to a))$$
と表す。

**園** ①で用いた記号  $[x \rightarrow a]$  は

ことの両方を表しており、 $[\Omega]$  は「それらが一致して A ということである。

「基礎解析 | ではほとんど「整関数 | を扱うので「問題になることはまずない と思ってよい」が、「ハナシ」としては知っておく方がよい、

「極限値」に関する定理(1) 
$$\lim f(x) = \alpha$$
,  $\lim g(x) = \beta$  ならば

$$\frac{1}{2-a}$$
  $\frac{1}{2-a}$   $\frac{1}{2-a}$  (1)  $\lim cf(x) = c\alpha$  (c は定数)

(2)  $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$  (複号同順)

(3) 
$$\lim_{x\to a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$$

(4) 
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

**解 説** これらの厳密な証明は高校数学の範囲を越えるので、直感的に理解できればよい、また、特に、f(x) = c (定数)」のときはxがどんな値をとろうと、つねに f(x) = c だから

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

となる. このようにみれば(1)は(3)の特殊な場合でしかない.

#### らしんばん



上の定理では最初に

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$
,  $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$  ←  $\alpha$ ,  $\beta$  は定数!!

を明示してあるが、これが大切で、この条件を勝手に除いてはならない. たとえば(3)で

$$f(x) = x - a, \qquad g(x) = \frac{1}{x - a}$$

とすると,  $\lceil \lim_{x \to a} f(x) = 0 \rfloor$  ではあるが, g(x) については

$$\lim_{x \to a} g(x) = \begin{cases} \infty & (x \to a + 0 \text{ or } \xi \text{ }) \\ -\infty & (x \to a - 0 \text{ or } \xi \text{ }) \end{cases}$$

(「∞」は「無限大」と読み、「限りなく大きい」ことを示す記号 である。ただし、「無限大」という数値があるわけではない。

となって「定数」にはならない―――このようなとき g(x) は「発散する」という―――しかし

$$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \frac{1}{x - a} = 1$$

$$\text{C.5.} \ \& \ .$$

#### 次の極限値を求めよ.

(1)  $\lim_{x\to 2} (x^2+2x-3)$ 

(2) 
$$\lim_{x \to -1} \frac{4-x}{x^2+3}$$

(3) 
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

(4) 
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$$

(5) 
$$\lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{x(x+1)^2} - \frac{1}{x} \right\}$$

解 説 「極限値に関する定理(1)」をそのまま用いればよい.

(1) 
$$\lim_{x\to 2} (x^2+2x-3) = 2^2+2\times 2-3=5$$

(2) 
$$\lim_{x \to -1} \frac{4-x}{x^2+3} = \frac{4-(-1)}{(-1)^2+3} = \frac{5}{4}$$

(3) xは1でない値をとりながら限りなく1に近づくので

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \qquad \therefore \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

(4) 
$$x \neq 0$$
,  $\frac{1}{x} \left( 1 + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 

であるから

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

(5) 
$$\frac{1}{x(x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{1 - (x+1)^2}{x(x+1)^2}$$
$$= \frac{-x(x+2)}{x(x+1)^2} = -\frac{x+2}{(x+1)^2} \quad (x \neq 0)$$

であるから

$$\lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{r(r+1)^2} - \frac{1}{x} \right\} = \lim_{x\to 0} \left\{ -\frac{x+2}{(r+1)^2} \right\} = -2$$

#### らしんばん

が成り立つ.

しかし,  $\lceil \lim_{x \to a} f(x) \rfloor$  と「f(a)」とは基本的に違うものである.

たとえば(3)で

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad g(x) = x + 1$$

とおくとき, f(x) と g(x) を例にしてこのハナシを説明しておこう.

もし「x+1」ならば

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = g(x)$$

であるが、 $\lceil x=1 \rfloor$  とすると  $\lceil g(1)=2 \rfloor$  であるが  $\lceil f(1) \rfloor$  は定義されない.

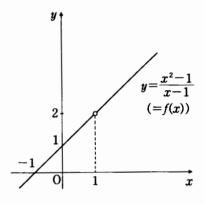
しかし

 $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ 

は「定数」として存在する.

この例からもわかるように、一般に  $\lceil \lim_{x\to a} f(x) \rfloor$  を考えるとき、f(x) は  $\lceil x=a \rfloor$  で定義される必要はなく、また定義されたとしても  $\lceil \lim_{x\to a} f(x) \rfloor$  は  $\lceil f(a) \rfloor$  と無関係なものであり、 $\lceil x=a \rfloor$  の近くにおける f(x) の様子のみによって定まる.

言いかえると「 $\lim_{x\to a} f(x)$ 」は「 $x\to a$ 」のときに「f(x)」が近づく目標であり、[f(a) そのもの」である必要はない。



ちなみに「微積分 | の「ことば」では(\*)を

「f(x) が x=a で連続である(つながっている)ための条件」 といい、上に述べた f(x) は [x=1 で不連続」の例ということになる。

「基礎解析」の微積分で扱う関数についていえば

整関数 (多項式で表される関数) ――― 任意の点で連続

有理関数(分数式で表される関数) ───「分母≒0」の点で連続

あるいは今までに説明してきた関数でいえば

sin x, cos x, a<sup>x</sup> ← 任意の点で連続

ということは無条件に認めることにしよう——あまりこだわらず、「直観的にし了解できればよい。

#### - 「極限値」に関する定理(2)

 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A (定数) かつ, \lim_{x \to a} g(x) = 0 ならば$ 

 $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad (\longleftarrow \lceil (分母) \to 0 \rfloor \quad \text{tot} \quad \lceil (分子) \to 0 \rfloor)$ 

である.

解 説 証明は次のようにやる.

 $\overline{\lim_{x \to a} f(x)} = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \cdot A = 0$ 

### らしんばん



上の定理で「(分母)→0」のとき、「(分子)→0」は「必要条件」であって

「十分条件」ではない.

たとえば

$$f(x) = x - a$$
,  $g(x) = (x - a)^2$ 

とすると

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

であるが

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x - a}$$

であり、 $x \to a$ のとき  $\frac{1}{x-a}$  はその絶対値が限りなく大きくなり、この場合は極限値が存在しない(p. 184).

#### 例題 2

次の問いに答えよ.

- (1)  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2} = 5$  が成り立つように定数 a, b を定めよ.
- (2) 関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  が

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1, \quad \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 2$$

をみたすとき, a, b, c, d の値を求めよ.

**解 説** (1)  $[x \to 1]$  のとき、 $[(分母) \to 0]$  であるから、[極限値に関する定理(2)] より  $[(分子) \to 0]$  でなければならない。

$$\lim_{x\to 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0$$
  $\therefore$   $b = -a - 1$  (必要)

このとき

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + ax - a - 1}{x^2 - 3x + 2}$$
$$= \frac{(x - 1)(x + a + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + a + 1}{x - 2}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x + a + 1}{x - 2} = -(a + 2) = 5 \quad (+\%)$$

$$\therefore$$
  $a=-7$ ,  $b=6$ 

(2) 「極限値に関する定理(2)」より

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0 \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$$

でなければならない(必要).

ゆえに. 「因数定理」により f(x) は

$$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-\alpha)$$
 ← a,  $\alpha$  は定数

とおくことができる. このとき

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 2} a(x - 1) (x - \alpha) = a(2 - \alpha) = 2 \qquad (+4\pi)$$

そこで、①、②から、a と α の値を求めると

$$a=3$$
,  $\alpha=\frac{4}{3}$ 

$$f(x) = 3(x-1)(x-2)\left(x-\frac{4}{3}\right) = 3x^3 - 13x^2 + 18x - 8$$

$$\therefore$$
  $a=3$ ,  $b=-13$ ,  $c=18$ ,  $d=-8$ 

#### らしんばん



(1)において、 $\lceil f(x) = x^2 + ax + b \rfloor$  とおくとき.

 $\lim_{x \to a} (x^2 + ax + b) = f(1) = 1 + a + b = 0$ 

であるが、この「1+a+b=0」という条件は「整式 f(x)」が「x-1」という因数をもつことを表している。

このように「極限値に関する定理(2)」は因数定理と併用されることが多い.

(1), (2)とも「必要性」「十分性」の論理構成がキチンと「見える」ように 書かなければならない。

### ③ 「微分係数」と「導関数」

#### (1) 微分係数

xの関数

$$y=f(x)$$
 .....①

において、xが「a から b まで変化する」とき、y が「f(a) から f(b) まで変化する」ものとする——変数x、y の変化する量に注目!!

$$\Delta x = b - a$$
,  $\Delta y = f(b) - f(a)$ 

とおいて、 $\Delta x$  を  $\lceil x$  の増分(ぞうぶん)」、 $\Delta y$  を  $\lceil y$  の増分」という.

----- 「△」は「Difference (差)」の頭文字 D に相当するギリシァ文字 で、「デルター」と読む、

このとき

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \cdots$$

を、xが「aからbまで変化する」ときの、関数f(x)の「平均変化率」とい い.  $\lceil b = a + \Delta x \rceil$  であるから,これは

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$
 (3)

と表すこともできる――― p. 181の説明の「平均速度」にあたるものである.

「平均変化率」が定義されると, 「その極限値」として「微分係数」が定義 される. すなわち③において $[\Delta x \rightarrow 0]$ とするとき、[その極限値が存在す る」ならば、これを関数①の「x=a」における「微分係数」または「変化 率」といい、記号「f'(a)」で表す── p. 181の説明の「瞬間速度」にあ たるものである.

#### 「微分係数」の定義

関数「y=f(x)」の「x=a」における「微分係数」は

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

である.

#### 解 説 $\lceil f'(a) \rfloor$ は $\Delta x$ を h とおいて

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

のように表されることもある.

また、 $\lceil \Delta x \rightarrow 0 \rfloor$  のときは  $\lceil b \rightarrow a \rceil$  であるから②から

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{is 2 in } f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

のように表されるときもある――いずれも同じ意味である。

### らしんばん



「平均変化率」と「微分係数」の図形的意味を考える―――

曲線「y=f(x)」上で、「x=a」、「 $x=a+\Delta x$  (=b)」に対応する点をそれぞれ A, Bとし, Aからx軸に平行に引いた直線と, Bからy軸に平行に引いた直線 との交点を H とする.

また、「直線 AB と x軸の正の向きとのなす角を  $\alpha$ 」とすると

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BH}{AH} = \tan \alpha$$

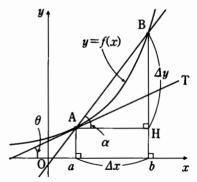
すなわち、 **Ay** は 「AB の傾き」である.

ここで、 $[Ax \rightarrow 0]$  とすると、B は曲線 上をAに限りなく近づくから、直線 AB の傾きけ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

に限りなく近づく. すなわち. 直線 AB は点Aを通り「傾き」が「 $f'(a) = \tan \theta$ | である直線 AT に限りなく近づく、

一般に、曲線上の2点 A、Bをむすぶ



直線が、点Bが曲線上を移動しながら点Aに限りなく近づくとき、一定の直線 ATに限りなく近づくならば、この直線 ATを、この曲線上の点 A における曲線 の「接線」といい、A を「接点」という。

このことから次の定理が得られる.

#### ―「接線の傾き」と「微分係数」

曲線 y = f(x) 上の「点 A(a, f(a)) におけるこの曲線の接線の傾き は、「関数 f(x) の x=a における微分係数 f'(a) 」で与えられる。

【f'(a)】が存在しないときがある───少しだけ「ハメ」をはずして説明し よう. 本文の

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{*}$$

 $\sigma$ .  $| \Delta x \rightarrow 0 | d$ 

$$\int \Delta x > 0$$
 で「 $0$ 」に近づく $-----$ 「 $\Delta x \to + 0$ 」と書く  $\Delta x < 0$  で「 $0$ 」に近づく $-----$ 「 $\Delta x \to - 0$ 」と書く

2 通りの場合が考えられる---- p. 183で説明した「右方極限 | . 「左方極限 | と考え方は同じである.

実は、(\*)をf'(a) | と書くことができるのは、この両方の「極限値」が同じ 定数になるときに限るわけで、このことを「微積分」の「ことば」では「微分 可能 というわけである.

具体的な関数を用いて説明しよう. たとえば

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x (\Delta x + 1)}{\Delta x}$$

$$= 1 \qquad \longleftarrow \qquad \lceil 右方微係数 \rfloor という$$

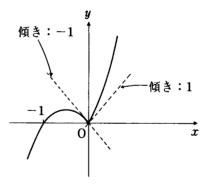
$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x (-\Delta x + 1)}{\Delta x}$$

$$= -1 \qquad \longleftarrow \qquad \lceil 左方微係数 \rfloor という$$

となって2つの値が一致しない。

このような場合、f'(0) は存在しな い といい、f(x) は x=0 で微分不可 能である という ----ゲラフでみる と「トンガッテー いることがわかる.

p. 189で「その極限値が存在するなら ば」と書いたのは、「この例のような場 合は考えていないのだしということの 説明であると考えてもらえばよい ――ここではこれ以上深入りはした いことにする.



次の問いに答えよ.

- (1) 2次関数  $f(x) = bx^2 + ax + r$  (b. a. r は定数) において、x が aから b まで変化するときの平均変化率 m と微分係数 f'(c) とが等し いとき. cを a. bで表せ.
- (2) f(a)=A, f'(a)=B とするとき、次の極限値を A, B で表せ、

(i) 
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$$

(ii) 
$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

解 説 (1) 
$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{p(b^2 - a^2) + q(b - a)}{b - a} = p(a + b) + q$$

一方、f'(c) は

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \{p(x + c) + q\} = 2pc + q$$

であるから、 $\lceil m = f'(c) \mid$  より

$$p(a+b)+q=2pc+q \qquad \therefore \quad c=\frac{a+b}{2}$$

(2) (i) 
$$\lim_{h \to 0} \frac{\{f(a+2h) - f(a)\} - \{f(a-h) - f(a)\}\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ 2 \cdot \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right\} = 2f'(a) + f'(a) = 3B$$

(ii) 
$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)f(a) - a\{f(x) - f(a)\}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left\{ f(a) - a : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} = f(a) - af'(a) = A - aB$$

### らしんばん



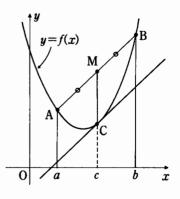
📤 (1)の「図形的意味」について説明しておく.

であるから

$$m = f'(c)$$

は、「AB と点 C での接線が平行」であ ることを意味している.

さらに、(1)の結果から、ABの中点 を M とすると、CM が u 軸に平行であ ることがわかる―――「放物線」の図 形的な特徴の1つとして覚えておくと よい.





🎒 (2)は「微分係数の定義(p. 189)|

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \dots (*)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

の確認である.

特に(\*)で「分母のんと分子のんとが同じん」であることに注意すること、

#### (2) 導関数

関数 [y=f(x)] が与えられるとき、[xのそれぞれの値」に、それぞれの 「微分係数」を対応させる関数を「f'(x)」で表し、これを関数 f(x) の「導 関数」という.

「導関数」の定義

関数 [y=f(x)] の「導関数」は

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \left( = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right)$$

である.

 $A(a, a^2)$ 

解 説 f(x) からその導関数  $\lceil f'(x) \rceil$  を求めることを、関数 f(x) を

xについて微分する

という.

導関数を表す記号としては、f'(x) の他に

$$y'$$
,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\{f(x)\}'$ ,  $\frac{d}{dx}f(x)$ 

なども用いられ、それぞれ、それなりの歴史と意味があるのだが、ここでは 説明しない. 最初に説明した記号「f'(x)」と同様に用いてよい.

#### らしんばん



#### ➡️ 「導関数」と「微分係数」との違いについて──

ここに述べた「導関数の定義」は形の上からいえば**「微分係数の定義(p**. [189] 0 [a] [a] [a] [a] [a] [a]

その違いについて説明しておこう.

たとえば

$$f(x) = x^2$$

の「x=a」における「微分係数」を求 めると

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (2a+h)$$
$$= 2a$$

であるが、この a の値にいろいろな数 値を与えると

$$f'(1) = 2$$
,  $f'(2) = 4$ ,  $f'(3) = 6$  .....

のように f'(a) はそれぞれ違った値をとる——  $\lceil f'(a)$  は a の関数」であると みることができる.

そこで、この a を x と書いて

$$f'(x) = 2x$$

と表したものが「導関数」であり、ハッキリしておかなければならないことは

ということである.

言いかえると、まず「導関数 f'(x)」を求め、そのx に具体的な数値、たとえ ば [x=a] などを代入した [f'(a)] が [x=a] における微分係数」である— 以下特別の場合を除いてそのように扱うことになる.

「導関数」についての諸定理

- (1) (c)'=0 (cは定数)
- (2) (kf(x))' = kf'(x) (k は定数)
- (3)  $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$  (複号同順)
- (4)  $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$  ← 「積の導関数」という

解 説 「導関数」を求めるのに、その都度「導関数の定義」に立ちかえっていたのでは大変わずらわしい。そのためにとりあえず用意したのが上の公式(1)~(4)である。

(1), (2), (3)は易しいので、(4)だけを証明する。

$$y = f(x)g(x)$$

とおくと

$$\Delta y = f(x + \Delta x) g(x + \Delta x) - f(x) g(x)$$

$$= \{ f(x + \Delta x) - f(x) \} g(x + \Delta x) + f(x) \{ g(x + \Delta x) - g(x) \}$$

ゆえに

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) \right\} + \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

この説明で

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$$

を用いているが,これは「**g(x) が任意の x で連続(p.** 185,186)」ということである―――「整関数」では「あたりまえ」のことと考えてよい.

#### らしんばん



「積の導関数」を利用すると、次の重要な公式を導くことができる。

$$(\boldsymbol{x}^n)' = n\boldsymbol{x}^{n-1} -$$

nを自然数,aとbを定数とするとき

- (1)  $y=x^n$   $x \in y'=nx^{n-1}$
- (2)  $y = (ax+b)^n \text{ then } y' = na(ax+b)^{n-1}$  $rac{n}{n}$
- (2)で「a=1, b=0」とすると(1)が得られるから(2)を「数学的帰納法」で証明しておこう.

- (i) 「n=1 | のとき、(2)は明らかに成立する.
- (ii) 「n=k | のとき成立すると仮定すれば

$$\{(ax+b)^k\}' = ka(ax+b)^{k-1}$$

 $\lceil n = k + 1 \rfloor$  のときは、 $\lceil 積の導関数 \rfloor$  を用いて

$$\{(ax+b)^{k+1}\}' = \{(ax+b)^k(ax+b)\}'$$

$$= \{(ax+b)^k\}' \cdot (ax+b) + (ax+b)^k \cdot (ax+b)'$$

$$= ka(ax+b)^{k-1} \cdot (ax+b) + (ax+b)^k \cdot a$$

$$= (k+1)a(ax+b)^k$$

ゆえに(2)は[n=k+1] のときも成立し、したがってすべての自然数nに対 して成立する.

「積分」のところで「面積」や「体積」を求めるとき、「この公式の逆 の計算|を利用することになる。しっかり覚えておかなければならない公式の 1つである.

なお「微積分」を学んだ諸君は「合成関数の微分法」を用いて証明すること もできる.

次の関数を微分せよ.

- (1)  $y=2x^3-3x+4$
- (2)  $y = (x+3)(1-x)(x^2+1)$
- (3)  $y = (x-1)^5(2x-1)^2$
- (4)  $y = (3 + 2x 4x^2)^3$

解 説 (1)  $y'=(2x^3)'-(3x)'+(4)'=6x^2-3$ 

- (2)  $\mathbf{y}' = \{(x+3)(1-x)\}'(x^2+1) + (x+3)(1-x)(x^2+1)'$  $= \{(x+3)'(1-x)+(x+3)(1-x)'\}(x^2+1)+(x+3)(1-x)\cdot 2x$  $= \{(1-x)-(x+3)\}(x^2+1)+2x(x+3)(1-x)$  $=-4x^3-6x^2+4x-2$
- $y' = \{(x-1)^5\}'(2x-1)^2 + (x-1)^5\{(2x-1)^2\}'$ (3)  $=5(x-1)^4(2x-1)^2+(x-1)^5\cdot 2\cdot 2(2x-1)$  $=(x-1)^4(2x-1)\{5(2x-1)+4(x-1)\}$  $=(x-1)^4(2x-1)(14x-9)$
- (4)  $y'=3(3+2x-4x^2)^2 \cdot (3+2x-4x^2)'$  $=-6(4x-1)(3+2x-4x^2)^2$

#### らしんばん



(2)について. 一般に

 $\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$ である.

「積の導関数」の拡張で「f(x)g(x)」を1つの関数とみて、「積の導関数 | を2回使えば、証明することができる.



(3)については次のように変形するのも有効である。

$$y=(x-1)^5\{2(x-1)+1\}^2$$
  
=4 $(x-1)^7$ +4 $(x-1)^6$ + $(x-1)^5$  ← 「 $x-1$ 」で展開!!

と変形して

$$y'=28(x-1)^6+24(x-1)^5+5(x-1)^4$$
 ←  $\{(x-1)^n\}'=n(x-1)^{n-1}$  (4)については

$$(\{f(x)\}^n)' = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$$

である. これも「 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 」と同様に「数学的帰納法」を用いて証明するこ とができる——各自で試みよ!!

#### -「導関数」と「整式の除法」-

整式 f(x) が  $(x-lpha)^2$  で割りきれるための必要十分条件は

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

である.

解 説 f(x) を  $(x-\alpha)^2$  で割ったときの余りは「1次以下」であるから、

商を Q(x) とすれば

$$f(x) = \underbrace{(x-\alpha)^2 Q(x) + \underbrace{\alpha(x-\alpha) + b}_{1 \text{ 次式}} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \boxed{1}$$

とおくことができ、f(x) が  $(x-\alpha)^2$  で割りきれるための必要十分条件は

である.

$$f'(x) = 2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2Q'(x) + a$$
 ......

③で「x=α」とおくと

$$f(\alpha) = b, \quad f'(\alpha) = a$$

よって、f(x) が  $(x-\alpha)^2$  で割りきれるための「必要十分条件」は、②より  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ 

である.

#### らしんばん



#### ■ この定理は

整方程式  $\lceil f(x) = 0 \rceil$  が  $\lceil 重解 \alpha \rceil$  をもつ条件は  $\lceil f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \rceil$  である といいかえてもよい、このことから、接線の問題なども「方程式の重解条件」 としてとらえることができる.

なお、f(x)を「①の形」でおくことに多少の「異和感」があるかもしれない. もちろん

$$f(x) = (x-\alpha)^2 Q(x) + ax + b$$

とおいても本文とほぼ同じ方法で「 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ 」を導くこともできるが、こ こでは、まず「この形」におくことに慣れてもらいたい、そのことの「ありが たさ」は**発展問題 3 (p.** 225以下)であらためて説明する.



→ この定理の証明のポイントは「f(x)」を「①の形」で表すことである。

ちなみに「整式 f(x)」を  $(x-\alpha)^2$  で割るときの余りは

$$f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

である.



整式  $f(x) = x^n + ax^2 + b$  が  $(x-1)^2$  で割りきれるように a, b の値を 定めよ、ただしれは正の整数とする.

「導関数と整式の除法」より

$$\overline{f(1)} = 1 + a + b = 0$$

$$f'(1) = n + 2a = 0$$

$$\therefore a = -\frac{n}{2}, \quad b = -a - 1 = \frac{n}{2} - 1$$

#### らしんばん



➡ マジメに「割り算」をする方法も知っていなければならない─── 「組立 **除法**| を2回用いればよい——f(x) を [x-1] で2回割る!!

[n≥3] とすれば

		t		n-	2 個	$\neg \neg$			
1_	1	0	0		••••	a	0	b	
	l	1	1		1	1	a+1	<u>a+1</u>	
1_	1	1	1		1	a+1	a+1	a+b+1=0 (余り)	
	•					n-2			
-	1	2	3			a+n-1	2a+n=0 (余り)		

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \begin{cases} a+b+1=0 \\ 2a+n=0 \end{cases} & \therefore \quad a=-\frac{n}{2}, \quad b=\frac{n}{2}-1 \quad \cdots \cdots (*) \end{cases} \\ \text{となる.} \\ \text{特に } \lceil n=2 \rfloor \text{ のときは} \\ f(x)=x^2+ax^2+b=(a+1)x^2+b \\ \text{これが} \\ k(x-1)^2=kx^2-2kx+k \quad \cdots (**) \end{cases} \\ \text{を割れるから } \lceil \text{係数比較} \rfloor \text{ により} \\ k=a+1, \quad -2k=0, \quad k=b \\ \vdots \quad a=-1, \quad b=0 \quad \longleftarrow \quad (*) \text{ に含まれる} \\ \text{また } \lceil n=1 \rfloor \text{ のときは} \\ f(x)=x+ax^2+b=ax^2+x+b \\ \text{これを } (**) \text{ と比較すると} \\ k=a, \quad -2k=1, \quad k=b \end{cases}$$

 $\therefore a=b=-\frac{1}{2} \longleftarrow \text{ これも(*)に含まれる}$ 

となり、結局(\*)となって同じ結果となるが相当「メンドウ」である.

----ここは「導関数」の威力を利用させてもらう方がよい.



## 第2節

## 微分法とその応用



第1節で定義した「微分係数」、「導関数」を利用して「関数の具体的な姿」を確認するのがここでの主な目的である。

次の手順で解説する.

- (i) 接線——「接線の傾き」が「微分係数」で与えられることは前節で説明した。
- (ii) 「関数の増減」と「極値」、「グラフ」 「f'(x)」の符号から「関数の増減」がわかり、その「符号変化」を調べることにより関数 f(x) の「極大値」、または「極小値」を求めることができる。その上で「グラフ」を描く。このことにより関数 f(x) の増減の状況を「視覚的に」にとらえることができる。
- (iii) 「最大・最小」,「方程式・不等式への応用」

### 1 接線の方程式

「接線の傾き」と「微分係数」については p. 190で述べたが、このことから曲線

[y=f(x)] 上の点  $A(\alpha, f(\alpha))$  における「接線の方程式」を求めることができる.

接線の方程式

曲線 y=f(x) 上の点  $A(\alpha, f(\alpha))$  における接線の方程式は  $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ 

で与えられる.

解 説  $\triangle A(\alpha, f(\alpha))$  を通り、傾きが「 $f'(\alpha)$ 」の直線であるから、これは当然のことである。

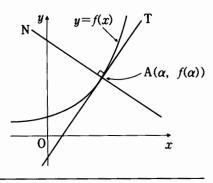
また、 点 A を通り、 接線 AT に垂 直な直線 AN を、曲線 y=f(x) の点 A における 「法線」という.

その方程式は  $[f'(\alpha) \neq 0]$  のときは

$$y-f(\alpha)=-\frac{1}{f'(\alpha)}(x-\alpha)$$

で与えられる.

#### らしんばん





#### ▋ 「接線」と「重解」について──

直線

$$y=mx+n$$
 .....(\*)

が、曲線

$$y=f(x)$$
 ..... (\*\*)

に、この曲線上の点  $A(\alpha, f(\alpha))$  で接する条件は次の(i), (ii)でまとめられる.

- (i)  $f(\alpha) = m\alpha + n$  ← y 座標が一致!!
- (ii) f'(α)=m ←── 傾きが等しい!!

これらを書きかえると

$$\begin{cases} f(\alpha) - (m\alpha + n) = 0 \\ f'(\alpha) - m = 0 \end{cases}$$

であるから

$$f(x)-(mx+n)=F(x)$$

とおくと上に述べた(i), (ii)は

$$F(\alpha)=0$$
,  $h > F'(\alpha)=0$ 

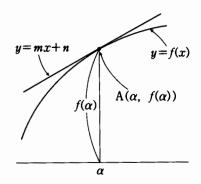
に他ならない――「導関数と整式の

除法(p. 196, 197) | によると, これは

F(x)、すなわち f(x) が整式ならば

F(x) が  $(x-\alpha)^2$  で割りきれる

ということである. 次のようにまとめておく.



#### -「接線」と「重解」-

整関数  $\lceil y = f(x) \rfloor$  と、直線  $\lceil y = mx + n \rfloor$  とが、点  $A(\alpha, f(\alpha))$  で接 するための必要十分条件は

$$f(x)-(mx+n)=F(x)$$

とおくとき.

方程式「F(x)=0」が「 $x=\alpha$ 」を重解としてもつ ことである.

例題 6 ~~~

曲線  $y=8x^3+5$  上の点  $P\left(\frac{1}{2}, 6\right)$  における接線の方程式を求めよ、また、この接線がふたたびこの曲線と交わる点 Q の座標を求めよ、

#### 解 説 y=f(x)

$$=8x^3+5 \quad \cdots \qquad (1)$$

$$f'(x) = 24x^2$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 6$$

よって、点Pにおける接線の方程 式は

$$y-6=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

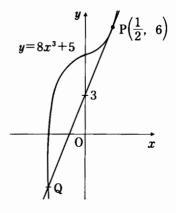
$$\therefore y = 6x + 3 \cdots 2$$

そこで、①と②を連立させて点 Q の座標を求める.

$$8x^3 + 5 = 6x + 3$$

$$3x^3-6x+2=0$$

$$\therefore 4x^3 - 3x + 1 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$



「③は $x=\frac{1}{2}$ を重解としてもつ」から、左辺は $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ で割れる.そこで他の解(点Qのx座標)を $\alpha$ とすると、(3の左辺は

 $4x^3-3x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-\alpha)$  ← 右辺の  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$  がポイント!! この両辺の定数項を比較すると

$$1=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-\alpha)\qquad \therefore \quad \alpha=-1$$

となり、接点以外の交点 Q の座標は

$$Q(-1, -3)$$

#### らしんばん

### bonun

🎝 「3次方程式」の「解と係数の関係」を用いる――

方程式3の解は $\lceil \frac{1}{2} \rceil$ , $\lceil \frac{1}{2} \rceil$ ,そしてもう1つの解を $\lceil \alpha \rfloor$ とおくと

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = -1$$

とやってもよい.



**」 最初から接線の方程式を「y=mx+n」とおく───** 

y = mx + n

を①と連立すると

$$8x^3 + 5 = mx + n$$

$$8x^3+5=mx+n$$
 :  $8x^3-mx+5-n=0$ 

これが $\lceil \frac{1}{2} (重解)_{\parallel}$ と $\lceil \alpha 
floor$ を解にもつから左辺は

$$8x^3 - mx + 5 - n = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x - \alpha)$$

この場合も右辺を展開して「係数比較」してもよいが,「3次方程式」の「解 と係数の関係」を用いれば

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha = 0}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \alpha + \alpha \cdot \frac{1}{2} = -\frac{m}{8}} \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha = -\frac{5 - n}{8}$$

$$\stackrel{\alpha = -1}{m = 6} \\
n = 3$$

となる――これはよく用いられる方法である.

lacksquare いずれにしても $\lceil rac{1}{2}$ が重解であるceil ことを利用すると式変形が簡単にいく 典型的な例である.どの方法が最も簡単にいくかは何をねらっての出題かで 違ってくるのでどの方法もマスターしておかなければならない―――このよう な扱い方は「積分」で「面積を求める問題との融合問題」として出題される場 合が多い―――第5章で実例を用いて説明する.

- (1) 曲線  $y=x^4+ax+b$ 上の x座標が 1 である点における接線の方程 式が、y=xとなるように、a、bの値を求めよ.
- (2) 曲線  $y=x^3-5x+16$  の接線のうち、原点を通るものと、傾きが -2 のものを求めよ.

解 説 
$$(1)$$
  $y=x^4+ax+b$ ,  $y=x$ 

を連立すると

$$x^4 + ax + b = x$$

である. このことから

$$f(x) = x^4 + ax + b - x = x^4 + (a-1)x + b$$

とするとき  $\lceil f(x) = 0$  が、x=1 を重解としてもてばよい」から

$$f'(x) = 4x^3 + (a-1)$$

を求めておいて、「接線と重解(p. 200) | より

$$\begin{array}{c}
f(1) = 1 + (a-1) + b = 0 \\
f'(1) = 4 + (a-1) = 0
\end{array}
\qquad \therefore \begin{cases}
a = -3 \\
b = 3
\end{cases}$$

(2)  $f(x) = x^3 - 5x + 16$ 

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

であるから曲線上の点  $(a, a^3-5a+16)$  における [y=f(x)] の接線の方程 式は

$$y-(a^3-5a+16)=(3a^2-5)(x-a)$$
 …………①  
これが「原点を通る」から、「 $x=0$ ,  $y=0$  を代入! して

$$-(a^3-5a+16)=(3a^2-5)\cdot(-a)$$

$$\therefore a^3 - 8 = 0 \qquad \therefore a = 2$$

ゆえに、求める接線の方程式は、これを①に入れて

$$y=7x$$

次に、接線の傾きが-2となるときの接点のx座標は、

$$3a^2-5=-2$$
  $\therefore a^2=1$   $\therefore a=\pm 1$ 

よって接点は(1, 12)または(-1, 20)で、このとき接線の方程式はそ れぞれ

$$y-12=-2(x-1)$$
  $\therefore y=-2x+14$   
 $y-20=-2(x+1)$   $\therefore y=-2x+18$ 

#### らしんばん

ᡨ (1)は,なるべく本文に述べた扱い方に慣れてもらいたいが,「接点の 🗴座 標」と「接線の傾き」に注目して、心にグラフを描きながら「ソボク」にやる ٢

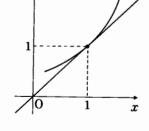
$$y=x^4+ax+b$$
  $\therefore$   $y'=4x^3+a$   
 $y=x$   $\therefore$   $y'=1$ 

接点の座標: (1.1) ----

$$1^4 + a \cdot 1 + b = 1 \qquad \therefore \quad a + b = 0$$

接線の傾き: -1 -----

 $4 \cdot 1^3 + a = 1$   $\therefore a = -3, b = 3$ となる――これらが同じ内容であることは すでに述べた(p. 200).



🚵 曲線外の点 A(α, β) を通る接線の方程式-----

本間(2)の前半はこのタイプの典型的なものである.

まず、曲線「y=f(x)」上の点 P(t, f(t)) を定め、この点における接線の方程 式を作ると

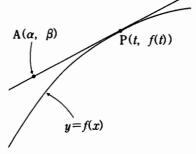
$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
 ……(\*)  
これが点  $A(\alpha, \beta)$  を通るから(\*)に

$$x=\alpha, y=\beta$$

を代入すると

$$\beta - f(t) = f'(t) (\alpha - t)$$

となるが、これは「t に関する方程式」 である――解いて t の値を求め(\*)に 代入すると接線の方程式が決定する.





「原点通過」が指定されているもの  $\longrightarrow$  y=mx

「傾き -2」 が指定されているもの  $\longrightarrow$  y=-2x+n

とおいて、それぞれ「y=f(x)」と連立すれば前問と全く同様の方法で解決される.

2	#	

$$y=x^3$$
 .....

 y=x³+4
 ……

 の共通接線の方程式を求めよ。

#### 解 章

(1):  $y=x^3$ ,  $y'=3x^2$ 

②:  $y=x^3+4$ ,  $y'=3x^2$ 

これより、①上の点  $A(\alpha, \alpha^3)$  における接線の方程式は

$$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)$$

$$\therefore y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$
 ·········③

同様にして②上の点  $B(\beta, \beta^3+4)$ における接線の方程式は

$$y-(\beta^3+4)=3\beta^2(x-\beta)$$

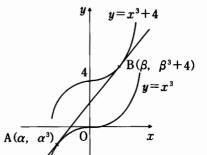
③と④が一致するならば,「傾き」

と「y切片」を比較して

$$\begin{cases} 3\alpha^2 = 3\beta^2 \\ -2\alpha^3 = -2\beta^3 + 4 \end{cases}$$

cnsepset can a, b a

$$\alpha = -1$$
,  $\beta = 1$ 



これを③または④に代入して、求める共通接線の方程式はy=3x+2

#### らしんばん

これから、「m=3」、「n=2」を求めてもよい――この辺は「どのようにでも」扱えるようになっておきたい。

### 2 関数の増減と極値

 $\begin{cases} f(\alpha) = 0 & \begin{cases} g(\beta) = 0 \\ f'(\alpha) = 0, \end{cases} & \begin{cases} g'(\beta) = 0 \end{cases} \end{cases}$ 

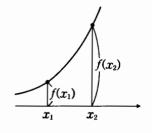
#### (1) 関数の増減

ある区間で、「変数xの値が増加するにつれて、関数f(x)の値が増加(減少)する」とき、関数f(x)はその区間において「単調増加(減少)」であると

いう. すなわち, ある区間内の任意の 2 実数  $x_1$ ,  $x_2$   $(x_1 < x_2)$  に対して, つねに

 $f(x_1) < f(x_2)$  ならば f(x) は単調増加  $f(x_1) > f(x_2)$  ならば f(x) は単調減少である.

このことは「導関数(f'(x))」を用いて次のように表される。



#### 「関数の増減」

xのある区間で、つねに

- (1) 「f'(x) > 0」ならば、f(x) はその区間において「単調増加」
- (2) 「f'(x) < 0」ならば、f(x) はその区間において「単調減少」
- (3) 「f'(x)=0」ならば、f(x) はその区間において「定数」である。

解 説 この定理は「基礎解析」の範囲では証明できない.

今の段階では、「各点で接線の傾きがつねに正なのだから、その区間でf(x) が単調に増加するのはアタリマエ!!」とナットクできれば十分である。

この定理の主張するところは、「導関数は、その符号を通してもとの関数の増減を規定する」ということである。

#### らしんばん

→ したがって「f'(x)の符号」を調べれば「関数の増減」の状態がわかる ──「関数のグラフの概形」を描く場合の重要な手がかりになる。

→ 上の定理では「区間」ということばを用いたが「区間」を表す記号について説明しておく。

 $\begin{cases} a \le x \le b \ e \ (a, b) \ e \ e \ e \end{cases}$  で表す―――「閉区間」という.

また

 $a < x \le b$  などは (a, b] で表す.

例題



次の関数の増減を調べ、そのグラフの概形を描け、

(1)  $y=x^3-3x+1$ 

(2)  $y=x^4-4x^3+4x^2+1$ 

解 説 ▮ いままでなら,これらのグラフには手がでなかった.

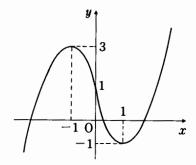
ここで「f'(x) の符号」から「関数の増減」を調べ、「3次関数」と「4次

関数」の典型的なグラフの概形を見ておくことにする.

#### (1) $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

であるから、この関数の増減の様子を下の表(これを「増減表」という)にまとめることができる。このことから右図のようなグラフの概形が得られる。

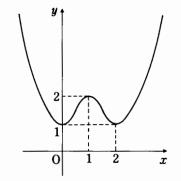
x		-1		1	
<b>y</b> '	+	0	_	0	+
y	/	3	\	-1	/



#### (2) $y'=4x^3-12x^2+8x$ = 4x(x-1)(x-2)

で,この関数の「増減表」は下のようになり、右図のようなグラフの概形が得られる.

x		0		1		2	
<b>y</b> '	_	0	+	0	_	0	+
y	/	1	1	2	/	1	7



### らしんばん



「f'(x) の符号」を調べるには

 $y'=f'(x) \quad (f(x) \ \text{cttv!!})$ 

のグラフの概形を描くとよい.

たとえば(2)では、 $\lceil 3 次関数のグラフの概形((1)で示した)」に注目しながら、$ 

$$y'=4x(x-1)(x-2)$$

とおくと、「x=0, 1, 2 で y'=0」となり、「符号の変化」は右のグラフで確認することができる。この場合の概形については、くわしいことは必要ではなく、「x軸との上下関係のみがわかればよい」から「y'=0」をみたすxの値を求めるのが1つの「xヤス」となる。

→ 本問の(1), (2)で「3次関数のグラフ」,「4次関数のグラフ」の基本的な形をシッカリとながめておいてもらいたい───「5次」「6次」と次数が増すにつれて「山」,「谷」がそれぞれ1つずつ増えていくことが容易に想像される。

#### (2) 「極大 | と「極小 | について

x が増加しながら「x=a」を通過するとき、関数 f(x) が「x=a」を境として、

「単調増加(減少)」から「単調減少(増加)」にかわるならば、関数 f(x) は「x=a」で「極大(極小)」であるといい、「点 (a,f(a))」を「極大点(極小点)」、このときの「関数値 f(a)」を「極大値(極小値)」という。

また、極大値と極小値をあわせて「極値」という.

例題 9 (p. 206)で説明すると

- (1): [x=-1] で [極大値 3], [x=1] で [極小値 -1] をとる
- (2): 「x=1」 で「極大値 2」,「x=0, 2」で「極小値 1」 をとる ということになる.

早いハナシが,

「極大点」とは――山の頂上

「極小点」とは―――谷底

のことであり、谷底の方が頂上よりも高い場合があるように極小値の方が極大値より大きいときもありうる――あとで出てくる「最大値」、「最小値」と混同しないように注意しなければならない。

以上の定義と「関数の増減(p. 206) | とから、次の定理が得られる。

─「*f′(x*) の符号変化」と「極大・極小」<del>-</del>

関数 f(x) で、x が増加しながら「x=a」を通過するとき

- (1) f'(x) の符号が「正」から「負」にかわるとき
  - ----→ f(x) は「x=a」で極大
- (2) f'(x) の符号が「負」から「正」にかわるとき

----→ f(x) は「x=a」で極小

である.

一般に

整関数 f(x) が「x=a」で極値をとるときは「f'(a)=0」である. しかし、逆に

「f'(a) = 0」であっても、「f(a) が極値であるとは限らない」 ことには注意しなければならない。

=|x|(x+1)

極小値という!!

たとえば

 $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ 

の場合は、 $\lceil f'(0) = 0 \rfloor$  となるが

y = f(x)

のグラフは右図のようになり,

「f(0)」は極値ではない.

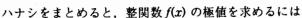
それは、 $\lceil x=0 \mid$  の前後で f'(x)

の符号を調べると

「正 | → 「負 | あるいは

[鲁] → [正]

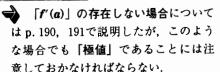
の変化がないからである.



- (i) f'(x) = 0 の実数解を求める
- (ii) この実数解の前後で f'(x) の符号変化があるかどうか調べる ということになる。

-----具体的には「増減表(p. 207)」を正しく書くことがポイントになる.

### らしんばん



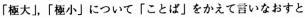
すなわち、関数

$$y=|x|(x+1)$$

は [x=0] で「極小値 0 をとる」とい う——f(x)は「x=0」で「減少」か

ら「増加」にかわり最初に説明した

「極小値の条件(p. 208) | をみたしている.

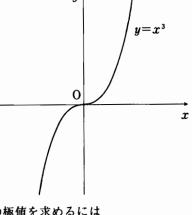


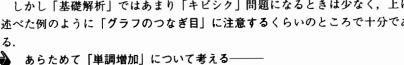
極大: その近くで最も関数値の大きいところ

極小: その近くで最も関数値の小さいところ

ということでもある.

しかし「基礎解析」ではあまり「キビシク」問題になるときは少なく,上に 述べた例のように「グラフのつなぎ目」に注意するくらいのところで十分であ





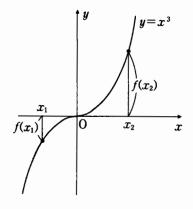


本文に引用した関数

$$f(x) = x^3 \quad (=y) \quad \cdots \cdots (*)$$
  
$$f'(x) = 3x^2 \quad (\ge 0)$$

で説明しよう. 「関数の増減(p. 206)」 では

f'(x)>0 — 単調増加を「各点における接線の傾き」から説明した。すなわち(\*)は「 $x \neq 0$ 」のとき「f'(x)>0」で、f(x)は「単調増加」である。しかしこの関数は「x=0」のときは(このときだけ)「f'(0)=0」とな



る. このようなxの値における増減、あるいはこのようなxの値を含む区間における増減についてはどのように了解すればよいだろうか―――「単調増加」の基本の考え方にもどって説明しよう.

ある区間において、関数f(x)が「単調増加」であるということは、この区間における任意の実数「 $x_1 < x_2$ 」に対してつねに

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1) > 0$$

$$\begin{pmatrix} x_2 > x_1 & \longrightarrow & x_2 - x_1 > 0, \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\$$

 $f(x_2) > f(x_1)$  ← 「単調増加」の条件をみたしている!! すなわち、(\*)は「全区間(全実数)」で「単調増加」であることがわかる.

簡単にいうと、一瞬(?)  $\lceil f'(x) = 0 \rfloor$  となるxの値があっても、その前後で  $\lceil f'(x) > 0 \rfloor$  ならば「単調増加」である.

このように「単調増加」というコトバは、基本的には

ある区間の2つのxの値に対する関数値の大小比較

を問題にしており、厳密にいうと「x=0 における関数の増減」などという表現そのものが実は「ナンセンス」ということになる―― グラフ(接線の傾き)を見ての「目見当」とは少しハナシが違ってくるから注意しなければならない.

このことから

f'(x)>0 → 単調増加(p. 206)

であるが、「単調増加」であるための条件としては

単調増加  $\longrightarrow$   $f'(x) \ge 0$ 

としなければならないことがわかる.

関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a+2)x + 1$$

について、次の問いに答えよ.

- (1) f(x) が単調増加となるための条件を求めよ.
- (2) f(x) が極値をもつための条件を求めよ.

解 説 (1) 
$$f'(x) = x^2 + 2ax + (a+2)$$

「前ページの説明」から f(x) が「単調増加」であるためには,任意のxに 対して、 $\lceil f'(x) \ge 0 \rceil$  であることが「必要かつ十分な条件」である.

ゆえに、f'(x)=0 の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a+2) = (a+1)(a-2) \le 0$$

 $\therefore$   $-1 \leq a \leq 2$  .....

(2)  $\lceil f(x)$  が極値をもつ」ためには、 $\lceil f'(x) \rceil$  に符号の変化」があることで、 そのための条件は「y=f'(x) のグラフがx軸と異なる2点で交わる」こと. したがって

$$\frac{D}{4} = (a+1)(a-2) > 0$$
  $\therefore$   $a < -1$ ,  $2 < a$ 

### らしんばん



📦 (1), (2)とも「f'(x)の符号」に関する問題で,一般に「2次関数」  $g(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ 

の「符号」は

(i) D<0  $\begin{cases} a>0: g(x) はつねに「正」 \\ a<0: g(x) はつねに「負」$ 

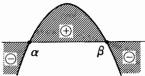
(ii) D=0:  $g(x)=a(x-\alpha)^2$ 

 $\longrightarrow x = \alpha$  で「0」、その他のx の値に対してはa と同符号!!

(iii) D>0:  $g(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$   $(\alpha < \beta)$ 

a > 0 のとき:

a < 0 のとき:



で、g(x) は  $[x=\alpha]$ 、 $[x=\beta]$  の前後で「符号」をかえる.

V).

(2)では「 $D \ge 0$  ( $a \le -1$ ,  $2 \le a$ )」とやらないように注意しなければならな

 $\lceil D \ge 0 \rfloor$  は $\lceil f'(x) = 0 \rfloor$  が実数解をもつ条件だが、たとえば $\lceil a > 0 \rfloor$  とすると 「重解 (D=0)」ならば f'(x) は「つねに正または 0」で「負」の部分がなく、f'(x) に「符号の変化」がない、したがって「D=0」のときは極値は存在しない -----[a<0] のときも [D=0] ならば、f'(x) は [D=0] であれば、[D=0] となり、 やはり極値は存在しない.

関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

が、x=2、および、x=4 で極値をとるという. 係数 a, b の値を定め、 かつ極大値と極小値の差を求めよ.

解 説 
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

 $2 \ge 4 \text{ は } f'(x) = 0$  の解であるから、 [2次方程式] の [解と係数の関係]より

$$2+4=-\frac{2}{3}a$$
,  $2\times 4=\frac{b}{3}$  :  $a=-9$ ,

$$\therefore \quad a = -9, \qquad b = 24$$

 $\boldsymbol{x}$ 

f'(x)+

f(x)

2

0

極大

0

極小

+

このとき

$$f'(x) = 3(x-2)(x-4)$$

これより右の増減表が得られるから

$$x=2$$
 で極大, $x=4$  で極小

となる。一方

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + c$$

であるから

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + c = 20 + c$$

$$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + c = 16 + c$$

ゆえに求めるものは

$$f(2)-f(4) = (20+c)-(16+c)=4$$

#### らしんばん

🦥 「極大,極小の議論」には必ず「増減表」を添えなければならない」と思っ た方がよい--- 「<math>f'(x) の符号変化」も含めて「関数の増減」を最も簡明に説 明できるからである.

# ③ 「最大值·最小值」,他

## (1) 最大値と最小値

まず、最初に「最大値」と「最小値」をキチンと定義しておかなければならない。

区間 I における関数 f(x) の最大値が M であるということは、次の 2 つの条件、すなわち

- (i) 区間 I のすべての x について,  $f(x) \leq M$
- (ii) 区間 I の少なくとも1つの a について、f(a)=M

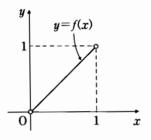
で定義される.

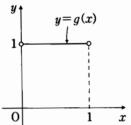
「区間 I における最小値が m である」ことも同様に定義される.

たとえば、関数

$$f(x) = x$$
 (0< $x$ <1) ……①は、最大値も、最小値もとらないが、関数

①で x を限りなく大きくする(1 に 近づける)と、関数値は限りなく1 に 近づいて大きくなるが、決して1 に なることはない。したがって、①では 最大値がない。最小値についても考え 方は同様である。





- ②のときは、日常的には、最大とが最小などといわないが、この場合は(i)、(ii)の条件がみたされるので「1」が最大値である。また同様に最小値の条件もみたされるので、「1」は同時に最小値でもある。
- 一般に、区間 I における関数 f(x) の最大値、最小値は、基本的には次の手順にしたがって求める。
  - (i) 極値をすべて求める.
  - (ii) 区間 I の端点(I に属するもの)における関数値をすべて求める.
  - (iii) その上で最大のものを「最大値」,最小のものを「最小値」とする.
- この他に区間 I に属さない端点、たとえば  $\lceil 0 \le x < 1$  における x=1 での関

数値」も調べこれらを比較して、最大値があるかないか、あるとすればどれかを 調べなければならないこともある。

例題 12 ~

実数 x、u が条件

$$x \ge 0$$
,  $y \ge 0$ ,  $y + x^2 - x = 6$ 

をみたすとき、xy-5x+8の最大値と最小値を求めよ.

#### 解 説 条件式より

$$\therefore$$
  $(x+2)(x-3) \leq 0$ 

 $x \ge 0$  を考えると、xの範囲は

$$0 \le x \le 3$$
 ······①

このとき

$$xy-5x+8=x(-x^2+x+6)-5x+8$$
  
=  $-x^3+x^2+x+8$  (=  $f(x)$  とおく) .....②

であるから、「①の範囲」で「②の最大、最小」を調べればよい.

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1 = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

この範囲で増減表を示すと右のように なるから,極値と端点の値を比較して

$$\begin{cases} x=1, y=6 \text{ のとき } 最大値 9 \\ x=3, y=0 \text{ のとき } 最小値 -7 \end{cases}$$

x	0		1		3
f'(x)		+	0	_	
f(x)	8	/	9	\	-7

### らしんばん

→ 変数をおきかえたり、消去したりするときは、いつでも「変域の変化」に 注意しなければならない──消えた文字が変数として生きかえるために、 残った文字に制限が加えられるときがある。

本問を例に説明すれば、最初の「 $x \ge 0$ ,  $y \ge 0$ 」は「タダ」の条件ではなくて、この y は

$$y = -x^2 + x + 6$$

をみたしていることから、 $[y \ge 0$  の条件のもとでの y が存在するために、さらにx に制限が加わる」ことになる.

# 例題 13 ~~~~

半径2の円に内接する二等辺三角形の中で,面積が最大となるもの

解 説 | 円の中心を 0. 内接す る二等辺三角形を △ABC (AB=AC), BC の中点を M とし、 $\lceil OM = x \rceil$  とす ると、〈図 1〉 の場合は明らかに「x=0 | のときに △ABC の面積は最大 となるから、〈図2〉の場合について のみ考えればよい、すなわち

$$0 \le x < 2$$

の範囲のxの値に対して

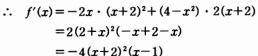
$$BM = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$$

である.

$$\therefore \triangle ABC = BM \cdot AM$$
$$= \sqrt{4 - x^2} (x + 2)$$

そこで、√ を除いて考えるために 2乗して、これをf(x)とおくと

$$f(x) = (\triangle ABC)^2$$
  
=  $(4-x^2)(x+2)^2$ 



 $\lceil 0 < x < 2 \rceil$  における f(x) の増減表 から $\sqrt{f(x)}$ , すなわち  $\triangle$ ABC の面積は

$$x = OM = 1$$

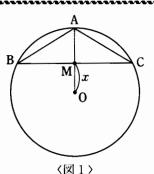
のとき最大で、このとき

$$BM = \sqrt{4-1^2} = \sqrt{3}$$
,  $AM = AO + OM = 2+1=3$   
このとき

$$AB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$
 ∴  $BC = AB$  ゆえに、最大となるのは  $\triangle ABC$  が正三角形のときで、最大値は

 $BM \cdot AM = 3\sqrt{3}$ 

# らしんばん



〈図2〉

小を考えて、「整関数の問題」として扱う典型的な例である。「距離」などのと きも、このようにする場合がある.

 $\blacksquare$   $\lceil \mathsf{OM} = x \mid \mathsf{E}$  とするかわりに  $\lceil \mathsf{BM} = x \mid \mathsf{E}$  とおくと

 $OM = \sqrt{4-x^2}$ 

であるから求める面積は

$$\triangle ABC = BM \cdot AM = x(2 + \sqrt{4 - x^2})$$

となり、「基礎解析」の範囲では処理できなくなる.

このように「図形の最大・最小問題 | では、「何を変数にとるか | という選択 がきわめて重要な意味をもつことになる.

f'(x) を求めるについては、「積の導関数(p. 194)」を用いたことに注目!! このようにやると「展開の必要がない」ので、「因数分解も簡単にいく」こと が多い。

# (2) 方程式・不等式への応用

#### (i) 方程式への応用

「微分の応用」として、「方程式の実 数解の存在」や、「その個数」、「解の 存在する範囲しなどを調べることがで きる.

その基本的な考え方は、方程式

$$f(x) = 0$$
 .....①

の実数解が、この左辺を y とおいて得

られる関数

$$y=f(x)$$

のグラフとx軸との交点のx座標の値として求められることに注目する.

しかし、①を

$$q(x) = h(x)$$

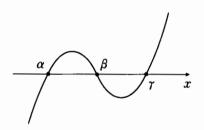
の形に変形し、両辺をそれぞれ y とおいて得られる 2 つの関数

$$y=g(x)$$
 .....

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$
 ......

のグラフの交点の x 座標に注目すると都合のよい場合がある.

特に、方程式①を、「②または③の一方」が「1次関数」、でき得ることな ら「定数関数」になるように変形するとハナシはずっと簡単になる。以下、 実例で説明する.



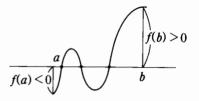
■ 「連続関数」の基本的性質の1つとして、「方程式の実数解の存在」を保証 する定理がある。

### 中間値の定理-

関数 f(x) が、閉区間 [a, b] で連続で、 $f(a) \cdot f(b) < 0$  ならば、方程式 [f(x)=0] は  $a \ge b$  との間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

グラフの概形を描いてみれば,このハ ナシはほとんど「あきらか」である.

特に、関数「y = f(x)」が、閉区間 [a, b]で単調増加(あるいは減少)ならば、方程式「f(x) = 0」は、この間に「ただ 1 つの実数解」をもつ――説明するまでもない。



# 例題 14

Ո

方程式

$$x^3 - 3x^2 - 9x - c = 0$$

が,異なる3個の実数解をもつように定数 c の値の範囲を求めよ.

#### 解説

与えられた方程式は

$$x^3 - 3x^2 - 9x = c$$

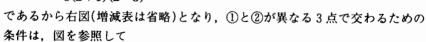
と同値であるから, 実数解の個数は

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 - 9x & \cdots \\ y = c & \cdots \end{aligned}$$

の交点の個数と一致する.

①のグラフは

$$y'=3x^2-6x-9$$
  
= 3(x+1)(x-3)



$$-27 < c < 5$$

# らしんばん

→ 上の例では、与えられた「3次方程式」が「異なる3つの実数解」をもつときのcの範囲であるが、ついでに「その3つの実数解のとりうる範囲」についても簡単にわかる──直線「y=c」を上、下に動かしてみよ。

-27 < c < 0 のとき : 正の解 2 個,負の解 1 個 c = 0 のとき : 0 の他に,正の解 1 個,負の解 1 個 0 < c < 5 のとき : 正の解 1 個,負の解 2 個

なお

(c=-27 のとき : x=3 (重解) の他に負の解 1 個c=5 のとき : x=-1 (重解)の他に正の解 1 個

(このとき, 重解以外の解は, 図題 6 (p. 201)な どで説明した方法により簡単に求められる.

 $\begin{cases} c<-27 \\ c>5 \end{cases}$  のとき : グラフより実数解は1個

(このときの解の範囲も、グラフを) 利用して簡単に求められる.

本問は c が定数項にはいっているために、「c について解く」ことによって、 上で説明したようにうまくいったが、cが定数項以外の項の係数にまじり込んで いるとき あるいはそれらに、たとえば c の他に c² などがはいっているときな どは、上のようにスッキリとはいかない、そこで本問を素材にして、そのまま やる方法を説明しておく.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - c = 0$$

が異なる3つの実数解をもつための必要十分条件は

- f'(x) = 0 が異なる 2 つの実数解  $\alpha$ ,  $\beta(\alpha < \beta)$ をもつ
- (ii) 極大値と極小値が異符号であること $------f(\alpha)\cdot f(B)<0$

((i)は「<math>y=f(x)」が「極値」をもつ条件!!, (ii)は「中間値の定理」!!)

を同時にみたすことである(y=f(x))のグラフの概形を考えてみる).

このハナシを用いると本問は

$$f(-1) \cdot f(3) = (5-c)(-27-c) = (c-5)(c+27) < 0$$

 $\therefore$  -27<c<5

次の例題で確認しておくとよい.

3次曲線

$$y=x^3-3x$$

に異なる3本の接線がひけるような点Pの存在範囲を図示せよ.

曲線上の点  $Q(\alpha, \alpha^3-3\alpha)$  における接線の方程式は

 $y' = 3x^2 - 3$ 

$$y-(\alpha^3-3\alpha)=(3\alpha^2-3)(x-\alpha)$$

これが点  $P(x_1, y_1)$  を通るとすれば、この点は①をみたすから代入して  $\leftarrow$  曲線外の点  $A(\alpha, \beta)$  からの接線(p.203, 204)

 $y_1=3(\alpha^2-1)x_1-2\alpha^3$  $\alpha$  について整理すると

$$2\alpha^3 - 3x_1\alpha^2 + y_1 + 3x_1 = 0$$
 .....(2)

これは $\alpha$ についての方程式で、これが「異なる3つの実数解」をもつとき、それぞれの $\alpha$ に対して接線の方程式①が決まることになるから、求める条件は

# $\alpha$ の方程式②が、異なる3つの 実数解をもつこと

である. ②の左辺を f(α) とおくと

$$f'(\alpha) = 6\alpha^2 - 6x_1\alpha$$
$$= 6\alpha(\alpha - x_1)$$

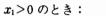
そこで条件を整理すると

- (i) 極値をもつ  $\longrightarrow x_1 \neq 0$
- (ii) 極大値と極小値が異符号 ——f(0)・f(x<sub>1</sub>)

$$x_1^3 - 3x_1 < y_1 < -3x_1$$
  
または  $-3x_1 < y_1 < x_1^3 - 3x_1$ 

で、 $x_1$ 、 $y_1$ をx、yとおくと点 P(x, y)の存在範囲は図の斜線部分(境界は除く)である。

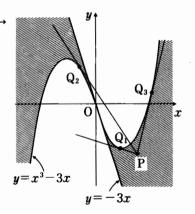
# らしんばん



α		0		$x_1$	
$f'(\alpha)$	+	0	_	0	+
$f(\alpha)$	7	極大	`	極小	/

#### $x_1 < 0$ のとき:

α		$x_1$		0	
$f'(\alpha)$	+	0	_	0	+
$f(\alpha)$	1	極大	>	極小	1



→ 本問は「見かけは接線の問題」であるが―― 例題 7(2)(p. 202, 203, 204)を参照!!──内容は「3次方程式の実数解の個数を調べる問題」である. したがって、「①までのハナシ(接線)」と「②以後のハナシ(方程式)」を混同しないことがポイントである.

#### (ii) 不等式への応用

2つの実数 A と B との大小関係については

$$A > B \iff A - B > 0$$

が成り立つ、したがって不等式の証明の基本は「差をとってその符号を調べ る」ことである.以下、実例で証明する.

m. n は m > n になる正の整数で、x > 0 とする. このとき、次の不 等式を証明せよ.

$$\frac{x^m-1}{m} \ge \frac{x^n-1}{n}$$

解説 
$$f(x) = \frac{x^m - 1}{m} - \frac{x^n - 1}{n}$$

$$f'(x) = x^{m-1} - x^{n-1} = x^{n-1}(x^{m-n} - 1)$$
 よって、「 $n-1 \ge 0$ 」、「 $m-n > 0$ 」 であることから、右の増減表が得られる.

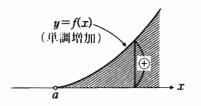
ゆえに、 $\lceil x > 0 \rfloor$  において  $\lceil f(x) \ge 0 \rfloor$ !!

x	0		1	
f'(x)	/	_	0	+
f(x)	/	/	0	/

$$\therefore \frac{x^m-1}{m} \ge \frac{x^n-1}{n}$$
 (等号は、 $[x=1]$  で成立する。)

→ 本問では、与えられた条件「x>0」 で f(x) の最小値が  $\lceil 0 \rceil$  となったが、こ れが「正の値」となる場合もある.

また、与えられたxの範囲でf(x)が 「単調増加(あるいは単調減少)」となる 場合もある. たとえば  $\lceil x > a \rceil$  で  $\lceil f(x) \rceil$ 



を示してやればよい. すなわち

x>0 のとき f(x)>0

がいえる!!

#### ―「たとえば)

nを3以上の自然数とするとき、(n+1)3と n4の大小を比較せよ.

自然数nで表された関数では微分できないので、nをxとおきかえ、まずx<sup>4</sup>

 $\therefore q(x) > 0$ 

と  $(x+1)^3$  の大小関係を調べてみる.

$$f(x) = x^4 - (x+1)^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3(x+1)^2$$
 (=  $g(x)$  とおく)

このままでは f'(x) の符号はわからないから f'(x) を g(x) とおきかえて, g(x) の増減を調べる.

$$g'(x) = 12x^2 - 6(x+1)$$
  
= 6(2x<sup>2</sup>-x-1) = 6(2x+1)(x-1)

ここで「x>3| とすると

$$g'(x)>0$$
  $\longrightarrow$   $g(x)$  は「 $x \ge 3$ 」で単調増加!!  $\}$ 

 $g(3) = 4 \cdot 3^3 - 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 > 0$ 

f(x) = f'(x) > 0

f(x) は「x≥3」で「単調増加」

であることがわかる. ここで

$$f(3) = 3^4 - 4^3 = 81 - 64 = 17 > 0$$

であるから「x≥3」をみたす実数 x の値に対して

$$f(x) = x^4 - (x+1)^3 > 0$$
  $\therefore x^4 > (x+1)^3$ 

$$\therefore x^4 > (x+1)^3$$

ちなみに [n=1, 2] に対しては

$$n^4 < (n+1)^3$$

である.



# 第3節

# 問題解法の研究

# 発展問題 1 一関数の極限

次の ここを埋めよ.

$$f(x) = \frac{2ax^2 - (a-2)x - 1}{ax^2 - (a^2 - 1)x - a}$$
 (a は実数)

- (1) a = のとき,  $\lim_{x \to 1} f(x)$  は存在しない.
- (2)  $a = [] obtained by (2) = \frac{1}{2} cbs.$
- (3) a= のとき、 $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$  は正の数であり、そのとき、 $x=\frac{1}{2}$

 $\lim_{x\to 1} f(x) = \boxed{\qquad} cas.$ 

解 説 まず f(x) を簡単な形に変形しておく.

$$f(x) = \frac{(2x-1)(ax+1)}{(x-a)(ax+1)} = \frac{2x-1}{x-a}$$

(1)  $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{1-a}$ 

これが存在しない条件は、a=1

(2) 
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{2}$$
  $\therefore a = -1$ 

(3) 
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{x - a} = \alpha \ (>0)$$

とおくと, $\lceil x \to \frac{1}{2} \rfloor$  のとき, $\lceil (分子) \to 0 \rfloor$  であるから, $\lceil (分母) \to 0 \rfloor$  でなければならない——— $\lceil (分母) \to 0 \rfloor$  でないとすると  $\alpha = 0$  となり不合理!!

逆にこのとき

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = 2 \ (>0) \ (+\%)$$

# らしんばん



#### 🜓 (3)に注目!!

考え方は「極限値に関する定理(2)(p. 186、187)」と同じだが、この場合は  $\lceil x 
ightarrow rac{1}{2}$ , のとき  $\lceil (分子) 
ightarrow 0 
floor$  であり,このとき, $\lceil \lim f(x) 
floor$  が「正の数」で あるから、これは当然「有限確定値(定数)」である。

したがって「 $(分母) \rightarrow 0$ でなければならない(必要条件)」とおさえるのだが、 とくに「必要性」、「十分性」の論理構成をしっかりとしておかなければならな いことは同様である.

「極限値に関する定理(2)」にならって一般のハナシとしてまとめておこう.

#### -「極限値に関する定理(2)」のついでに--

次のように変形する.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right\}$$

$$= \left\{ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \cdot \left\{ \lim_{x \to a} g(x) \right\} = A \lim_{x \to a} g(x) = 0$$
ここで「A \neq 0」を用いると
$$\lim_{x \to a} g(x) = 0$$
である。

発展問題 2―微分係数,導関数の定義

いつでも正の値をとる関数 f(x) が、任意の実数 x、y に対して、つね

(2) f'(0) = a とするとき,  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  を a で表せ.

解 説 (1) ①は任意の実数値に対して成り立つから、y=0」とおくと  $f(x) = 2f(x) \cdot f(0)$ 

このとき f(x) > 0 であるから、両辺を f(x) で割ると

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

(2) まず「定義にしたがって」 f'(x) を求める.

①から

$$f'(x) = 2f(x) \cdot f'(0) = 2af(x)$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = 2a \qquad \cdots \qquad 3$$

# らしんばん

乱 (1)では、与えられた式が「任意の実数 x、y について成立する.」ことに注 目!!--- y=0 とおくと f(0) が求まる. ←-- 「関数方程式」という.

そしてこれは(2)の f'(0), f'(x) の定義」への誘導になっている.

➡ (2)の②の左辺で、

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \ (=f'(x))$$

は、f(x) の「導関数 f'(x) の定義」そのものであり、右辺の

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} \ (= f'(0))$$

は、f(x) の x=0 における「微分係数 f'(0) の定義」そのものである.

 $\lceil f'(x)$ の存在」が $\lceil f'(0)$ の存在」によって保証されるところに注目したい。

■ ①の右辺の係数「2」を除いて

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

とすると、これは「指数関数」の性質そのものであるから、①で与えられる f(x)も、おそらくそれに類したものであろうという想像はつく、

しかし、③の「微分方程式」を解いてf(x)を決定するのは「基礎解析」の範 囲ではないので、ここでは説明しない――「微積分」でやることになる。

## ・発展問題 3―整式と導関数・

次の条件(i), (ii), (iii)をみたすような整式 f(x) を求めよ.

- (i) f(x) の最高次の係数は1である.
- (ii) f(x) を  $\frac{1}{2}f'(x)$  で割ると、余りは -2(x-1) である.
- (山) f'(x) を x-1 で割ると割りきれて、商は 1 次式である. (やや難)

$$f(1) = f'(1) = 0$$

であることがわかる.

ゆえに, 
$$f(x)$$
 は  $(x-1)^2$  の因数をもち, これと(i)から  $f(x)$  は

$$f(x) = (x-1)^2(x-a)$$
 ← 「導関数と整式の除法(p. 196, 197)」

の形で表せる.

これに条件(ii)を用いると、f(x)は

$$f(x) = (x-1)\left(x - \frac{2a+1}{3}\right)(x-b) - 2(x-1) \qquad \cdots \qquad 2$$

$$\frac{1}{3}f'(x)$$

と表せるから,①,②をにらみあわせて, $\lceil x = rac{2a+1}{3}$  floor とおくと

$$\left(\frac{2a+1}{3}-1\right)^2\left(\frac{2a+1}{3}-a\right)=-2\left(\frac{2a+1}{3}-1\right)$$

$$\therefore -\frac{4}{27}(a-1)^3 = -\frac{4}{3}(a-1)$$

 $(a-1)^3-9(a-1)=(a-1)(a+2)(a-4)=0$  a=1, -2, 4ここで、 $\lceil a=1 \rceil$  のときは  $\lceil f(x)=(x-1)^3 \rceil$  となって条件(ii)をみたさない のでこれを除いて

$$a=-2$$
 のとき:  $f(x)=(x-1)^2(x+2)=x^3-3x+2$ 

$$a=4$$
 のとき :  $f(x)=(x-1)^2(x-4)=x^3-6x^2+9x-4$ 

## らしんばん

基本の考え方は「導関数と整式の除法(p. 196, 197)」の

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$
  $\longrightarrow$   $(x-\alpha)^2$ で割りきれる

であるが,まず,①の形でおいた f(x) を(ii)の条件から②の形で表すのがポイント!!

①と②を較べるとき、「①=②」は恒等式なので、「
$$x-1$$
」で割っておいて  $(x-1)(x-a) = \left(x-\frac{2a+1}{3}\right)(x-b)-2$ 

そのうえで、 $\int_{x=2a+1} s$  を代入(あるいは両辺の係数比較)をすれば、最初から  $\int_{a=1} s$  を除いたものになる.

ightharpoons f(x) を  $(x-lpha)^3$  で割るときはどうなるか.

$$f(x) = (x-\alpha)^3 g(x) + a(x-\alpha)^2 + b(x-\alpha) + c \qquad (*)$$

とおくと

$$f'(x) = 3(x-\alpha)^2 g(x) + (x-\alpha)^3 g'(x) + 2a(x-\alpha) + b \qquad \cdots (**)$$
  
$$f''(x) = 6(x-\alpha)g(x) + 6(x-\alpha)^2 g'(x) + (x-\alpha)^3 g''(x) + 2a$$

(ただし、f''(x) は  $\lceil f(x)$  を 2 回微分する」という意味の記号である.)

(\*), (\*\*), (\*\*\*)で「x=α」とおくと

$$(*)$$
  $\longrightarrow c=f(\alpha)$ 

$$(**) \longrightarrow b=f'(\alpha)$$

$$(***) \longrightarrow 2a = f''(\alpha) \qquad \therefore \quad a = \frac{1}{2}f''(\alpha)$$

これを(\*)に代入すると

$$f(x) = (x-\alpha)^3 g(x) + \frac{1}{2} f''(\alpha) (x-\alpha)^2 + f'(\alpha) (x-\alpha) + f(\alpha)$$

となり、「割りきれる」ための条件は「余りの部分」が「0」、すなわち

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$$

となる.

(x-α)<sup>4</sup> についても同様にして

$$f(x) = (x-\alpha)^4 h(x) + \frac{1}{6} f''(\alpha) (x-\alpha)^3 + \frac{1}{2} f''(\alpha) (x-\alpha)^2 + f'(\alpha) (x-\alpha) + f(\alpha)$$

となる.

少し「くどい」が (x-α)" のときは

本問についていえば、f(x) が  $(x-1)^3$  で割りきれるための条件は(x)の形から x0 であるが、これを(x)0 で確かめると

$$f(x) = \frac{1}{3}f'(x)(x-b) - 2(x-1) \qquad \therefore \quad f'(x) = \frac{1}{3}\{f''(x)(x-b) + f'(x)\} - 2(x-1)$$

両辺で「x=1」とおくと「f'(1)=0」であるから

$$\frac{1}{3}f''(1)(1-b)=2$$

で、「 $f''(1) \neq 0$ ,  $b \neq 1$ 」であるから、(ii)の条件が  $(x-1)^3$  で割りきれない条件としても「効いている」ことがわかる。つまり、

数式 f(x) が  $\lceil (x-lpha)^2$  で割れる」が、  $\lceil (x-lpha)^3$  では割れない」 条件は

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0, \quad f''(\alpha) \neq 0$$

であることがわかる.

なお、このハナシを(\*)のかわりに

とおいてやれなくもないが、a, b, cが少しメンドウな形になってくる.慣れるまでは多少の「異和感」はあると思うが、(\*)の「おき方」は場合によっては大変有効である———覚えておくとよい.

# 発展問題 4—共通接線

次の条件をみたすように定数 A, B, C, D, E の値を求めよ.

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$$

$$q(x) = x^4 + Dx^3 + Ex^2 + 24x + 43$$

とするとき、2 曲線 y=f(x)、y=g(x) はいずれも2点 P(4, 11)、

Q(-1, 16)を通り、2点P, Qにおいて接線を共有している.

#### 解説

説 
$$f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$$

$$g'(x) = 4x^3 + 3Dx^2 + 2Ex + 24$$

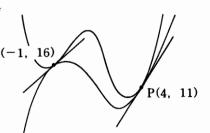
である.

2点 P(4, 11), Q(-1, 16) で接線 Q(-1, 6) を共有するための条件は

Pにおいて

$$f(4) = g(4) = 11$$
 .....①

$$f'(4) = g'(4)$$
 ······②



Qにおいて f(-1) = g(-1) = 16 ....(3) f'(-1) = g'(-1) .....(4) であるから、①、②、③、**④**は 64A+16B+C=11 .....(5) 256+64D+16E+96+43=11 ....... ②: 48A + 8B = 256 + 48D + 8E + 24 ..... -A+B+C=16 .....(8) ③: 1 - D + E - 24 + 43 = 16 ...... **(4)**: 3A-2B=-4+3D-2E+24 ..... これより (6): 4D + E = -24 $\therefore D=-4, E=-8$ (9): D-E=4(7): 6A+B=3**(10)**: 3A - 2B = 24これらを⑧に代入して C = 27これらは⑤をみたす. A=2. B=-9. C=27, D=-4, E=-8らしんばん 2曲線が接する----2曲線 y=f(x) ..... (\*)y = g(x) ..... (\*\*) が、 $x=\alpha$ で「共通の接線」をもつとき、この2曲線は $x=\alpha$ で「接する」とい ъ. このときの条件は (i)  $f(\alpha) = g(\alpha)$  (関数値) (ii)  $f'(\alpha) = g'(\alpha)$  (傾き) であるが. いま h(x) = q(x) - f(x)とおくと. h'(x) = g'(x) - f'(x)であるから、上の条件は

(i)  $h(\alpha) = g(\alpha) - f(\alpha) = 0$ 

(ii) 
$$\longrightarrow$$
  $h'(\alpha) = g'(\alpha) - f'(\alpha) = 0$ 

すなわち.

h(x) は  $(x-\alpha)^2$  で割れる

という「導関数と整式の除法(p. 196, 197)」問題に帰着させることができる.

したがって、本問は

とおくと

$$h'(x) = 4x^3 + 3(D-A)x^2 + 2(E-B)x + 24$$

ここで条件を整理すると

$$\begin{cases} h(4) = g(4) - f(4) = 11 - 11 = 0 & \dots \\ h'(4) = g'(4) - f'(4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(-1) = g(-1) - f(-1) = 16 - 16 = 0 \\ h'(-1) = g'(-1) - f'(-1) = 0 \end{cases}$$

であるから、h(x) は  $(x-4)^2$ 、 $(x+1)^2$  で割れて、 $x^4$  の係数が 1 の 4 次関数だから

$$h(x) = (x-4)^{2}(x+1)^{2}$$
$$= x^{4} - 6x^{3} + x^{2} + 24x + 16$$

これを(\*\*\*)と較べると,

$$D-A=-6$$
,  $E-B=1$ ,  $43-C=16$   $\therefore$   $C=27$ 

また

$$f(4) = 64A + 16B + C = 11$$
  
 $f(-1) = -A + B + C = 16$ 

であることとあわせて、残りのA、B、D、Eを決めることができる.

ここで

$$f(4) = 11, \quad f(-1) = 16$$

のかわりに

$$g(4) = 11, \quad g(-1) = 16$$

でもよい.

なぜこれが重要かというと、h(x) だけでは、問題の f(x)、g(x) の両方にたとえば  $x^5$  をつけ加えた関数を F(x)、G(x) としても

$$h(x) = F(x) - G(x) = f(x) - g(x) = (x-4)^{2}(x+1)^{2}$$

となる. h(x) が「F(x), G(x) の差」ではなく、確かに「f(x), g(x) の差」であるということを主張するのが

$$(f(4)=11, f(-1)=16)$$
 あるいは  $(g(4)=11, g(-1)=16)$  だからである.

# 発展問題 5-極値の計算

- (1) f(x) の極大値、極小値を求めよ.
- (2) y=|f(x)| のグラフの概形をかけ.

解 説 (1)  $f'(x)=6x^2-6x+1=0$  は異なる実数解

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$
,  $\beta = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$ 

をもち

$$f'(x) = 6(x-\alpha)(x-\beta)$$

であるから、f(x) は表のように増減し、

極大値:  $f(\alpha)$ 

極小値: f(B)

$\boldsymbol{x}$		α		β	
f'(x)	+	0	_	0	+
f(x)	1		>		1

である.

 $\alpha$ ,  $\beta$  の値を実際に f(x) に入れて計算してもやれないことはないが、相当 めんどうである.

そこで、f(x) を f'(x) で割って

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\right)f'(x) + \left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

と変形した上で α. βを入れると

$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$$

だから

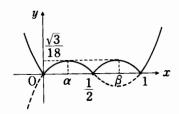
$$f(\alpha) = -\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$
 (極大値)

$$f(\beta) = -\frac{\beta}{3} + \frac{1}{6} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{1}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{18}$$
 (極小値)

(2)  $f(x) = x(x-1)(2x-1) \mathcal{O} \mathcal{I} \mathcal{I} \mathcal{I}$ 

$$(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0)$$

の 3 点で x 軸と交わる。 (1) の増減表 を参照して f(x) のグラフを描くとき、 その x 軸の下にでた部分を上におり かえしたものが、y=|f(x)| のグラフ で、図の実線で表した曲線となる(増 減表は省略).



## らしんばん

🌡 (1)の「f(α)を求める計算」について説明しておく.

αが簡単な数値ならば、そのまま代入して計算してもよいが、本問の場合で いうと

$$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$
,  $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ 

のような数をそのまま「3次式」f(x)に代入して計算するには少し勇気がいる. そこで、はじめに  $[f(x) \in f'(x)$  で割っておく] ―――商を Q(x)、余りを R(x) とすると

$$f(x) = f'(x) Q(x) + R(x)$$

であるから、この式で $[x=\alpha]$ とおくと

となり  $f(\alpha)$  を求めるには  $[R(\alpha)]$  を計算すればよく、 [2 つだけ次数の低い式] を扱えばよいことになる.

↓ 「y=|f(x)|」の「極大値」、「極小値」について──

(2)の実線のグラフから  $\frac{\sqrt{3}}{18}$  が極大値であることは問題ない. しかし

$$x=0, \frac{1}{2}, 1$$

に対応する点についてはどう理解すればよいか.

「極小値 | については p. 208で定義したが、それによれば

極小値: 関数が「減少から増加にかわる」点の関数値

ということであった----本間のこの3つの点については、「グラフがトンガッ テいる | がこの条件をみたしている. したがって

$$x=0$$
,  $\frac{1}{2}$ ,  $1 \longrightarrow$ 極小値:  $0$ 

である.

しかし、これらの点では「微分不可能」で

$$f'(0)$$
,  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f'(1)$ 

は存在しない———このことは p. 190. 191. 209でくわしく説明した.

なお、「増減表」を書くとき、これらの点のf'(x)を示さなければならないと きはふつう「空白」にしておくか、あるいは「×印」をつけておくことになる が、本間で示すとすれば「y=f(x) の増減表」をまず示し、「f(x)<0」の部分を x軸に関して折り返した」ことの説明を添えておく程度でよい.

# 発展問題6―「極大・極小」と「変曲点」

3次関数

$$y = x^3 + 3ax^2 + bx$$

のグラフをCとする。

曲線 C に傾き m の接線が2つ引けるとき、その2接点を結ぶ直線の 傾きを k(m) とする.

- (1) k(m) を a, b, m で表せ.
- (2) k(0) = -2 であるとして、極大値と極小値の差を求めよ。
- (3) (2)のとき、Cの接線の傾きが最小となるときの接点をP(b.
  - の)とする. このとき点 P が原点にうつるように C を平行移動したと き、移動後の曲線はどんな関数のグラフになるか、

解 説 (1) 
$$C: y=f(x)=x^3+3ax^2+bx$$

傾きがmの接点のx座標を $\alpha$ 、 $\beta$ ( $\alpha$ < $\beta$ )とすると、 $\alpha$ 、 $\beta$ は

$$y' = 3x^2 + 6ax + b = m$$

$$\therefore 3x^2 + 6ax + b - m = 0 \qquad \cdots \qquad 0$$

の実数解で、「2次関数」の「解と係数の関係」により

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = \frac{b-m}{3}$$

$$k(m) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$= \frac{(\beta^3 - \alpha^3) + 3a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$= (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 3a(\beta + \alpha) + b$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 3a(\alpha + \beta) + b$$

$$= (-2a)^2 - \left(\frac{b - m}{3}\right) + 3a(-2a) + b$$

$$= \frac{1}{2}(2b - 6a^2 + m)$$

だし、このとき $\alpha$ 、 $\beta$ は1の異なる2つの実数解であるから、判別式を Dとすると  $\frac{D}{4} = (3a)^2 - 3(b-m) > 0 \qquad \therefore \quad 3a^2 + m > b$ 

$$\frac{D}{A} = (3a)^2 - 3(b-m) > 0 \qquad \therefore \quad 3a^2 + m > 0$$

(2) k(0) = -2

$$\therefore \frac{1}{3}(2b-6a^2+0) = -2 \qquad \therefore b=3(a^2-1)$$

ゆえに

$$y'=3x^2+6ax+3(a^2-1)=3(x+a+1)(x+a-1)$$
  
これより、「 $y=f(x)$ 」の極大、極小については  
{極大は  $x=-a-1$ 

であることがわかる(増減表は省略する)

このとき、曲線 C の方程式は

$$y = f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x$$
 .....(2)

であることから、求める「極大値と極小値の差」は

$$f(-a-1) - f(-a+1)$$

$$= \{(-a-1)^3 + 3a(-a-1)^2 + 3(a^2-1)(-a-1)\}$$

$$- \{(-a+1)^3 + 3a(-a+1)^2 + 3(a^2-1)(-a+1)\}$$

$$= 4$$

#### (3) $y'=3(x+a)^2-3$

であるから、「接線の傾き (y')」が最小となるときのxの値は [x=-a] で、 そのような点 P(p, q) は

$$p=-a$$
 $q=(-a)^3+3a(-a)^2+3(a^2-1)(-a)=3a-a^3$ 
である。

次に、点P(p, q) が原点となるようにグラフを平行移動するには、 $\lceil x$ 軸 方向に -p」、 $\lceil y$  軸方向に -q」だけ平行移動すればよいから、②で

$$\begin{cases} x \text{ on the } x + p = x - a \\ y \text{ on the } y + q = y + 3a - a^3 \end{cases}$$

とおいて(← p. 21)

$$y+3a-a^3=(x-a)^3+3a(x-a)^2+3(a^2-1)(x-a)$$

これを整理して、求める曲線の方程式は

$$y=x^3-3x$$

である.

# らしんばん



本問では、「傾き m」を与えるときの接線は D>0 のもとで 2 本きまる----1本のときについてはあとで説明する.

そのときの接点を右図のように A、B とすれば、直線 AB の傾きが k(m) で あるということ!!

したがって、(2)で、

$$k(0) = -2$$

ということは、A、Bがそれぞれ与えられた曲線の「極大点」、「極小点」になっていて、このとき「直線ABの傾きが-2」であるということである。

→ 「接線の傾きが最小」とは何を意味するか!!

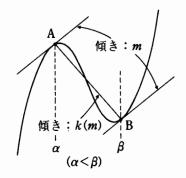
右図で確かめてみると、接線の傾きはxの増加とともにある点までは減少し、この点から先は増加することがわかる、接線の傾きは

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + b$$

であったから,この「関数 f'(x) の増減」を調べるためにもう一度微分する と

$$f''(x) = 6x + 6a = 6(x+a)$$

で,「f''(x) の符号」は「x=-a」の前後で「-」から「+」にかわり,この点で f'(x) の値は極小かつ最小であることがわかる。





一方, グラフの上では、この点を境にして「上に凸の状態」から「下に凸の 状態」にかわるので、このような点を「変曲点」とよんでいる。

本問のような「3次関数」の場合、グラフは「変曲点」について対称であり、したがってこの点における接線の傾きを本問のk(m) にとれば、m がただ 1 つに決まることは「あたりまえ」のことである。

このように、「f''(x)=0」をみたすxを求めることから「変曲点」を求め — 変曲点のときは $f''(x) \neq 0$ である — f''(x) の符号の変化から曲線の凹凸を調べることは「基礎解析」の範囲を越えるがグラフの概形を描く上できわめて重要な意味がある、ということは知っておいてもよい.

■ 「グラフの平行移動」については p. 21でくわしく説明した。

ただ本間(3)についていえば、[P(p, q) が原点にうつるように] 曲線 C を [ 平行移動] するわけで

$$\overrightarrow{PO} = \begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix}$$
 ← 点  $\mathbf{P}$  を原点  $\mathbf{O}$  にうつすベクトル!!

に注目して, x, y を

 $x \rightarrow x - (-p) = x + p$ ,  $y \rightarrow y - (-q) = y + q$ におきかえればよいのであるが、これは結果的には P(p, q) が原点となるよう に「座標軸」を平行移動したことと同じである.

「座標軸の平行移動」とみれば右図に

より

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

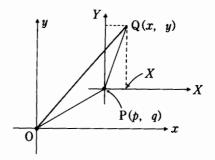
$$x = X + p$$

$$y = Y + q$$

からx. uを

 $x \rightarrow x+p$ ,  $y \rightarrow y+q$ 

のようにおきかえれば「座標軸の平行移動後の曲線の方程式」が計算される.



# -発展問題 7―最大・最小と「場合分け |

kを実数の定数とするとき、xの関数

$$f(x) = |x^3 - 3kx|$$

が、 $-1 \le x \le 1$  の範囲でとる最大値を M(k) で表す、

kが実数全体を動くとき、M(k)が最小となるkの値、およびM(k)の最小値を求めよ

解 説 f(x) は「偶関数」であるから、「グラフは y 軸に関して対称」で あり、したがって、 $[0 \le x \le 1]$  で考えればよい.

$$g(x) = x^3 - 3kx$$

とすると

$$g'(x) = 3x^2 - 3k = 3(x^2 - k)$$

(1) 「 $k \le 0$ 」のとき:  $g'(x) \ge 0$  で, g(x) は単調増加!!

$$M(k) = f(1) = g(1) = 1 - 3k$$
 .....

(2) 「k>0」のとき:

$$g'(x) = 3(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k})$$

で

$$y=f(x)=|g(x)|$$

のグラフは

$$y=q(x)$$

のグラフのx軸より下側の部分を上 側に折り返せばよいから、u=f(x) の 「増減表」と「グラフの概形」は次の

$\boldsymbol{x}$	0		$\sqrt{k}$		$\sqrt{3k}$	
g'(x)		_	0	+	+	+
g(x)	0	`	$-2k\sqrt{k}$	/	0	/
f(x)	0	1	$2k\sqrt{k}$	/	0	1

ようになる-----ただし [*x*≥0] で ある.

そこで、 $\lceil 0 \le x \le 1 \rfloor$  の範囲と k の いろいろな値に対する

$$y = f(x)$$

のグラフを参照しながら M(k) を求め るのであるが、それにはまず最初に  $\lceil y = f(x) \mid \mathcal{O}$  のグラフで、「極大点」を 通り、x軸に平行な直線と、y=g(x)のグラフとの「接点以外の交点 |(〈図 1>の点 A)の x 座標を求めておく.

$$x^3-3kx=2k\sqrt{k}$$

$$\therefore x^3 - 3(\sqrt{k})^2 x - 2(\sqrt{k})^3 = 0 \qquad \therefore (x + \sqrt{k})^2 (x - 2\sqrt{k}) = 0$$

$$\therefore (x+\sqrt{k})^2(x-2\sqrt{k})$$

 $-2k\sqrt{k}$ 

 $2k\sqrt{k}$ 

 $\sqrt{k}$ 

 $\sqrt{3}k$ 

〈図1〉

ゆえにAのx座標は

$$x=2\sqrt{k}$$

以上のことから、 $\lceil 0 \le x \le 1 \rfloor$  における f(x) の最大値は、

$$f(\sqrt{k}), \quad f(2\sqrt{k}), \quad f(1)$$

の値を比較することで決定する.

(i)  $\lceil 2\sqrt{k} \le 1 \rfloor$  のとき:

$$0 < k \le \frac{1}{4}$$

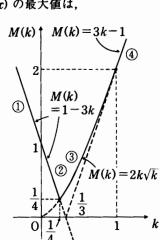
$$M(k) = f(1) = g(1) = 1 - 3k$$
 .....

(ii)  $\lceil \sqrt{k} \le 1 < 2\sqrt{k} \rfloor$  のとき:

$$\frac{1}{4} < k \le 1$$

$$M(k) = f(\sqrt{k}) = -g(\sqrt{k}) = 2k(\sqrt{k})$$

(iii)  $\lceil 1 < \sqrt{k} \rfloor$  のとき: k > 1 $M(k) = f(1) = -g(1) = 3k-1 \cdots 4$ 



〈図 2 〉

となり、(i)とあわせて、M(k) の値を最小にする k は、 $\langle 図 2 \rangle$  の「②、③ の交点の k の値」として与えられるから

$$1-3k=2k\sqrt{k}$$

$$\therefore 2(\sqrt{k})^3 + 3(\sqrt{k})^2 - 1 = 0$$

$$\therefore (2\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)^2=0$$

237

$$\sqrt{k} > 0 \downarrow 0$$

# らしんばん

#### ■ もう少し簡単にはいかないか────

 $\lceil k \ge 0 \rfloor$  のとき、 $\lceil u = f(x) \rfloor$  のグラフの概形がつかめた段階で、M(k) につい てあらためて考えてみると、 $\lceil 0 \le x \le 1 \rfloor$  の範囲に f(x) の極大値を与える x の値  $x=\sqrt{k}$  が入っているなら ( $\lceil 0 < k \le 1 \rceil$  なら).

の大小の問題になることは大体の見当がつく.

そこで問題をあらためて読みなおしてみると、 $[0 \le x \le 1]$  の範囲で

$$f(x) = |x^3 - 3kx|$$

の最大値ということは「 $x^3$  と 3kx との差の絶対値」の最大値ということである。

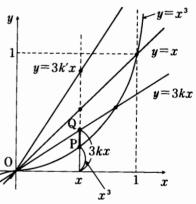
 $y=x^3$ 

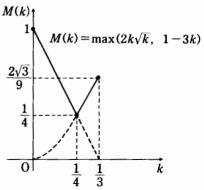
 $0 \le k \le \frac{1}{2} < 1$  $0 \le 3k \le 1$ の範囲で考えればよいことがわかる.

この範囲の k の値に対して、(\*)の 第2式は

$$f(1) = |1 - 3k| = 1 - 3k$$
  
だから

$$M(k) = \max(2k\sqrt{k}, 1-3k)$$
$$\left(0 \le k \le \frac{1}{3}\right)$$





として求められる.

ただし、 $\lceil \max(a, b) \rfloor$  は a、b のうち  $\lceil$ 小さくないもの  $\rceil$  を表し、グラフの上では

 $Y=2k\sqrt{k}$ , Y=1-3k

のうち、下側にあらわれるものを切り捨てればよい.

 $(Y=2k\sqrt{k}$  は整関数ではないので扱いにくいが、「原点を通り」、「k とともに 増加する」という程度の理解でよい。)

# 発展問題 8-最大・最小-

1 つの頂点に集まる 3 辺の長さの和が 1 で,表面積が <del>16</del> である直方 はがある.

- (1) 1 辺の長さをxとして、直方体の体積Vをxの関数として表せ、 また、このときのxのとりうる値の範囲も示せ、
- (2) Vの最大値, 最小値を求めよ.
- (3) Vが最大となるときの3辺の長さを求めよ.

## 解 説 3辺の長さをx, y, zとすると

$$x+y+z=1$$
 ······①

$$2(yz + zx + xy) = \frac{16}{27}$$

$$\therefore yz + zx + xy = \frac{8}{27} \quad \cdots \quad 2$$

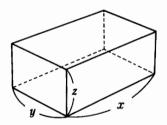
②: 
$$yz = \frac{8}{27} - x(y+z)$$
  
=  $\frac{8}{27} - x(1-x)$ 

$$=x^2-x+\frac{8}{27}$$
 ......

:. 
$$V=xyz=x(x^2-x+\frac{8}{27})=x^3-x^2+\frac{8}{27}x \ (=V(x))$$

であるから、「y>0, z>0」の条件は次の(i)、(ii)である.

(i) 実数解条件



判別式 
$$D=(1-x)^2-4\left(x^2-x+\frac{8}{27}\right)\geq 0$$

$$\therefore$$
  $(9x-1)(9x-5) \le 0$   $\therefore \frac{1}{9} \le x \le \frac{5}{9}$  .......

(ii) 解と係数の関係

これより、xのとりうる値の範囲は $\frac{1}{9} \le x \le \frac{5}{9}$ 

(2) 
$$V'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{8}{27}$$
  
=  $3\left(x - \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{2}{9}\right)$ 

で、右の増減表の「極大値」、「極小値」、「端点の値」を計算すると

$$V\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{20}{729}$$
 (極大値),  $V\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{729}$  (極小値)  $V\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{729}$ ,  $V\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{20}{729}$ 

であり

最大値:  $\frac{20}{729}$ , 最小値:  $\frac{16}{729}$ 

(3) Vが最大となるのは $\left[x=\frac{2}{9}, \frac{5}{9}\right]$  のときである.  $\left[y \ge z\right]$  として

$$x=\frac{2}{9}$$
 のとき,⑤を解いて  $y=\frac{5}{9}$ ,  $z=\frac{2}{9}$ 

$$x=\frac{5}{9}$$
のとき、⑤を解いて  $y=\frac{2}{9}$ 、  $z=\frac{2}{9}$ 

よって,求める 3 辺の長さは  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{5}{9}$  である.

# らしんばん

上の説明で[y>0], [z>0] の条件をまとめておこう.

$$y+z=A$$
,  $yz=B$ 

とおくとき

「y>0, z>0」 ならば 「A>0, B>0」 であることは正しい。

しかし、 $\lceil A > 0$ 、B > 0」であるからといって $\lceil y > 0$ 、z > 0」はいえない。

そのためには、「y と z の実数条件」、すなわち、「y, z を 2 つの解とする 2 次方程式 | を作って

$$t^2-At+B=0$$

で、 $[D \ge 0]$  をことわらなくてはならない.

その理由は y と z が実数でないとき、たとえば

$$y=1+i$$
,  $z=1-i$ 

などでも

$$y+z=(1+i)+(1-i)=2>0$$
  
 $yz=(1+i)(1-i)=1^2-i^2=2>0$    
 $y=(1+i)(1-i)=1^2-i^2=2>0$    
 $y=(1+i)(1-i)=1^2-i^2=2>0$    
 $y=(1+i)(1-i)=1$    
 $y=(1+i)(1-i)=2>0$    
 $y=(1+i)(1-i)=1$    
 $y=(1+i)(1-$ 

となるときがあるからである。したがって本間のように

$$\begin{cases} (i) & t^2 - At + B = 0 \quad \mathcal{T} \quad D \ge 0 \\ (ii) & A > 0, B > 0 \end{cases}$$

として了解しておかなければならない.

➡ 本問について少し考え方をかえてみよう──

上の説明でわかっていることは

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ yz+zx+xy=\frac{8}{27}\\ xyz=V \end{cases}$$

であるから、3辺の長さx, y, zは「3次方程式の解と係数の関係」から、次の方程式の3つの解である。

$$t^3 - t^2 + \frac{8}{27}t - V = 0$$

$$\therefore$$
  $t^3-t^2+\frac{8}{27}t=V$  ← 「方程式への応用(p. 216, 217, 218)」

左辺を f(t) とおいてグラフを描いてみると

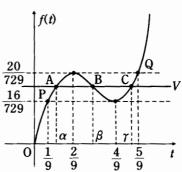
$$f(t) = t^3 - t^2 + \frac{8}{27}t$$

は、本文の説明のV(x)と同じ形であるから、増減表がそのまま利用できて、グラフは右のようになる。

そこで、「3次方程式」が、「3つの 正の実数解(重解もふくむ)」をもつ Vの範囲が

$$\frac{16}{729} \le V \le \frac{20}{729} \quad \dots \dots (*) \quad \frac{20}{729}$$

であることは一目瞭然であり、したがって、Vの「最大値」も「最小値」も、「3辺の長さのとりうる値の範囲が $\frac{1}{9}$ から $\frac{5}{9}$ の間」であることもすぐにわ



かる。たとえば(\*)の範囲のVを定めたとき、図のA、B、C に対応するt座 標の値、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  が 3 辺の長さであることもきわめて当然で

$$V=\frac{20}{729}$$
 (最大) のときの3辺は  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{5}{9}$ 

$$V = \frac{16}{729}$$
 (最小) のときの3辺は  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $\frac{4}{9}$ 

であることは図のP. Qのt座標をおさえることにより「視覚的に」とらえるこ とができる。

したがって、本問は「最大・最小」の問題ではあるが、「方程式への応用」と 考えることもできる.

### - 発展問題 9----kの符号をどう決める?

不等式

$$x^3-2 \ge 3k(x^2-2)$$

が、すべての x≥0 に対して成立するような kの値の範囲を求めよ.

解 説 
$$f(x) = (x^3-2)-3k(x^2-2)$$

とおくと、 $x \ge 0$  なるすべてのxに対して「 $f(x) \ge 0$ 」より

$$f(0) = -2 + 6k \ge 0$$
  $\therefore k \ge \frac{1}{3} > 0$   $\longleftarrow$   $\exists n \text{ if } r \text{ if } r$ 

このとき

$$f'(x) = 3x^2 - 6kx = 3x(x-2k)$$
 .....

これより、 $[x \ge 0]$  における「増減表」は次の表のようになる.

ゆえに、f(x) は  $\lceil x=2k \rceil$  のとき  $\lceil 極小かつ最小 \rceil$  であるから、すべての  $x \ge 0$  に対して  $f(x) \ge 0$  であるための条件は

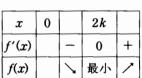
$$f(2k) = \{(2k)^3 - 2\} - 3k\{(2k)^2 - 2\}$$
$$= -4k^3 + 6k - 2 \ge 0$$
$$\therefore 2k^3 - 3k + 1 \le 0$$

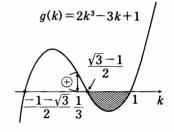
$$(k-1)(2k^2+2k-1) \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2k^2 + 2k - 1 = 0 \text{ then } k \\ k = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$k \ge \frac{1}{3}$$
を考えて

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \le k \le 1$$





# らしんばん



■ 最初に「kの符号が与えられていない」ところがむずかしい。

これを、①まで進んだところで

$$k > 0, \quad k = 0, \quad k < 0$$

に分けて増減を調べるというのはやりたくない。

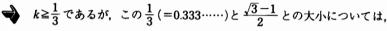
問題文を注意深く読んでみると「すべての x≥0 に対して成立するような ……」とあることに注意!!

そこで、 $x \ge 0$  の「もっとも思いつきやすい」数値「x=0」に対しても与えら れた不等式は成立するはずで、 $\lceil f(0) \ge 0 \mid$  から

$$k \ge \frac{1}{3} > 0$$
 (必要条件)

が決まる――ここではじめて増減表が書けることになる.

あとは、この範囲に注意して「(最小値)≥0」となる k の範囲を調べればよい。



 $\sqrt{3} = 1.732$ 

を代入して

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{0.732}{2} = 0.366$$

と計算してみるのが「ソボク」だがもっとも速い── 「√3≒1.7」くらいで よい

しかし

$$q(k) = 2k^3 - 3k + 1$$

の「グラフの形」から

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{27} > 0$$

を確かめて

$$\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

とする方法も、ときには有効である.

