第5章

積分法とその応用

「面積」は
「微分の逆演算」で与えられる……
「ニュートン」,「ライプニッツ」に
脱帽!!

「面積」や「体積」は「微分の逆演算」で与えられる

「加法」の逆演算は「減法」,「2乗すること」の逆演算は「平方根の計算」である．このように，ある演算がその逆演算をもつときは，それらを組み合わせることによりさらに大きな威力を発揮する——— **「積分」は，基本的には「微分」の逆演算である．** それが近代の歴史をかえてしまうほどに大きな意味を持つのは，この「微分」と「積分」とが，ある時期までは

微分：　「速度」や「接線」に関する研究
積分：　「面積」や「体積」を求める方法———求積法

として，それぞれ別の流れで発達してきたにもかかわらず，**実はそれが「表(オモテ)」と「裏(ウラ)」のような関係にあったことの発見にある．**

本書では

面積と積分の関係　⟵——　微積分学の基本定理

としてp. 265以下でくわしく説明するが，これは，まず「ニュートン」が「無限級数(無限数列を順序をかえずに加えたもの)」の研究から発見し，やや遅れて「ライプニッツ」が発見したといわれていて，そのことについての両者の「優先論争」は有名である．ただ，「ライプニッツ」の方が「記号の用い方」の点で優れていたので，「微積分」のその後の発展は「ライプニッツ」に負うところが大きいとされている．「ライプニッツ」はいろいろな記号を発明した．

$$\frac{dy}{dx},\quad \int(\quad)dx$$

なども「ライプニッツ」が工夫した記号である．

この章を読むにあたって特に注意してもらいたいことは

(i)　**「定積分の定義」**を確認し**「定積分の計算規則」**を十分に理解すること：
　　⟵——　**ここまでは「面積」や「体積」とは関係のないタダの計算!!**

(ii)　**「面積」や「体積」が「定積分の計算」で与えられること**の確認．
　　⟵——　**「微積分学の基本定理」**のネウチがここでわかる．

という構造である———あとは「整関数の積分」特有の「計算技術」を習得することが主な目的となる．「アルキメデス(B.C. 287(？)～212)」が苦心して求めた「放物線と直線とで囲まれる面積」もわれわれはきわめて簡単な計算で求めることができるわけである．

——— 「ニュートン」,「ライプニッツ」に脱帽して拍手!!

第1節
積分の計算

とりあえず簡単に説明すると，「**積分**」とは「**微分の逆演算**」のことである．

ここでは主に「**整関数**」を素材として「**積分とは何か**」を解説する———次の手順で説明する．

(i)　**不定積分**———まず「積分とは何か」を明らかにして，その「計算技術」について説明する．

(ii)　**定積分**———「定積分」を定義し，その「計算技術」と，「その周辺の諸問題」について考える———第2節で説明する「**面積**」と混同しないように読み進めてもらいたい．

1　不定積分

「加法」の逆の計算は「減法」，「乗法」の逆の計算は「除法」であった．

では「**微分の逆演算**」は何であろうか．

具体的な例で説明すると，直線上を運動する物体があって，時刻 t における速度 v がわかっているとき，t における座標 x と v は

$$\frac{dx}{dt}=v$$

の関係があった．このとき，時刻 t における位置 x を求めるにはどうすればよいかということである．

すなわち

どんな関数 x を t で微分したら v が得られるか

ということで，このとき「微分の逆演算」が必要になってくる．

一般に，関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき

$$F'(x)=f(x)$$

である．このとき $F(x)$ を $f(x)$ の「原始関数」または「不定積分」という．

ここで注意しておかなければならないことは $f(x)$ の「原始関数」は一意的に定まらないということである．

原始関数

$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると

$$\{f(x)\text{ の原始関数}\}=\{F(x)+C \mid C\text{ は任意の定数}\}$$

である．

解　説　定数の微分は 0（ゼロ）であった．

$$\therefore\quad \{F(x)+C\}'=F'(x)+(C)'=f(x)$$

であるから，「$F(x)+C$」は $f(x)$ の「原始関数」である．

また，$G(x)$ を $f(x)$ の「原始関数」とすると

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

よって，「導関数についての諸定理(p. 194)」の(1)，(3)より

$$G(x)-F(x)=C\quad(C\text{ は定数})$$
$$\therefore\quad G(x)=F(x)+C$$

である．

らしんばん

➡ 関数 $f(x)$ の「原始関数」はただ1つには定まらないが，上の「定理」からその「原始関数」の1つを $F(x)$ とすれば，任意の「原始関数」は

$$F(x)+C$$

の形に表すことができるので，これを

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\quad(C\text{ は任意の定数})$$

という記号で表す．

そして，「$\int f(x)\,dx$」を求めることを「**$f(x)$ を積分する**」といい，「任意の定数 C」を「**積分定数**」という．

このとき，定義から明らかに

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)\quad\longleftarrow\quad (F(x)+C)'=f(x)$$

であり，「**積分**」が「**微分の逆演算**」になっていることがわかる．

なお，「$\int$」は「インテグラル（Integral）」と読む．

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

nを正の整数または0，aとbを定数（$a\neq 0$）とするとき

$$\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}+C$$

であり，特に$a=1$，$b=0$とすれば

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

である．

解　説　不定積分の公式は，微分の公式を「逆に読む」ことで作ることができる．「$(x^n)'=nx^{n-1}$ (p. 194)」の(2)より

$$\left\{\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}+C\right\}'=\frac{1}{(n+1)a}\{(ax+b)^{n+1}\}'$$
$$=\frac{1}{(n+1)a}\cdot(n+1)\cdot a\cdot(ax+b)^n$$
$$=(ax+b)^n$$

らしんばん

加えて次の公式を了解すれば「すべての整関数」について「不定積分」が計算できる．

$$\int \{k f(x)+l g(x)\}dx$$

k，lを定数とするとき

$$\int \{k f(x)+l g(x)\}dx=k\int f(x)dx+l\int g(x)dx$$

（$k\neq 0$，または　$l\neq 0$）

である．

「導関数についての諸定理(p. 194)」の(2)，(3)より

$$\frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx+l\int g(x)\,dx\right\}$$
$$=k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx+l\frac{d}{dx}\int g(x)\,dx=k f(x)+l g(x)$$

なお「$k\neq 0$，または　$l\neq 0$」とおいたわけは，たとえば「$l=0$」のとき「$k=0$」とすると

$$\int k f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$$

の「左辺$=C$(定数)」，「右辺$=0$」となって等号が成立しないからである．

例題 1

次の不定積分を求めよ.

(1) $\int (3x^2-4x+2)dx$

(2) $\int (2x+1)(3x-4)dx$

(3) $\int (3t-4)^2 dt$

(4) $\int x(x-1)^5 dx$

(5) $\int (x+1)^2(x-2)^2 dx$

解 説 先に述べた定理を用いれば，すべての整関数を積分できることになるが，計算方法を工夫するといくらか効率よくいくものもある.

(3)，(4)，(5)はそのつもりでみてほしい.

(1)
$$\int (3x^2-4x+2)dx=3\int x^2dx-4\int x\,dx+2\int dx$$
$$=x^3-2x^2+2x+C$$

(2)
$$\int (2x+1)(3x-4)dx=\int (6x^2-5x-4)dx$$
$$=2x^3-\frac{5}{2}x^2-4x+C$$

(3)
$$\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}+C$$

であったから

$$\int (3t-4)^2 dt=\frac{1}{(2+1)\cdot 3}(3t-4)^{2+1}+C$$
$$=\frac{1}{9}(3t-4)^3+C$$

(4) 「式変形」に少し工夫をする.

$$x(x-1)^5=(x-1+1)(x-1)^5=(x-1)^6+(x-1)^5$$
$$\therefore\quad \int x(x-1)^5dx=\int \{(x-1)^6+(x-1)^5\}dx$$
$$=\frac{1}{7}(x-1)^7+\frac{1}{6}(x-1)^6+C$$

(5)
$$(x+1)^2(x-2)^2=(x-2+3)^2(x-2)^2$$
$$=\{(x-2)^2+6(x-2)+9\}(x-2)^2$$
$$=(x-2)^4+6(x-2)^3+9(x-2)^2$$

$$\therefore \quad \int (x+1)^2(x-2)^2dx=\int \{(x-2)^4+6(x-2)^3+9(x-2)^2\}\,dx$$
$$=\frac{1}{5}(x-2)^5+\frac{3}{2}(x-2)^4+3(x-2)^3+C$$

らしんばん

➡ $\int dx$ は $\int 1dx$ のことである.

➡ 基本的には, (1)の計算のように「各項をバラバラにして積分」するのであるが, 慣れてきたら(2)の後半に示したように, 「まとめたままで計算できるもの」はそのようにするとよい――先に進んで「面積の計算」などになると「本当のありがたさ」がわかってくる.

例題 2

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が次のように与えられている.

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-2) \\ 2x & (-2<x<2) \\ -1 & (x>2) \end{cases}$$

このとき, $y=f(x)$ のグラフは原点を通り, 「切れ目」のない図形であるという. $y=f(x)$ のグラフを描け.

解　説　与えられた範囲にしたがって $f(x)$ を求めてみると

(i)　$x<-2$ のとき

$$f'(x)=0 \longrightarrow f(x)=C_1$$

(ii)　$-2<x<2$ のとき

$$f'(x)=2x \longrightarrow f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C_2$$

(iii)　$x>2$ のとき

$$f'(x)=-1 \longrightarrow f(x)=\int (-1)dx=-x+C_3$$

これらの曲線は「切れ目」がなく, 原点を通るから, (ii)の「$-2<x<2$」のときから考えていくことにする―― C_1, C_2, C_3 は「ある定数」とする.

$$f(0)=0 \qquad \therefore \quad C_2=0$$

ゆえに「$-2<x<2$」のときの $f(x)$ は

$$f(x)=x^2$$

「曲線に切れ目がない」ことから

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2=4 \\ f(2)=2^2=4 \end{array}\right\} \longleftarrow \ f(-2),\ f(2) \text{ が定義された!!}$$

がわかる―――「$x<-2$」,「$x>2$」のときも同様に考えて

「$x<-2$」のときは

$C_1=4 \qquad \therefore \quad f(x)=4$

「$x>2$」のときは

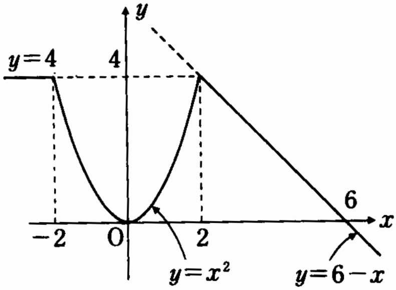
$f(2)=-2+C_3=4$

$\therefore \quad C_3=6$

$\therefore \quad f(x)=-x+6$

以上のことから

$$f(x)=\begin{cases} 4 & (x\leqq -2) \\ x^2 & (-2\leqq x\leqq 2) \\ 6-x & (x\geqq 2) \end{cases}$$



となる.

らしんばん

「切れ目のない図形」,ということは「微積分」の「ことば」でいう「連続」のことである.

たとえば「$x=2$」の点でいうと,これを式で表せば

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

ということで,これは「$\lim_{x\to 2+0} f(x)$」,「$\lim_{x\to 2-0} f(x)$」の値が「定数」として存在し,それが「$f(2)$」の値に等しいということである(p. 185, 186).

もちろん本問では「$f'(2)$」,「$f'(-2)$」はともに存在しない(p. 190, 191)―――**「$x=2$」,「$x=-2$」では「連続」ではあるが「微分不可能」**ということになる.

このように,われわれがよく知っている関数でも「基礎解析」の範囲内の「ことば」だけで説明しようとすると「困難」がおこる.本書では「必要に応じて」軽く解説しながら進むことにするが,それほど「こだわる」ことはない―――**「直観的に」了解することができれば十分である.**

2 定積分

$F(x)$ が $f(x)$ の「原始関数」であるとき,

$$F(b)-F(a)$$

のことを $\Big[F(x)\Big]_a^b$ とも書き，これを関数 $f(x)$ の「a から b までの定積分」という．これを記号を用いて

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

で表す．そして a を「下限」，b を「上限」という．すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

注 $f(x)$ の「原始関数」は無数にあるが，それらのすべてを「$F(x)+C$」で表すことができる(p. 246)．そして

$$\Big[F(x)+C\Big]_a^b=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}$$
$$=F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b$$

であるから，「$\int_a^b f(x)\,dx$」は「原始関数」の「積分定数 C」の選び方に関係しない――要するに，これは「積分変数 x が a から b まで変化する」ときの「原始関数の増分」のことである．

「定積分」についての諸定理

(1) $\displaystyle\int_a^b \{k\,f(x)+l\,g(x)\}\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx+l\int_a^b g(x)\,dx$

（ただし，k，l は定数とする．）

(2) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$　　(3) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$

解　説 いずれも簡単なので，(1)と(4)を証明しておく．

$f(x)$ と $g(x)$ の「原始関数」をそれぞれ $F(x)$，$G(x)$ とおく．

(1) $$\int_a^b \{k\,f(x)+l\,g(x)\}\,dx=\Big[k\,F(x)+l\,G(x)\Big]_a^b$$
$$=\{k\,F(b)+l\,G(b)\}-\{k\,F(a)+l\,G(a)\}$$
$$=k\,\{F(b)-F(a)\}+l\,\{G(b)-G(a)\}$$
$$=k\,\Big[F(x)\Big]_a^b+l\,\Big[G(x)\Big]_a^b$$
$$=k\int_a^b f(x)\,dx+l\int_a^b g(x)\,dx$$

(4) $$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^c+\Big[F(x)\Big]_c^b$$
$$=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$
$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

らしんばん

➡ (4)は a, b, c の大小にかかわりなく成立する．たとえば c は a と b の間の数でなくてもよいし，$a>b$ であってもよい——あとで述べる「**定積分の区間分割**(p. 254以下)」というところで用い方をくわしく説明する．

➡ (5)の左辺は x についての積分，右辺は t についての積分で，このような x, t を「**積分変数**」, $f(x)$, $f(t)$ を「**被積分関数**」というのだが，(5)は「定積分は f と積分区間を示す a, b の値で決まり，積分変数は x でも t でも同じ値になる」ことを示している——「**積分区間**」は「**被積分関数**」の「**定義域**」になっている．

対称積分，$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

(1) n を負でない整数とするとき

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \int_{-a}^{a} x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx\\ &\text{(ii)}\quad \int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx=0\end{aligned}\right\}\longleftarrow \text{対称積分!!}$$

(2) $$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

解　説　(1) (i) $$\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{a^{2n+1}-(-a)^{2n+1}}{2n+1}=2\frac{a^{2n+1}}{2n+1}=2\int_0^a x^{2n}dx$$

(ii) $$\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx=\left[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_{-a}^{a}=\frac{a^{2n+2}-(-a)^{2n+2}}{2n+2}=0$$

(2) $$(x-\alpha)(x-\beta)=(\underline{x-\beta+\beta-\alpha})(x-\beta)\quad\longleftarrow\ \text{この変形に注目!!}$$
$$=(x-\beta)^2+(\beta-\alpha)(x-\beta)$$

$$\therefore\quad -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\int_\alpha^\beta \{(x-\beta)^2+(\beta-\alpha)(x-\beta)\}\,dx$$

$$=-\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}+\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot(x-\beta)^2\right]_\alpha^\beta$$

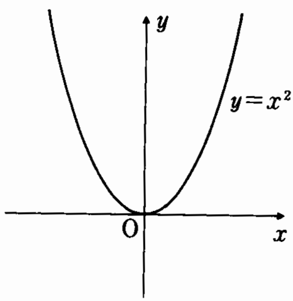
$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

らしんばん

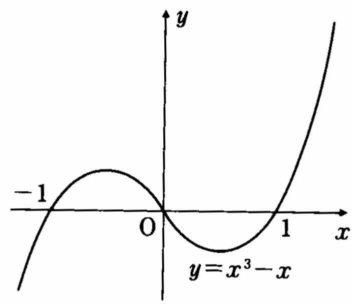
対称積分について———(1)は次のようにまとめられる.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & (f(x)\text{ が偶関数のとき}) \\ 0 & (f(x)\text{ が奇関数のとき}) \end{cases}$$

偶関数：　任意の x で $f(-x)=f(x)$ ———グラフは y 軸対称
奇関数：　任意の x で $f(-x)=-f(x)$ ———グラフは原点対称



偶関数の例



奇関数の例

(2)の証明の「被積分関数の変形」は例題1 (p. 248, 249)でも使ったが, きわめて重要な変形である———(2)の公式は「放物線と直線で囲まれた部分の面積」を求めるときなどに用いられるが, 特に交点の x 座標である α と β が $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ などのように「きれいな数値でないとき」に有効である.

例題 3

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 (t+1)^2dt-\int_1^3 (t-1)^2dt$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^2(x+2)^2dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^2(2x+1)\,dx$

解説　(1) $\displaystyle\int_1^3 (t+1)^2dt-\int_1^3 (t-1)^2dt$

$$=\int_1^3 \{(t+1)^2-(t-1)^2\}\,dt=4\int_1^3 t\,dt=4\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3=16$$

(2) 「対称積分(p. 252, 253)」を使う.

$$\int_{-2}^{2} x^2(x+2)^2dx=\int_{-2}^{2}(x^4+4x^3+4x^2)\,dx$$
$$=2\int_0^2(x^4+4x^2)\,dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{512}{15}$$

(3) $(x-1)^2(2x+1)=(x-1)^2\{2(x-1)+3\}$
$$=2(x-1)^3+3(x-1)^2$$

$$\therefore\quad \int_1^2(x-1)^2(2x+1)\,dx=\int_1^2\{2(x-1)^3+3(x-1)^2\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_1^2=\frac{3}{2}$$

らしんばん

(1)： 「積分区間が一致している定積分」はまとめることができる.

(2)： 「積分区間」が「$-h\leqq x\leqq h$」の形だから,「偶関数」か「奇関数」かどうかに注意する.

(3)： $(x-1)$ で展開してから積分——例題 1 (p. 248)の(4), (5)と同じ.

例題 4

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2|x^2+x-2|\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1|x-a|\,dx$

解 説 いずれも「絶対値のついた関数の定積分」である. このような定積分を扱うには

「積分区間」の中に「被積分関数」の符号をかえる点があるかどうか

を調べ, そのような点があるときは

その点で「積分区間を分割」して考える

ことが考え方の基本である——「定積分についての諸定理(p. 251)」の(4)

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \quad\cdots\cdots①$$

$\longleftarrow$ a, b, c の大小関係は任意!!

は, そのための定理であると考えてよい.

(1) 「被積分関数 $f(x)$」は「積分区間」

$0\leqq x\leqq 2$

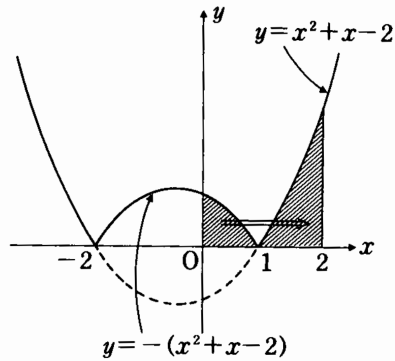
の範囲で

$$f(x)=|x^2+x-2|$$
$$=\begin{cases} -(x^2+x-2) & (0\leqq x\leqq 1) \\ x^2+x-2 & (1\leqq x\leqq 2) \end{cases}$$

であるから，前述の①で

$a=1,\quad b=2,\quad c=1$

として「積分区間」を「$0\leqq x\leqq 1$」と「$1\leqq x\leqq 2$」に分割して考える——「積分区間」は「定積分」の定義域である!!



このことを丁寧に書けば

$$\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx=\int_0^1 \underbrace{|x^2+x-2|}_{-(x^2+x-2)}dx+\int_1^2 \underbrace{|x^2+x-2|}_{x^2+x-2}dx$$

$$=\int_0^1 -(x^2+x-2)\,dx+\int_1^2 (x^2+x-2)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=3$$

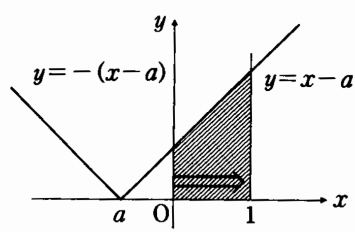
(2)「被積分関数」に「積分変数 x」と関数のない文字「a」がはいっているので，「a の値」の与え方によって，「被積分関数」と「積分区間」の関係が違ってくる——「a の値」によって「場合を分けて」考えなければならない.

$$I=\int_0^1 |x-a|\,dx$$

とおくと

(i)　$a\leqq 0$ のとき——　〈図1〉

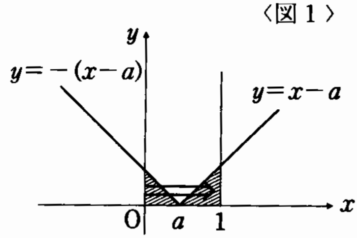
$$I=\int_0^1 (x-a)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-a\quad (a\leqq 0)$$



〈図1〉

(ii)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき——〈図2〉

$$I=\int_0^a -(x-a)\,dx+\int_a^1 (x-a)\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_0^a+\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_a^1$$



〈図2〉

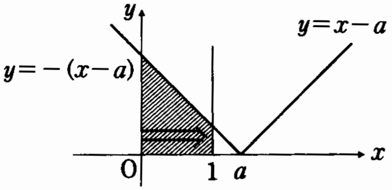
$$=a^2-a+\frac{1}{2} \quad (0\leqq a\leqq 1)$$

(iii) $a\geqq 1$ のとき——— 〈図３〉

$$I=\int_0^1 -(x-a)\,dx$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-a\right)$$

$$=a-\frac{1}{2} \quad (a\geqq 1)$$



〈図３〉

らしんばん

➡ (1), (2)とも「視覚的に」了解しておきたいのでグラフを描いて説明したが，とりあえずのところ「斜線を引いた部分」を単純に(？)「面積」だと思ってもらっては困る．

「定積分の定義」は p. 250，251で述べたように，あくまでも

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a) \quad \longleftarrow \quad \text{「原始関数」の増分}$$

であって，「定積分」と「面積」との関係については「面積は定積分で表わされる(p. 265以下)」でキッチリと証明する．

➡ (2)の間違いの例をあげておく．

たとえば

$$x\geqq a\text{ のとき：}\quad I=\int_0^1|x-a|\,dx=\int_0^1(x-a)\,dx=\cdots\cdots\cdots$$

$$x<a\text{ のとき：}\quad I=\int_0^1|x-a|\,dx=\int_0^1-(x-a)\,dx=\cdots\cdots\cdots$$

などは「典型的な間違いの例」である———理由は本文の説明と比較すればわかることであるが，「積分区間(被積分関数の定義域)」と「被積分関数の形」との関係がキチンととらえられていないからである．

また

$$I=\int_0^1|x-a|\,dx=\left|\int_0^1(x-a)\,dx\right|$$

などの間違いの例もある．

本問では「被積分関数」の中に使われている文字に「a(定数らしく見える)」を用いるからまだよいが，たとえば「t(変数らしく見える)」を用いて

$$I=\int_0^1|x-t|\,dx$$

などとすると「積分変数 x」を「t」にとり違える混乱もおきてくる．

「どの関数」を「どの変数」について積分しているか

ということについて，つねに意識的であることが大切である．

――あらためて本問(2)を考えてみよう.

(i) ⟶ **「積分区間の分割」を考えなくてよいから最も簡単**である.

(ii) ⟶ **「積分区間の分割」を考えるので最もメンドウ**である.

(iii) ⟶ **式の形で見る限り「(i)の結果」にマイナスをつけたもの**である.

どうやら答案を書くときは，メンドウな(ii)を「あとまわし」にして

(i) ⟶ (iii) ⟶ (ii)　あるいは　(iii) ⟶ (i) ⟶ (ii)

の順序で書くとよいことがわかる.

(2)の**「積分区間の上限」**を**「文字 a」**で表したものについても説明しておこう.

たとえば

次の定積分を計算せよ.

$$\int_1^a |t-2|\,dt \quad (=J\text{ とおく})$$

これも「積分区間」と「被積分関数の形」をよくにらんで「積分区間の分割」を考えなくてよい場合があれば，その場合から書きはじめるとよい.

(i)　**$a \leqq 2$ のとき**――〈図1〉

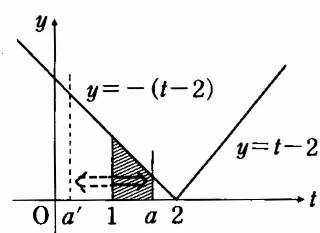
この場合は「積分区間の分割」は考えなくてよい.

$$J=\int_1^a |t-2|\,dt$$

$$=\int_1^a -(t-2)\,dt$$

$$=-\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_1^a$$

$$=-\frac{a^2}{2}+2a-\frac{3}{2}\quad (a\leqq 2)\quad \cdots\cdots(**)$$



〈図1〉

(ii)　**$a>2$ のとき**――〈図2〉

この場合は**「$x=2$」**で**「積分区間」**を**「分割」**して考えなくてはならない.

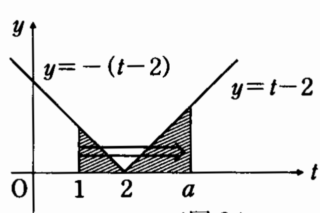
$$J=\int_1^a |t-2|\,dt$$

$$=\int_1^2 |t-2|\,dt+\int_2^a |t-2|\,dt$$

$$=\int_1^2 -(t-2)\,dt+\int_2^a (t-2)\,dt$$

$$=-\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_1^2+\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_2^a$$

$$=\frac{1}{2}a^2-2a+\frac{5}{2}\quad (a\geqq 2)$$



〈図2〉

となる.

——このとき，この(i)について少し注意しておかなければならないことがある．それは「**a の値**」が，「**〈図1〉の a'**」のように「**積分区間の下限の値：1**」より小さいときでも「**場合分け**」の必要がないということ——これもよくある間違いの例である．その理由は「積分区間の上限の値：a」が「下限の値：1」よりも大きくなるだけのハナシで「**被積分関数の形はこの積分区間でつねに同じ**」だからである．

したがって，この場合の「定積分 J の値」は「負」にはなるが(＊＊)を「a の関数」とみる限り全く同じ形になることは「あたりまえ」のことである．

「$a<1$」のときを

$$J=\int_a^1 |t-2|\,dt$$

$$=\int_a^1 -(t-2)\,dt\cdots\cdots\cdots$$

とやる間違いが多いのは，少なからず「面積を求める計算」の「シッポ」を引きずっているわけで，

「定積分の計算」では「右から左に向って積分する」こともあり得る

ことをシッカリ了解しておかなければならない．

3 「積分」で定義された関数

「積分」を微分する

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

解　説　$f(t)$ の原始関数の1つを $F(t)$ とすると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}$$

$$=f(x)$$

である．

らしんばん

➡ この証明から，x の関数「$\int_a^x f(t)\,dt$」を「$G(x)$」とおくと

$$G'(x)=f(x)$$

だから $G(x)$ は $f(x)$ の「不定積分」であることがわかる．

例題 5

(1)　$f(a)=\int_0^1(x+a)^2dx$ を最小にする a の値を求めよ．

(2)　$f(x)=\int_0^x(3t-1)(t-1)dt$ の極値を求めよ．

解　説　(1)　$f(a)=\int_0^1(x+a)^2dx$

$$=\int_0^1(x^2+2ax+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+ax^2+a^2x\right]_0^1=a^2+a+\frac{1}{3}$$

$\therefore\quad f(a)=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{2}}\ \left(\textbf{最小値：}\ \boldsymbol{\frac{1}{12}}\right)$

(2)　前ページに述べた「定理」より

$f'(x)=(3x-1)(x-1)\ \longleftarrow\ \boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)}$

$$f(x)=\int_0^x(3t^2-4t+1)dt$$

$$=\left[t^3-2t^2+t\right]_0^x$$

$$=x^3-2x^2+x$$

x		$\frac{1}{3}$		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値：　$\boldsymbol{f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}}$

極小値：　$\boldsymbol{f(1)=0}$

らしんばん

➡ (1)では「$\boldsymbol{f(a)}$ を最小にする $\boldsymbol{a}$ の値」を求めるのが目的であるから，「$\boldsymbol{a}$ に注目」しながら「$\boldsymbol{x}$ で積分」することに慣れてもらいたい．これを

$$f(a)=\int_0^1(x+a)^2dx\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$=\left[\frac{(x+a)^3}{3}\right]_0^1=\frac{(1+a)^3-a^3}{3}$$

とやると，$(1+a)^3$ を展開し，さらに約分して「$\boldsymbol{a}$ の降べきの順に整理する」という手間がかかる．$(*)$を「$\boldsymbol{a}$ に注目」したときは

$$\int_0^1(x+a)^2dx=\int_0^1(x^2+2ax+a^2)dx$$

$$=\underbrace{\int_0^1x^2dx}_{\underset{A(\text{定数})}{\|}}+2a\underbrace{\int_0^1xdx}_{\underset{B(\text{定数})}{\|}}+a^2\underbrace{\int_0^1dx}_{\underset{C(\text{定数})}{\|}}$$

のように，「a をインテグラルの外に出す」方向で式変形を進めるとよい．

たとえば

> 2 次式 $f(x)$ を
>
> $$f(x)=x^2+ax+b$$
>
> とするとき，任意の 1 次式 $g(x)$ に対してつねに
>
> $$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx=0$$
>
> が成り立つように定数 a，b の値を求めよ．

$g(x)$ を

$$g(x)=px+q \quad (p,\ q\ \text{は任意})$$

とおくと

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)(px+q)\,dx \longleftarrow \left(\text{マトモに展開しないこと!!}\right)$$

$$=p\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)\,dx+q\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)\,dx \longleftarrow \left(p,\ q\ \text{に注目して式変形!!}\right)$$

$$=2p\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1+2q\left[\frac{x^3}{3}+bx\right]_0^1 \longleftarrow \text{対称積分(p. 252, 253)}$$

$$=\frac{2}{3}ap+2\left(\frac{1}{3}+b\right)q=0$$

これが任意の p，q に対して成立(p，q について恒等式)するための条件は

$$\frac{2}{3}a=0,\ 2\left(\frac{1}{3}+b\right)=0 \longrightarrow a=0,\ b=-\frac{1}{3}$$

➡ (2)は「極値」を求めるのだから結局は

$$\int_0^x(3t-1)(t-1)\,dt=\int_0^x(3t^2-4t+1)\,dt$$

$$=\left[t^3-2t^2+t\right]_0^x$$

$$=x^3-2x^2+x\ \ (=f(x))$$

を計算しなければならないが，これを先にやると $f'(x)$ を求めて，さらに因数分解をしてから「増減表」を書くハメになる．

「積分区間の上限の x」に注目して

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x(3t-1)(t-1)\,dt=(3x-1)(x-1)$$

を先にやれば，すぐに増減表が書ける．まして問題文が

「極値を与える x の値」を求めよ

のように，「極値そのもの」を求めさせるものでなければ，実際の積分計算はやらなくてすむ場合もある．

例題 6

すべての実数 x に対して次の関係が成り立つような多項式 $f(x)$ を求めよ.

(1)　$f(x)=x^2+\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt$

(2)　$xf(x)=\frac{3}{2}x^4-3x^2+4+\int_2^x f(t)\,dt$

解　説　(1)　$f(x)=x^2+\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt$　……………………①

———まず「積分変数が t である」ことをシッカリと見きわめる．したがって「t 以外の変数である x」をインテグラルの外に「追い出す」ことがとりあえずの作業となる．すなわち

$$\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt=\int_0^1 \{xf(t)-tf(t)\}\,dt$$
$$=x\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 tf(t)\,dt$$

である．

ここで，$f(x)$ が定関数(今のところ具体的にはわからない)であることを考えると

$$\int_0^1 f(t)\,dt=A\ (\text{定数})\quad\cdots②,\qquad \int_0^1 tf(t)\,dt=B\ (\text{定数})\quad\cdots③$$

とおくことができるから①は

$f(x)=x^2+Ax-B$　⟵——　$f(x)$ の形がきまった!!

で表される———あとは A，B を決めればよい．

これを②，③に用いると

$$②:\quad A=\int_0^1 (t^2+At-B)\,dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{A}{2}t^2-Bt\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{A}{2}-B$$
$$\therefore\quad A+2B=\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots④$$

$$③:\quad B=\int_0^1 t(t^2+At-B)\,dt=\int_0^1 (t^3+At^2-Bt)\,dt$$
$$=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{A}{3}t^3-\frac{B}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{A}{3}-\frac{B}{2}$$
$$\therefore\quad 2A-9B=-\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots⑤$$

④, ⑤を連立して A, B について解くと

$$A=\frac{3}{13},\quad B=\frac{17}{78} \qquad \therefore\quad f(x)=x^2+\frac{3}{13}x+\frac{17}{78}$$

(2) $$xf(x)=\frac{3}{2}x^4-3x^2+4+\int_2^x f(t)\,dt \quad \cdots\cdots ①$$

———まず「インテグラルをはずす」ことを考える.

①の両辺を x で微分する———左辺には「積の導関数(p. 194)」, 右辺には「積分を微分する(p. 258)」を用いて

$$f(x)+xf'(x)=6x^3-6x+f(x) \quad \longleftarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

$$\therefore\quad xf'(x)=6x^3-6x$$

これが, すべての x に対して(「$x\fallingdotseq 0$」のときでも)成立するから

$$f'(x)=6x^2-6$$

$$\therefore\quad f(x)=\int(6x^2-6)\,dx=2x^3-6x+C \quad \cdots\cdots ②$$

ところが①で「$x=2$」とすると

$$2\cdot f(2)=\frac{3}{2}\cdot 2^4-3\cdot 2^2+4 \quad \longleftarrow \quad \int_2^2 f(t)\,dt=0$$

$$\therefore\quad f(2)=8$$

これを②に用いると

$$2\cdot 2^3-6\cdot 2+C=8 \qquad \therefore\quad C=4$$

$$\therefore\quad f(x)=2x^3-6x+4$$

らしんばん

➡ 未知の関数を含む方程式を「関数方程式」といい, 本問はその「典型的な例」である.

(1)は慣れるまでは多少の異和感を覚えるかもしれないが実は

$$\int_0^1(x-t)f(t)\,dt=x\underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{A\,(\text{定数})}-\underbrace{\int_0^1 tf(t)\,dt}_{B\,(\text{定数})} \quad \cdots\cdots (*)$$

とおいたときにハナシはおわる———その「異和感」はどこから来るか.

それは(＊)の定数 A, B をどうナットクするかの問題のように思われる.

A で説明すると

$$F'(t)=f(t) \quad \longleftarrow \quad F(t)\ \text{は}\ f(t)\ \text{の「原始関数」}$$

とすると

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_0^1=F(1)-F(0) \quad \longleftarrow \quad F(1)\ \text{も}\ F(0)\ \text{も定数!!}$$

したがってこれは定数であり，B についても同様に説明される．

次のようにまとめておこう．

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ を含むとき} \longrightarrow \int_a^b f(t)=k\ (\text{定数})\text{とおく}$$

つい「ウッカリ」と「変数 x」をインテグラルの中に入れたまま

$$\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt=k \quad (\text{定数})$$

などとおいてはならないので，くれぐれも注意しなければならない———「形式」だけを覚えて使うだけではなく，「内容」をしっかりと了解しておくことが大切である．

➡ (2)では特徴的なことは**「積分区間の上限が変数 x で表されている」**ことであって，このような場合は**「両辺を x で微分する」**とインテグラルがはずれて簡単にいく場合が多い．

$$\int_a^x f(t)\,dt \text{ を含むとき} \longrightarrow \text{両辺を } x \text{ で微分する．}$$

は1つの方法として覚えておくとよい．

また，このときの「初期条件(本問では $f(2)=8$)」は，特別の表示がないのでわかりにくいが，この**「$x=2$」という値は本文①の右辺のインテグラルの部分が「0となって消えるように選んだ値」**で，本問のように与えた条件から読み取らせるようになっている場合もある．

なお，本文の②では「積分定数 C」を用いて $f(x)$ を「不定積分」で表し，そのあとで「$f(2)=8$」から「C の値」を決定したが

$$\int_2^x f'(t)\,dt=\Big[f(t)\Big]_2^x=f(x)-f(2)$$

であることに気がつくと

$$\begin{aligned} f(x)&=f(2)+\int_2^x f'(t)\,dt \\ &=8+\int_2^x (6t^2-6)\,dt=8+\Big[2t^3-6t\Big]_2^x=2x^3-6x+4 \end{aligned}$$

のように表すことができる———知っていると便利なときもある．

➡ (2)で $f(x)$ を求めるもう1つの方法としては，$f(x)$ が多項式であることから**「その次数を決定する方法」**が考えられる．本問を例に説明すると右辺の

$$\frac{3}{2}x^4-3x^2 \longleftarrow \quad 4\text{次式!!}$$

から，$f(x)$ が「2次以下」ということはあり得ない．もし「3次式」とすれば，「次数」についての「つじつま」は合うが，まだそれとは断定できない———「4次以上」にはなり得ないことを何らかの形で説明しなければならないからである．

そこで $f(x)$ を「n ($\geqq 4$)次式」とすると，今度は両辺がともに「$(n+1)$ 次式」

となって,「n を決定する手がかり」がなくなってしまう———どうしてもこの方法でやろうとすると**「多項式の基本の考え方」**にたちもどって考えなくてはならなくなる.

すなわち,一般に**「n 次式 $f(x)$」**は

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\ \left(=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right)$$

で表される———とりあえず,両辺の「最高次の係数」のみに着目して「係数比較」をする方向でハナシを進めてみよう———ただし「$n\geqq4$」とする.

本文①の左辺と右辺の「$(n+1)$ 次」の項は

$$a_nx^{n+1}=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\qquad\therefore\quad(n+1)a_n=a_n\qquad\therefore\quad na_n=0$$

ここで

$$n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots\ \longrightarrow\ a_n=0$$

となり,結局求める $f(x)$ は「3 次式」以外にはないことがわかる.そこで

$$f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

とおいて①の両辺に代入し,係数比較すれば,ともあれ A, B, C, D の値が求まり $f(x)$ は決定する.しかし,この方法はなかなかメンドウな場合も多いので,**「両辺を x で微分してもうまくいかないときの方法」**としてあたためておくことにしたい.

第2節
積分とその応用

「面積」や「体積」と「定積分」との関係について説明する.

(i)「面積」と「定積分」———まず「微積分学の基本定理」を説明し,「面積」が「定積分(微分の逆演算)」で与えられることを確認する.

(ii)「面積」や「体積」を求める———「定積分」を用いて実際に「面積」や「体積」を求める方法を研究する.

(iii)「物理への応用」———ここで改めて「運動と変化」をとらえる手段としての「微積分」を考えてみる.

1　面積と定積分

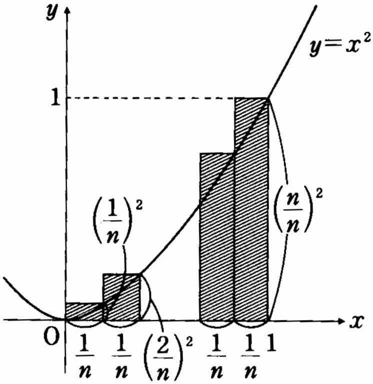
簡単な例で説明する.

たとえば

$$y=x^2,\quad x=1,\quad y=0$$

で囲まれた部分の面積 S を求めるにはどうすればよいか.

それには「$0 \leqq x \leqq 1$」の区間を「$\boldsymbol{n}$ 等分」し,右図のような $\boldsymbol{n}$ 個の長方形を作ることによってそれらの和 S_n を求め,S に近似させる方法が考えられる.



$$S_n=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2$$
$$+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)\times\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

であるが，ここで「n を限りなく大きくしていく」と，「$\frac{1}{n}\to 0$」であるから，「$S_n\to\frac{1}{3}\,(=S)$」として面積 S を求めることができる———このような面積の求め方を「区分求積法」という．

一方，x^2 を「0 から 1 まで」積分すると

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

で，上の結果と一致する———これは偶然の一致だろうか？

まず，この疑問を解明しておかなければならない．

———「面積」が「定積分」で与えられることは，次の定理によって保証される．

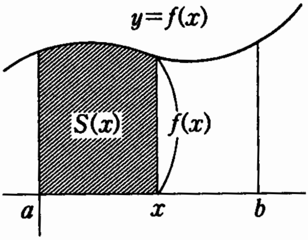
「面積」は「定積分」で表される

関数 $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で $f(x)\geqq 0$ とする．

このとき，区間 $[a,\ b]$ を動く変数 x をとり，図のように曲線

$$y=f(x)$$

と「x 軸」との間で，「a から x までの間の面積」を考えると，これは x の関数であるから $S(x)$ と書くことができる．このとき



(i) $S(x)$ は $f(x)$ の「原始関数」である．

(ii) 「a から b の間の面積 $S(b)$」は「定積分」を用いて

$$S(b)=\int_a^b f(x)dx$$

で表される．

ただし，区間 $[a,\ b]$ とは x の区間 $a\leqq x\leqq b$ のことである．

解　説 (i) 示すべきことは

$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

ということである．

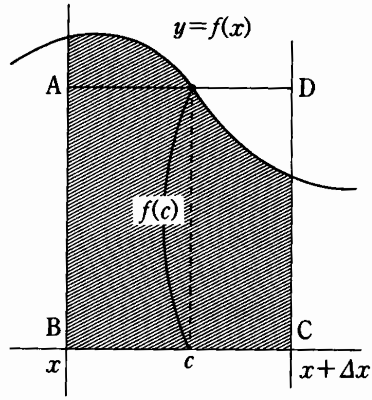
「導関数の定義(p. 192, 193)」にしたがって左辺を計算すると

$$\frac{d}{dx}S(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

であるが，このとき

$$\boldsymbol{\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)}$$

は「右図の斜線部分の面積」のことである．



このときBとCの間に適当な値 c をとり

$$x<c<x+\Delta x\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

とすると，「底辺が $\boldsymbol{\Delta x}$，高さが $\boldsymbol{f(c)}$ の長方形ABCD」の面積を「$\boldsymbol{\Delta S}$」に等しくすることができる．

すなわち

$$\Delta S=f(c)\cdot\Delta x$$

であるからこれを①に入れると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}S(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x)\end{aligned}$$

⟵ ②で「$\Delta x\to 0$」のとき「$c\to x$」

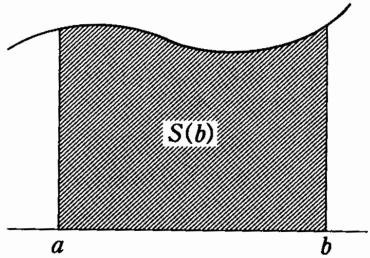
が成り立つ――― $\Delta x<0$ のときは「$x+\Delta x<c<x$」として全く同じことがいえるから省略する．

(ii)　ここではじめて「定積分」と「面積」の関係がハッキリする．

(i)で求めた関係は

$$S'(x)=f(x)$$

で，これは $S(x)$ が $f(x)$ の「原始関数」であるということに他ならない．



このことから

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx&=\Big[S(x)\Big]_a^b\\&=S(b)-\underbrace{S(a)}_{=0}=S(b)\end{aligned}$$

($S(a)$ は「a から a まで」の面積だから当然「0」である．)

らしんばん

➡ この定理(i)を「微積分学の基本定理」という―――

これは「ぜひとも」理解しておいてもらいたい定理の１つである――このことによって「メンドウ」な「数列の和の極限」として求めた「面積」が「定積分（微分の逆演算）」によって計算すればよい(p. 266では１行ですんだ!!)ことが約束されたわけである．

最も基本的で重要なことは，本文(i)で示した

$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

言いかえると

「$S(x)$」は「$f(x)$」の原始関数である

ということであって，われわれとしてはここではじめて**「微分する」ということと，「面積を求める」ということとが１つのことがらの「表(オモテ)」と「裏(ウラ)」のような関係にあることを確認できたわけである**――このことを発見したのは「ニュートン」と「ライプニッツ」である．この２人に脱帽して拍手を送りたいところである．

➡ 上の定理では

$$y=f(x) \longrightarrow [a,\ b] \text{ で } f(x)\geqq 0$$

として説明した―― 一般の場合はどう考えればよいか．

一般の場合について

「$a\leqq x\leqq b$」において，「$f(x)\geqq g(x)$」のとき，２つの曲線

$$y=f(x),\qquad y=g(x)$$

および

$$x=a,\qquad x=b$$

とで囲まれる部分の面積 S は

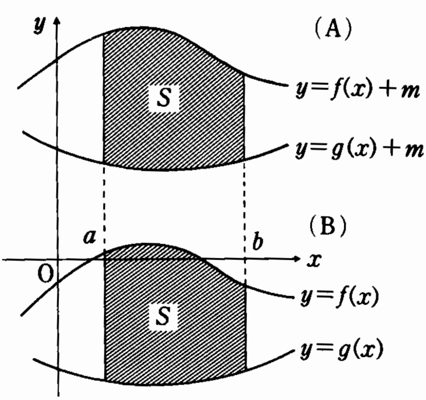
$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

で与えられる．

もし，$f(x)$ や $g(x)$ に負の部分があるときが問題になる．そのときは曲線が x 軸より下側にあらわれることのないように「十分大きな値 m」だけ全体をもちあげて考える――右図でいうと「(B)の関係」を m だけもち上げて「(A)の関係」としてからこの定理を用いればよい．すなわち，十分大きな m に対して

$$f(x)+m\geqq g(x)+m\geqq 0$$

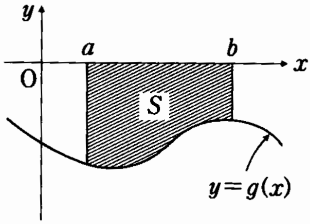
とすることができるから「平行移動に



よって面積がかわらない」ことに注意すれば

$$S=\int_a^b\{f(x)+m\}dx-\int_a^b\{g(x)+m\}dx$$

$$=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$



特に

$f(x)\equiv 0$　（$f(x)$ がつねに 0）

のときは

$g(x)\leqq 0$　（$a\leqq x\leqq b$）

で

$S=-\int_a^b g(x)dx$ ⟵ 「$\int_a^b g(x)dx$」が負の値!!

である．

例題 7

曲線 $y=x(x-2)(x-4)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

解　説　「$0\leqq x\leqq 2$ のとき $y\geqq 0$」，「$2\leqq x\leqq 4$ のとき $y\leqq 0$」であることに注意する．

また

$$x(x-2)(x-4)=(x-2+2)(x-2)(x-2-2)$$

$$=(x-2)^3-4(x-2)$$

だから

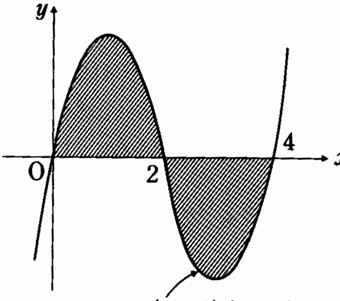
$$S=\int_0^2\{(x-2)^3-4(x-2)\}dx$$

$$-\int_2^4\{(x-2)^3-4(x-2)\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-2)^4}{4}-2(x-2)^2\right]_0^2$$

$$-\left[\frac{(x-2)^4}{4}-2(x-2)^2\right]_2^4$$

$$=8$$



らしんばん

➡ 与えられた y の式を展開して

$$x(x-2)(x-4)=x^3-6x^2+8x$$

として積分してもよいが，上のような変形に慣れておくことも大切である．

➡ グラフの概形———特に「軸との交点」,「軸との上下関係」を確認し,「被積分関数」,「積分区間」をしっかりと定めること.

例題 8

点 (1, 2) を通る傾き m の直線と，放物線 $y=x^2$ によって囲まれる部分の面積 S を m を用いて表せ.

解　説　点 (1, 2) を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y-2=m(x-1) \qquad \therefore \quad y=mx-m+2$$

これと「曲線 $y=x^2$」との交点の x 座標は

$$x^2=mx-m+2 \qquad \therefore \quad x^2-mx+m-2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の 2 つの解である———判別式「$D>0$」より①は異なる実数解をもつ.

これをα, β ($\alpha<\beta$) とおくと,「解と係数の関係」より

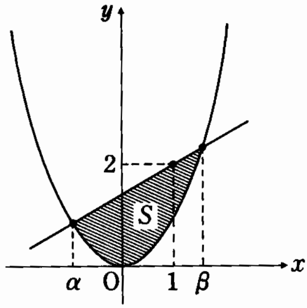
$$\alpha+\beta=m, \qquad \alpha\beta=m-2$$

このことから

$$S=\int_\alpha^\beta \{(mx-m+2)-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \text{(p. 252, 253)} \quad \cdots ②$$



ところで

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=m^2-4(m-2)=m^2-4m+8$$

$$(=(m-2)^2+4>0) \quad \cdots\cdots ③$$

であるから，これを②に入れて

$$S=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}(m^2-4m+8)^{\frac{3}{2}}$$

らしんばん

➡ 本文ではいきなり

$$\int_\alpha^\beta \{(mx-m+2)-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

と書いたが，これは本文①で表される 2 次方程式の左辺が，2 つの解 α, β を用いて

$$x^2-mx+m-2=(x-\alpha)(x-\beta) \quad (\because \quad m=\alpha+\beta,\ m-2=\alpha\beta)$$

と因数分解されることから「被積分関数」を

$$(mx-m+2)-x^2=-(x-\alpha)(x-\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

と変形したものである．

このことをグラフの上で説明すると

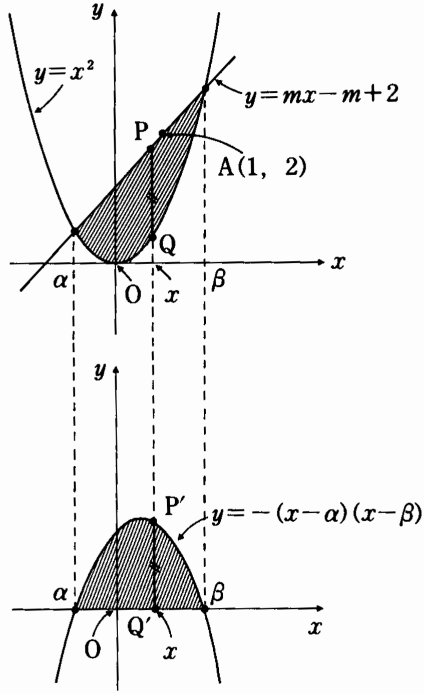
((＊)の左辺) ⟵ **PQ** の長さ

((＊)の右辺) ⟵ **P′Q′** の長さ

を表し，(＊)は区間 $[\alpha,\ \beta]$ のすべての x の値に対して

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{P'Q'}$$

が成り立つことを意味している．



一般に，２つの図形 S と S' があって，これをある直線(この場合は y 軸)に平行に切ったとき，**つねに切り口の長さが等しければ，S と S' は見かけの形状が違っても面積が等しいことが知られている**――これを「**カヴァリエリ(1598～1647 イタリア)の原理**」という．このハナシは立体の断面積を積分して体積を求める場合も同様である．

本文②では

$$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

としたが，実際の答案では，なるべく「**式変形の過程(p. 252)**」をキチンと説明する方がよい．

このような公式を準備しておく理由は，この $\alpha,\ \beta$ が「きれいな数値」として求められないとき，たとえば本問では

$$\alpha=\frac{m-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}, \qquad \beta=\frac{m+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$$

で，これを「積分した式(３次式)」に代入して計算する「メンドウ」を避けるためであり，いきなり(＊)を既知のものとして

$$S=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

とやるのは少し乱暴である．

しかし，大きな問題の中で，この部分の計算が全体に対して大きな意味を占めないような場合はその限りではない――状況に応じて使いわけなくてはならない．いずれにしても「**答えが先にわかってしまう**」ので，実に「**ありがたい**」公式である．

本文③から「傾き m の値」をいろいろに変化させるとき，「$m=2$」で面積が最小であることがわかる――「目見当」ではわかりにくいことがらも「計算でシッカリ確認する」ことができる．

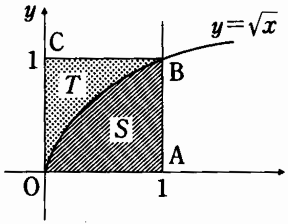
例題 9

曲線 $y=\sqrt{x}$ と x 軸，$x=1$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

解　説　$y=\sqrt{x}$ のグラフは

$$y^2=x \quad (y\geqq 0)$$

と同じで，題意の図形の面積は右図の斜線部分の面積 S を求めればよい．



x 軸方向に積分すると

$$S=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

で，これは「基礎解析」の範囲外になる．

そこで，図の「正方形 OABC」の面積 1 から，「図形 OBC の面積」T を引けばよいと考えて

$$S=1-T=1-\int_0^1 xdy$$

$x=y^2$ だから

$$S=1-\int_0^1 y^2dy=1-\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

らしんばん

面積を求めるとき，多くの場合は「x 軸方向の積分」だが，理論的には「y 軸方向の積分」でもよいわけで，どちらが計算しやすいかを考えてみることも大切である．本問のように y 軸方向の積分が簡単な場合もある．

例題 10

放物線 $y=x^2-1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2-1)$ から放物線 $y=x^2$ に引いた 2 本の接線と，放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積は，P の位置に関係なく一定であることを示せ．

解　説　$y=x^2,\quad y'=2x$

これより，この放物線上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

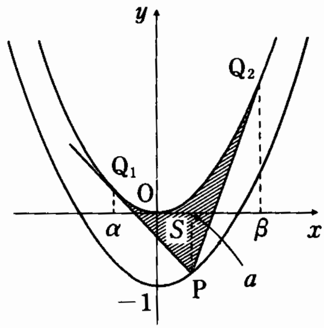
$$y-t^2=2t(x-t) \qquad \therefore \quad y=2tx-t^2$$

これが$\mathrm{P}(a,\ a^2-1)$を通るから

$$a^2-1=2ta-t^2 \qquad \therefore \quad t^2-2at+(a+1)(a-1)=0$$

$$\{t-(a-1)\}\{t-(a+1)\}=0 \qquad \therefore \quad t=a-1,\ a+1$$

そこで，$\alpha=a-1$，$\beta=a+1$とおくと



$$S=\int_\alpha^a\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx$$
$$+\int_a^\beta\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$$
$$=\int_\alpha^a(x-\alpha)^2dx$$
$$+\int_a^\beta(x-\beta)^2dx \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^a+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_a^\beta \quad \cdots\cdots\cdots ②$$
$$=\frac{(a-\alpha)^3}{3}-\frac{(a-\beta)^3}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \quad （一定）$$

らしんばん

➡ Pがどのような点であるかもう少しくわしく説明しておく．放物線を

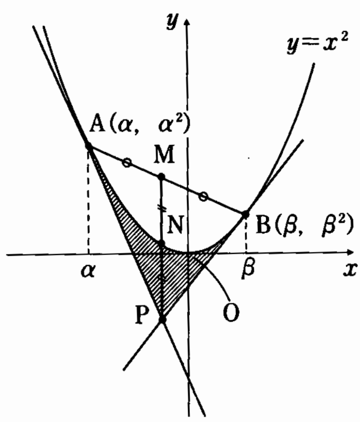
$$y=x^2 \longrightarrow y'=2x$$

とおくと，点$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$における接線の方程式はそれぞれ

$$y=2\alpha x-\alpha^2$$
$$y=2\beta x-\beta^2$$

で，これらの交点である点Pの座標は2式を連立させて解くと

$$\mathrm{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\quad \alpha\beta\right)$$



よって，右図の斜線部分の面積は，本問の「aの値」が「$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$」で与えられることから

$$\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$$
$$=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

となる———これは覚えておいてもよい．

なお，放物線「$y=x^2$」と線分 AB とで囲まれる部分の面積は，前問の結果から「$\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$」であるから，**放物線「$y=x^2$」は △PAB の面積を「1：2」に分けている**ことがわかる．

また，線分 AB の中点を M，線分 MP の中点を N とすると

$$\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$$

であるから，N の y 座標は

$$y=\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\alpha\beta}{2}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

で N が放物線「$y=x^2$」上の点であることもわかる．

このハナシに関連して紹介しておきたい「問題」がある．

たとえば

2 つの放物線

$$y=x^2+ax+b,\quad y=x^2+cx+d,\quad a\neq c$$

と，これらの放物線の共通接線とで囲まれる面積を，接点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ で表せ．

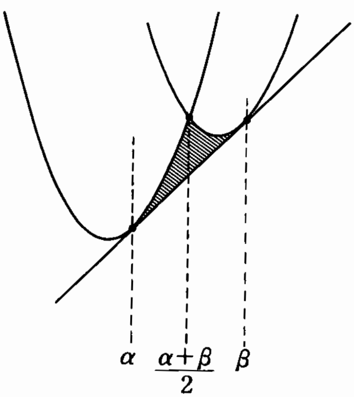
2 つの放物線の交点の x 座標は

$$x^2+ax+b=x^2+cx+d \qquad \therefore\ x=-\frac{d-b}{c-a}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

次に共通接線の方程式を

$$y=mx+n$$

とし，接点の x 座標をそれぞれ，α，β $(\alpha<\beta)$ とすると



(i) $x^2+ax+b=mx+n$

$\longrightarrow x^2-(m-a)x+b-n=0$

$\therefore\ x^2-(m-a)x+b-n$

$=(x-\alpha)^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l} m-a=2\alpha \\ b-n=\alpha^2 \end{array}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\ (**)$$

(ii) $x^2+cx+d=mx+n$

$\longrightarrow x^2-(m-c)x+d-n=0$

$\therefore\ x^2-(m-c)x+d-n=(x-\beta)^2$

$=x^2-2\beta x+\beta^2$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} m-c=2\beta \\ d-n=\beta^2 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

そこで(**)と(***)の第1式，第2式で m，n を消去すると

$$c-a=-2(\beta-\alpha)$$
$$d-b=\beta^2-\alpha^2$$

となるから，これらを(*)に代入すると

$$x=-\frac{\beta^2-\alpha^2}{-2(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ゆえに，面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2+ax+b-(mx+n)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta\{x^2+cx+d-(mx+n)\}dx$$
$$=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta(x-\beta)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

となり，本問と全く同じ積分をすることになるところが面白い――「カヴァリエリの原理 (p. 271)」参照!!

例題 11

(1)　3次関数 $f(x)=4x^3-3x^2-18x$ の極大値および極小値を求めよ．

(2)　定積分 $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx$ を計算せよ．

(3)　(1)のグラフ $y=f(x)$ で，極小となる点における接線と，$y=f(x)$ により囲まれる部分の面積を求めよ．

解　説　(1)　$f'(x)$ は

$$f'(x)=12x^2-6x-18$$
$$=6(x+1)(2x-3)$$

これより，$f(x)$ は右の表のように増減し，極値は次の通りである．

x		-1		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

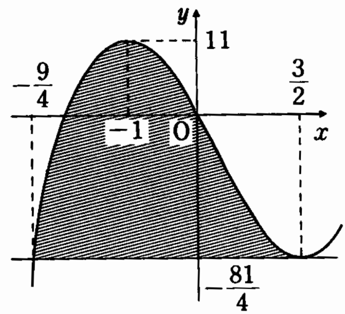
極大値：　$f(-1)=11$

極小値：　$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{81}{4}$

(2)　$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\int_\alpha^\beta(\underline{x-\beta+\beta-\alpha})(x-\beta)^2\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta\{(x-\beta)^3+(\beta-\alpha)(x-\beta)^2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-\beta)^4}{4}+\frac{\beta-\alpha}{3}(x-\beta)^3\right]_\alpha^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

(3) 「$y=-\dfrac{81}{4}$」と「$y=f(x)$」の交点の x 座標は，2式を連立した方程式の実数解であるから



$$4x^3-3x^2-18x=-\frac{81}{4}$$

$$4x^3-3x^2-18x+\frac{81}{4}=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\therefore \quad 4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\left(x+\frac{9}{4}\right)=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2}\ (\text{重解}),\ -\frac{9}{4}$$

このとき，「$-\dfrac{9}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$」で「$f(x)\geqq-\dfrac{81}{4}$」であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-\frac{9}{4}}^{\frac{3}{2}}\left(4x^3-3x^2-18x+\frac{81}{4}\right)dx \quad \cdots\cdots②$$

$$=\int_{-\frac{9}{4}}^{\frac{3}{2}}4\left(x+\frac{9}{4}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx \longleftarrow \text{ここで(2)の結果を用いる.}$$

$$=4\cdot\frac{1}{12}\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{9}{4}\right)\right\}^4=\frac{16875}{256}$$

らしんばん

(2)の α，β はどのようにして求めればよいか――

$$y=4x^3-3x^2-18x, \qquad y=-\frac{81}{4}$$

を連立することによって得られた式①をよくにらんで，これが解 α と β（重解）をもつことから

$$4x^3-3x^2-18x+\frac{81}{4}=4(x-\alpha)(x-\beta)^2 \quad \cdots\cdots(*)$$

として「係数比較」するのが基本であるが，このとき「**β がすでに $\dfrac{3}{2}$ として求まっている**」ことを利用すると，**定数項の比較だけでハナシはすむ**．すなわち

$$\frac{81}{4}=4(-\alpha)\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \therefore \quad \alpha=-\frac{9}{4}$$

で，（$*$）の形の因数分解が簡単にいく――このことはすでに p. 201，202でくわしく説明した．

➡ (2)は(3)の誘導になっている．

これを用いないで(3)を

$$\int_{-\frac{9}{4}}^{\frac{3}{2}}\left(4x^3-3x^2-18x+\frac{81}{4}\right)dx=\left[x^4-x^3-9x^2+\frac{81}{4}x\right]_{-\frac{9}{4}}^{\frac{3}{2}}$$

で計算するのはかなり大変である．

このようなとき「$\dfrac{(\beta-\alpha)^4}{12}$」は威力を発揮するのであるが，この公式を用いるとしても，本問の「(2)の誘導」がついていない場合は，その計算過程をキチンと示してやらなければならない．

➡ **(2)を利用して面積を計算する方法は，「一般の3次曲線とその接線の場合」にもそのまま適用される．**

$y=f(x)$　……………………(＊＊)

とその接線

$y=mx+n$　………………(＊＊＊)

とで囲まれる部分の面積を求めるにはまず(＊＊)と(＊＊＊)を連立して

$f(x)=mx+n$

$\therefore\ f(x)-(mx+n)=0$

この左辺は因数分解されて

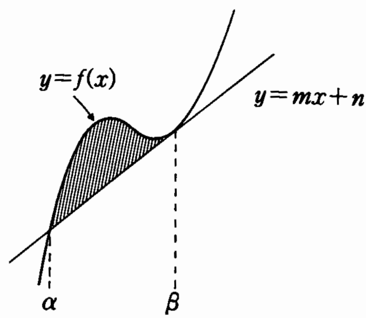
$\boldsymbol{f(x)-(mx+n)=(x-\alpha)(x-\beta)^2}$

(**「x^3の係数」は「1」とした!!**)

となるから，α，βを求めるにはこの両辺を「係数比較」し，「面積」は

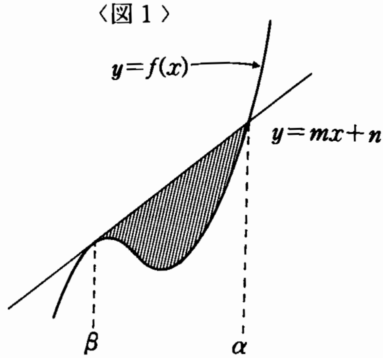
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx$$

を本問(2)にしたがって計算すればよい――〈図1〉



〈図1〉

しかし，**3次曲線とその接線の「位置関係」**としては〈図2〉のような場合もある――このときはどうすればよいか．



〈図2〉

マジメに**「上の接線」から「下の曲線」を引いて積分すると**

$$S=\int_\beta^\alpha\{(mx+n)-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{f(x)-(mx+n)\}\,dx$$ ←―― (**曲線の接線の上下関係と，積分の「上端」と「下端」の入れかえに注意!!**)

$$=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx$$

となり，結局本問(2)の計算を実行すればよいことがわかる．

以上の説明では**「接する方の x 座標を β にとっている」**ことに注目してもらいたい———どちらでもよいが自分で使い易いように統一しておくとよい．

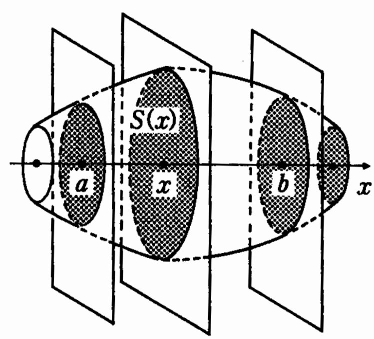
「x^3 の係数」が「負」のときも考え方は同様である．

2 体積

「体積と定積分」の関係についても「面積と定積分」の関係と全く同様に説明される．

「体積」と「定積分」

1つの立体があり，x 軸上の「座標 x」の点を通り，「x 軸に垂直な平面」によるこの立体の「切り口の面積」を $S(x)$ とし，x 座標が「a」と「x」との2点で x 軸に垂直な平面を作り，その間にある立体の体積を $V(x)$ で表すとき



(i) **$V(x)$ は $S(x)$ の「原始関数」である．**

(ii) **$x=b$ とするとき**

$$V(b)=\int_a^b S(x)dx$$

である．

解 説 これは**「面積は定積分で表される**（p. 266以下）」と全く同様にして証明することができるのでここでは証明しない．「面積」の場合の **解 説** を参考にして各自で証明を試みておくとよい．

———これで**「体積」**も**「定積分の計算」**で与えられることになった．

らしんばん

「回転体」について———

立体の中でも「x 軸のまわりに曲線を回転して得られる」ものは，x 軸に垂直な平面による切り口の図形が「円」となり，いくらか特殊な扱いになる．

「回転体」の体積

曲線「$y=f(x)$」と「x 軸」および2直線「$x=a$」,「$x=b$」$(a<b)$で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積は，次の

式で与えられる．

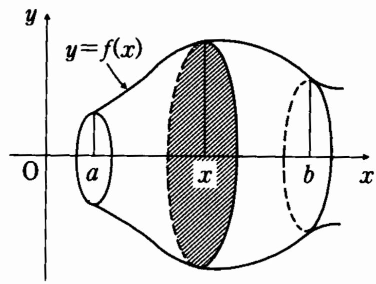
$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

「座標 x」の点を通り，「x 軸に垂直な平面」によるこの立体の切り口は，「半径 $|f(x)|$ の円」である．

したがって，その面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$$

である．これを「a から b まで積分」すれば V となる．



このような立体を「回転体」といい，これに対してそうでないものを「非回転体」という———いずれの場合も「x の関数で表された断面積 $S(x)$ をある区間(たとえば a から b まで)定積分する」ことが基本の考え方である．

なお，曲線 $y=g(x)$ と「y 軸」および2直線「$y=c$」，「$y=d$」($c<d$)で囲まれた図形を「y 軸」のまわりに回転して得られる立体の体積 V は

$$V=\int_c^d \pi x^2 dy$$

$$=\pi\int_c^d \{g^{-1}(y)\}^2 dy \longleftarrow\ g^{-1}\text{ は } g \text{ の「逆関数」のこと!!}$$

で与えられる．

例題 12

(1)　底面積 S，高さ h の「円すい(錐)」の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

であることを証明せよ．

(2)　底面の半径が a である直円柱を，底面の直径を含み，底面と 45° の角をなす平面で切るとき，平面より下の部分の体積を求めよ．

解　説　「非回転体」の例であるこのタイプの問題を扱う基本は

(i)　**立体の様子がよくわかる図を描く**

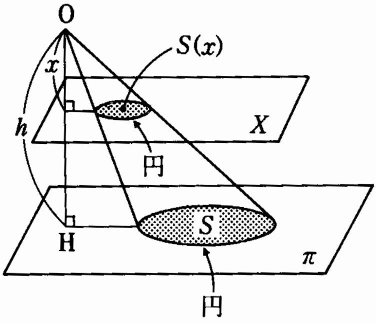
(ii)　**$S(x)$ がなるべく簡単な式になるように座標軸を設定する**

ことである．

(1)　「円すい(錐)」の頂点Oから底面におろした垂線を「x 軸」とし，Oを原点とすれば，x 軸と π (底面を含む平面)との交点Hの座標は「h」であ

る．

このとき，「点 x」で x 軸と垂直な平面 X でこの「円すい(錐)」を切るときの「切り口の面積を $S(x)$」とすると，２つの円は相似で，**「面積比」**は**「(相似比)²の比」**であるから



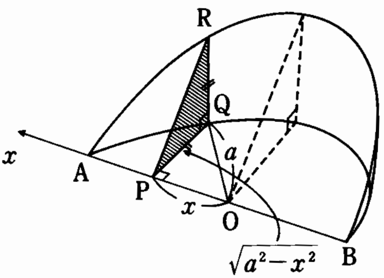
$$\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{h^2} \qquad \therefore \quad S(x)=\frac{S}{h^2}x^2$$

ゆえに，**「体積と定積分(p. 278)」**より

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx$$

$$=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}Sh$$

(2)　**直径 AB を x 軸**とし，原点 O を AB の中点にとる．x 軸上の１点 P で x 軸に垂直な平面でこの立体を切るときの「切り口の面積 $S(x)$」は Q，R を右図のようにとると



$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}^2$$

$(\angle\mathrm{QPR}=45^\circ \qquad \therefore \quad \mathrm{PQ}=\mathrm{QR})$

ところで

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OP}^2=a^2-x^2 \qquad \therefore \quad S(x)=\frac{1}{2}(a^2-x^2)$$

ゆえに，求める体積 V は

$$V=\int_{-a}^a S(x)\,dx=\int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2-x^2)\,dx$$

$$=\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$$

らしんばん

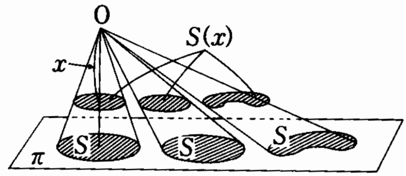
➡ (1)は小学校以来よく用いてきた「円すい(錐)」の体積を求める公式であるが，ここではじめて「証明らしい証明」が与えられたことになる．

本問では，平面 π 上にある底面を「円」としてハナシを進めたが，「少しいじけた閉曲線」，あるいは「多角形」であっても考え方は同様である．

要するに，**２つの立体を平面 π に平行な平面で切るとき，それらの断面積が**

つねに等しければ，立体の見かけの形状が違っても体積は等しい———「カヴァリエリの原理」については p. 271 で説明した———の典型的な例である．

例をあげておこう．



たとえば

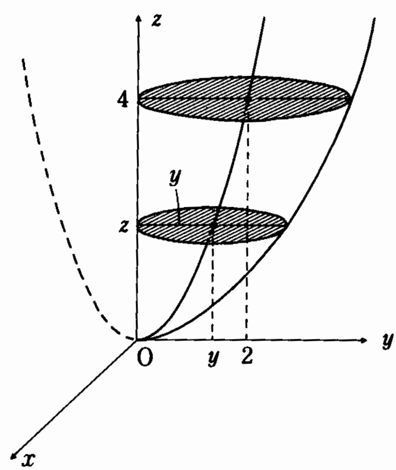
ある立体を xy 平面に平行な平面で切るときの断面の図形は円で，その中心は放物線

$$z=y^2\ (y\geqq 0),\qquad x=0$$

上にあり，その半径は y であるという．この立体の $0\leqq z\leqq 4$ の部分の体積を求めよ．

この立体図形の概形は右図のようになるから z を定めるときの断面積 $S(z)$ は

$$S(z)=\pi y^2$$
$$=\pi z\quad (\because\quad z=y^2)$$
$$\therefore\quad V=\int_0^4 S(z)\,dz=\int_0^4 \pi z\,dz$$
$$=\pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$



となり，結局この立体は回転体ではないが，放物線「$z=y^2$」を z 軸のまわりに回転して得られる立体の $0\leqq z\leqq 4$ の部分の体積と同じになる．

(2)については「上から見た図」と「横(軸方向)から見た図」に分けて考えるとわかり易い．

また本文では「直径 AB を x 軸」にとって，「それに垂直な平面で切った切り口の面積」を「積分」して体積を求めたが，**軸のとり方によってあとの処理が「メンドウ」になることもある．**

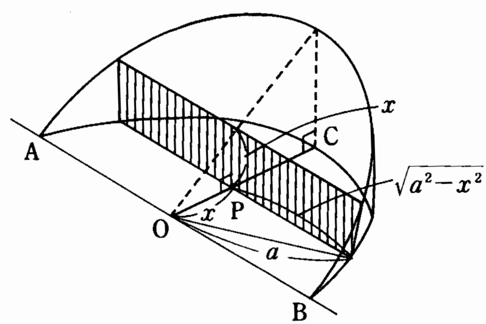
たとえば，O を通り AB に垂直な底面の半径 OC を軸にとる．これに垂直な平面で切ると「切り口は図のような長方形(右図の斜線部分)」となり

$$\mathrm{OP}=x$$

とおくと，その面積は

$$S(x)=2x\sqrt{a^2-x^2}$$

となるので



$$V=\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

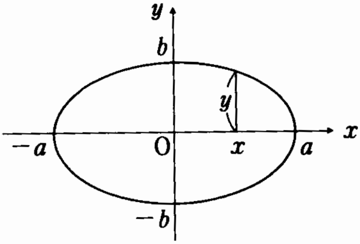
となる．これは「基礎解析」の範囲では計算できない．あるいは，O を通り底面に垂直な直線を軸にとることも考えられるが，これだともっとむずかしくなる．

例題 13

(1)　だ(楕)円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(2)　2 曲線 $y=2x^2$，$y=x^2+1$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解　説　(1)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



$$\therefore\quad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

ゆえに

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,dx$$

$$=\pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

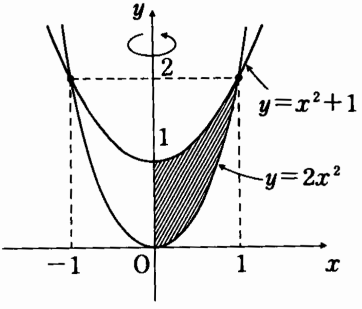
(2)　2 曲線の交点の y 座標は 2 式を連立して

$$y=2(y-1)\qquad\therefore\quad y=2$$

また，2 曲線の式を

$$y=2x^2$$
$$y=x^2+1$$

とすると，求める体積 V は



$$V=\pi\int_0^2 x^2\,dy-\pi\int_1^2 x^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^2\frac{y}{2}\,dy-\pi\int_1^2(y-1)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2-\pi\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_1^2=\frac{\pi}{2}$$

らしんばん

➡ 本問(1)について

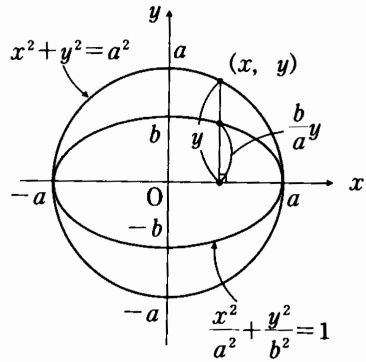
だ(楕)円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

が，円

$$x^2+y^2=a^2$$

を「**y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍**（『諸橋の代数・幾何講義(p. 294, 295)』参照!!）」したものであることに注目すると，このだ(楕)円の面積は円の面積の $\frac{b}{a}$ 倍で



$$\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab$$

となる．

同じ理由で本問の場合は回転半径が $\frac{b}{a}$ 倍になることから，体積は半径 a の球の体積の $\frac{b^2}{a^2}$ 倍となり

$$\frac{4}{3}\pi a^3\times\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

と計算できて，上の結果と一致する．

このように図形を直観的にとらえることも大切である．

➡ (2)は $\pi\int_a^b x^2dy$ を計算するのであるが，2曲線とも「x^2 が y の1次式」で与えられていることに注意――「計算」は見かけよりラク!!

例題 14

空間座標で，z 軸上の点 A(0, 0, 1) を通り xy 平面に平行な平面を α とし，α 上にあって中心 A，半径1の円板(円の周およびその内部を含む図形)を C とする．

(1)　x 軸を軸として円板 C を空間内で1回転してできる立体を F とするとき，F を zx 平面で切った切り口の図形を描け．

(2)　F の体積を求めよ．

解　説　「立体図形の回転」となると，少しハナシが違ってくる――

「くり抜く部分」に注意しなければならない．

(1) 円板 C は

$$x^2+y^2 \leqq 1, \quad z=1$$

である．x 軸上の点 B を

$$\mathrm{B}(X,\ 0,\ 0) \quad (|X| \leqq 1)$$

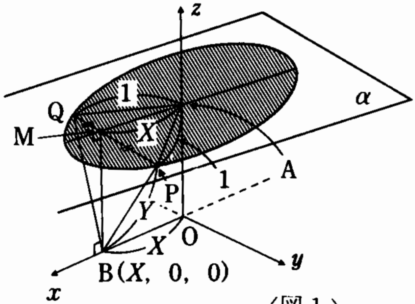
とし，B を通り x 軸に垂直な平面と円板の外周との交点を〈図 1〉のように P，Q とする．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^2 &= \mathrm{BM}^2+\mathrm{PM}^2\\ &= 1^2+(1^2-X^2)\\ &\quad (\longleftarrow\ \mathrm{PM}^2=\mathrm{AP}^2-\mathrm{AM}^2)\\ &= 2-X^2 \quad (=Y^2 \text{ とおく})\end{aligned}$$

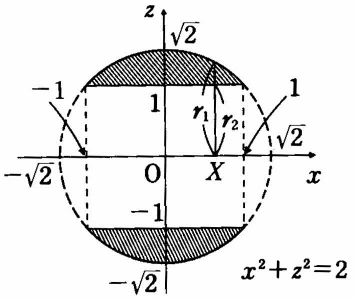
であるから，立体 F を「zx 平面」で切ったときの切り口は，x 軸からの距離が「1 と $|Y|$ の間の部分」，すなわち zx 平面上で

$$x^2+z^2 \leqq 2, \quad |z| \geqq 1$$
$$(\text{ただし，} y=0)$$

である――〈図 2〉の斜線部分．



〈図 1〉



〈図 2〉

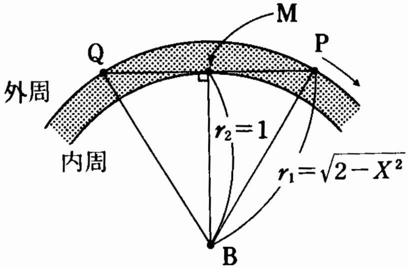
(2) 平面「$x=X$」上の回転の状況は〈図 3〉のように

外周：　$r_1=\sqrt{2-X^2}$

内周：　$r_2=1$

であるから，求める F の体積 V は「対称性」を考えて

$$\begin{aligned}V &= 2\left\{\int_0^1 \pi r_1^2 dX-\int_0^1 \pi r_2^2 dX\right\}\\ &= 2\pi\int_0^1 (r_1^2-r_2^2)dX\\ &= 2\pi\int_0^1 \{(2-X^2)-1^2\}dX\\ &= 2\pi\int_0^1 (1-X^2)dX\\ &= 2\pi\left[X-\frac{X^3}{3}\right]_0^1=\frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$



〈図 3〉

らしんばん

➡ (1)は「(2)のヒント」になっている――この立体を平面「$x=X$」で切るときの断面は〈図3〉に示したが，**線分PQがBを中心に回転するわけだから**，これは「外周がBを中心とする半径BP$(=r_1)$の円」と「内周がBを中心とする半径BM$(=r_2)$の円」の2つの同心円にはさまれた部分である――結局この立体は「**半径$\sqrt{2}$の球の両端をまず切りおとし，内部の円柱の部分をくりぬいたもの**」であることがわかる．

➡ (2)で

$$V=2\int_0^1 \pi(r_1-r_2)^2 dX$$

とやる間違いが多い――これには十分注意しなければならない．

3　物理への応用

1直線上を点Pが動いているとき，点Pの運動は「数学的に」どう記述されるであろうか．

まず，この直線に座標を定めて数直線とし，点Pの座標をxとする．このとき，各時刻tにおける点Pの位置xがわかればこの点Pの運動は完全にわかったと考えてよいだろう．

すなわち

この運動は時刻tから位置xへの関数

として表される．そして，この点から見れば，関数は「変化・運動をとらえる手段」である．

いま，点Pの運動が「$x=f(t)$」で表されたとする．

「速度」が一定の運動では

$$\text{速度}=\frac{\text{進んだ距離}}{\text{要した時間}}$$

であった(p. 181)から，「時刻tから$t+\Delta t$まで」の点Pの「**平均速度**」を

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

と定めると，$\Delta t \to 0$に対して平均速度$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$は時刻$t$における「**瞬間の速度$v$**(時刻$t$におけるスピードメーターの値)」にいくらでも近づく．

そこで「**極限**」を用いて時刻tの点Pの「**速度**」を次のように定める．

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

すなわち，「速度 v」は運動を表す関数「$x=f(t)$」の「導関数」である———ここまでは「微分」のところで説明した(p. 181以下).

ここでは逆に，「速度 v がわかっているとき，位置 x を求めるにはどうすればよいか」ということについて考える.

「時刻 t_0 に点Pが x_0 にいた」とすると，「時刻 t_1 における位置 x」は「定積分」を用いて

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t_1}v\,dt \quad \longleftarrow \text{「位置」について!!}$$

で表される.

また，時刻 t_0 から t_1 までの間に点Pが動いた「道のり」を s とすると s は

$$s=\int_{t_0}^{t_1}|v|\,dt \quad \longleftarrow \text{「道のり」について!!}$$

で与えられる———$|v|$ を「速さ」という.

例題 15

数直線上を動く2点 P_1，P_2 がある．2点はともに原点を出発し，t 秒後の速度はそれぞれ

$$v_1=3t^2+2t-1, \qquad v_2=5t+5$$

であるという．次の問いに答えよ.

(1)　時刻 t における点 P_2 の座標 x_2 を求めよ.

(2)　出発してから1秒間に，点 P_1 が実際に動いた距離 s を求めよ.

解　説　(1)　$x_2=\displaystyle\int_0^t(5t+5)\,dt=\frac{5}{2}t^2+5t$

(2)　$$s=\int_0^1|v_1|\,dt=\int_0^1|(3t-1)(t+1)|\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{3}}-(3t^2+2t-1)\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^1(3t^2+2t-1)\,dt$$
$$=-\Big[t^3+t^2-t\Big]_0^{\frac{1}{3}}+\Big[t^3+t^2-t\Big]_{\frac{1}{3}}^1=\frac{5}{27}+1+\frac{5}{27}=\frac{37}{27}$$

らしんばん

➡ たとえば，(2)で「v_1 の符号」と「運動の方向」について調べてみると

$$\begin{cases} 0\leqq t\leqq\dfrac{1}{3} \text{ のとき } v_1\leqq 0 \text{ …… このときPは左に進んでいる} \\ t\geqq\dfrac{1}{3} \text{ のとき } v_1\geqq 0 \text{ …… このときPは右に進んでいる} \end{cases}$$

ことがわかる．したがってこの場合に求めている s は「**走行距離**」のことである．

例題 16

球形のシャボン玉の半径が毎秒 1mm の割合で増加しているとする．半径が 10cm になったとき，その体積はどんな割合で増加するか．

解　説　t 秒後の体積を $V\text{cm}^3$，$t=0$ のときの半径を a cm とすると，t 秒後の半径は $\left(a+\frac{1}{10}t\right)$cm である．したがって

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(a+\frac{1}{10}t\right)^3$$

$$\therefore\quad \frac{dV}{dt}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3}{10}\left(a+\frac{1}{10}t\right)^2=\frac{2\pi}{5}\left(a+\frac{t}{10}\right)^2 \longleftarrow$$ p. 195，196

よって

半径：　$a+\frac{1}{10}t=10$　　　$\therefore\quad \frac{dV}{dt}=40\pi$ (cm^3/sec)

らしんばん

➡ 「**半径が毎秒 1mm の割合で増加**」する状態が $t=0$ のときからはじまると考えればよい．

➡ したがって，「$t=t_1$ から $t=t_2$ の間の体積の変化量」を求めるには

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{2\pi}{5}\left(a+\frac{t}{10}\right)^2dt$$

を計算することになる．

➡ 本問では，「**求めているものが $\frac{dV}{dt}$**」であることをしっかり見ぬくこと!!

第3節
問題解法の研究

発展問題 1―定積分の計算――対称積分など

2つの関数 $f(x)=x^4-x$, $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が

$$f(1)=g(1),\qquad f(-1)=g(-1)$$

をみたすとき，積分 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx$ を最小にする a, b, c, d を求めよ.

解　説　与えられた条件をどう用いるか―――

$$f(x)-g(x)=F(x)$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned}&F(1)=f(1)-g(1)=0\\&F(-1)=f(-1)-g(-1)=0\end{aligned}\right\}\longleftarrow$$

（$F(x)$ は $x\pm1$ で割りきれる―――因数定理!!）

$$\begin{aligned}\therefore\quad F(x)&=f(x)-g(x)\\&=(x+1)(x-1)(x^2+px+q)\\&=(x^2-1)(x^2+px+q)\\&=\underbrace{(x^2-1)(x^2+q)}_{\text{偶関数}}+\underbrace{px(x^2-1)}_{\text{奇関数}}\longleftarrow\end{aligned}$$

（「偶関数」と「奇関数」に分ける）

$$=\{(x^4-x^2)+q(x^2-1)\}+p(x^3-x)$$

⟵　「積分して残る文字 p, q」に注目して展開!!

$$\begin{aligned}\{F(x)\}^2=&q^2(x^2-1)^2+2q(x^4-x^2)(x^2-1)+(x^4-x^2)^2\\&+\underbrace{2p\{(x^4-x^2)+q(x^2-1)\}(x^3-x)}_{\text{奇関数}}+p^2(x^3-x)^2\end{aligned}$$

ここで

「奇関数の対称積分」は 0,「偶関数の対称積分」は 2 倍(p. 252)!!

を用いると

$$\int_{-1}^{1}\{F(x)\}^2dx=2q^2\int_0^1(x^4-2x^2+1)\,dx+4q\int_0^1(x^6-2x^4+x^2)\,dx$$

$$+2\int_0^1 (x^4-x^2)^2dx+2p^2\int_0^1 (x^3-x)^2dx \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\int_0^1 (x^4-2x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

$$\int_0^1 (x^6-2x^4+x^2)\,dx=\left[\frac{x^7}{7}-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{8}{105}$$

$$\int_0^1 (x^4-x^2)^2dx=A\ (\text{定数}) \longleftarrow$$ （**p，q に関係ないから定数 A とおく!!**）

$$\int_0^1 (x^3-x)^2dx=B>0 \longleftarrow$$ （**p^2 の係数で，他に p の項はないから B とおく．$B>0$ がわかればよい**）

これを①に用いると

$$\int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}^2dx \left(=\int_{-1}^1 \{F(x)\}^2dx\right)$$

$$=\underbrace{\frac{16}{15}q^2+\frac{32}{105}q}_{q\text{ の 2 次関数}}+2A+\underbrace{2Bp^2}_{\oplus}$$

$$=\frac{16}{15}\left\{\left(q+\frac{1}{7}\right)^2-\frac{1}{49}\right\}+2A+2Bp^2 \longleftarrow$$ **q について平方完成!!**

ここで

$$\left(q+\frac{1}{7}\right)^2\geqq 0, \qquad p^2\geqq 0$$

を考えると与式を最小にする **p，q** は，「**$p=0$**」，「**$q=-\frac{1}{7}$**」であるから

$$f(x)-g(x)=(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{7}\right)=x^4-\frac{8}{7}x^2+\frac{1}{7}$$

$$\therefore\quad g(x)=f(x)-\left(x^4-\frac{8}{7}x^2+\frac{1}{7}\right)$$

$$=(x^4-x)-\left(x^4-\frac{8}{7}x^2+\frac{1}{7}\right)=\frac{8}{7}x^2-x-\frac{1}{7}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=0,\quad b=\frac{8}{7},\quad c=-1,\quad d=-\frac{1}{7}}$$

らしんばん

➡ 「マトモ」にやると大変な計算である――そこで「知恵」をしぼってなるべく効率よくやるための工夫をする．

(i)　**「因数定理」を用いて「なるべく文字を少なく」しておく**

(ii)　**「式変形」の途中では「p」，「q」から「目」を離さないこと**(p. 260

（たとえば）参照）――― p, q について整理する方向で計算を進める―――①の形!!

(iii) 「対称積分(p. 252)」を利用できないか

(iv) 問題文は「最小値」を求めているのではないから「ムダな計算はしない」――― A, B (定数)などとおく

(v) きっと「p, q の 2 次関数」になるにちがいない

などに気を配り，計算を進めるとよい―――いろいろなことを教えてくれる「なかなかよい問題」である．

発展問題 2―定積分の区間分割

関数 $f(x)=\int_0^x |t^2-2|\,dt$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x\geqq 0$ のとき $f(x)$ を求めよ．

(2) 定積分 $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ を計算せよ．

解　説 (1) 「被積分関数」の形をかえる点が「積分区間」にはいるかどうかに注意して(図参照)，場合を分けて考える．

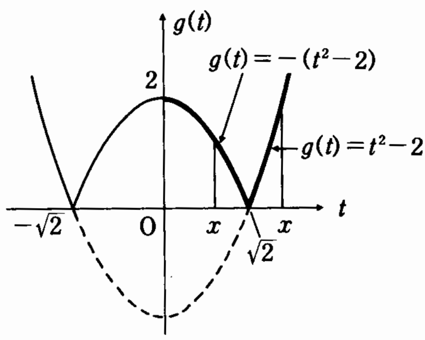
まず

$$|t^2-2|=g(t)$$

とおくと

$$g(t)=\begin{cases} -(t^2-2) & (|t|\leqq\sqrt{2}) \\ t^2-2 & (|t|>2) \end{cases}$$

であるから



(i) $0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ のとき：

$$f(x)=\int_0^x\{-(t^2-2)\}\,dt$$

$$=-\left[\frac{t^3}{3}-2t\right]_0^x=-\frac{x^3}{3}+2x$$

(ii) $x>\sqrt{2}$ のとき：

「$0\leqq t\leqq x$ (積分区間)」に「$t=\sqrt{2}$」が入っていることに注意すると

$$f(x)=\int_0^{\sqrt{2}}\{-(t^2-2)\}\,dt+\int_{\sqrt{2}}^x(t^2-2)\,dt \longleftarrow \text{定積分の区間分割!!}$$

$$=-\left[\frac{t^3}{3}-2t\right]_0^{\sqrt{2}}+\left[\frac{t^3}{3}-2t\right]_{\sqrt{2}}^x$$

$$=\frac{x^3}{3}-2x-2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)=\frac{x^3}{3}-2x+\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(i), (ii)より

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{3}+2x & (0\leqq x\leqq\sqrt{2}) \\ \dfrac{x^3}{3}-2x+\dfrac{8\sqrt{2}}{3} & (x>\sqrt{2}) \end{cases}$$

(2)「$x\geqq 0$」のときの$f(x)$は(1)で求めた.

「$-1\leqq x<0$」のとき,「被積分関数」は(1)の(i)と同じ形であるから, この積分区間で

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{3}+2x & (-1\leqq x\leqq\sqrt{2}) \\ \dfrac{x^3}{3}-2x+\dfrac{8\sqrt{2}}{3} & (\sqrt{2}<x\leqq 2) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{\sqrt{2}}\left(-\frac{x^3}{3}+2x\right)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{x^3}{3}-2x+\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{12}+x^2\right]_{-1}^{\sqrt{2}}+\left[\frac{x^4}{12}-x^2+\frac{8\sqrt{2}}{3}x\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$=\left(-\frac{4}{12}+2\right)-\left(-\frac{1}{12}+1\right)+\left(\frac{16}{12}-4+\frac{16\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{4}{12}-2+\frac{16}{3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{64\sqrt{2}-67}{12}}$$

らしんばん

➡ まず(1)では「積分区間の上端xがどこにあるか」が問題で, グラフを見て, $\sqrt{2}$より左か右かをしっかりと見分ける.

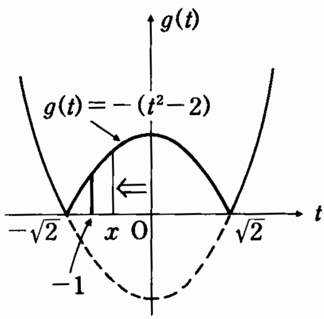
➡ (2)は積分区間の下端が-1であることに注意———(1)では「$x\geqq 0$」のときの$f(x)$しか求めていない.

これには少し説明がいる.

$-1\leqq x\leqq 0$のときは

$g(t)=-(t^2-2)$

を「**0からxまで左に向かって積分する**」わけで, このときの被積分関数は(1)の(i)と同じである.



したがって, 積分された式も同じ形(値はマイナスになるが)になるから, (2)では(1)で求めた式をそのまま利用することができる——— p. 257, 258で説明した.

➡ (2)で$f(x)$を扱うとき, (1)の

$$g(t)=|t^2-2|$$

のグラフと混乱を起こす例が多いがこれは一度「しっかりと切り離して」考えなくてはならない.

発展問題 3—積分で表された関数-「次数」の決定

多項式 $f(x)$ で，等式

$$f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)\,dt=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}$$

をみたしているものをすべて求めよ．(やや難)

解　説　$\int_1^x f(t)\,dt$ を含む等式であるが「両辺を微分」というわけにはいかない例である．そこで「$f(x)$ の次数を決定する」ことからはじめる．

(i)　**$f(x)$ の次数を決める**

$f(x)$ を n 次 $(n \geqq 1)$ とすると，$f'(x)$ は $(n-1)$ 次式で

$$f(x)f'(x) \longrightarrow 「n+(n-1)=2n-1」\text{ で } (2n-1) \text{ 次式}$$

$$\int_1^x f(t)\,dt \longrightarrow (n+1) \text{ 次式}$$

そこで，左辺の次数を決定するには，「$(2n-1)$ と $(n+1)$ の大小」が決まらなければならないが，いま

$$2n-1>n+1 \qquad \therefore \quad n>2$$

とすると，n は整数であるから $n \geqq 3$ で，このとき左辺は

$$2n-1 \geqq 2\times 3-1=5$$

から，5 次以上となり条件の式をみたさない.

ゆえに $n \leqq 2$ で，$f(x)$ は 2 次以下である.

(ii)　**$f(x)$ は 2 次以下の整式である**

「$\int_1^x f(t)\,dt\ (=F(x))$」は 3 次以下で，「$F(1)=0$」となるから

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$
$$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1) \quad \cdots\cdots①$$

とおくことができる.

$$\therefore \quad f(x)=F'(x)=3a(x-1)^2+2b(x-1)+c$$

$$\therefore \quad f'(x)=6a(x-1)+2b$$

ここで，「$x-1=u$」とおくと，与えられた等式は

$$(3au^2+2bu+c)(6au+2b)+au^3+bu^2+cu=\frac{4}{9}u$$

左辺を展開して整理すると

$$(\text{左辺})=(18a^2+a)u^3+(18ab+b)u^2+(4b^2+6ac+c)u+2bc$$

であるから，係数を比較して

$$\begin{cases} 18a^2+a=0 & \cdots\cdots② \\ 18ab+b=0 & \cdots\cdots③ \\ 4b^2+6ac+c=\dfrac{4}{9} & \cdots\cdots④ \\ 2bc=0 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

②：　$a(18a+1)=0$　　$\therefore$　$a=0$　または　$-\dfrac{1}{18}$

⑤：　$b=0$　または　$c=0$

これより

(i)「$a=b=0$」のとき：　④より　$c=\dfrac{4}{9}$

(ii)「$a=c=0$」のとき：　③より　$b=0$ で，これは④を成立させない．

(iii)「$a=-\dfrac{1}{18}$，$b=0$」のとき：　④より　$c=\dfrac{2}{3}$

(iv)「$a=-\dfrac{1}{18}$，$c=0$」のとき：　④より　$b^2=\dfrac{1}{9}$　　$\therefore$　$b=\pm\dfrac{1}{3}$

ゆえに

$$(a,\ b,\ c)=\left(0,\ 0,\ \frac{4}{9}\right),\ \left(-\frac{1}{18},\ 0,\ \frac{2}{3}\right),\ \left(-\frac{1}{18},\ \pm\frac{1}{3},\ 0\right)$$

で，これらは「②〜⑤」を成立させる．

これらの値を $f(x)$ の式に代入して整理すると，$f(x)$ は次の4つである．

$$f(x)=\frac{4}{9},\qquad f(x)=-\frac{x^2}{6}+x-\frac{5}{6},\qquad f(x)=-\frac{x^2}{6}\pm\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$$

らしんばん

➡ 「積分で定義される関数」で，積分の端に x を含むものの中には本問のように「多項式」という条件があって，「$f(x)$ の次数を決めてかからないと手におえない」ものもある．したがって「両辺を微分する」方法でいくか 例題❻(2)(p.261以下)，「次数を決定する」方法でいくかは問題によって使い分けなければならない．

➡ 本文①では $F(x)$ をいきなり「$(x-1)$ の3次式」で

$$F(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)\qquad\cdots\cdots(*)$$

と書いてしまったが，これは「積分を微分する(p. 258)」を用いて

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \qquad \therefore\quad F'(x)=f(x) \longleftarrow \text{ x の2次以下の整式!!}$$

であることがわかる．このことから

$$f(x)=px^2+qx+r$$

とおくと，この積分が「スナオに」計算できて

$$F(x)=\int_1^x (pt^2+qt+r)\,dt=\left[\frac{p}{3}t^3+\frac{q}{2}t^2+rt\right]_1^x$$

$$=\frac{p}{3}(x^3-1)+\frac{q}{2}(x^2-1)+r(x-1)$$

$$=\frac{p}{3}\underline{(x-1)}(x^2+x+1)+\frac{q}{2}(x+1)\underline{(x-1)}+r\underline{(x-1)} \qquad \cdots\cdots(**)$$

となる．ここでさらに「x^2+x+1」，「$x+1$」については

$$x^2+x+1=(x-1)^2+2x=(x-1)^2+2(x-1)+2$$

$$x+1=(x-1)+2$$

と変形されるから，これを(**)に代入して整理すると，$F(x)$ は(*)の形で表されるわけである．いずれにしても，「**$f(x)$ が整式**」である場合は

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt \longrightarrow F(1)=0 \longrightarrow (x-1)\text{ で割り切れる(因数定理)!!}$$

は当然であるが，これをさらに $(x-1)$ で展開しておくと本文に述べたような扱いができることには注目しておいてもよい．もちろん最初から

$$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d, \qquad F(1)=a+b+c+d=0$$

とおいてもよいし

$$F(x)=\underline{(x-1)}(ax^2+bx+c)$$

などとおいても同じ結果が得られることは「あたりまえ」のことである――実際に計算して確認しておくとよい．

発展問題 4―積分と漸化式

多項式 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を

$$f_0(x)=x^2, \qquad f_n(x)=f_n'(x)+f_{n-1}(x)+\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt$$

で定義する．このとき $f_n(x)$ を求めよ．

解　説　「むずかしいカオ」をした問題である．

「$\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt$」が定数であることに注目する(p. 261以下参照)

$$\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt=A_{n-1}\ (\text{定数}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots① $$

とおくと，与えられた条件の第2式はいくらか簡単に表される．すなわち

$f_n(x)=f_n'(x)+f_{n-1}(x)+A_{n-1}$ ……………………………………②

この式から，とりあえず「**$f_n(x)$ の次数**」を調べてみよう．

「$f_n(x)$ を k ($k\geqq 1$)次式」とすると「$f_n'(x)$ は $(k-1)$ 次式」，すなわち「②の右辺は k 次式」となり，結局「$f_{n-1}(x)$ は k 次式」で $f_n(x)$ の次数は $f_{n-1}(x)$ の次数に等しい．一方，与えられた条件の第1次式は

$f_0(x)=x^2 \longleftarrow$ 2次式!!

であるから，**帰納的に「$f_n(x)$ は2次式」**であることがわかる．

そこで

$$f_n(x)=a_nx^2+b_nx+c_n \quad (a_n\neq 0)$$

とおくと

$$f_{n-1}(x)=a_{n-1}x^2+b_{n-1}x+c_{n-1} \ (a_{n-1}\neq 0), \quad f_n'(x)=2a_nx+b_n$$

である．これを用いて①の A_{n-1} を計算すると

$$A_{n-1}=\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt=\int_0^1 (a_{n-1}t^2+b_{n-1}t+c_{n-1})\,dt$$

$$=\left[\frac{a_{n-1}}{3}t^3+\frac{b_{n-1}}{2}t^2+c_{n-1}t\right]_0^1=\frac{a_{n-1}}{3}+\frac{b_{n-1}}{2}+c_{n-1}$$

これを②に代入すると

$$\boldsymbol{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

$$=(2a_nx+b_n)+(a_{n-1}x^2+b_{n-1}x+c_{n-1})+\frac{a_{n-1}}{3}+\frac{b_{n-1}}{2}+c_{n-1}$$

$$=\boldsymbol{a_{n-1}x^2+(2a_n+b_{n-1})x+\frac{a_{n-1}}{3}+\frac{b_{n-1}}{2}+2c_{n-1}+b_n}$$

となるが，これは x についての恒等式であるから両辺の係数を比較すると

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_n=a_{n-1}} & \cdots\cdots ③ \\ \boldsymbol{b_n=2a_n+b_{n-1}} & \cdots\cdots ④ \\ \boldsymbol{c_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+2c_{n-1}+b_n} & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ——「扱い易いところ」から求めていく．

③： $\boldsymbol{a_n}=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_0=\boldsymbol{1}$

これを④に入れて

$b_n=b_{n-1}+2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{b_n-b_{n-1}=2}$

すなわち，**数列 $\{b_n\}$** は「**初項：0**」，「**公差：2**」の「**等差数列**」である．

$\therefore \quad \boldsymbol{b_n}=b_0+\boldsymbol{n}\cdot 2=\boldsymbol{2n}$

さらにこれを⑤に入れると

$$c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2(n-1)+2c_{n-1}+2n$$

$$\therefore\quad c_n=2c_{n-1}+\underbrace{3n-\frac{2}{3}}_{\parallel} \quad\cdots\cdots⑥$$

nの1次式!!

「1次式：$3n-\frac{2}{3}$」を両辺に振り分けて「等比数列」に帰着させる———

次のように変形可能な A，B はあるか!!(p. 140)

$$c_n+An+B=2\{c_{n-1}+A(n-1)+B\}$$

$$\longrightarrow\quad c_n=2c_{n-1}+An+B-2A$$

⑥と比較して

$$A=3,\ \ B-2A=-\frac{2}{3}\ \longrightarrow\ A=3,\ \ B=\frac{16}{3}\ \longleftarrow\ \text{あった!!}$$

ゆえに，⑥は次のように変形される

$$c_n+3n+\frac{16}{3}=2\left\{c_{n-1}+3(n-1)+\frac{16}{3}\right\}$$

すなわち，数列 $\left\{c_n+3n+\frac{16}{3}\right\}$ は「初項：$c_0+3\cdot 0+\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$」，「公比：2」の「等比数列」である．

$$\therefore\quad c_n+3n+\frac{16}{3}=\frac{16}{3}\cdot 2^n \qquad \therefore\quad c_n=\frac{16}{3}(2^n-1)-3n$$

以上のことから，求める $f_n(x)$ は

$$f_n(x)=x^2+2nx+\frac{16}{3}(2^n-1)-3n$$

らしんばん

➡ 本問の扱いの基本的な考え方は

$$\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt=A_{n-1}\quad(\text{定数})$$

とおいて「うまく $f_n(x)$ の次数を決める」ことにあった．いずれにしても

$$\begin{cases}\text{微分する} \longrightarrow \text{「次数」が1つ下がる}\\ \text{積分する} \longrightarrow \text{「次数」が1つ上がる}\end{cases}$$

ことがポイントである．もう1つ例をあげておく．

たとえば

> 次の関係をみたす多項式 $f_n(x)$ を求めよ．
>
> $$f_1(x)=x+1,\qquad x f_{n+1}(x)=x^2+x+\int_0^x f_n(t)\,dt\quad(n=1,\ 2\cdots\cdots)$$

まず，与えられた第2式

$$x f_{n+1}(x)=x^2+x+\int_0^x f_n(t)\,dt \quad\cdots\cdots(*)$$

から「$f_n(x)$ の次数を決める」わけであるが，それには第1式の

$$f_1(x)=x+1 \quad \longleftarrow \quad 1\text{ 次式!!}$$

をヒントにするとよい――― $f_n(x)$ が1次式ならば(＊)の右辺は「2次以下」，左辺の $f_{n+1}(x)$ は「1次以下」である．

したがって $f(x)$ は帰納的に「せいぜい1次式」であるから

$$f_n(x)=a_nx+b_n, \qquad f_{n+1}(x)=a_{n+1}x+b_{n+1}$$

とおくことができる．

これらを(＊)に入れると

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=x^2+x+\int_0^x (a_nx+b_n)\,dx$$

$$\therefore \quad a_{n+1}x^2+b_{n+1}x=x^2+x+\left[\frac{a_n}{2}x^2+b_nx\right]_0^x$$

$$=\left(\frac{a_n}{2}+1\right)x^2+(b_n+1)x$$

これは恒等式であるから両辺の係数を比較すると次の漸化式が得られる．

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1, \qquad a_1=1 \quad \longleftarrow \quad 2\text{ 次の係数}$$

$$b_{n+1}=b_n+1, \qquad b_1=1 \quad \longleftarrow \quad 1\text{ 次の係数}$$

これらから a_n，b_n を求めて

$$a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad b_n=n \quad \longrightarrow \quad f_n(x)=\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x+n$$

発展問題5―定積分の大小関係

(1)　区間 $a\leqq x\leqq b$ で，つねに $f(x)\geqq g(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$$

であることを示せ．

(2)　$f(x)$，$g(x)$ がともに1次関数であるとき

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2dx \cdot \int_0^1 \{g(x)\}^2dx \geqq \left\{\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right\}^2$$

であることを示せ．

解　説　(1)　$f(x)$ と $g(x)$ との関係は「$a\leqq x\leqq b$」において

$$f(x)\geqq g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)-g(x)\geqq 0$$

であるから，証明すべき不等式の右辺を左辺に移項して「$f(x)-g(x)=h(x)$」とおくと

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

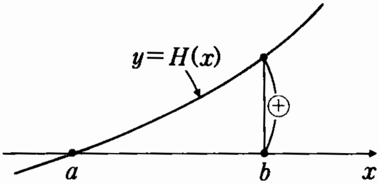
$$=\int_a^b h(x)\,dx \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

すなわち，区間「$\boldsymbol{a \leqq x \leqq b}$」において

$$\boldsymbol{h(x) \geqq 0} \text{ ならば } \boldsymbol{\int_a^b h(x)\,dx \geqq 0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

を示せばよい．そこで「**積分の上限 $\boldsymbol{b}$**」を「**変数 $\boldsymbol{x}$**」におきかえて

$$\boldsymbol{\int_a^x h(x)\,dx = H(x)}$$



これは x の関数であるから「積分を微分する(p. 258)」を用いて

$$H'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x h(x)\,dx$$

$$= h(x) \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots③$$

ゆえに，$\boldsymbol{H(x)}$ は「$\boldsymbol{a \leqq x \leqq b}$」の範囲で「**単調非減少(基本的には単調増加)関数**」である．このとき

$$H(a) = \int_a^a h(x)\,dx = 0$$

に注意すると

$$H(b) = \int_a^b h(x)\,dx \geqq 0 \qquad \therefore\ \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$$

(2)　t を任意の実数として，「$0 \leqq x \leqq 1$」では

$\{t f(x) + g(x)\}^2 \geqq 0$ ⟵ これに(1)を用いる!!

$$\therefore\ \int_0^1 \{t f(x) + g(x)\}^2 dx$$

$$= t^2\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx + 2t\int_0^1 f(x)g(x)\,dx + \int_0^1 \{g(x)\}^2 dx \geqq 0$$

$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = A$, $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = B$, $\int_0^1 \{g(x)\}^2 dx = C$ とおくと

$$At^2 + 2Bt + C \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$f(x)$ は1次関数であるから「$0 \leqq x \leqq 1$」で $f(x)$ が「恒等的に 0」となることはない．

$$\therefore\ A = \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx > 0$$

だから①は「2次」の「**絶対不等式**」で，任意の実数 t に対して①が成り立つことから

$$B^2 - AC \leqq 0 \qquad \therefore\ AC \geqq B^2$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \cdot \int_0^1 \{g(x)\}^2 dx \geqq \left\{\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right\}^2$$

らしんばん

➡ (1)は**「定理」**として覚えておかなければならない．また**「積分を微分する」**ハナシについては

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

としてすでに説明した(p. 258)が，**「積分変数 t」**を**「積分変数 x」**と書いても**考え方は同様**である．すなわち本文③で

$$\frac{d}{dx}\int_a^x h(\undertilde{x})\,d\undertilde{x} = h(x)$$

の「積分変数 x」は($*$)の「積分変数 t」と同様に扱えばよい．

➡ (1)の本文で用いた**「単調非減少関数」**というコトバに少し異和感があるかも知れない．もう少しくわしく説明しよう．

たとえば，**与えられた不等式「≧」で等号が成立するのはどのような場合か**——ただし，「$a=b$」のときは明らかに等号が成立するから「$a<b$」としておくことにする．このとき，本文①は

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$= \int_a^b h(x)\,dx = H(b) = 0, \quad \text{しかも} \quad H(a)=0$$

となり，これは区間「$a \leqq x \leqq b$」において関数 $H(x)$ が「増加していない」ということに他ならない——この区間に少しでも「$h(x)>0$」となる区間があれば「その区間で増加している」はずだから「$H(b)>0$」でなければならない．

すなわち，$\boldsymbol{h(x)}$ **は「つねに(恒等的に) 0 である」**ことを意味している．

本文に，安易に「単調増加関数」と書けなかったのは，実はこのような理由からのことである．したがって**与えられた不等式の等号の成立**は

$\boldsymbol{h(x) \equiv 0}$，**すなわち**　$\boldsymbol{f(x) \equiv g(x)}$

(「≡」は「つねに等しい(恒等式)」ことを表す)

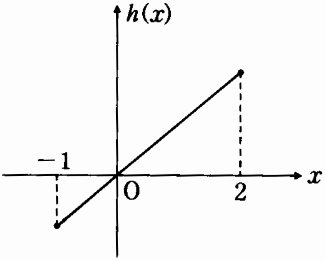
のときに限って成り立つことがわかる．

➡ **(1)の逆は成立しない**——これは本文②の不等式で説明する．

たとえば

$h(x) = x$,　　$a=-1$，$b=2$

とすると



$$\int_{-1}^2 h(x)\,dx = \int_{-1}^2 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} > 0$$

であるが，この区間で「$h(x)\geqq 0$」は成り立たない．

➡ 一般に，「$\int_a^b h(x)dx$」の符号については

(i) a, b の大小

(ii) 積分区間での $h(x)$ の符号

の２つを考慮しなければならない．たとえば

$$\begin{cases}「a<b,\ a\leqq x\leqq b」で「h(x)>0」 \longrightarrow \displaystyle\int_a^b h(x)dx>0 \\ 「a<b,\ a\leqq x\leqq b」で「h(x)\leqq 0」 \longrightarrow \displaystyle\int_a^b h(x)dx\leqq 0\end{cases}$$

などとなる．簡単にいうと

$\left\{\begin{array}{l}\text{正のものを正方向に積分}\\ \text{負のものを負方向に積分}\end{array}\right.$ ⟶ 結果は正

$\left\{\begin{array}{l}\text{正のものを負方向に積分}\\ \text{負のものを正方向に積分}\end{array}\right.$ ⟶ 結果は負

である．

面積を定積分で求めるとき，負の面積は考えないので，その積分の符号が問題になるが，ふつう「正方向(小さい方から大きい方へ)の積分にする」のは，そうしておけば「被積分関数の符号さえ調整すれば負でない積分にすることができる」からである．

➡ (2)の不等式は「コーシー・シュワルツの不等式」とよばれている．上の解は t の２次式を利用して計算の繁雑さを避けているが

$$f(x)=ax+b\ (a\neq 0),\qquad g(x)=cx+d\ (c\neq 0)$$

などとして実際に積分の計算をやっても証明できる．簡単にその経過を述べておこう．

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\frac{a^2}{3}+ab+b^2,\qquad \int_0^1\{g(x)\}^2dx=\frac{c^2}{3}+cd+d^2$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx=\frac{ac}{3}+\frac{bc+ad}{2}+bd$$

$$\therefore\quad \int_0^1\{f(x)\}^2dx\cdot\int_0^1\{g(x)\}^2dx-\left\{\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right\}^2$$

$$=\left(\frac{a^2}{3}+ab+b^2\right)\left(\frac{c^2}{3}+cd+d^2\right)-\left(\frac{ac}{3}+\frac{bc+ad}{2}+bd\right)^2=\frac{(bc-ad)^2}{12}\geqq 0$$

発展問題 6 — $\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$，直線の通過領域

xy 平面上で，次の条件をみたす点 P 全体の集合を求め，これを図示

せよ.

点Pを通る直線lで，lと曲線$y=x^2$とで囲まれる部分の面積が$\frac{1}{6}$となるものがある.

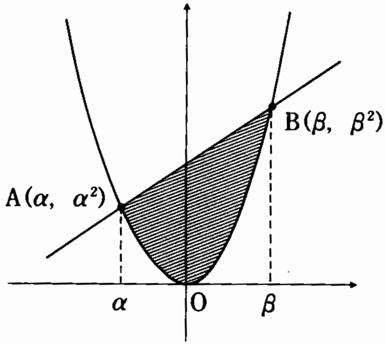
解　説　条件をみたす直線を

l:　$y=mx+n$　……………①

とおく．これが放物線

$y=x^2$　………………………②

と交わる点のx座標をα，β $(\alpha<\beta)$とすると①，②を連立して



$x^2=mx+n$

$\therefore$　$x^2-mx-n=0$

$\therefore$　$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=-n$　…③

⟵　解と係数の関係!!

$$\therefore\quad S=\int_\alpha^\beta (mx+n-x^2)\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$ ⟵　p. 252，253

この値が$\frac{1}{6}$であるから

$$\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{1}{6}\qquad \therefore\quad (\beta-\alpha)^3=1\qquad \therefore\quad \beta=\alpha+1\quad \cdots\cdots ④$$

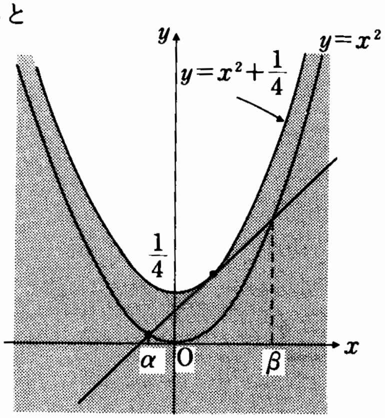
ところでlの方程式は①に③を入れて

$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

さらにこれに④を入れてβを消去すると

$y=(2\alpha+1)x-\alpha(\alpha+1)$　…⑤

この直線上に点P$(x_1,\ y_1)$が存在するならば，⑤はx_1，y_1をみたすから代入して



$y_1=(2\alpha+1)x_1-\alpha(\alpha+1)$

⟵　αについての方程式!!

このような「実数α」が存在するための条件を求めればよい.

αについて整理すると

$\alpha^2-(2x_1-1)\alpha+(y_1-x_1)=0$

これが実数解をもつための条件は

$$D=(2x_1-1)^2-4(y_1-x_1)\geqq 0$$

$$\therefore\quad y\leqq x^2+\frac{1}{4}$$

らしんばん

どこから手をつけてよいのかわからないような「ムード」の問題である.

(i) まず「l」を決めなければならない.

本文では,「$l: y=mx+n$」とおいて「$y=x^2$」と連立したが, 放物線上の 2 点を A$(\alpha,\ \alpha^2)$, B$(\beta,\ \beta^2)$ とおいてしまえば l の方程式

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\qquad\therefore\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

は簡単に求められる.

——「$S=\frac{1}{6}$」が, この α と β との関係式を与えることは予想できる.

(ii) あとは「l の通過領域」の問題

$$l:\quad y=(2\alpha+1)x-\alpha(\alpha+1)\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

のままでは扱いにくい.

「点 P$(x_1,\ y_1)$ を通るとすれば……」

ある x, y の値「$x=x_1$」,「$y=y_1$」を代入したときの「実数 α の存在条件」として$(*)$の「等号」が成立する条件を求めればよい.

発展問題 7—3 次曲線と面積

原点を O とする座標平面上で, 曲線

$$y=x^3-3x^2+2x\quad\cdots\cdots\cdots①$$

と直線

$$y=mx\quad\cdots\cdots\cdots②$$

が, 3 点 O, A, B で交わっている. ただし, A は O と B との間にあるものとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A, B の x 座標をそれぞれ α, β とするとき, $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^4+\beta^4$ を m で表せ.

(2) 曲線①と線分 OA, AB とで囲まれる部分の面積をそれぞれ S_1, S_2 とするとき, $S_1:S_2=1:2$ となるように m の値を定めよ.

解　説 (1) ①と②の交点の x 座標は, 方程式

$$x^3-3x^2+2x=mx\qquad\therefore\quad x\{x^2-3x+(2-m)\}=0$$

の解であるが, A は O と B の間にあるから α, β は 2 次方程式

$$x^2-3x+2-m=0$$

の２つの異なる実数解で，しかも「同符号」である．

「判別式＞0」から

$$D=3^2-4(2-m)>0 \qquad \therefore \quad m>-\frac{1}{4}$$

次に「解と係数の関係」を調べると「$\alpha+\beta$」は

$$\alpha+\beta=3>0$$

このことから「$\alpha\beta$」は

$$\alpha\beta=2-m>0 \qquad \therefore \quad m<2$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{4}<m<2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

この条件のもとに

$$\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot(2-m)=\mathbf{2}\boldsymbol{m}+\mathbf{5}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^3+\boldsymbol{\beta}^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot(2-m)\cdot 3=\mathbf{9}\boldsymbol{m}+\mathbf{9}$$

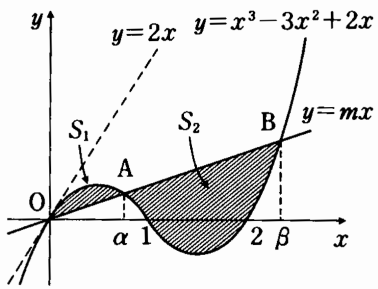
$$\boldsymbol{\alpha}^4+\boldsymbol{\beta}^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(2m+5)^2-2\cdot(2-m)^2$$

$$=\mathbf{2}\boldsymbol{m}^2+\mathbf{28}\boldsymbol{m}+\mathbf{17}$$

(2)　①は

$$y=x(x-1)(x-2)$$

であるから，グラフの概形は右図のようになる．このとき



$$S_1:S_2=1:2$$

であるから

$$S_2=2S_1$$

$$\therefore \quad \int_\alpha^\beta \{mx-(x^3-3x^2+2x)\}dx=2\int_0^\alpha \{(x^3-3x^2+2x)-mx\}dx$$

ここで

$$x^3-3x^2+2x-mx=x^3-3x^2+(2-m)x=g(x)$$

とおくと，上の関係は

$$-\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=2\int_0^\alpha g(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$$\therefore \quad 2\int_0^\alpha g(x)\,dx+\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=0$$

$$\therefore \quad \int_0^\alpha g(x)\,dx+\int_0^\beta g(x)\,dx=0 \quad \longleftarrow \quad \text{「区間分割」を逆に用いた!!}$$

$$\therefore \quad \int_0^\alpha \{x^3-3x^2+(2-m)x\}dx+\int_0^\beta \{x^3-3x^2+(2-m)x\}dx=0$$

$$\therefore \quad \left[\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{2-m}{2}x^2\right]_0^\alpha+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{2-m}{2}x^2\right]_0^\beta=0$$

$$\therefore\quad \frac{\alpha^4+\beta^4}{4}-(\alpha^3+\beta^3)+\frac{2-m}{2}(\alpha^2+\beta^2)=0$$

これに(1)の結果を代入して

$$\frac{2m^2+28m+17}{4}-(9m+9)+\frac{2-m}{2}(2m+5)=0$$

分母を払って整理すると

$$2m^2+10m-1=0 \qquad \therefore\quad m=\frac{-5\pm3\sqrt{3}}{2}$$

(1)の③で求めた m の範囲「$-\frac{1}{4}<m<2$」に適する m の値は

$$m=\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$$

らしんばん

➡ (1)で，α または β を t とおくと

$$t^2-3t+2-m=0 \qquad \therefore\quad t^2=3t+m-2$$

$$\therefore\quad t^3=3t^2+(m-2)t=(m+7)t+3(m-2)$$

$$t^4=(m+7)t^2+3(m-2)t=(6m+15)t+m^2+5m-14$$

と変形しておいてから，t に α，β を代入して加えてもよい．

➡ 本問は「$S_1:S_2=1:2$」の例であったが，「$S_1=S_2$」の場合の出題が比較的多い．この場合の説明は本文④を次のように書きかえればよい．すなわち

$$-\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=\int_0^\alpha g(x)\,dx$$

$$\therefore\quad \int_0^\alpha g(x)\,dx+\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=\int_0^\beta g(x)\,dx=0$$

を計算すればよい．

また，3次関数の場合は「変曲点」に関して対称である(p. 234)から，このことに注目すると

$$y=x^3-3x^2+2x$$

$$\therefore\quad y'=3x^2-6x+2 \qquad \therefore\quad y''=6x^2-6=0$$

$$\therefore\quad x=1 \longrightarrow \text{「変曲点」は }(1,\ 0)\ !!$$

で，この点を通る「$y=mx$」の m の値は「$m=0$」として簡単に求められる．

発展問題 8―4 次曲線と接線

x の関数 $f(x)=x(x^3+ax^2+bx+c)$ が，$x=2$，$x=4$，$x=9$ で極値をもつとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 a，b，c を求めよ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ と異なる2点で接する直線の方程式を求めよ．
(3)　(2)で求めた直線と，曲線 $y=f(x)$ とで囲まれる図形の面積を求めよ．

解　説　(1)　$f(x)=x(x^3+ax^2+bx+c)=x^4+ax^3+bx^2+cx$

$$\therefore\quad f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

$x=2$，$x=4$，$x=9$ で極値をもつから

$$\begin{aligned}4x^3+3ax^2+2bx+c&=4(x-2)(x-4)(x-9)\\&=4(x^3-15x^2+62x-72)\\&=4x^3-60x^2+248x-288\end{aligned}$$

両辺を比較して

$$\boldsymbol{a=-20,\quad b=124,\quad c=-288}$$

(2)　求める直線の方程式を「$y=mx+n$」，2つの接点の x 座標を「α，β $(\alpha<\beta)$」とすれば

$$(x^4-20x^3+124x^2-288x)-(mx+n)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \quad \cdots①$$

右辺を変形すると

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2)$$
$$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$$

であるから，左辺を整理したものと係数を比較して

$\alpha+\beta=10$ ……………………②

$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=124$ ……………………③

$-2\alpha\beta(\alpha+\beta)=-m-288$ ……………………④

$\alpha^2\beta^2=-n$ ……………………⑤

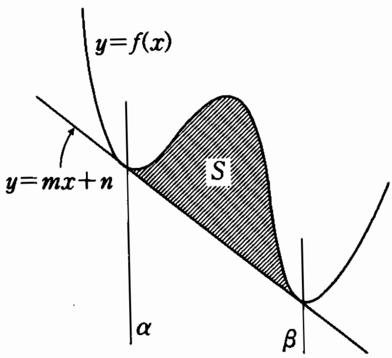
③：　$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=124$　　$\therefore\quad \alpha\beta=12$　($\because$　②)

④：　$m=2\alpha\beta(\alpha+\beta)-288=2\cdot12\cdot10-288=-48$

⑤：　$n=-(\alpha\beta)^2=-144$

ゆえに求める直線は

$$\boldsymbol{y=-48x-144}$$



(3)　求める面積を S とすれば

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-(mx+n)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx$$

このとき

$$(x-\alpha)^2=(\underline{x-\beta+\beta-\alpha})^2$$

$$=(x-\beta)^2+2(\beta-\alpha)(x-\beta)+(\beta-\alpha)^2$$

であるから

$$S=\int_\alpha^\beta\{(x-\beta)^4+2(\beta-\alpha)(x-\beta)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\beta)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\beta)^5}{5}+\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\beta)^4+(\beta-\alpha)^2\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^5}{30}$$

このとき

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=10^2-4\cdot12=52$$

$$\therefore\quad \beta-\alpha=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\quad(\because\quad \beta>\alpha)$$

$$\therefore\quad S=\frac{(2\sqrt{13})^5}{30}$$

$$=\frac{2^5\cdot13^2\cdot\sqrt{13}}{30}$$

$$=\frac{2704\sqrt{13}}{15}$$

らしんばん

➡ (2)については

$$f(x)=x^4-20x^3+124x^2-288x\ (=y)$$

$$f'(x)=4x^3-60x^2+248x-288$$

この曲線上の点 $P(t,\ t^4-20t^3+124t^2-288t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^4-20t^3+124t^2-288t)=(4t^3-60t^2+248t-288)(x-t)$$

である．これと $y=f(x)$ とを連立すれば，α，β が求まるはずであるが，$(x-t)^2$ の因数をもつことを利用するとしても，かなりめんどうな計算になる．

やはり，本問のような場合は「**重解条件**」から(2)の①のようにおくのがよい．

➡ (3)については

$$\alpha+\beta=10,\qquad \alpha\beta=12$$

であるから，α，β は2次方程式

$$t^2-10t+12=0$$

の2つの解であるから

$$t=5\pm\sqrt{13}\qquad\therefore\quad \alpha=5-\sqrt{13},\qquad \beta=5+\sqrt{13}$$

として求められるが

$$\int_{5-\sqrt{13}}^{5+\sqrt{13}}\{(x^4-20x^3+124x^2-288x)-(-48x-144)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^5}{5}-5x^4+\frac{124}{3}x^3-120x^2+144x\right]_{5-\sqrt{13}}^{5+\sqrt{13}}$$

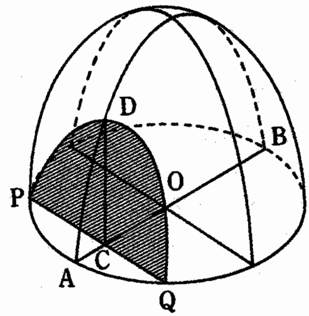
として計算して正解を出すのはほとんど絶望的である．したがって(3)の「$\frac{(\beta-\alpha)^5}{30}$」は，途中の式変形をも含めて一度はあたっておきたい公式の１つであるが，それにしても，ここまで「数値のきたない」ものは「めったに」ない．

ふつうはこの公式を用いなくてもできるものが多い．

発展問題 9―非回転体の体積

右図において，C は O を中心とする半径 r の円板の直径 AB 上の１点で，$\mathrm{OC}=x$ である．

また，PQ は C を通って AB に垂直な弦で，CD は C において円板に垂直，かつ PQ に等しく，$\mathrm{PQ}=2y$ である．



このとき次の問いに答えよ．

(1)　D を頂点，DC を軸とし，P および Q を通る放物線と，弦 PQ とで囲まれた板 PDQ の面積 S を y の関数として表せ．

(2)　S を x の関数として表せ．

(3)　C が AB 上を A から B まで移動するとき，板 PDQ の移動によってできる立体の体積 V を求めよ．

解　説　(1)　放物線 PDQ において，PQ を X 軸，CD を Y 軸にとると放物線の方程式は次のように表される．

$$Y=-aX^2+2y\quad(a>0)\quad\cdots\cdots①$$

これが，$(\pm y,\ 0)$ を通るから上式に代入すると

$$a=\frac{2}{y}$$

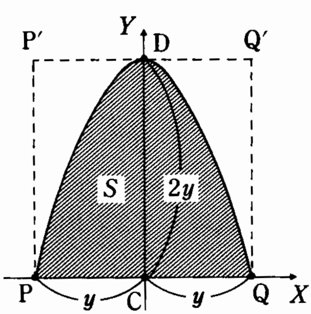
で，①は

$$Y=-\frac{2}{y}X^2+2y$$

よって，求める面積 S は

$$S=2\int_0^y\left(-\frac{2}{y}X^2+2y\right)dX$$

$$=2\left[-\frac{2}{3y}X^3+2yX\right]_0^y$$



$$=\frac{8y^2}{3}$$

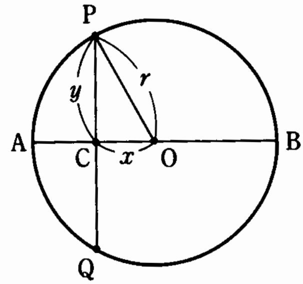
(2)　$y^2=r^2-x^2$ であるから

$$S=\frac{8}{3}(r^2-x^2)$$

(3)　求める体積 V は

$$V=\int_{-r}^{r}S\,dx$$

$$=2\int_0^r\frac{8}{3}(r^2-x^2)dx=\frac{16}{3}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{32}{9}r^3$$



らしんばん

➡ 断面の図形は放物線で，しかも面積を求めなければならない———とすれば，積分しなければならない．したがって，**適当な座標軸を設定し，問題の放物線の方程式を求めてみるのがポイント．**

➡ $y^2=r^2-x^2$ は上から見た図を描いてみるとよい．

発展問題 10—「ねじれの回転」——断面の図形

空間内の 2 点 A$(-2,\ 2,\ 1)$，B$(2,\ t,\ 2)$ を通る直線 AB を，x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面を S_t とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　t の値を適当に決めると，曲面 S_t と xy 平面上との交線は y 軸について対称となる．そのような t の値をすべて求めよ．また，それらの t の値に対する交線の式を示せ．

(2)　曲面 S_t と，2 平面 $x=-4$，$x=4$ とが囲む立体を V_t とする．(1) で求めた t の値に対する立体 V_t の共通部分を V とするとき，V の体積を積分で表せ．また，その V の体積を求めよ．**(やや難)**

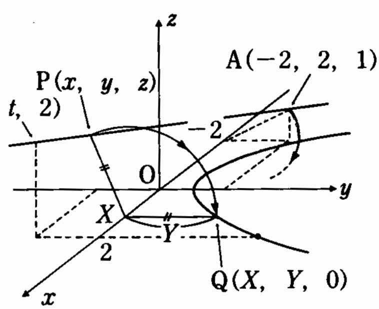
解　説　(1)　直線 AB 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ をベクトルで表すと

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\t-2\\1\end{pmatrix}$$

……………………………①

ゆえにこの直線上の点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると



〈図 1〉

$$\begin{cases} x=4s-2 \\ y=s(t-2)+2 \\ z=s+1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

と表される．この点Pを x 軸のまわりに回転して xy 平面上の点 $Q(X,\ Y,\ 0)$ に「うつった」とすると

$$\begin{cases} X=x=4s-2 & \cdots\cdots ③ \\ Y^2=y^2+z^2=\{s(t-2)+2\}^2+(s+1)^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

このX，Yの関係式は2式から s を消去すればよいから，③を

$$s=\frac{X+2}{4}$$

と変形して④に代入すると

$$\begin{aligned} Y^2&=\left\{\frac{X+2}{4}(t-2)+2\right\}^2+\left(\frac{X+2}{4}+1\right)^2 \\ &=\left(\frac{t-2}{4}X+\frac{t+2}{2}\right)^2+\left(\frac{X}{4}+\frac{3}{2}\right)^2 \\ &=\frac{t^2-4t+5}{16}X^2+\frac{t^2-1}{4}X+\frac{t^2+4t+13}{4} \end{aligned}$$

すなわち，xy 平面上にあらわれる曲線の方程式は

$$\boldsymbol{y^2=\frac{t^2-4t+5}{16}x^2+\frac{t^2-1}{4}x+\frac{t^2+4t+13}{4}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

である．←── 2次曲線らしい!!

これが「**y 軸について対称**」となるための条件は，「**x の1次の項**」の係数が「**0**」となることであるから

$$t^2-1=0 \qquad \therefore \quad t=\pm 1$$

(i)　**$t=1$ のとき**

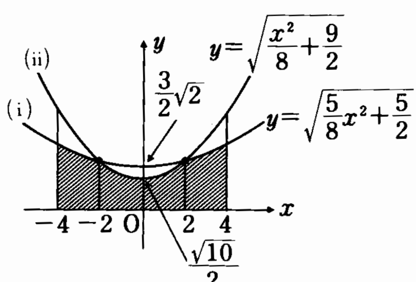
$$⑤：\quad \boldsymbol{y^2=\frac{x^2}{8}+\frac{9}{2},\qquad z=0}$$

$$\left(\therefore\quad \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{\frac{9}{2}}=-1,\qquad z=0\right)$$

(ii)　**$t=-1$ のとき**

$$⑤：\quad \boldsymbol{y^2=\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{2},\qquad z=0}$$

$$\left(\therefore\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{\frac{5}{2}}=-1,\qquad z=0\right)$$



〈図2〉

すなわち，(i)(ii)とも**双曲線**であることがわかる．

(2)　(1)で得られた2つの曲線の交点の座標は

$$\frac{x^2}{8}+\frac{9}{2}=\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{2} \qquad \therefore \quad x^2=4 \qquad \therefore \quad x=\pm 2$$

曲線の対称性を考えると　⟵　〈図2〉

$$y_1=\sqrt{\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{2}}, \qquad y_2=\sqrt{\frac{x^2}{8}+\frac{9}{2}}$$

とおいて，求める体積 V は

$$V=2\int_0^2 \pi {y_1}^2 dx+2\int_2^4 \pi {y_2}^2 dx$$

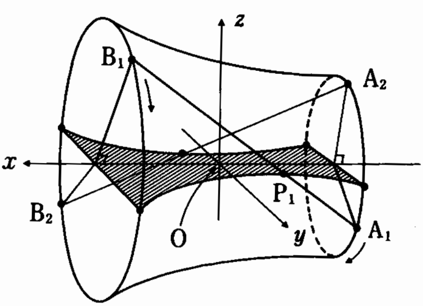
$$=2\pi\int_0^2\left(\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{2}\right)dx+2\pi\int_2^4\left(\frac{x^2}{8}+\frac{9}{2}\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{24}x^3+\frac{5}{2}x\right]_0^2+2\pi\left[\frac{1}{24}x^3+\frac{9}{2}x\right]_2^4=36\pi$$

らしんばん

本問で特徴的なことは，「直線 AB」と，その「回転軸(x 軸)」とが「ねじれている」ということである．このようなとき，立体は実際にはどんな図形になるのか――(1)ではそれを，「回転軸を含む平面(xy 平面)」で切って見せているわけで，そのあと(2)で，「ねじれていない(回転軸と同じ平面上にある)双曲線」を回転するならハナシは簡単である．

――右図は本文の〈図1〉から矢印の方向に少し回転の進んだ状況であるが，線分 AB の点 A (図では A_1) は xy 平面より下に沈み，点 B (図では B_1) は xy 平面より上にあって，線分 AB (回転した線分 A_1B_1)が，xy 平面と点 P_1 で交わっている．

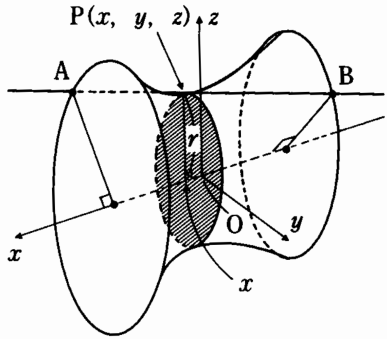


さらに回転が進むと，それにともなって線分 AB 上の各点が次々と xy 平面をつらぬき，結局 xy 平面から「双曲線 ($t=\pm 1$ のとき)」を切り抜く状況がよくわかる．

われわれが「ねじれの回転」に「多少の異和感」を感じるのは，このような「回転の(あるいは時間的な)ズレ」にダマされ易いことにある――「体積を求めることだけ」が目的ならば当然この「ズレ」は無視して考えてよい．

たとえば(2)の V_1 を直接求めるには

「$t=1$」であるから



①：$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

②：$\begin{cases} x=4s-2 \\ y=2-s & \cdots\cdots\cdots\cdots (*) \\ z=s+1 \end{cases}$

このとき，ある「x」で「回転軸(x軸)」に垂直な平面でこの立体を切るときの断面は「円」で，その半径を r とすると

$$r^2=y^2+z^2 \quad \longleftarrow \quad \textbf{x 軸の正方向から見る!!}$$
$$=(2-s)^2+(s+1)^2$$
$$=2s^2-2s+5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

となるが，これを x で表すには($*$)の第１式から

$$s=\frac{x+2}{4}$$

$$\therefore\quad r^2=2\cdot\left(\frac{x+2}{4}\right)^2-2\cdot\frac{x+2}{4}+5 \quad \longleftarrow \quad \text{「x の式」になおせ!!}$$

$$=\frac{x^2}{8}+\frac{9}{2}$$

$$\therefore\quad V_1=2\int_0^4 \pi r^2dx=2\pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{8}+\frac{9}{2}\right)dx$$

となり，本文に示した積分と同じになる――このとき「パラメーター s」に気をとられて

($**$)：　$r^2=2s^2-2s+5$

x	$-4 \rightarrow 4$
s	$-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$

の対応関係から

$$V_1=2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(2s^2-2s+5)ds \quad \longleftarrow \quad V=\int_\alpha^\beta S(x)\,dx\ (\text{p. 278以下})\text{が基本!!}$$

などとやってはならない．

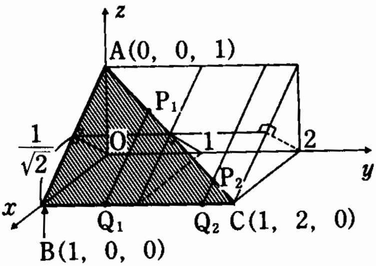
これで「直線図形(たとえば三角形，四角形など)」の回転はすべて「イケル」ことになった．例題を１つあげておく．

たとえば

空間の３点を A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(1, 2, 0) とする．△ABC が y 軸のまわりに回転するとき通過する部分の体積を求めよ．

これは空間で三角形が回転する例である．この立体を y 軸に垂直な平面で切

るときの断面は，「切り口の線分が通過する２つの同心円にはさまれた部分」であるが，「$0 \leqq y \leqq 1$」と「$1 \leqq y \leqq 2$」でハナシが違ってくる―――「外周」は同じだが「内周」が違う―――〈図１〉



〈図１〉

(i) $0 \leqq y \leqq 1$ ―――〈図２〉

$r_1=1$ ⟵ 外周

$r_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ⟵ 内周

$$\therefore\quad V_1=\int_0^1(\pi r_1{}^2-\pi r_2{}^2)dy$$

$$=\pi\int_0^1\left\{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}dy$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 dy=\frac{\pi}{2}$$

(ii) $1 \leqq y \leqq 2$ ―――〈図３〉

$r_1=1$ ⟵ 外周

については問題ナシ―――「内周」は線分 AC 上の点で決まる．

AC 上に点 P$(x,\ y,\ z)$ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2t\\z=1-t\end{cases} \longrightarrow t=\frac{y}{2}$$

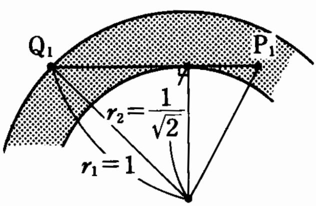
$$\therefore\quad r_2{}^2=x^2+z^2 \longleftarrow \left(\begin{matrix}y\text{ 軸の正方向}\\\text{から見る!!}\end{matrix}\right)$$

$$=t^2+(1-t)^2=2t^2-2t+1$$

$$=2\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{y}{2}\right)+1$$

$$=\frac{y^2}{2}-y+1$$

⟵「y の式」になおせ!!



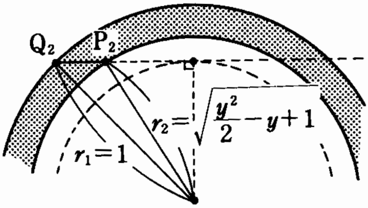
〈図２〉

$$\therefore\quad V_2=\int_1^2(\pi r_1{}^2-\pi r_2{}^2)dy$$

$$=\pi\int_1^2\left\{1^2-\left(\frac{y^2}{2}-y+1\right)\right\}dy$$

$$=\pi\int_1^2\left(-\frac{y^2}{2}+y\right)dy$$

$$=\pi\left[-\frac{y^3}{6}+\frac{y^2}{2}\right]_1^2=\frac{\pi}{3}$$



〈図３〉

(i), (ii)から求める体積 V は

$$V=V_1+V_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

発展問題 11—正四面体が回転する

1辺の長さが2である正四面体ABCDがある．2つの対辺AD，BCの中点をそれぞれM，Nとし，次の問いに答えよ．

(1)　辺ADは△MBCに垂直であることを証明し，四面体MABCを図示せよ．

(2)　線分MN上でMからの距離 x にある点Pを通ってMNに垂直な平面で正四面体ABCDを切ったとき，この切り口の面積を x で表し，その最大値を求めよ．

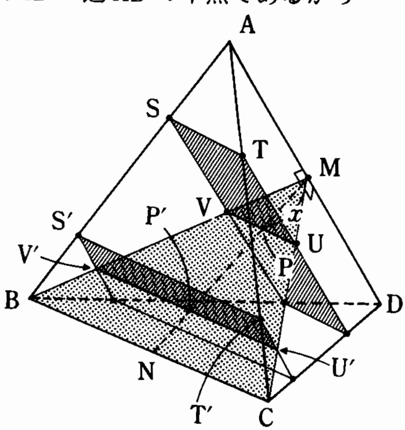
(3)　直線MNを軸としてそのまわりにこの正四面体を回転したときにできる立体の体積を求めよ．

解　説　(1)　Mは正三角形BAD，CADの辺ADの中点であるから

BM⊥AD,　　CM⊥AD

∴　AD⊥△MBC

これより四面体MABCは右図．



(2)　Pを通り，MNに垂直な平面とAB，AC，MC，MBとの交点をそれぞれS，T，U，Vとすると

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{ST} /\!/ \mathbf{BC} /\!/ \mathrm{VU} \\ \mathrm{TU} /\!/ \mathbf{AM} /\!/ \mathrm{SV} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また正四面体ABCDは1辺の長さが2の正四面体であるから

$$\mathrm{MN}^2=\mathrm{MC}^2-\mathrm{NC}^2$$
$$=(\sqrt{3})^2-1^2=2 \qquad \therefore\quad \mathrm{MN}=\sqrt{2}$$

また「平行線と比例」の関係から

$$\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}=\frac{x}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\quad \mathrm{ST}=\mathrm{UV}=\sqrt{2}x$$

$$\frac{\mathrm{TU}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{CM}}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MN}}=\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\quad \mathrm{TU}=\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$$

ところで(1)より

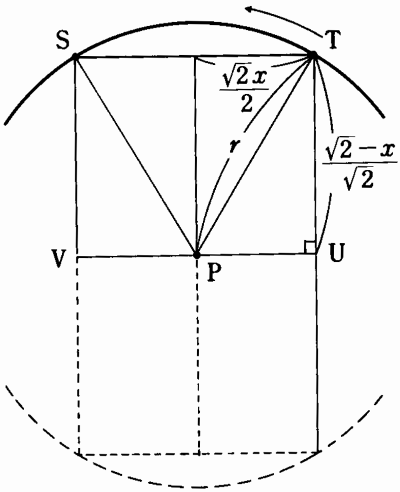
AD⊥BC　　∴　TU⊥ST　(∵　①)

すなわち，**四角形 STUV は「長方形」**である．

また，四面体 ABCD をこの平面で切るときの切り口は，平面 MBC に関して対称であるから，求める断面積 $S(x)$ は

$$S(x)=(\text{長方形 STUV})\times 2$$
$$=2\times \mathrm{ST}\cdot\mathrm{TU}$$
$$=2x(\sqrt{2}-x)=-2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1 \qquad \therefore\ \textbf{最大値：}\ \mathbf{1}\ \left(\boldsymbol{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

(3)　求める立体を，P を通り MN に垂直な平面で切るときの切り口の図形は，P を中心とする円で，その半径を r とすると



$$r^2=\mathrm{PT}^2 \quad (\text{あるいは } \mathrm{PS}^2)$$
$$=\mathrm{PU}^2+\mathrm{TU}^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=x^2-\sqrt{2}x+1$$

である．

ゆえに求める「回転体」の体積は

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi r^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(x^2-\sqrt{2}x+1)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+x\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

らしんばん

(1)は「ベクトルの内積」を利用してもよい．

たとえば，「BM⊥AD」を示すには

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} \longleftarrow \text{内積の分配則!!}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ \quad (\because\ \mathrm{AB}=\mathrm{AD}=2)$$

$$=2-2=0 \qquad \therefore\ \mathrm{BM}\perp\mathrm{AD}$$

しかし本問の場合は本文に示したように「正四面体」の各面が「正三角形」であることを利用して説明するのが最も簡単で早い．

――キチンととらえておかなければならないことは

(i)　$BC \perp MN \perp AD$
　　（ついでに $BC \perp AD$）　⟵　MN が回転軸!!

(ii)　$MN=\sqrt{2}$　⟵　「積分区間」が決まる!!

の2点である.

一般に「1辺の長さが a」である「正四面体」のとき「(i)」はそのまま成り立つが,「(ii)」は

$$MN=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

となる―――これは覚えておいた方がよい.

このことを確かめるには

$$MC=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad NC=\frac{1}{2}a$$

として本文のようにやってもよいが　⟵　これが簡単!!

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$$
$$=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}-\frac{\overrightarrow{AD}}{2}$$

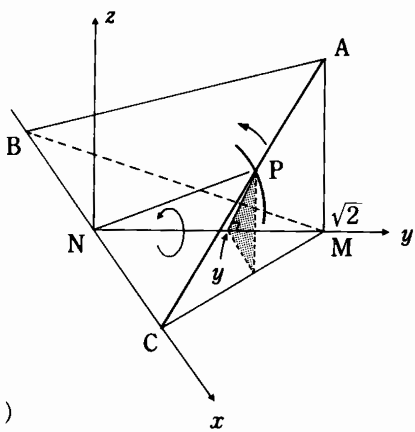
であるから「ベクトルの内積」を用いて $|\overrightarrow{MN}|^2$ を計算してもよい.

➡ 「座標軸」をとって考える―――

(3)で, N を原点として座標軸を右図のように決めると

$A(0,\ \sqrt{2},\ 1)$
$B(-1,\ 0,\ 0)$
$C(1,\ 0,\ 0)$
$M(0,\ \sqrt{2},\ 0)$

であるから AC 上の点 $P(x,\ y,\ z)$ は



$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}$$
$$=\overrightarrow{NC}+t\overrightarrow{CA}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=1-t\\y=\sqrt{2}t\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\\z=t\end{cases}$$

このとき,「点 P を y 軸(NM)のまわりに回転する」ときの半径を r とすると

$r^2=x^2+z^2$　⟵　y 軸の方向から見る!!

$=(1-t)^2+t^2=2t^2-2t+1$　⟵　t で積分してはならない!!

ここに t は(*)から y で表されて

$$t=\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad r^2=2\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-2\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+1 \quad \longleftarrow \quad y\text{の式になおせ!!}$$

$$=y^2-\sqrt{2}y+1$$

$$\therefore \quad V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi r^2 dy \quad \longleftarrow \quad \text{断面積 } S(y) \text{ を } y \text{ で積分する!!}$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(y^2-\sqrt{2}y+1)\,dy=\pi\left[\frac{y^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}y^2+y\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

となり，本文で求めた結果と一致する．

「正四面体」の「高さ」，「体積」について———

1辺の長さを a とする．

頂点 A から底面の △BCD に垂線 AH を下ろすと H は △BCD の重心になる．

(←— △BCD は正三角形!!)

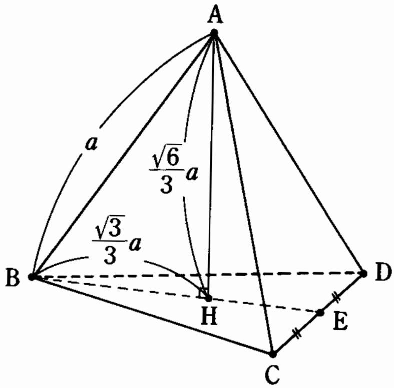
$$\therefore \quad \mathrm{BH}=\frac{2}{3}\mathrm{BE} \quad (\text{ただし E は CD の中点})$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\therefore \quad \mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}$$

$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$



ゆえに体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{BCD})\cdot\mathrm{AH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

となる———これも知っておくと都合のよいときがある．

発展問題 12—「ねじれた円板」が回転する

空間において xy 平面上の円 $C: x^2+y^2=1$，$z=0$ が与えられている．

(1) 円 C 上の点 P から，直線 $l: x=y=z$ に下ろした垂線の足を Q とする．線分 OQ の長さのとりうる値の範囲を求めよ．

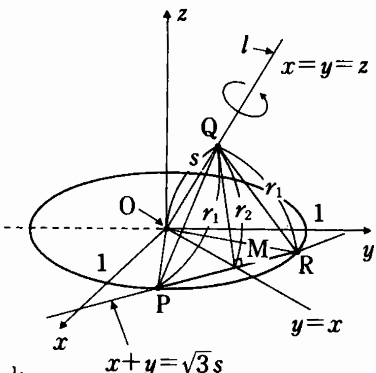
(2) 円 C の囲む円板 $D: x^2+y^2\leqq 1$，$z=0$ を，直線 l を軸として 1 回転させるときに得られる立体の体積を求めよ．**(やや難)**

解　説　(1) 円 C と直線 l は

$C:\quad x^2+y^2=1,\qquad z=0$

$l:\quad x=y=z$

である———点Qを通り，直線 l に垂直な平面 α を考える．α と xy 平面との交線を l' とすると，l' と C との交点がPである．



(i)　**「平面 α」を求める**———

α 上の点を $X(x,\ y,\ z)$ とし，直線 l の方向ベクトルを $\vec{l}$，この方向の「単位ベクトル」を $\vec{e}$ とすると

$$\vec{l}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec{e}=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

であるから，「OQ$=s$（符号つき）」とすると

$$\vec{e}\cdot\overrightarrow{OX}=s \quad (\longleftarrow\ s\text{は負のときもありうる})\ \cdots\cdots①$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s,\qquad \therefore\ x+y+z=\sqrt{3}s\ \cdots\cdots②$$

$\longleftarrow$　**平面 α の方程式!!**

(ii)　**OQのとり得る値の範囲を調べる**———

平面 α と xy 平面との交線は②で「$z=0$」とすればよいから

$$x+y=\sqrt{3}s\ \cdots\cdots③$$

これが「円 C と共有点をもつ（Pが存在する）条件」を求めればよい．

———**「Oから③への距離」が1以下!!**

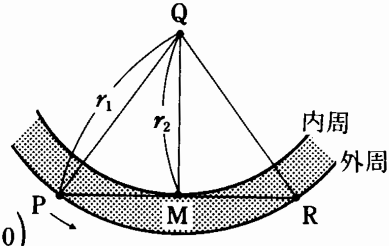
$$\therefore\ \frac{|-\sqrt{3}s|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqq 1 \longleftarrow \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore\ |s|\leqq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)　この立体を「原点からの距離 s」の平面 α で切るときの断面は，図の**「線分PR」**を**「Qのまわりに回転」**して得られる図形だから，PRの中点をMとすると，**「線分PRの通過部分」**は**「$r_1=$QP」，「$r_2=$QM」**をそれぞれ**「外周」，「内周」の半径とする同心円にはさまれた部分である．**

まず r_1 については

$$r_1{}^2=\mathrm{PQ}^2$$
$$=1-s^2 \longleftarrow \mathbf{PQ\perp OQ}$$



次に r_2 については，Mが「$y=x$」と③との交点であることから

$$x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}s\qquad \therefore\ M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s,\ \frac{\sqrt{3}}{2}s,\ 0\right)$$

が求まり

$$r_2^2=\mathrm{OM}^2-\mathrm{OQ}^2 \longleftarrow \quad \mathbf{MQ\perp OQ}$$

$$=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2\right\}-s^2=\frac{1}{2}s^2$$

以上のことから求める体積を V とすると

$$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}(\pi r_1^2-\pi r_2^2)\,ds=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}(r_1^2-r_2^2)\,ds$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(1-s^2-\frac{1}{2}s^2\right)ds$$

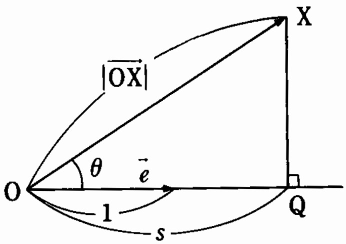
$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)ds=2\pi\left[s-\frac{s^3}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{9}\pi$$

らしんばん

➡ ①を「**Hesse**（ヘッセ）の標準形」という—— 『諸橋の代数・幾何講義(p. 47)』参照!!

少しだけ説明しておくと，「$\vec{e}$」と「$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$」のなす角を「$\theta$」とすると

$$\underbrace{|\vec{e}|}_{\substack{\parallel\\1}}\underbrace{|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\theta}_{\substack{\parallel\\\mathrm{OQ}}}=s$$



すなわち，X が，「Q を通り，$\overline{\mathrm{OQ}}$ に垂直な平面上の点である」ということのベクトル的表現に他ならない．

成分で表せば

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z=s$$

である．

➡ (1)では

$$x^2+y^2=1 \longrightarrow x=\cos\theta,\ y=\sin\theta \qquad \therefore\ \mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$

とおきたくなる．このときは

$$s=\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta+\sin\theta)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \longleftarrow \text{「三角関数」の合成!!}$$

$$\therefore\ |s|\leqq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

となってスッキリいくが，(2)で「内周 (r_2)」を求めるハナシにはつながらない．

➡ 本問は，「問題文」の説明もわかりやすく，最後の計算結果も簡単であるが立体のイメージがつかみにくい――「空間」に対するしっかりとした「想像力」が求められる．

発展問題 13―空間の球を平面で切る

空間内に直線 l と球面 S が次のように与えられている．

$$l:\quad \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=-z$$

$$S:\quad x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z-18=0$$

このとき，l を含む平面で，S で囲まれた球の体積を $5:27$ に分けるものを求めよ．

解　説　l を含む平面を表すには「平面束」の考え方を利用する――『諸橋の代数・幾何講義(p. 95)』を参照!!

l を含む平面 α の方程式は

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)+k\left(\frac{y}{2}+z\right)=0,\quad \text{または}\quad \frac{y}{2}+z=0$$

$$\therefore\quad (1+k)x-y+2kz=0,\quad \text{または}\quad y+2z=0 \quad \cdots\cdots\cdots① $$

で表される．

一方，球面 S の方程式は

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=6^2$$

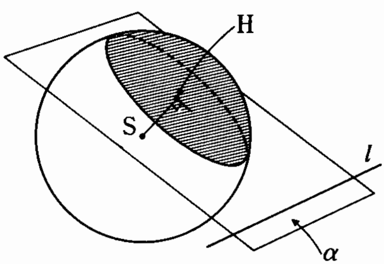
と変形されるから

中心：　S(1，1，4)

半径：　6

である．

平面 α による球面 S の切り口は右図のようになるが，α は「l を含む」という条件の他に「S の中心 S からの距離 d」で決定するから，とりあえずこの d を求めなければならない．

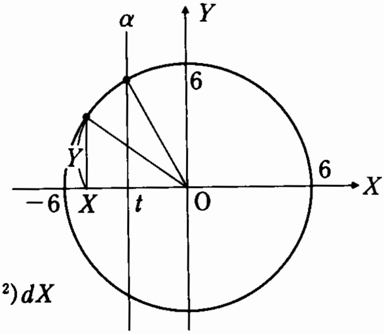


ハナシを簡単にするために，球の中心を原点 O にうつして考えることにすると球面は，円

$$X^2+Y^2=6^2$$

を X 軸のまわりに回転して得られるから，この球面で囲まれる球の体積を

「5：27」に分ける平面 β と O との距離を求めればこれが上に述べた d の値である.



$$\beta: \quad X=t$$

とすると

$$\left(\pi\int_{-6}^{t}Y^2dX\right):\left(\pi\int_{t}^{6}Y^2dX\right)=5:27$$

$$\therefore \quad 27\int_{-6}^{t}(6^2-X^2)dX=5\int_{t}^{6}(6^2-X^2)dX$$

$$\therefore \quad 27\left[6^2X-\frac{X^3}{3}\right]_{-6}^{t}=5\left[6^2X-\frac{X^3}{3}\right]_{t}^{6}$$

$$27\left(-\frac{t^3}{3}+6^2\cdot t+\frac{2}{3}\cdot 6^3\right)=5\left(\frac{t^3}{3}-6^2\cdot t+\frac{2}{3}\cdot 6^3\right)$$

分母を払って整理すると

$$t^3-3\cdot 6^2t-3^3\cdot 11=0 \qquad \therefore \quad (t+3)(t^2-3t-9\cdot 11)=0$$

「$-6<t<6$」をみたすものは

$$t=-3$$

すなわち，**中心 O から平面 α までの距離 d の値が「3」**であることがわかる.

ここでハナシをもとにもどして**球面 S の中心 S(1, 1, 4) から**①で**表される平面 α までの距離を 3** とすると

$$\therefore \quad \frac{|(1+k)-1+(2k)\cdot 4|}{\sqrt{(1+k)^2+(-1)^2+(2k)^2}}=3\ (=d) \longleftarrow \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\therefore \quad |9k|=3\sqrt{5k^2+2k+2}$$

両辺は負でないから 2 乗して整理すると

$$2k^2-k-1=(2k+1)(k-1)=0$$

$$\therefore \quad k=-\frac{1}{2},\ 1 \quad \text{（①の第 2 式は条件をみたさない）}$$

これらの値を代入すれば求める平面の方程式が得られる.

すなわち

$$\boldsymbol{x-2y-2z=0, \qquad 2x-y+2z=0}$$

らしんばん

本問では「**球の中心を原点 O にうつして考える**」ところがポイントである. 計算は多少メンドウだが，「$\boldsymbol{d=3}$」が求まったところで「**平面 $\boldsymbol{\alpha}$ の $\boldsymbol{k}$ の値**」は決定する――1 度はやっておかなければならない問題の 1 つである.

発展問題 14─物理への応用──速度

曲線 $y=x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる容器が，鉛直方向を y 軸として置かれていて，その深さは 10 cm である．

この容器に t 秒後の速さが毎秒 $2t$ cm^3 である状態を保ちながら水を注ぎこむことにする．

(1) 注ぎはじめてから t 秒後の，底から水面までの高さを h cm とするとき，h を t の関数で表せ．

(2) 注ぎはじめてから何秒後にこの容器は満水になるか．

(3) 注ぎはじめてから t 秒後の水面の広がる速さを求めよ．

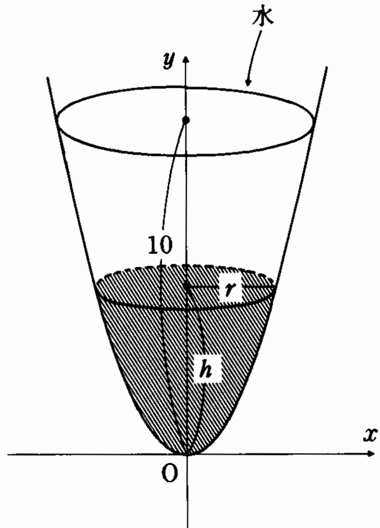
解　説　(1)　t 秒後の水量は

$$V=\int_0^t 2t\,dt=[t^2]_0^t=t^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，このときの高さは h であるから

$$V=\int_0^h \pi x^2 dy=\pi\int_0^h y\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h=\frac{\pi}{2}h^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



①と②は等しいから

$$\frac{\pi}{2}h^2=t^2 \qquad \therefore \quad h=\sqrt{\frac{2}{\pi}}t \ \text{(cm)}$$

(2)　$h=10$ とすると

$$t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,h=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 10=10\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ \text{(秒)}$$

(3)　t 秒後の水面の面積 $S(t)$ は，このときの「断面の半径を r」とすると

$$S(t)=\pi r^2=\pi h \longleftarrow h=r^2 \ (y=x^2)$$

$$=\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t=\sqrt{2\pi}\,t$$

$$\therefore \quad \frac{dS(t)}{dt}=\sqrt{2\pi} \ (\text{cm}^2/\text{sec})$$

らしんばん

➡ 問題は(3)で，「水面の面積が t の式で直接与えられるとき」はこのようにして求める．しかし，そうでないときは「基礎解析」の範囲をこえて，「微積分」の「合成関数の微分法」を用いることになる．

索　　引

ア

$\alpha \pm \beta$ の三角関数 ……69

イ

一般角……51,53
一般角の三角関数……54
一般項……110
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ ……247
$\int \{kf(x) + lg(x)\} dx$……247

ウ

右方微係数……190

エ

$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$……163
$a_{n+1} + a_n = p \cdot r^n$ ……161
$a \cos \theta + b \sin \theta$ の 1 つの扱い方‥88
$a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ ……89
S_n から a_n を求める ……175
n の階乗(かいじょう)……176
$f(ax+b)$ の周期 ……67
$f(x)$ ……180
$f(\cos \theta) = 0$ ……97
$f'(x)$ の符号変化 ……208
演繹……134

オ

(レオンハルト・)オイラー……2
オイラーの公式……50
扇形の面積……52

カ

開区間……206
階差数列……120
階差数列の応用……158
階差数列の公式……159
回転体……279
回転体の体積……278
カヴァリエリの原理……271,275,281
仮数……31
加法定理とその応用……69
関数……177,179,180
関数値……180
関数の極限……181,183,222
関数の極限と微分法……179
関数の合成と漸化式……172
関数の増減……205,206
関数の増減と極値……205
関数の定義……180
関数方程式……224,262
完全帰納……133

キ

奇関数……253
帰納(きのう)法……133
逆階差……160
求積法……244
共通接線……227
極限……177,178
極限値に関する定理
……183,185,186,187,223
極限の考え方……181
極小……208
極大……208
極大・極小……208,232
極大点・極小点……208
極値……208

極値の計算……230

ク

偶関数……253
空間の球を平面で切る……319
区分求積法……266
群数列……129

ケ

原始関数……246,250

コ

公差……111
格子点……152,157
公比……114
cos 36° の値……84
$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ を $\tan\frac{\theta}{2}$ で表す……74
弧度法(ラジアン)……51,53
弧の長さ……52
固有値……139
固有方程式……139

サ

最小値……213
最大・最小……44,101,235,238
最大値……213
最大値・最小値……213
sin, cos, tan の基本関係……55
sin, cos の加法定理……69
左方微係数……190
三角関数……49,50,51,54,56
三角関数の重ね合わせ……50
三角関数のグラフ……63,64
三角関数のグラフの性質……65
三角関数の合成公式……91,94
三角関数の消去計算……92
三角関数の性質……59
三角関数の相互関係……55
三角関数の定義……54
三角形の形状……104
三角不等式……82,95
三角方程式……78
3 項間漸化式の基本形……146
3 倍角の公式……73

シ

$\theta+2n\pi$ の三角関数……62
$\theta\pm\frac{\pi}{2}$ の公式……61
$\theta\pm\frac{\pi}{2}$ の三角関数……61
$\theta\pm\pi$ の公式……60
$\theta\pm\pi$ の三角関数……60
$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ (べき数列の和)……127
$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ の形のもの……125
$\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$……118,119
指数……3,4,8,9
指数関数……3,11,15
指数関数で表された関数……34
指数と対数……1
指数と対数の関係……35
指数の拡張……5
指数不等式……13
指数法則……3,4,17
指数方程式……13
指標……31
指標の性質……31

周期関数……………………………63
従属変数……………………………180
瞬間速度……………………………178
常用対数……………………………30
真数の大小と底の関係……………27

ス

数学的帰納法………………107,132
数学的帰納法と漸化式…………132
数学的帰納法についての公理……133
数列………………107,108,109,110
数列とその和………………109,117

セ

正四面体が回転する……………313
積の導関数…………194,196,262
積分…………………………………294
積分で表された関数，次数の決定
……………………………………292
積分で定義された関数…………258
積分とその応用…………………265
積分の計算………………………245
積分変数……………………………252
積分法とその応用………………243
積分を微分する…………………258
(積→和)の公式…………………75
接線……………………………200,304
接線の傾き………………………190
接線の方程式……………………199
漸化式(ぜんかしき)
……………………111,165,166,294
漸化式の基本的なタイプ………138

ソ

速度……………………178,285,321

タ

対称積分……………252,254,288
対数……………………………………1,2
対数関数の定義……………………15
対数で表された関数 $\log(g(x))$ ……43
対数とけた(桁)数…………………47
対数不等式………………24,27,41
対数方程式…………………24,37
体積……………………………244,278
単位円…………………………………55
tan の加法定理 ………………70,99
単調減少……………………………206
単調減少関数…………………………12
単調増加……………………………206
単調増加関数…………………………12
断面の図形…………………………308

チ

値域…………………………………180
中間値の定理………………………217
直線の通過領域……………………300
直線のなす角…………………………99

ツ

テ

定義域………………………………180
定数…………………………………206
定積分……………250,265,266,278
定積分についての諸定理……251,254
定積分の区間分割…………………290
定積分の計算………………………288

定積分の大小関係…………………297
底変換の法則………………………19

ト

導関数………188,192,196,223,225
導関数と整式の除法….196,197,225
導関数についての諸定理….194,247
導関数の定義………………192,267
等差数列…………………………111
等差数列の一般項と第 n 項までの和……………………………112
等差数列の和……………………119
等比数列…………………………114
等比数列の一般項と第 n 項までの和……………………………114
独立変数…………………………180
度とラジアンの関係………………52

ナ

ニ

2項間漸化式の基本形……138,144
2項の積の総和…………………150
(アイザック・)ニュートン
……………………108,178,244

ヌ

ネ

ねじれた円板が回転する………316
ねじれの回転……………………308
(ジョン・)ネピア…………………2

ノ

ハ

倍角の公式………………………72
(ブレース・)パスカル…………108
発散………………………………184
波動の理論………………………50
半角の公式………………………73

ヒ

非回転体…………………………279
非回転体の体積…………………307
微積分……………………………177
微積分学の基本定理……………267
被積分関数………………………252
被積分関数の変形………………253
微分………………………………178
微分係数………………188,190,223
微分係数の定義…………………189
微分法……………………………178
微分法とその応用…………177,199

フ

フィボナッチの数列……………169
物理への応用……………285,321
不定積分…………………245,246
不等式への応用…………………220
部分分数…………………125,127
(ジョセフ・)フーリエ……………50
フーリエ級数……………………50
分数(有理数)指数の定義…………8

ヘ

平均変化率………………………189
閉区間……………………………206
平面束……………………………319

べき数列……………………………128
べき数列の和…………………………160
ベクトルの内積………………………71
Hesse（ヘッセ）の標準形………318
変曲点…………………………………232

ホ

法線……………………………………200
方程式への応用………………………216

マ

$-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$……………252
$-\theta$ の公式…………………………59
$-\theta$ の三角関数……………………59

ミ

ム

無限小量………………………………178
無限数列………………………………110
∞（無限大）…………………………184
無理数……………………………………9

メ

面積……………243,244,265,266,302

モ

ヤ

ユ

有限数列………………………………110
有理数……………………………………8

ヨ

ラ

（ゴットフリート・ウィルヘルム・）
ライプニッツ…………108,178,244

リ

ル

累乗根……………………………………6
累乗根の計算法則………………………7

レ

連続関数の基本的性質………………217
連立漸化式…………………169,171

ロ

ロガリズム………………………………2
ロッグ……………………………………2
$\log_2 n$ …………………………………155

ワ

$y=\log_a x$ ………………………………16
（和→積）の公式………………………75

A