第２章

微分法とその応用

「平均値の定理」は
「関数の増減」を調べる根拠をあたえる.
このことを利用して「グラフ」を描こう.
――関数の具体的な姿が
視覚的にとらえられる!!

「基礎解析」で学んだ「微分法」をふまえて，より深く，より明確に

「微積分学」が，「変化」や「運動」に関する学問であり，その土台が「関数」と「極限」の概念であること，特に「微分法」についていえば「導関数」を調べることにより「関数の増減」の状況を知ることができることなどはすでに「基礎解析」で整関数を対象として学んだことがらである．

ここでは，それに加えて「分数関数」，「無理関数」，「3角関数」，「指数・対数関数」，あるいはこれらの関数で合成された関数の「微分法」からハナシを展開する．

この章で学ぶ内容を簡単に整理すると大きく分けて次の4点である．

(i) 「基本公式」について――「基礎解析」で学んだことがらが基本になることはいうまでもないが，対象として扱う関数の「特殊性」をうまく利用して，新しい「微分の方法」や「公式」が登場することになる．

(ii) 「関数の増減」と「平均値の定理」について――「平均値の定理」を学ぶことにより「関数の増減」に関するイメージをより明確に把握する．

(iii) 「関数のグラフ」をよりくわしく描くことについて――「導関数の符号変化」を調べることにより，「関数の増減」がわかる．それに加えて，「第2次導関数の符号変化」を調べることにより，「グラフの凹凸」の状態もわかる．

さらに「漸近線」があれば，それも求めて，できるだけくわしい情報のもとに「関数の具体的な姿」をとらえる方法を研究する．

(iv) 以上の応用として――「方程式・不等式への応用」「近似式と関数の級数展開への応用」などについて考えてみる．

――これらを学ぶことを通して「微分法の基礎概念」についての理解をより深め，「微分法とその周辺の諸問題」を解決する方法を研究するのが，この章の主な目的である．なお，次の章ではこの章で学ぶ微分法の「逆演算」がでてくるので，特に心してキッチリと理解し，よく「使いこなせる」ようになっておかなければならない．

第1節
微分法

まず，「微分係数の定義」，「導関数の定義」，「関数の連続性」などの基本概念について説明し，次に「基礎解析」ではあつかわなかった部分での「微分法の基本公式」のまとめ，その上で「3角関数，指数・対数関数についての微分法」という手順で解説する．

1　基本概念について

関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a に対して，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\left(a+h=x \text{ とおくと } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ とも書ける}\right)\cdots\cdots①$$

が存在するとき，その極限値を $f(x)$ の $x=a$ における「**微分係数（略して微係数ともいう）**」といい $f'(a)$ で表す．また，このとき $f(x)$ は「$x=a$ において微分可能である」という．

ある区間Iに属するすべての x の値において $f(x)$ が微分可能であるとき，$f(x)$ は「区間Iで微分可能である」という．このとき区間Iの**ある x の値に対する微分係数 $f'(x)$ は，その区間Iで定義された x の関数**であるので，これを $f(x)$ の「**導関数**」という．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを「**$f(x)$ を（x で）微分する**」という．

導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad\left(=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$

注　a を定数とするとき $f'(a)$ は定数であり，x を変数とするときの $f'(x)$ は x

の関数である．混同しないように注意しなければならない．

ここまではすでに「基礎解析」で学んだことがらである．

以上のことをふまえた上で「関数の連続性」と「微分可能性」の関係について述べる．

連続と微分可能性についての定理

ある区間で微分可能な関数はその区間において連続である．しかしこの逆はなりたたない．

解　説　関数 $y=f(x)$ の x の増分 Δx に対する y の増分 Δy は

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

で，関数 $y=f(x)$ が微分可能ならば

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

が有限確定値として存在するから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=f'(x)\cdot 0=0$$

すなわち，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\{f(x+\Delta x)-f(x)\}=0 \qquad \therefore\ \lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$$

となり，$f(x)$ は連続である．

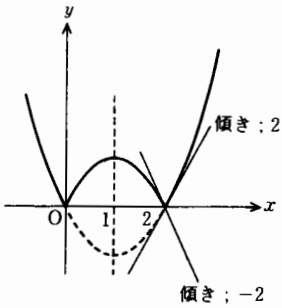
「逆はなりたたない」――**連続であっても微分可能とは限らない**――ことを証明するには，反例を1つあげれば十分である．いま関数

$$f(x)=|x(x-2)|=\begin{cases} x(x-2) & (x\leqq 0,\ x\geqq 2) \\ -x(x-2) & (0\leqq x\leqq 2)\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

について考えてみよう．この関数 $f(x)$ については

$$f(2)=\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}f(x)=0$$

で，$f(x)$ は $x=2$ で連続である．



ところが

$x\leqq 2$ のときは

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{-x(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-0}(-x)=-2$$

$x\geqq 2$ のときは

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}x=2$$

で，この2つの値が等しくならない．

すなわち，$f'(2)$ は存在しない．したがって，② は $x=2$ で「連続」であるが「微分不可能」である．

なお，この関数は $x=0$（原点）でも同様に「連続」ではあるが「微分不可能」である――上の方法にならって確かめておくとよい．

らしんばん

$f'(a)$ の存在について――「微分係数の定義」①（p. 67）で説明する．

①の $h\to 0$（あるいは $x\to a$）は，h が限りなく0に近づく（あるいは x が限りなく a に近づく）ということであるが，これは

$$\begin{cases} h \text{ が正のまま } 0 \text{ に近づく（} x \text{ が右から } a \text{ に近づく）} \cdots\cdots\cdots \text{(A)} \\ h \text{ が負のまま } 0 \text{ に近づく（} x \text{ が左から } a \text{ に近づく）} \cdots\cdots\cdots \text{(B)} \end{cases}$$

の2通りの場合を考えればよく，これらのことは「lim」の記号を用いて次のように表される．

$$\text{(A)}: \lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\left(\text{または } \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \cdots\cdots (*)$$

$$\text{(B)}: \lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\left(\text{または } \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \cdots\cdots (**)$$

そして，この2つの値がそれぞれ有限確定値として存在するとき，

$$\begin{cases} (*) \text{ を } x=a \text{ における「右方微分係数（} f'_{\mathrm{R}}(a) \text{ と書く）」} \\ (**) \text{ を } x=a \text{ における「左方微分係数（} f'_{\mathrm{L}}(a) \text{ と書く）」} \end{cases}$$

という．**「$f(x)$ が $x=a$ において微分可能である」というのは，この2つの値が有限確定値として存在してしかも一致するとき」のことで，この値を $f'(a)$ と表す．（ただし，閉区間の端点の場合は特別にその状況にあわせて「右方微分可能」，「左方微分可能」のように表すものとする．）**

したがって①で，「極限値が存在する」ということは，すでに(*)，(**)の両方が「有限確定」でしかも「等しい」ということが含まれているわけである．

要するに微分可能というのは，グラフでいうと曲線がナメラカでトンガラないことを意味している．

例題 1

次の関数の $x=0$ における「連続性」と「微分可能性」を調べよ．

(1)　$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　(2)　$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

解　説　(1)　まず，「微分係数の定義」にしたがって $f'(0)$ の存在について調べる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

この極限値は定まらないから $f'(0)$ は存在しない．すなわち $f(x)$ は，$x=0$ において微分不可能である．しかし $f(x)$ は，$x=0$ で連続かもしれない．そこで連続性について調べる．

$x\neq 0$ のとき，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq 1$ ゆえ $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq |x|$

$$\therefore\quad 0\leqq\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq\lim_{x\to 0}|x|=0\qquad\therefore\quad\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\quad(=f(0))$$

これは $f(x)$ が，

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)}$$

をみたすことを示している．

すなわち，$f(x)$ は $x=0$ で連続である．

(2)　これは(1)を利用する．

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\ (\because (1))\qquad\therefore\quad g'(0)=0$$

ゆえに $x=0$ において微分可能であり，したがって当然連続である．

らしんばん

このような問題は，グラフによる視覚的な判断ではなく，定義にしたがってキッチリと確認しなければならない．

2　微分法の基本公式

以下，特にことわりのない限り関数は微分可能とする．

(1)　積，商の微分法

微分可能な2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の積，商の導関数については次の定理がなりたつ．

積・商の微分法

(1)　$\boldsymbol{(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$　　(積の微分法)

(2)　$\boldsymbol{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$　$\boldsymbol{(g(x)\neq 0)}$　　(商の微分法)

解　説　(1)　$y=f(x)g(x)$，$u=f(x)$，$v=g(x)$ とするとき，x の増分 Δx に対する u，v の増分をそれぞれ Δu，Δv とすると

$$\Delta u=f(x+\Delta x)-f(x) \quad \therefore \quad f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta u=u+\Delta u$$

同様にして

$$g(x+\Delta x)=v+\Delta v$$

であるから，Δx に対する y の増分 Δy は

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\\&=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv\\&=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

これを用いて，y' を求めると，

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot v+u\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\right)\\&=u'v+uv'\end{aligned}$$

($g(x)$ は連続だから $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=\lim_{\Delta x\to 0}\{g(x+\Delta x)-g(x)\}=0$)

すなわち，

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(2)　(1)の積の導関数を利用すると

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\cdots\cdots①$$

となり，結局 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$ を求めればよいことがわかる．

そこで，$y=\frac{1}{g(x)}$ として，(1)と同様に $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right\}\\&=\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x)g(x+\Delta x)}\\&=-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

が得られ，これを①にいれればよい．

らしんばん

(1)を 2 回用いると，ハナシは次のように拡張される．

$$\{f(x)g(x)h(x)\}'=\{f(x)g(x)\cdot h(x)\}'$$
$$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

証明しておくとよい．

(2)について——次の形をしっかりとつかむこと

$$\left(\frac{\text{分子}}{\text{分母}}\right)'=\frac{(\text{分子})'(\text{分母})-(\text{分子})(\text{分母})'}{(\text{分母})^2}$$

なお②はこの公式(2)の特別な場合（$f(x)=1$ とおいてみよ．）で，次に学ぶ「**合成関数の微分法**」と「**対数微分法**（p. 85）」がわかれば比較的簡単に導かれる．

あるいは，$\dfrac{1}{g(x)}$ の微分可能性が保証されれば，$g(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}=1$ の両辺を微分して

$$g'(x)\frac{1}{g(x)}+g(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=0 \qquad \text{（積の微分法）}$$
$$\therefore\ \left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

とすることもできる．

（2） 合成関数の微分法とその応用

次に示す「合成関数の微分法」は重要でなかなか便利な定理である．

この定理を用いると，「逆関数の微分法」，「媒介変数（パラメーター）で表された関数の微分法」などがただちに導かれる——これらについては 1 まとめにして理解しておくとよい．

合成関数の微分法

$y=f(u)$，$u=g(x)$ の導関数をそれぞれ $\dfrac{dy}{du}$，$\dfrac{du}{dx}$ とするとき，合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}} \quad\cdots\cdots①$$

で与えられる．

解　説　x の増分 Δx に対する u，y の増分を Δu，Δy とすると

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdots②$$

ここで，$u=g(x)$ が導関数をもつから②で

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\quad\left(=\frac{du}{dx}\right)$$

が存在し，したがって $\Delta x\to 0$ のとき Δu は

$$\begin{aligned}\Delta u&=g(x+\Delta x)-g(x)\\&=\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x\longrightarrow 0\end{aligned}$$

でなければならない．このことから②で

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\quad\left(=\frac{dy}{du}\right)$$

も存在する．

$$\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

らしんばん

➡ Δx については $\Delta x\neq 0$ として0に近づけるのであるが，このとき Δu については $\Delta u\neq 0$ という保証はない．したがって上の証明は実は不完全であり，$\Delta u=0$ のときの説明が必要になるが，この場合もふくめての完全な証明は高校数学の範囲をこえるので，ここではふれないことにする．

また，①の右辺を「形式的に」約分すると

$$\frac{dy}{\cancel{du}}\times\frac{\cancel{du}}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

で，「形式的に」左辺と同じ形になる――これがこの表現の「すごい」ところで，「積分」を学ぶときにさらにその「ありがたさ」がわかることになる．

なお，$y=(x^2-x+1)^4$ などについては，$x^2-x+1=u$ とおけば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot(2x-1)=4(x^2-x+1)^3\cdot(2x-1)$$

であるが，慣れてくれば

$$\{(x^2-x+1)^4\}'=4(x^2-x+1)^3\cdot(2x-1)$$

などのように置き換えないで直接やれるようになる．

➡ 「逆関数の微分法」――$y=f(x)$ の逆関数は，$f'(y)\neq 0$ のとき微分可能で，この導関数を求めるには

$$x=f(y)(\Longleftrightarrow\ y=f^{-1}(x))$$

の両辺を x で微分する（合成関数の微分法）．

$$\frac{dx}{dx}(=1)=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\qquad\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(y)}\quad\cdots(*)$$

$$\left(\text{ただし，}\frac{dx}{dy}\neq 0\text{ とする}\right)$$

$\dfrac{dy}{dx}$ が $\dfrac{dx}{dy}$ とたがいに逆数の関係となっていることに注目!!——「形式的に」分数計算に対応していておもしろい.

なお (＊) の $f'(y)$ は, $f'(x)$ の x を y で置きかえたものである. ところが求めるものは $\dfrac{dy}{dx}$ ($y=f^{-1}(x)$ を x で微分した式) であるから結果は x の式として与えられなければならない. すなわちこれは $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ($\dfrac{1}{f'(x)}$ の x に $f^{-1}(x)$ を代入したもの) となる.

たとえば $f(x)=x^2(x\geqq 0)$ の逆関数 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ は $f'(x)=2x\neq 0$, すなわち $x\neq 0$ のとき微分可能で

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{(y^2)'}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる.

➡ 「媒介変数 (パラメーター) 表示による関数の微分法」——x と y との関係がパラメーター t を用いて $x=f(t)$, $y=g(t)$ で定義されているとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めるにはどうすればよいか——それには「合成関数の微分法」と(＊)をあわせて用いればよい.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\qquad\left(\text{ただし } \frac{dx}{dt}\neq 0 \text{ のとき}\right)$$

これについても, 「形式的に」分数計算と同じである.

以下例題でその使い方を具体的に解説する.

例題 2

次の関数を微分せよ.

(1) $y=x^p$ (p は有理数, $x>0$)　　(2) $y=\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}$

(3) $y=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(x^2<a^2)$

解　説　(1) p は有理数であるから, $p=\dfrac{m}{n}$ (m は整数, n は正整数) とおくことができる.

このとき

$$y=x^p=x^{\frac{m}{n}}\qquad\therefore\quad y^n=x^m$$

「合成関数の微分法」を用いて両辺を x で微分すれば,

$$ny^{n-1}y'=mx^{m-1}$$

$$\therefore\quad y'=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$=\frac{m}{n}\cdot x^{(m-1)-\frac{m(n-1)}{n}}=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}=\boldsymbol{px^{p-1}}$$

(2)　与えられた関数を

$$y=(x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

として，(1)の結果と「合成関数の微分法」を用いると，

$$y'=\frac{2}{3}(x^2-x+1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(2x-1)$$

$$=\frac{\boldsymbol{2(2x-1)}}{\boldsymbol{3\sqrt[3]{x^2-x+1}}}$$

$\left(\begin{array}{l}x^2-x+1=u\ \text{とおくと}\\ \dfrac{dy}{du}=\dfrac{2}{3}u^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}},\ \dfrac{du}{dx}=2x-1\end{array}\right)$

(3)　分母を有理化して，y をなるべく簡単な形にしてから微分する．

$$y=\frac{(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2})^2}{(a^2+x^2)-(a^2-x^2)}=\frac{a^2-\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}$$

商の微分法より

$$\therefore\quad y'=\frac{\left(-\dfrac{-4x^3}{2\sqrt{a^4-x^4}}\right)\cdot x^2-(a^2-\sqrt{a^4-x^4})\cdot(2x)}{x^4}$$

$$=\frac{\boldsymbol{2a^2(a^2-\sqrt{a^4-x^4})}}{\boldsymbol{x^3\sqrt{a^4-x^4}}}$$

$\left(\begin{array}{l}\sqrt{a^4-x^4}\ \text{の微分は}\ (a^4-x^4)^{\frac{1}{2}}\\ \text{の形になおして(2)にならった}\end{array}\right)$

らしんばん

(1)は「基礎解析」で

$$(\boldsymbol{x^p})'=\boldsymbol{px^{p-1}}\ (\boldsymbol{p}\ \text{は正整数})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

として学んだ公式で，$\boldsymbol{p}$ の範囲を有理数全体へ拡張するハナシである．ただし本問では，$p<0$ のときも(*)が成立することを「ことわりなしに」用いているが，それは $p=-q$ $(q>0)$ とおけば次のようにして確認される．

$$(x^p)'=(x^{-q})'=\left(\frac{1}{x^q}\right)'$$

$$=\frac{-qx^{q-1}}{(x^q)^2}=-qx^{(-q)-1}=px^{p-1}$$

さらに「対数微分法」(これはあとで述べる) を用いるとこの公式の p は実数全体に拡張される．(p. 85)

また，本問(1)では x^p の定義域を $x>0$ としてハナシを進めたが (*) は本文に説明した m，n で場合を分けると

nが偶数のとき$\begin{cases} m>0 \text{ ならば } x\geqq 0 \\ m<0 \text{ ならば } x>0, \end{cases}$ nが奇数のとき$\begin{cases} m>0 \text{ ならば } x \text{ は全実数} \\ m<0 \text{ ならば } x\neq 0 \end{cases}$

で成立する．($x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{2}{3}}$ などで考えてみるとよい．)

➡ (2), (3)のように，$\sqrt[n]{f(x)}$ などの「無理関数の微分法」では，$(f(x))^{\frac{1}{n}}$ の形になおすのがポイント!!

➡ (2)を(1)にならってやれば，①の両辺を3乗して

$$y^3=(x^2-x+1)^2$$

両辺を x で微分すると

$$3y^2y'=2(x^2-x+1)\cdot(2x-1)$$

で，これを y' について解けばよい．

例題 3

(1) $x=t+\dfrac{1}{t}$, $y=t^2+\dfrac{1}{t^2}$ のとき，$t=2$ における $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ．

(2) 楕(だ)円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

であることを示せ．ただし，$a>0$, $b>0$ とする．

解　説 (1) $\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t-\dfrac{2}{t^3}$

より $t=2$ のときは $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$ であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2\cdot 2-\dfrac{2}{2^3}}{1-\dfrac{1}{2^2}}=\mathbf{5}$$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……①

y が x の関数であることに注意して，①の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \qquad (y\neq 0\text{のとき})$$

よって，$\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における①の接線は $y_0\neq 0$ のときは

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

で，これを整理すると

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1 \qquad (\because \mathrm{P}(x_0, y_0)\text{ は①上の点である})\ \cdots②$$

また，$y_0=0$ のときは $x_0=\pm a$ ゆえ点Pは $(a, 0)$（または $(-a, 0)$）で，接線は $x=a$（または $x=-a$）となるが，これらはいずれも②に含まれ（代入してみよ）$y_0 \neq 0$，$y_0=0$ に関係なく，点Pにおける接線の方程式は②となる．

ゆえに①上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1}$$

らしんばん

(1)はどのような曲線か——t を消去してみよう．

$$y=t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2$$

ただし，x の範囲は，(相加平均) ≧ (相乗平均) より

$$|x|=\left|t+\frac{1}{t}\right|=|t|+\frac{1}{|t|}\geqq 2\sqrt{|t|\cdot\frac{1}{|t|}}=2$$

（等号は $|t|=1$ のとき）

であることに注意しなければならない．

(1)は放物線

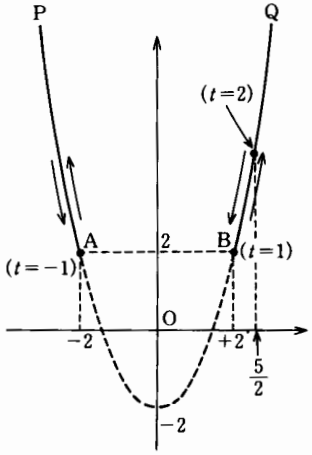
$$y=x^2-2 \quad (|x|\geqq 2)$$

のパラメーター表示である．

$t=2$ のときは

$$x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=2x=2\cdot\frac{5}{2}=5$$

である．



P(x, y) は「t：$-\infty \to -1 \to 0$」に対応して「P→A→P」「t：$0 \to 1 \to \infty$」に対応して「Q→B→Q」と変化する．

(2)について少し説明しておく——$|x|\leqq a$ に注意して①を y について解くと

$$y\geqq 0 \text{ のとき：} y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y\leqq 0 \text{ のとき：} y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

で，この式から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めてもよいが，上の本文で述べた方法の方がいくらかスッキリしているだろう．

この時，y が x の関数であることを忘れて y を定数として扱ってはいけない．「合成関数の微分法」を用いる．

一般に，x, y に関する方程式が，

$$F(x, y)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

で与えられるとき——「$y=(x$ だけの式$)$」の形で与えられていなくても——x,

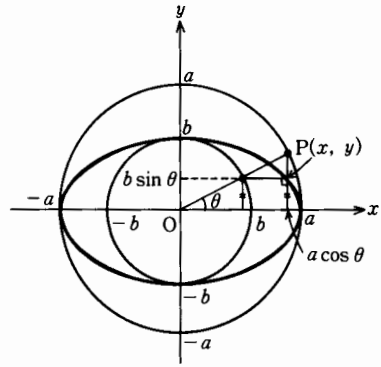
y の適当な範囲に対して，y を x の関数と考えて「合成関数の微分法」を利用し，(＊)の両辺を x で微分すれば，比較的簡単に $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができる．

x の関数 y が(＊)の形で与えられるとき，y を x の「陰関数」ともいい，このような微分の方法を「陰関数の微分法」という．

なお，本問の楕円については媒介変数を用いて，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

と表されるから，「3 角関数の微分法」がわかっていれば(1)と同じ方法で $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることもできる．



$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a\cos\theta}{b\sin\theta}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

曲線 $F(x, y)=0$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-y_0=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0)}$$

$\left(\text{ただし}\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{は点 }\mathrm{P}(x_0, y_0)\text{ における微分係数とする．}\right)$

で与えられる――「接線の方程式」とその「図形的な意味」については，「陰関数の微分法」の場合においても「基礎解析」で学んだことと基本的には同じである．

3　3 角，指数・対数関数の導関数

(1)　3 角関数の微分法

3 角関数の微分法については，次の公式が基本になる．

3 角関数の微分法

(1)　$(\sin x)'=\cos x$　　(2)　$(\cos x)'=-\sin x$

(3)　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

解　説　(1)「導関数の定義」にしたがって

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

を計算する．このとき3角関数の「(差→積) の公式」を用いると

$$\sin(x+h)-\sin x=2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

ゆえ，これを①にいれて

$$\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　これも(1)と同様にして「導関数の定義」から導くこともできるが，$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ であることに注目して「合成関数の微分法」を用いると簡単にいく．

$$(\cos x)'=\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1=-\sin x$$

(3)　(1)，(2)を利用してやってみよう．

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

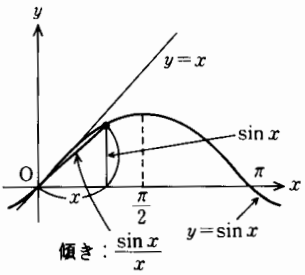
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

らしんばん

この公式の証明の基礎になっているのは，極限のところで説明した

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

という式である．これは $y=\sin x$ のグラフでいうと「$x=0$ における微分係数が1 (原点における接線の傾きが1)」であることを意味している．



ただしこの場合，角の単位が「弧度 (ラジアン)」であることに注目したい．

なぜ「ラジアン」でなくてはならないか．タメシに角の単位として「60分法」の「度」をとるとどうなるか．

$$x^\circ=2\pi^{\mathrm{rad}}\times\frac{x}{360}=\frac{\pi}{180}x^{\mathrm{rad}}\ (\text{rad と書いてラジアンと読む})$$

であるから

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}\longrightarrow\frac{\pi}{180}\quad(x\to 0)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

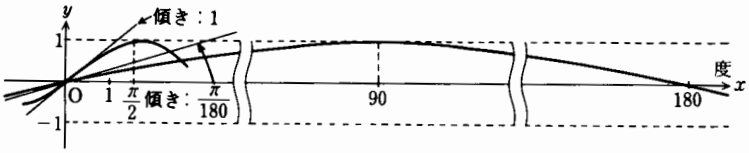
（x の単位として「ラジアン」をとっても「度」をとってもその角が同じなら **$\sin x$ の値は同じだが分母の x はそうはいかない**）

となり，「度」を単位にとると $y=\sin x$ の「$x=0$ における微分係数」は

$$\frac{\pi}{180}\fallingdotseq\frac{3.14\cdots\cdots}{180}=0.01744\cdots\cdots$$

というきわめて小さい値であることがわかる．

このことは「度」を横軸にとってグラフを「マジメ（？）に」描くと次のような極端にタテ方向につぶれたサインカーブになることからもわかる．



次に「度」を角の単位としたまま $\sin x$ を微分してみよう．本問の(1)で用いた式変形

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\underbrace{\cos\frac{2x+h}{2}}_{(A)}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{(B)}$$

を用いて説明すると，この式で $h\to 0$ とするとき右辺の(A)は $\cos x$，(B)は $\frac{\pi}{180}$（$\because$（**））となって

$$(\sin x)'=\frac{\pi}{180}\cos x$$

であることがわかる．この場合は「ラジアン」を角の単位としているときとちがって $\frac{\pi}{180}$ という係数がかかっているからこのまま微分の計算を続けると，微分するたびごとにこの係数 $\frac{\pi}{180}$ がついて，実にやっかいなことになってしまう．しかし角の単位に「ラジアン」をとればこのようなことはおこらず，本文②でもわかるように，**この係数が 1 となって公式がきわめて簡単な形で表されて実に便利である．**

あとで述べる「指数関数」の場合についても同様のことがいえて，「e」という数の意味をまったく同じ視点で説明することになる．

例題 4

次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\sin(3x-2)$　　(2)　$y=\cos^2 x$

(3)　$y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　　(4)　$y=\dfrac{1}{1+\tan x}$

解　説　(1)　$y'=\cos(3x-2)\cdot 3=\mathbf{3\cos(3x-2)}$

(2)　$y'=2\cos x(\cos x)'=-2\cos x\sin x=\mathbf{-\sin 2x}$

(3)　$y'=\dfrac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}=\mathbf{-\frac{1}{1+\sin x}}$$

(4)　$y'=\{(1+\tan x)^{-1}\}'=-(1+\tan x)^{-2}\cdot(1+\tan x)'$

$$=-\frac{1}{(1+\tan x)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{(\cos x+\tan x\cos x)^2}$$

$$=-\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+2\sin x\cos x}=\mathbf{-\frac{1}{1+\sin 2x}}$$

らしんばん

本問は「3 角関数の微分法」の計算問題であるが，先に述べた「積・商の微分法」や「合成関数の微分法」などの基本公式をそのまま用いている．それはこのあとに続く「指数・対数関数の微分法」以下，「いろいろな関数で合成された関数」を扱う場合でも同様である．

(2)　指数・対数関数の微分法

指数関数

$y=a^x$（a は 1 でない正の定数）

は，あらゆる実数 x で定義され，すべての正数を値域にとる関数で

$a^{x+y}=a^x\cdot a^y$（指数法則）　……①

が最も基本的で重要な性質である．

いま，この①の性質を用いて，$f(x)=a^x$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めてみることにする．ただし，指数関数のグラフは「ナメラカ」であるから，$\boldsymbol{x=0}$ における微分可能性については直観的に認めておくことにする．

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-a^0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\quad(=k\ \text{とおく})$$

であるから，任意の x の値に対して

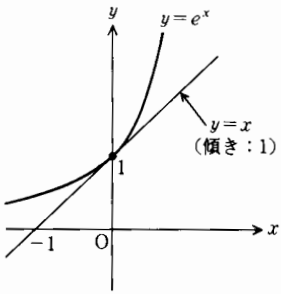
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=ka^x$$

が存在する．これは「**関数 $f(x)=a^x$ は $x=0$ における微分可能性が保証されさえすれば，すべての x で微分可能であり**

$$(a^x)'=ka^x \cdots\cdots ②$$

である」ということに他ならない．



この公式で $k=1$ となるような a について考えると，この関数 $f(x)=a^x$ については何回微分してもその結果は a^x で大変都合がよい．実は**このように（$k=1$ となるように）きめた a の値が，「極限」のところで説明した「e」という数なのである．**すなわち，a を e にとれば k は

$$k=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

である．

このように考えると，この「e」という数がきわめて「人工的な数」に思われるが，この数「e」を指数関数，対数関数の「底」に用いることにより，これらの関数の微積分は目のさめるような展開をすることになるのである．

指数・対数関数の微分法

(1) $(e^x)'=e^x$　　(2) $(a^x)'=a^x\log a$

(3) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$　　（ただし(2)，(3)の対数の底は e とする）

解　説　(1)　これは前述の通り．

(2) (1)とは少し様子がちがう．

そこで，$y=a^x$ とおいて両辺の対数（底は e）をとると

$$\log y=\log a^x=x\log a \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad y=e^{x\log a}$$

$$\therefore\quad y'=e^{x\log a}(x\log a)'\quad(\text{合成関数の微分法})$$

$$=a^x \log a \quad (\because \quad e^{x \log a}=a^x)$$

(3)　$y=\log x$ とおくと　$x=e^y$ であるから，逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

らしんばん

➡ 以下，特にことわりのない場合，対数の底は e とする．これを「自然対数」という．

➡ (2)は，(3)がわかっていれば①の両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\log a \quad \therefore \quad y'=y \log a=a^x \log a$$

と，いくらか簡単にやることができる．なお，これから $y=a^x$ の $x=0$ での微分係数 k は $\log a$ であることがわかる．(前ページ② の k)

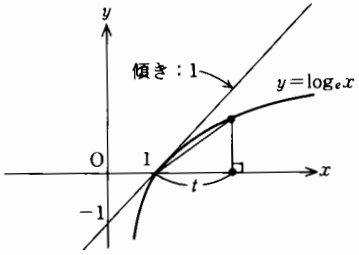
➡ (3)を定義にしたがってやると

$$(\log x)'=\lim_{h \to 0} \frac{\log (x+h)-\log x}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log \left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \frac{\log (1+t)}{t} \quad \left(t=\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x} \cdot 1=\frac{1}{x}$$



となる．

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log_e (1+t)}{t}=1$$

については「極限」のところで説明した．(p. 40, 41 参照)

例題 5

次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　(2)　$y=x \log (x^2+1)$

(3)　$y=\log \sqrt{\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|}$　$(x \neq \pm 1)$

解　説　(1)　$y'=\dfrac{(e^x-e^{-x})' \cdot (e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$

$$=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{\mathbf{4}}{(\boldsymbol{e^x+e^{-x}})^2}$$

(2) $y'=\log(x^2+1)+x(\log(x^2+1))'$

$$=\log(x^2+1)+x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=\boldsymbol{\log(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}}$$

(3) $y=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=\frac{1}{2}\Big(\log|1+x|-\log|1-x|\Big)$

$$\therefore\quad y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{1-x^2}}$$

らしんばん

(1)(2)については問題ナシとしよう．(3)は

$$(\boldsymbol{\log|x|})'=\boldsymbol{\frac{1}{x}}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

を用いた．これは，次のように考えるとよい．

$$\begin{cases} x>0 \text{ のとき：} (\log|x|)'=(\log x)'=\dfrac{1}{x} \\ x<0 \text{ のとき：} (\log|x|)'=\{\log(-x)\}'=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

(＊)は，この両方をまとめて表したものである．なお

$$\frac{1+x}{1-x}>0 \iff (1+x)(1-x)>0 \iff |x|<1$$

ならば絶対値をつけるまでもなく

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}\{\log(1+x)-\log(1-x)\}$$

である．その上で微分すればよい．

例題 6

次の関数を微分せよ．

(1) $y=x^x\ (x>0)$　　(2) $y=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{3}{5}}\ (x\neq 0,\ x\neq 1)$

解　説　(1) $y=x^x\ (x>0)$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y=x\log x$$

この両辺を x で微分すれば，

$$\frac{y'}{y}=\log x+1$$

$$\therefore\quad y'=y(\log x+1)=\boldsymbol{x^x(\log x+1)}$$

(2) $|y|=|x|^{\frac{2}{3}}|x-1|^{\frac{3}{5}}$ として両辺の対数をとると

$$\log|y|=\frac{2}{3}\log|x|+\frac{3}{5}\log|x-1|$$

この両辺を x で微分すれば

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{19x-10}{15x(x-1)}$$

$$\therefore\quad y'=y\cdot\frac{19x-10}{15x(x-1)}=x^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{3}{5}}\cdot\frac{19x-10}{15x(x-1)}=\boldsymbol{\frac{19x-10}{15x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{5}}}}$$

らしんばん

(1)を「形式だけ」$(x^a)'=ax^{a-1}$ や $(a^x)'=a^x\log a$ にならって

$$y'=x\cdot x^{x-1}=x^x\qquad y'=x^x\log x$$

などとやってはいけない．ただ，正解は，なぜかこの2つのマチガイの答の和になっていておもしろい．本問のように両辺の対数をとって「合成関数の微分法」を利用する方法を「**対数微分法**」という．

「対数微分法」を利用すると　p. 75 で説明した公式

$$(x^p)'=px^{p-1}\quad(p\text{ は有理数})$$

のハナシを「**p が実数全体**」にまで拡張することができる．

$y=x^p$ とおいて両辺の絶対値の対数をとれば，

$$\log|y|=p\log|x|$$

両辺を x で微分すれば

$$\frac{y'}{y}=p\cdot\frac{1}{x}\qquad\therefore\quad y'=y\cdot\frac{p}{x}=x^p\cdot\frac{p}{x}=px^{p-1}$$

また，p.82 の公式(2)の証明でも「らしんばん(p. 83)」では「対数微分法」を用いている．このように**指数に x がきているとき，それを「ひきずりおろす」意味で対数微分法は有効である．**

(2)について——

$y=(x-a)^p(x-b)^q$ のような形をした関数を微分するにはそのままやってもよいが，本問でやったように，両辺の絶対値の対数をとって微分する——すなわち「対数微分法」を利用すると便利なことが多い．それは**対数をとると積が和になり，項ごとに微分できるからである．**

4　高次導関数

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数を，$f(x)$ の「**第2次導関数**」といい

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}y,\ y^{(2)}$$

などの記号を用いて表す．さらに微分をくり返し，$f(x)$ を n 回微分したも

のを「第 n 次導関数」といい，上にならって $f^{(n)}(x)$ などの記号を用いて表す．2次以上の場合を総称して「高次導関数」という．

注❶ 特に「第2次導関数」は「曲線の凹凸」,「近似式」,「加速度」などを扱う上でいろいろな意味をもつのであるが，これらについてはあとでくわしく説明する．

注❷ 記号の用い方についての注意——たとえば「第2次導関数」の記号 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ でいうと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{du^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}$，などのように「形式的に」やりたいところであるが，これはダメ!! $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の意味をよく考えて

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\longleftarrow\frac{dy}{dx}\ \text{をさらに}\ x\ \text{で微分!!}$$

$$=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{du}{dx}\longleftarrow\frac{dy}{dx}\ \text{が}\ u\ \text{で表されていれば「合成関数の微分法」!!}$$

$$=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

とやらなければならない．このように**記号の表す内容をよく理解した上で式変形をすることが大切である．**

例題 7

$y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$ のとき

$$(1+x^2)y''+xy'=m^2y$$

であることを示せ．

解　説

$$y'=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}(x+\sqrt{1+x^2})'$$

$$=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{m(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad y'=\frac{my}{\sqrt{1+x^2}}\cdots\cdots\cdots②\qquad \sqrt{1+x^2}y'=my\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

③の両辺を x で微分すれば

$$(\sqrt{1+x^2})'y'+\sqrt{1+x^2}y''=my'\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

$$\therefore\quad \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}y'+\sqrt{1+x^2}y''=my'$$

分母を払って整理すれば

$$xy'+(1+x^2)y''=m\sqrt{1+x^2}y'$$

ゆえに③より

$$xy'+(1+x^2)y''=m(my)=m^2y$$

らしんばん

➡ ①からさらに y'' を求めて，y，y' とともに示すべき左辺，右辺に代入し，(左辺)＝(右辺) を示すのが「正直な」やり方だろうが，y'' を求めるのに①を微分したのでは少しメンドウ．それに，すべてを x の式で表すのも大変である．②に「商の微分法」を用いて

$$y''=m\frac{y'\sqrt{1+x^2}-y(\sqrt{1+x^2})'}{1+x^2}=m\frac{y'\sqrt{1+x^2}-y\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

と変形し，これと②とから y を x の式にもどさずに導くこともできる．しかしここでは本文③のように「**積の形になおしてから微分する**」要領をおぼえておいてほしい．その上で y'' がほしければ④を y'' について解けばよい．

例題 8

次の関数の第 n 次導関数を求めよ．

(1)　$y=e^{ax}$　　(2)　$y=\log x$

(3)　$y=\sin x$　　(4)　$y=x\cos x$

解　説　(1)　$y'=ae^{ax}$，$y''=a^2e^{ax}$，$y'''=a^3e^{ax}$，……

これより第 n 次導関数は，$y^{(n)}=\boldsymbol{a^ne^{ax}}$

(2)　$y'=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$　∴　$y''=(-1)x^{-2}$，$y'''=(-1)(-2)x^{-3}$，……

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots\cdots(-(n-1))x^{-n}\quad(n\neq1)$$

$$=\frac{\boldsymbol{(-1)^{n-1}(n-1)!}}{\boldsymbol{x^n}}\quad(\boldsymbol{n=1}\text{ でも成立})$$

(3)　$y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y''=\sin\left\{\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right\}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\times2\right)$

$$y'''=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\times3\right),\ \cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\times n\right)=\boldsymbol{\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}$$

（**$\sin x$，$\cos x$** を微分すると，**$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$**，**$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$**
となり微分するごとに角が **$\dfrac{\pi}{2}$** ずつふえていくことがわかる．）

(4)　$y'=\cos x+x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\times 2\right)$$

$$y'''=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\times 2\right)+x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\times 2+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\times 2\right)+x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\times 3\right)$$

以下同様にして

$$y^{(n)}=n\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+x\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$\boldsymbol{=n\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+x\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)}$$

らしんばん

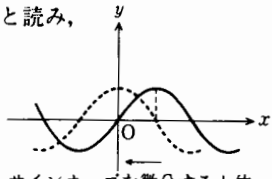
➡ 以上は，y'，y''，y''' を求め，$y^{(n)}$ の形を推定したにすぎない．したがって厳密には「数学的帰納法」を用いてキチンと証明しなくてはならない．

➡ (2)で用いた $k!$ の記号は「k の階乗（かいじょう）」と読み，

$$k!=1\times 2\times 3\times\cdots\cdots\times k$$

のことである．（なお $0!=1$ と定める．）

➡ (3)について――この答と $\sin x$ の周期が 2π であることから，4回ごとにもとにもどることがわかる．実際に「$\sin x\to\cos x\to-\sin x\to-\cos x\to\sin x\to\cdots\cdots$」である．



サインカーブを微分すると位相が $\frac{\pi}{2}$ ズレる．

➡ (4)について――y が「2つの関数の積の形」で与えられていることに注目!!

一般に　$y=f(x)g(x)$ ならば

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)g(x)+nf^{(n-1)}(x)g'(x)+\frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}(x)g''(x)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)+\cdots\cdots+f(x)g^{(n)}(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

である．これを「ライプニッツの定理」といい「確率・統計」で，${}_nC_r$ を学んでいれば上の式は，それを用いて

$$\boldsymbol{y^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rf^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)}\ \text{（または}\ \boldsymbol{\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rf^{(r)}(x)g^{(n-r)}(x)}\text{）}$$

と表される――これは「2項定理」と同じ形で，証明は「数学的帰納法」でやる．本問(4)にこれを用いると，$g(x)=x$ とすれば $g''(x)=0$ で，$(*)$の第3項以下は0となり，上の結果は簡単に求められる．

$$y^{(n)}=(\cos x)^{(n)}\cdot x+n(\cos x)^{(n-1)}\cdot 1$$

第2節
微分法の応用

ここではまず「関数の増減と $f'(x)$ の符号の関係」――「基礎解析」ではグラフの「接線の傾き」を調べることによる，かなり「直観的なナットク」であった――に「平均値の定理」を用いて「より明確な理解」をあたえる．次にその応用として「極大・極小と最大・最小」，「第2次導関数の符号の変化と曲線の凹凸の関係」などを考察した上で，「関数のグラフのかき方」，「グラフと方程式，不等式の関係」，さらには「近似式と関数の級数展開」などについて考えてみる．

1　平均値の定理とその応用

(1)　ロルの定理から平均値の定理へ

「ロルの定理」の証明は，このあとに続く「平均値の定理」，「コーシーの平均値の定理」をはじめ，「近似式」にいたるまで，ある意味で「典型的な証明のスタイル」としてあらわれてくる．

ロルの定理

関数 $F(x)$ が，閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であるとき，$F(a)=F(b)$ ならば

$$F'(c)=0 \quad (a<c<b)$$

となる c が少なくとも1つは存在する．

解　説　$F(a)=F(b)=k$ とする．

(i)　$F(x)$ が区間 $[a, b]$ で，つねに一定値 k $(=F(a)=F(b))$ であるならば，この定理はあきらかに成立する．

(ii) $F(x)$ が，閉区間 $[a, b]$ で，「つねには」一定値 k でないものとする．このとき，$F(x)>k$ のときがあれば，関数 $F(x)$ は開区間 (a, b) で「最大値」をとり，$F(x)<k$ のときがあれば，「最小値」をとる．このどちらかは必ずおこる．そして，実はこのとき $F'(x)=0$ となるのである．

いま，最大値がある時について説明する．(最小値がある時についても全く同様に説明される)

$F(x)$ が，$x=c$ $(a<c<b)$ において最大値をとるものとすると

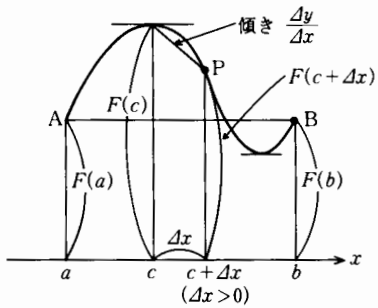
$$F(c+\Delta x)\leqq F(c)$$

ゆえに，x の増分 Δx に対する y の増分を Δy とすると

$$\Delta y=F(c+\Delta x)-F(c)\leqq 0$$

$\Delta x>0$ のときは，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leqq 0$ であるから

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=F'(c)\leqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



$\Delta x<0$ のときは，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geqq 0$ であるから

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=F'(c)\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①，②から

$$F'(c)=0 \quad (a<c<b)$$

らしんばん

この定理の図形的な意味について——

上の図のように，2点 A，B を $A(a, F(a))$，$B(b, F(b))$ とすると

$F(a)=F(b)$ $\quad\therefore\quad$ AB∥x 軸

したがって，この定理の図形的な意味は，**「区間 (a, b) において曲線 $y=F(x)$ に接線をひくとき，これが直線 AB と平行となるような所がこの曲線上に少なくとも1ケ所はある」**というほどの意味である．

このことは，図を見ればごく「アタリマエ」なのだが，これに一応キチンとした説明をあたえようとすると，上に述べたようなメンドウな手続きが必要になるわけである．

平均値の定理

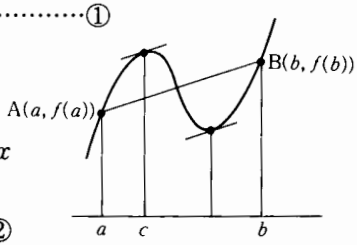
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であ

るとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b)$$

となる c が少なくとも1つ存在する．

解　説　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=m$ ……①



とおき，分母を払って左辺に整理すると

$$f(b)-f(a)-m(b-a)=0$$

である．このとき，この左辺の b を変数 x におきかえた式を

$$F(x)=f(x)-f(a)-m(x-a) \quad \cdots\cdots②$$

とおくと，$F(x)$ は

$$F(a)=F(b)=0$$

をみたすから，これに「ロルの定理」を用いることができる．すなわち

$$F'(c)=f'(c)-m=0$$

$$\therefore \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m=f'(c) \quad (a<c<b)$$

をみたす c が少なくとも1つ存在する．

らしんばん

この定理の図形的な意味を考えてみる．

上図で2点A, BをA$(a, f(a))$，B$(b, f(b))$とするとき，①の $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=m$ は「直線ABの傾き」を表す．したがって，この定理の図形的な意味は，**「区間 (a, b) において，曲線 $y=f(x)$ に接線をひくとき，これが直線ABと平行になるような接点がこの曲線上に少なくとも1ケ所はある」**というほどの意味である．(ロルの定理の拡張)

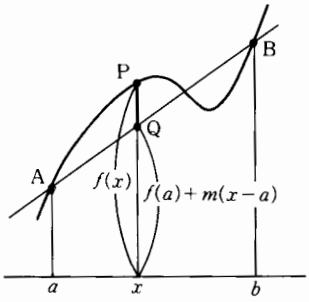
②の $F(x)$ はどこからきたか．この図形的な意味を説明しておく．②は

$$F(x)=f(x)-\{f(a)+m(x-a)\}$$

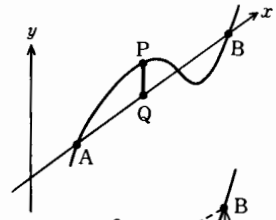
であるが，{　} の部分に注目すると，

$$y=f(a)+m(x-a)$$

は直線ABの方程式そのものだから，**$F(x)$ は右図で「上向きを正にとったPQの長さ」そのものとなり**，したがって範囲の両端の x の値 a，b に対して，$F(a)=0$，$F(b)=0$ となることはきわめて当然のことである．いいかえれば「直線ABを x 軸にとるときのロルの定理」



(y 軸はそのまま）と考えてもよい——右図.



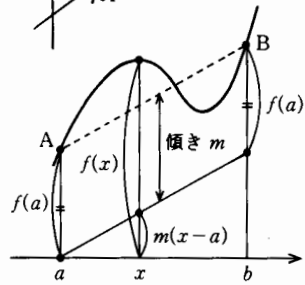
また，②の $F(x)$ を設定するときに，$f(a)$ を除いて

$$F(x)=f(x)-m(x-a)$$

とおくと

$$F(a)=F(b)=f(a)$$

となるから，やはり「ロルの定理」がそのまま使える．このような $F(x)$ を用いて「平均値の定理」が説明されるときもある．



定理で用いた c は

$$c=a+\theta h \quad (h=b-a,\ 0<\theta<1)$$

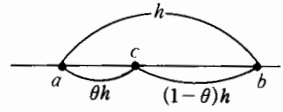
と表すこともできる．このことから「平均値の定理」は次のように表されることもある．

すなわち，

「関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, a+h]$ で連続，開区間 $(a, a+h)$ で微分可能であるとき

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \quad (0<\theta<1)$$

であるような実数 θ が少なくとも 1 つは存在する」



この「平均値の定理」を，あとで述べる「コーシーの平均値の定理」と区別して「ラグランジュの平均値の定理」とよぶこともある．

「平均値の定理」は実際に問題を解く上でも威力を発揮する．例を 2 つあげておく．

(i) **「不等式の証明」への応用.**

たとえば不等式

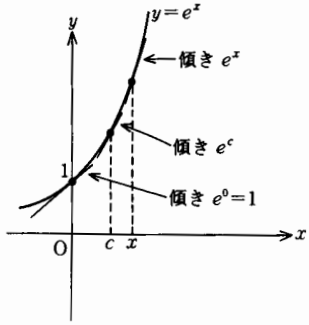
$$0<\log\frac{e^x-1}{x}<x \quad (x>0)\cdots\cdots(*)$$

を証明するにはどうすればよいか．

上の不等式を同値変形して

$$1<\frac{e^x-1}{x}<e^x\cdots\cdots(**)$$

を証明すればよい．



$$(e^x)'=e^x$$

に注目すると「平均値の定理」により

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x-e^0}{x-0}=e^c \quad (0<c<x)$$

すなわち

$$e^0<e^c<e^x$$

であるから不等式（**）が成り立ち（*）が成立する．

(ii) **「極限値を求めるハナシ」への応用.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

を求めるにはどうするか.

$$(\sin x)'=\cos x$$

であるから「平均値の定理」を利用すると

$$\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\cos c\quad(\text{ただし，}c\text{ は }x\text{ と }\sin x\text{ の間})$$

ここで $x\to 0$ とすると $c\to 0$ であるから $\cos c\to 1$（はさみうち）すなわち（***）の結果は1である.

(2)　関数の増減

関数 $f(x)$ の増減を $f'(x)$ の符号で判定できることは，すでに「基礎解析」で学んだが，それはきわめて直観的な説明でしかなかった.「平均値の定理」を用いると，次にのべるようにその増減について，いくらかキチンとした説明を与えることができる.

「単調増加」を保証する定理

ある区間でつねに $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ はその区間で単調に増加する.

解　説　$f'(x)>0$ の区間の任意の x の値をとり，x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ とすると「平均値の定理」を用いると

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\quad(x_1<c<x_2)\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

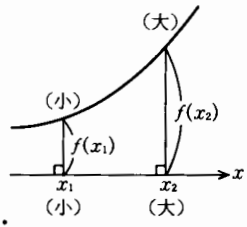
となる c が存在する.

ところが，この区間では $f'(x)>0$ から $f'(c)>0$ である.

ゆえに①で，$x_2>x_1$ に注意すると $f(x_2)-f(x_1)>0$ であることがわかる．すなわち

$$x_1<x_2 \implies f(x_1)<f(x_2)$$

で，この区間で $f(x)$ は単調増加であることがわかる.



らしんばん

「単調増加」の条件

ここで「単調増加」ということの意味をハッキリさせておこう.

ある区間で，$x_1<x_2$ であるような任意の x の値 x_1，x_2 に対し，$f(x_1)<f(x_2)$ であるならば，$f(x)$ はこの区間で「単調増加である」という.

言いかえると「**x が増加するとき $f(x)$ も増加する**」ことがいえるならば「**$f(x)$ は単調増加である**」という——このとき「単調増加」が $f'(x)$ と無関係に定義されていることに注目!!——もし，$f'(x)$ の値を 0 とするような，あるいは $f'(x)$ が存在しないような x の値がこの区間にあったとしても，とにかく上に述べた条件をみたしていさえすれば「$f(x)$ は単調増加である」というわけである．

たとえば $y=x^3\,(y'=3x^2)$ は $x=0$ で $y'=0$ だが全区間で単調増加である．

つまり $x_2>x_1$ ならば

$$x_2{}^3-x_1{}^3=(x_2-x_1)(x_2{}^2+x_1x_2+x_1{}^2)>0 \quad \therefore \quad x_2{}^3>x_1{}^3$$

$$\left(\because \quad x_2{}^2+x_1x_2+x_1{}^2=\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1{}^2>0\right)$$

となる．

したがって，この定理の主張するところは「**$f'(x)>0$**」という条件が，「**$f(x)$ が単調増加**」であるための「**十分条件**」ではあるが「**必要条件**」ではない（$f(x)$ がある区間で単調増加であるとしても $f'(x)>0$ とは限らない）ということである．

「基礎解析」では，この定理をキチンと議論することなしに「関数の増減」を通過した．そして，この定理は「ほとんど明らか」とさえ思われる．しかし，これは理論上避けて通ることのできないステップである．なぜなら「$f'(x)>0$」というのは，それぞれの x の値に対して関数 $f(x)$ が「増加の状態にある」ということを意味しているわけで，これは「無限小（限りなく小さいということ）」の世界のハナシである．それに対して，「単調増加」というのは，「異なる 2 つの x の値 x_1，x_2 における関数値 $f(x_1)$，$f(x_2)$ の大小比較の問題」で，これは「有限の世界」のハナシである．このような意味でいうと，「平均値の定理」は，この「無限小」と「有限」のまったくちがう世界のハナシをつなぐ役割をしている，と考えることができる．

（3） ロピタルの定理へ

以下，「コーシーの平均値の定理」を経由して「ロピタルの定理」を説明するのだがこれらは高校数学の範囲ではない．したがって極限値を求める問題でいきなり「ロピタルの定理」を用いるのは「問題ナシ」とはいえない．

しかし，これを知っているとグラフを描くときなどは大変便利である．そういう理由もあって「あえて」とりあげた．

コーシーの平均値の定理

関数 $f(x)$，$g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であり，$a<x<b$ で $g'(x)\neq 0$ とする．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a<c<b)$$

となるような c が少なくとも1つ存在する．

解　説　$F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x)-g(a)\}$ ……①

とおくと，$F(x)$ は，$a \leqq x \leqq b$ で連続，$a<x<b$ で微分可能である．

また

$$F(a)=0$$

$$F(b)=f(b)-f(a)-\{f(b)-f(a)\}=0$$

であるから，「ロルの定理」により

$$F'(c)=0 \ (a<c<b)$$

となる c が少なくとも1つ存在する．ところで，①を x で微分すると

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

これに $F'(c)=0$ $(a<c<b)$ を用いると

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$$

$$\therefore \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a<c<b)$$

であるから，条件をみたす c が存在する．

らしんばん

➡ ①にあたる式を

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x)-g(a)\}$$

とするときもある．このときもやはり

$$F(a)=F(b)=f(a)$$

で，「ロルの定理」を用いることができ，上の証明と同様にこの定理を証明することができる．

➡ この定理で $g(x)=x$ $(g'(x)=1)$ としたものが「ラグランジュの平均値の定理」である．逆に「ラグランジュの平均値の定理」から

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \ (a<c<b), \quad \frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(d) \ (a<d<b)$$

をみたす c，d は存在するが，この c と d は等しいとは限らないので，これらを辺々わっても「コーシーの平均値の定理」は証明できない．

➡「コーシーの平均値の定理」の図形的意味を説明しておく．

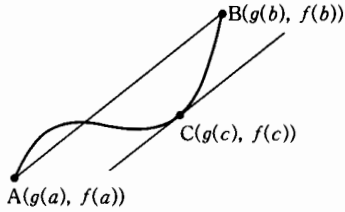
いま，t をパラメーターとして

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases} \quad (a \leqq t \leqq b).$$

を考えると，これは x-y 平面上の曲線を表す．ここで2点A, Bを

$$A(g(a), f(a)),\ B(g(b), f(b))$$

とすると，この定理の $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ は



「**線分 AB の傾き**」を表している．

一方，この曲線上の点 $(g(t), f(t))$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

で与えられるからこの定理はABと平行な接線が引けるこの曲線上の点 $C(g(c), f(c))$ の存在を述べているわけである．

ロピタルの定理

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能な関数で，$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$，また，$x \neq a$ のとき $g'(x) \neq 0$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \text{ ならば } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

である．（L は $\pm\infty$ でもよい．）

解　説　$f(x)$，$g(x)$ は微分可能ゆえ連続である．

$$\therefore\ \lim_{x\to a} f(x)=f(a)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=g(a)=0$$

$$\therefore\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ との間})$$

（コーシーの平均値の定理）

ここで，$x\to a$ のとき $c\to a$（「はさみうち」）であるから

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

（c を x でおきかえる）

ゆえにこの定理は証明された．

らしんばん

➡ 要するにこの定理の主張するところは「$\frac{0}{0}$ の不定形」の極限値を調べるとき，

分母と分子がそれぞれ微分可能ならば，そのまま分母と分子を微分したものの極限値を調べてみればよい，ということ!!

たとえば，$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x}{1-e^x\cos x}$ は分母子が微分可能で，「$\dfrac{0}{0}$ の不定形」である．

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x}{1-e^x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{e^x(\sin x-\cos x)}=-1$$

さらにこの定理を拡張すると「$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形」でも成り立ち，「$x\to a$」は「$x\to a+0$」，「$x\to a-0$」，あるいは「$x\to\infty$」，「$x\to-\infty$」でもかまわない．要するに「不定形」でなくなるまで「分母子を微分する」という操作をくり返し用いることができる．しかしここでは深入りしないで次の例で計算方法を示すにとどめる．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

2　極大・極小と最大・最小

(1)　極大・極小について

「極大」というのは，はやいハナシが，「その付近で最大である」という意味であり，「極小」というのは「その付近で最小である」という意味である．ふつう連続関数について考えるので，次のようにまとめておく．すなわち

関数が「増加の状態」から「減少の状態」にうつるところ：極大点

関数が「減少の状態」から「増加の状態」にうつるところ：極小点

具体的には，「導関数の符号の変化」を調べて「増減表」で示すことになる――考え方の基本は「基礎解析」の場合と同様である．

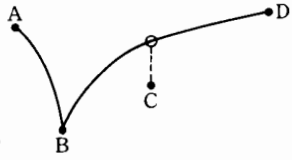
注　上の説明では「連続関数」，「増加の状態」，「減少の状態」というコトバを用いたが，ウルサクいうと実はいろいろやっかいなことがおこる．

たとえば右図で

A, D：閉区間の「端点」だが「極大値」という

B：「微分不可能」だが「極小値」という

C：「不連続」だが「極小値」という

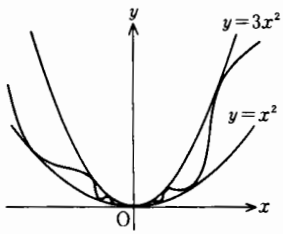


<図1>

また，有名でおもしろい例だが次のようなものもある．

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}+2\right) & (x\neq 0) \\ 0\ (x=0) \end{cases}$$

では，「$x\to+0$」，「$x\to-0$」のとき $y=f(x)$ は $y=x^2$ と $y=3x^2$ の間を「さまよいながら $\left(\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1\right)$」0 に限りなく近づいていく．このようなときも実は $x=0$ で「極小値」をとる（とにかく $x=0$ を含むその付近では $x=0$ で最小値をとる）というのだが「無限に振動している」ので「減少の状態から増加の状態にうつる」かどうかわからない．



<図 2>

しかし，高校数学を学ぶわれわれの主な目的は「**$f'(x)$ の符号変化から $f(x)$ の増減の状況を知る**」ということにあるわけで，多少ワクを広げても高校数学の常識で「極値」と認められるのは A，D を論外として〈図 1〉の B くらいまでか．

あまりこだわらなくてよい．

例題 9

閉区間 $[0, 2\pi]$ において，$f(x)=e^{-x}\sin x$ の極値を求めよ．

解　説　$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$　…①

ここで，「**3 角関数の合成**」

$$a\sin x+b\cos x=r\sin(x+\alpha)\quad\left(r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\alpha=\frac{a}{r},\ \sin\alpha=\frac{b}{r}\right)$$

を利用すると

$$f'(x)=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

で，この形に変形しておけば，$f'(x)$ の符号変化はとらえやすい．

そこで，$e^{-x}>0$ に注意して $f(x)$ の「**増減表**」をつくると次のようになる．

x	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	π	…	$\frac{5\pi}{4}$	…	2π
$f'(x)$		+	0	−	−	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$	↘	0	↘	$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)$	↗	0

（このグラフの概形は p. 239 参照のこと）

これより求める極値は

極大値：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，極小値：$f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$

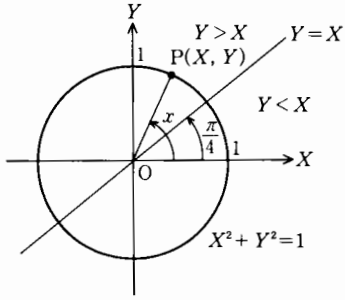
らしんばん

「3 角関数の合成公式」を用いないでやることもできる．

要するに①で，$\cos x$ と $\sin x$ の大小関係を調べればよいわけだから，

$$\cos x = X,\ \sin x = Y$$

とおくと，$X^2+Y^2=1$ であり，右図のように，単位円周上の点 P (X, Y) の $Y=X$ に関する上下関係を考えて



$$\begin{cases} Y>X \iff \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{5\pi}{4} \\ Y=X \iff x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4} \\ Y<X \iff 0\leqq x<\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}<x\leqq 2\pi \end{cases}$$

から $f'(x)$ の符号の変化をとらえることもできる．

「極大であること」あるいは「極小であること」を増減表を用いないで，**$f''(x)$ の符号を調べることによって示す方法がある**——定理として次にまとめた．

（この関数のグラフの概形は p. 239 を参照）

$f''(x)$ の符号と極大・極小に関する定理

関数 $f(x)$ が，連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，

(1)　$f'(a)=0$，$f''(a)>0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極小となる．

(2)　$f'(a)=0$，$f''(a)<0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極大となる．

解　説　まず(1)について説明する．

$f''(x)$ が連続であるから，x の値が a に近ければ $f''(x)$ は $f''(a)$ に近い値をとる．つまり $f''(a)>0$ ならば，a の近くでは常に $f''(x)>0$ となる．

したがって a の近くでは「$f'(x)$ は単調増加の状態」にあり，$f'(a)=0$ であるから，**x の値が増加しながら a を通過するとき，「$f'(x)$ は負から正に」符号が変化する．**つまり $f(x)$ は $x=a$ で「極小」である．

(2)についても同様に説明される．

注　「$f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は単調増加」であった（p. 93）．

まったく同様に「**$f''(x)>0$ ならば $f'(x)$ は単調増加**」であることがいえるわけである．

らしんばん

例題9 でこのことを確認しておこう．

$$f'(x)=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

この微分を参考にして（$(-\sqrt{2})$ が前に出て $-\frac{\pi}{4}$ だけ位相がズレる）$f''(x)$ を求めると

$$f''(x)=-\sqrt{2}(-\sqrt{2})e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-2e^{-x}\cos x$$

そこで調べる区間をにらんで，$f'(x)=0$ の1つの解 $x=\frac{\pi}{4}$ について，$f''(x)$ を計算してみると

$$\boldsymbol{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2e^{-\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}<0}$$

すなわち，「$\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}}$ で極大」である．

$f'(x)=0$ のもう1つの解，$x=\frac{5}{4}\pi$ についても同様に

$$\boldsymbol{f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)>0}$$

を示すことができて，このとき「$\boldsymbol{f(x)}$ が $\boldsymbol{x=\frac{5}{4}\pi}$ で極小」であることを簡単に確認することができる．

（2） 最大値・最小値について

「最大値」，「最小値」を求めるには「定義域内での増減表」をつくって考える．連続関数については

最大値：$\begin{cases}\text{極大値（1つとは限らない）と「定義域の端の関数値」}\\ \text{の中で最大のもの}\end{cases}$

最小値：$\begin{cases}\text{極小値（1つとは限らない）と「定義域の端の関数値」}\\ \text{の中で最小のもの}\end{cases}$

である．

例題 10

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の，$1\leqq x\leqq 4e$ における最大値，最小値を求めよ．

解　説　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

で，定義域が $1\leqq x\leqq 4e$ だから，右の増減表より，

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$4e$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$f(4e)$

最大値：$f(e)=\dfrac{1}{e}$

最小値：両端の関数値 $f(1)$，$f(4e)$ のうち，大きくない方．

$f(1)=0$，$f(4e)=\dfrac{\log 4+\log e}{4e}=\dfrac{\log 4+1}{4e}>0$　　$\therefore\ f(1)<f(4e)$

ゆえに

最大値；$\dfrac{1}{e}$ $(x=e)$，最小値；0 $(x=1)$

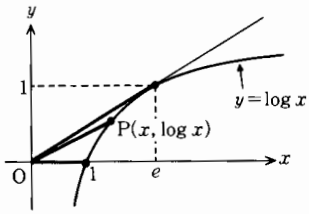
らしんばん

本問で，定義域を「$1<x\leqq 4e$」としたらどうなるか．

「最大値」が $f(e)$ であることは問題ないが，最小値をきめることはできない．それは，x が限りなく1に近づく $(x\to 1+0)$ とき，**$f(x)$ の関数値は限りなく $f(1)$ に近づいて小さくなるが，$f(1)$ そのものにはならないので最小値はきまらないからである．**このような場合は「最小値はない」という．すなわち

最大値；$f(e)=\dfrac{1}{e}$，最小値；なし

(「**最大値・最小値の存在定理(p.44)**」参照．)



本問の $f(x)$ が右図の **OP の傾き m** になっていることに気がつくといくらか「見える」――m の最大値は，OP が原点から曲線 $y=\log x$ に引いた接線になっているときで，このときの x の値は $x=e$ である．

3　関数のグラフ

「関数のグラフの概形」を「なるべく正確」に描くためには，その「手がかり」として，基本的には次のことがらを調べてかかることになる．

(i) x 軸，y 軸との交点，グラフの対称性など

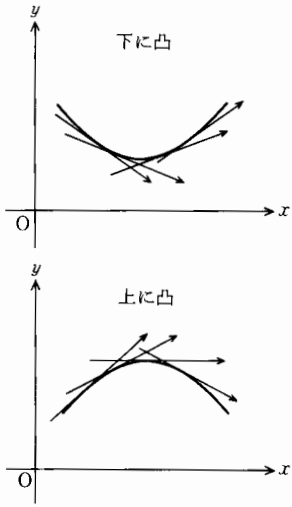
(ii) 「関数の増減」と「極大・極小点」

(iii) 「グラフの凹凸」と「変曲点」

(iv) 「漸近線（ぜんきんせん）」

(i)と(ii)については説明するまでもない．ここでは(iii)と(iv)について説明し，実際に「関数の表すグラフの概形」を描いてみることにする．

(1) グラフの凹凸と変曲点について



ある区間で，「曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが，x の増加とともに大きくなるとき」すなわち「**x の増加とともに $f'(x)$ が増加する**」とき，曲線 $y=f(x)$ は，その区間で「**下に凸である**」という．

また，この反対に，「**$f'(x)$ が減少する**」とき，曲線 $y=f(x)$ は，その区間で「**上に凸である**」という．

そこで曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べるには，「**$f'(x)$ の増減**」すなわち「**$f''(x)$ の符号変化**」を調べればよい．このハナシをまとめると次の定理になる．

グラフの凹凸に関する定理

曲線 $y=f(x)$ のグラフは

$f''(x)>0$ となる区間では下に凸

$f''(x)<0$ となる区間では上に凸

である．

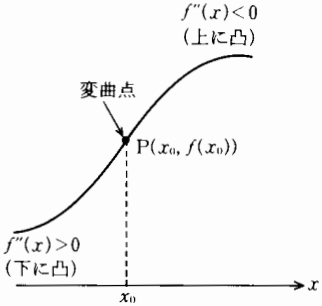
解　説　$f''(x)>0$，$f''(x)<0$ のときのグラフの状況については，上の図に見る通りである——p. 99 の「**$f''(x)$ の符号と極大・極小に関する定理**」とあわせて理解しておくとよい．

らしんばん

曲線 $y=f(x)$ 上のある点で曲線の凹凸がいれかわるときがある．この点Pを「変曲点」という．「変曲点」では，その前後で「**$f''(x)$ の符号が変化する（$f'(x)$の増減がいれかわる）**」ので，この点の x の値を求めるには，まず方程式

$f''(x)=0$ をみたす実数 x の値を求め，その値の前後で **$f''(x)$ の符号が変化することを確認**すればよい．そのために「**凹凸表**」をつくる場合もある．(**例題 12** (1) (p. 108) 参照)

➡ y'' の符号と凹凸の関係が混乱してしまったときは，その簡単な例として $y=\pm x^2$ などで実験して確認するとよい．



(2)　漸近線とグラフについて

「**漸近線**」というのは，文字通り「だんだん近づいていく直線」のことで，曲線 $y=f(x)$ のグラフが，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，あるいは，ある x の値 a に対して $x\to a-0$，$x\to a+0$ のとき，「**ある一定な直線**」に近づいていく場合に，この定直線を表すことばである．「漸近線」の中でも x 軸，y 軸に平行なものは比較的求めやすいが，一般のものは少しメンドウである．以下，実例で説明する．

例題 11

次の関数の漸近線を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　(2)　$y=\dfrac{x^2}{x-2}$

(3)　$y=\sqrt[3]{8x^3-12x^2}$

解　説　(1)，(2)は，数 I でもでてくる曲線である．

(1)　$y=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$

(「割りおとして，真分数式になおす」のがポイント!!)

と変形すると，「$x\to\pm\infty$ のとき，$y\to1$」はすぐにわかる．

次に分母$=0$ となる x の値に注目すると

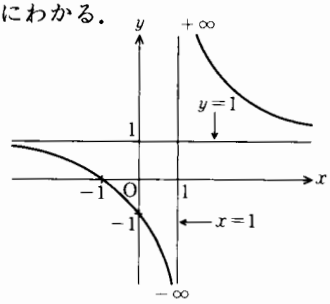
「$x\to1-0$ のとき，$y\to-\infty$」

「$x\to1+0$ のとき，$y\to\infty$」

であるから，$x\to1\pm0$ のとき，曲線は $x=1$ に近づく．

したがって，漸近線は 2 本あり

$\boldsymbol{x=1,\ y=1}$



である．その状況をグラフで表すと図のようになる．

(2) $y=\dfrac{x^2}{x-2}=x+2+\dfrac{4}{x-2}$ $\left(\begin{array}{l}\text{これも「割りおとしておく」}\\\text{方がわかりやすい．}\end{array}\right)$ ……①

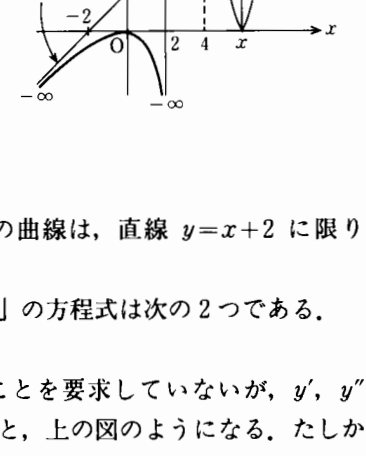
と変形すると

$x\to 2\pm 0$ のとき，$y\to\pm\infty$

で，$x=2$ は漸近線の1つであることがわかる．

$x\to\pm\infty$ のとき，$y\to\pm\infty$

で，**x 軸に平行な漸近線はない．**



次に①を

$$y-(x+2)=\frac{4}{x-2}$$

のように変形すると，左辺は①で表される曲線と直線 $y=x+2$ との，**「同じ x 座標に対する y 座標の差」**であるが，右辺は，$x\to\pm\infty$ のとき

$$\frac{4}{x-2}\to 0$$

になることから，$x\to\pm\infty$ のとき，問題の曲線は，直線 $y=x+2$ に限りなく近づいていくことがわかる．

したがって，この場合，求める「漸近線」の方程式は次の2つである．

$$\boldsymbol{x=2,\ \ y=x+2}$$

（本問では，特にグラフの概形をかくことを要求していないが，y'，y'' を求めて，増減，凹凸を調べグラフをかくと，上の図のようになる．たしかめておくとよい．）

(3) $y_1=\sqrt[3]{8x^3-12x^2}$ ……①

こうなると少しむずかしい．

まず，全実数で連続であり $x\to\pm\infty$ で $y_1\to\pm\infty$ だから，y 軸，x 軸に平行な漸近線はないことがわかる．そこで，もし漸近線があるとすれば

$$\boldsymbol{y_2=ax+b\ \ (a\neq 0)}\ \cdots\cdots②$$

の形であり，しかも「$\boldsymbol{x\to\infty}$ または $\boldsymbol{x\to-\infty}$」のとき「$\boldsymbol{(y_1-y_2)\to 0}$」である．

いま，$x\to\infty$ の場合について調べる．

(i) まず $\boldsymbol{a}$ を求める．②を変形すると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_2}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)=a$$

また，

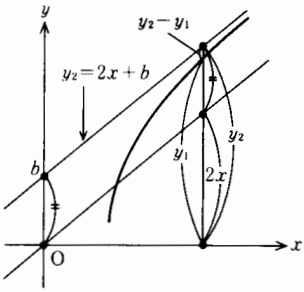
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-12x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{12}{x}}=2$$

ところが「$x\to\infty$」のとき「$(y_1-y_2)\to 0$」であるから

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y_1-y_2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{y_1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{y_2}{x}$$

$$=2-a=0 \quad \therefore \quad a=2$$

$$\therefore \quad y_2=2x+b$$



(ii)　次に b を求める．

$$y_1-y_2=y_1-(2x+b)$$

であるから

$$\lim_{x\to\infty}(y_1-y_2)=\lim_{x\to\infty}\{y_1-(2x+b)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(y_1-2x)-b=0$$

$$\therefore \quad b=\lim_{x\to\infty}(y_1-2x)$$

ここで y_1-2x を計算すると

$$y_1-2x$$

$$=(8x^3-12x^2)^{\frac{1}{3}}-2x \cdots\cdots ③$$

$$=\frac{(8x^3-12x^2)-(2x)^3}{(8x^3-12x^2)^{\frac{2}{3}}+(8x^3-12x^2)^{\frac{1}{3}}(2x)+(2x)^2} \quad \text{(有理化!!)}$$

$$=\frac{-12}{\left(\frac{8x^3-12x^2}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{8x^3-12x^2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 2+2^2}$$

$$=\frac{-12}{\left(8-\frac{12}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(8-\frac{12}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 2+4}\longrightarrow\frac{-12}{8^{\frac{2}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\cdot 2+4}=-1=b \quad (x\to\infty)$$

(i)(ii)から $x\to\infty$ における $y_1=\sqrt[3]{8x^3-12x^2}$ の漸近線は，$y_2=2x-1$ でなければならない．そして，これは $\lim_{x\to\infty}(y_1-y_2)=0$ をみたす．

$x\to-\infty$ の場合についても全く同様にして $y_2=2x-1$ が得られる．ゆえに求める漸近線は

$$\boldsymbol{y=2x-1} \quad (x\to\pm\infty)$$

である．

らしんばん

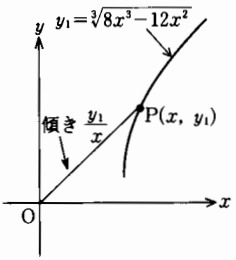
本文(3)の説明で主張しているところは，
「漸近線の傾き a」を求めるには

$$y_1=\sqrt[3]{8x^3-12x^2}$$

の「**実効価値（？）**」を1次式とみて（3次式の3乗根!!）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_1}{x}=\cdots\cdots=2$$

$\left(\dfrac{y_1}{x}\right.$ は右図でOPの傾き!!$\left.\right)$



をいきなり計算すればよい，ということである．（「実効価値」というコトバは本書だけの造語——ふりまわさないこと．）

実際に問題を解くときもこのようにしてよい．

また，(ii)の③は，このままの形で $x\to\infty$ とすると，「$\infty-\infty$」の不定形になってしまう．それを避けるための同値変形として「有理化」を利用したわけである．

$\sqrt[3]{8x^3-12x^2}=\mathrm{A}$，$2x=\mathrm{B}$ とおくと，③の式変形は

$$\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{1}=\frac{\mathrm{A}^3-\mathrm{B}^3}{\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2}\ \text{（分母子に } \mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2 \text{ をかけた）}$$

「要は $\mathrm{A}^3-\mathrm{B}^3$ がほしかった」というわけである．

本文②が漸近線であるための条件は「$x\to\infty$」のときについていえば（「$x\to-\infty$」のときも同様）

「$x\to\infty$」のとき「$(y_1-y_2)\to 0$」

ということであった．そこで y_1-y_2 をスナオに計算してみたくなる．

$$y_1-y_2=(8x^3-12x^2)^{\frac{1}{3}}-(ax+b)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$=\frac{(8x^3-12x^2)-(ax+b)^3}{(8x^3-12x^2)^{\frac{2}{3}}+(8x^3-12x^2)^{\frac{1}{3}}(ax+b)+(ax+b)^2}\ \text{（有理化）}$$

$$=\frac{(8-a^3)x^3-(12+3a^2b)x^2-3ab^2x-b^3}{(8x^3-12x^2)^{\frac{2}{3}}+(8x^3-12x^2)^{\frac{1}{3}}(ax+b)+(ax+b)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

ここで $a\leqq 0$ とすると「$x\to\infty$」のとき「$(y_1-y_2)\to\infty$」（$\because$ $(*)$）となるから $a>0$ である．その上で（$**$）の分母に注目すると，これは x についての「**実効価値（？）**」は**2次式**であるから「$x\to\infty$」のとき（$*$）が0に収束するためには（$**$）の分子の3次の係数をにらんで

$$8-a^3=0\qquad\therefore\quad a=2$$

でなければならない(必要)．そしてこの値を($**$)に代入すれば**分母子を x^2 で割るまでもなく**

$$12+3a^2b=12+12b=0$$

$$\therefore\quad b=-1\ \text{（十分）}$$

となるが，これはなかなか大がかりな計算である．

同じく(3)について②が①の漸近線であるならば，①で y'（接線の傾き）を求めて $x\to\pm\infty$ とすれば，この値は②の a の値になりはしないか．やってみよう．

$$y'=\frac{1}{3}(8x^3-12x^2)^{\frac{1}{3}-1}(24x^2-24x)$$

$$=\frac{8(x^2-x)}{\sqrt[3]{(8x^3-12x^2)^2}}=\frac{8\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(8-\frac{12}{x}\right)^2}}\longrightarrow\frac{8}{4}=2\ (x\to\pm\infty)$$

となり，本文で求めた a の値と一致することがわかる．

また，この y' から増減表もかけるし，y'' を求めれば曲線の凹凸の状態もわかり，グラフの概形をかくことができる．これはかなり有効である．次の**例題 12** (2)を参考にせよ．

「漸近線の求め方」についてまとめておく．a, b を有限確定値として，

(i)　座標軸に平行なもの

$\begin{cases}x\to a+0\\x\to a-0\end{cases}$ で $\begin{cases}y\to\infty\\y\to-\infty\end{cases}$ のとき：$x=a$

$\lim_{x\to\infty}y=b$（または，$\lim_{x\to-\infty}y=b$）のとき：$y=b$

(ii)　座標軸に平行でないもの

$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=a$，$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=b$ ならば，$y=ax+b$

（ただし，a については「$\lim_{x\to\infty}y'$」で求めてもよい）

――(ii)については $x\to-\infty$ の場合もある．なお(i)の漸近線 $x=a$ をもつ関数は，$x=a$ で不連続だから，連続関数ではこれ以外の2つのパターンのみを考えればよい．いいかえれば，$x\to\pm\infty$ のときだけを考えることになる．

例題 12

次の関数のグラフをかけ．

(1)　$y=x^2\log x$　　(2)　$y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

解　説　(1)　定義域は $x>0$ で

$$y'=2x\cdot\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\left(\log x+\frac{1}{2}\right)$$

$$y''=2\left(\log x+\frac{1}{2}\right)+2=2\left(\log x+\frac{3}{2}\right)$$

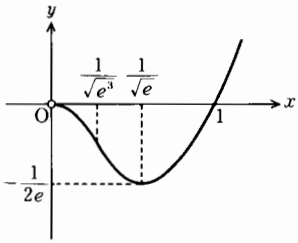
これより，$y=0$，$y'=0$，$y''=0$ をみたす x の値を求め

$x\to+0$ ならば，$y'\to0$，$y\to0$

$x\to\infty$ ならば，$y'\to\infty$，$y\to\infty$

を確認した上で次の「増減，凹凸表」と「グラフの概形」が得られる．

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	(0)	↘	変曲点	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	0	↗



(2)　$y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}=(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$

「対数微分法」で y' を求めると

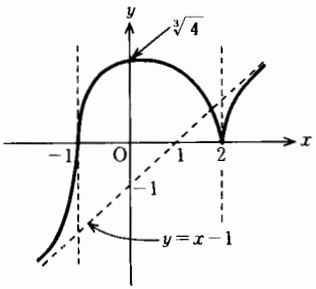
$$y'=\frac{x}{(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}\longrightarrow 1\ \ (x\to\pm\infty)$$

これより漸近線があれば，$y=x+b$ とおくことができる．（x 軸，y 軸に平行な漸近線はない．）b を求めるには $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}(y-x)$ を計算すればよいから，

$$\begin{aligned}y-x&=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}-x\\&=\frac{(x+1)(x-2)^2-x^3}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}+\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}\cdot x+x^2}\\&=\frac{-3x^2+4}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}+\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}\cdot x+x^2}\\&=\frac{-3+\frac{4}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}+1}\longrightarrow -1\quad(x\to\pm\infty)\end{aligned}$$

$\therefore\quad b=-1$

これより漸近線は $y=x-1$ $(x\to\pm\infty)$ であることがわかる．そこで，y' の符号変化を調べて増減表をつくり，グラフの概形は右図のようになる．



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	×	$+$	0	$-$	×	$+$
y	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0	↗

らしんばん

(1)について――「$x\log x\to 0\ (x\to+0)$」を考える．

$y=x^2\log x$，$y'=2x\log x+x$

で，「$x\to+0$ ならば $y'\to0$，$y\to0$」と本文ではアッサリかいてしまったが，このハナシはそのまま「スナオ」には認めがたい．その「手続き」について少し説明しておく．y' の第1項に注目しよう．

いま，$\log x=-t$ とおくと，$x=e^{-t}$ で，$x\to+0$ のとき，$t\to\infty$ である．

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0} x\log x=\lim_{t\to\infty}(e^{-t})\cdot(-t)$$

$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0\quad(\text{ロピタルの定理})$$

(素手でやる方法は p. 112 **例題 14** (2)参照!!)

y については

$$\lim_{x\to+0} x^2\log x=\lim_{x\to+0}(x\cdot x\log x)=0\cdot0=0$$

で，ともあれ，$y'\to0$，$y\to0$ が確認されるわけである．

このように，「グラフの概形」を「なるべく正確に」かくためには，「一見かかわりのない極限の知識」などが求められる場合もある．

(2)で凹凸は，ほぼ見当がつくが，y'' を「対数微分法」で求めておくと

$$y''=-\frac{2}{(x+1)^{\frac{5}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}$$

ゆえに y'' の符号は，$-(x+1)$ と同じで

$$\begin{cases} x<-1 \text{ のときは下に凸 } (y''>0) \\ x>-1 \text{ のときは上に凸 } (y''<0) \\ (-1,0) \text{ が変曲点} \end{cases}$$

時間があれば，ここまでやっておくと丁寧だろうが，限られた時間の中ではなかなかそうもいかない．本問のような場合はむしろ漸近線を求めた方が，「より正確な」グラフの概形が描ける．

4　方程式・不等式への応用

(1)　方程式の実数解について

方程式

$$f(x)=0 \quad\cdots\cdots①$$

の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標で与えられる．したがって「基本的には」この $y=f(x)$ のグラフについてその「増減」などを調べることにより，①で与えられる方程式の「実数解の個数」や「実数解の存在範囲」などを調べるのがこの節の主な目的であるが，あくま

でもそれは「基本のハナシ」であって実際は①を適当に同値変形して

$$g(x)=h(x)$$

の形にし，両辺をそれぞれ y とおいて得られる2つの関数

$$y=g(x)\cdots\cdots\cdots\cdots② \quad , \quad y=h(x)\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

のグラフの交点の x 座標が，もとの方程式①の解であることを利用すると，**「方程式の実数解の問題」を「2つのグラフの交点の問題」に帰着させて考えることができる**——具体的には②，③の一方を，定数関数または比較的簡単な形の関数として扱う場合が多い．

以下実例で解説する．

例題 13

m が正の定数のとき，方程式

$$e^x-mx=0$$

の実数解の個数を調べよ．

解　説　$f(x)=e^x-mx$ とおくと

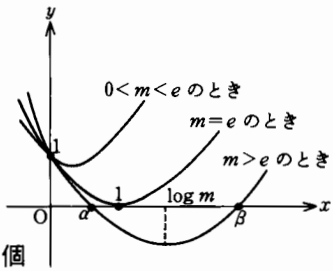
$$f'(x)=e^x-m \quad (\text{ただし } m>0),\ f''(x)=e^x>0 \ (\text{グラフは下に凸})$$

で，$x=\log m$ の前後でのみ $f'(x)$ の符号は負から正に変化する．すなわち $f(x)$ は $x=\log m$ で極小かつ最小である．ゆえに

$$\text{最小値}: f(\log m)=m-m\log m$$
$$=m(1-\log m)\cdots①$$

ここで $m>0$ より最小値の正負は $(1-\log m)$ の正負と一致するから求める実数解の個数は次のようになる．

$$\begin{cases} f(\log m)<0 & (\boldsymbol{m>e}) \text{ のとき } \ \mathbf{2}\text{個} \\ f(\log m)=0 & (\boldsymbol{m=e}) \text{ のとき } \ \mathbf{1}\text{個} \\ f(\log m)>0 & (\boldsymbol{0<m<e}) \text{ のとき } \ \mathbf{0}\text{個} \end{cases}$$



らしんばん

本問のテーマを少し「発展的(イジワル)に」にとりあげてみよう．たとえば

$$2e^x-mx^2=0 \quad (m>0) \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

のときはどうすればよいか．左辺を $g(x)$ とおくと

$$g(x)=2e^x-mx^2, \qquad g'(x)=2e^x-2mx=2(e^x-mx)$$

で，$g'(x)=0$ となる x の値は簡単に求まらず，しかも本文で調べた結果を利用するにしても $g(x)$ の増減表は m の値にしたがって場合分けをしなければならず，相当メンドウなことになる．このようなときは $x\neq 0$ に注意して(＊)を

$$2e^x = mx^2 \qquad \therefore \quad m = \frac{2e^x}{x^2}$$ （m について解いた!!）

と変形し，2 つの関数

$$y = \frac{2e^x}{x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**), \qquad y = m$$

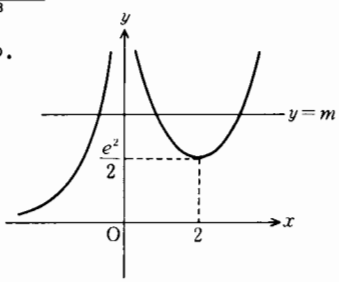
のグラフの交点の個数としてとらえる方法が有効である．

(**)については

$$\left(\frac{2e^x}{x^2}\right)' = \frac{2e^x(x^2-2x)}{x^4} = \frac{2e^x(x-2)}{x^3}$$

で，増減表とグラフは次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\nearrow$



そこで

$$\left.\begin{array}{ll} x \to \pm 0 \text{ のとき} & y \to \infty \\ x \to \infty \text{ のとき} & y \to \infty \\ x \to -\infty \text{ のとき} & y \to +0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

を確認した上で，(*)の実数解の個数は次のようになることがわかる。すなわち

$m > \frac{e^2}{2}$ のとき 3 個，$m = \frac{e^2}{2}$ のとき 2 個，$0 < m < \frac{e^2}{2}$ のとき 1 個．

ここで注意しておきたいことは，**上に述べた条件(A)を必ず明示せよ**，ということ!!　この確認なしに関数の増減をチェックしただけでは解の個数を判定することはできない．たとえばこの例で $m<0$ にハナシを拡張した場合で説明すると増減表だけから判断すると **$x \to -\infty$ のときは「いかにも $y \to -\infty$ のイメージ」があってウッカリ負の解が 1 つありそうに思われる**のだが，実はどのような $x<0$ に対してもグラフは x 軸を切ってその下側にあらわれることはなく，したがってこの場合は解がない．この例でわかるように，「$x \to \infty$」，「$x \to -\infty$」のときの関数値の上限，あるいは下限についてはダマされやすい——x 軸に平行な漸近線があるときなどは特に注意しなければならない．

ちなみにこの方法でやれば「解の個数」の他に「解の存在範囲」もかなりしっかりととらえることができる．本問をこの方法でもやってみるとよい．

再び本問についていえば，与えられた方程式を

$$e^x = mx$$

と変形し，

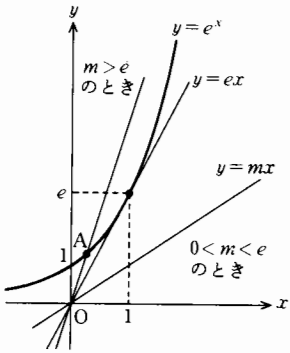
$$\begin{cases} y = e^x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***) \\ y = mx \end{cases}$$

の2 つのグラフの交点の個数として調べてもよい．

(***)上の点 (t, e^t) における接線の方程式は

$$y-e^t=e^t(x-t) \quad (y'=e^x)$$

であるから，これが原点を通る場合は $x=y=0$ をいれて，$t=1$ が得られ，したがってこの方程式は $y=ex$ になる．あとはこの直線の傾き e と m との大小を比較すれば本文と同じ結果が得られる．



この方法で $m>e$ のときを考えると，図のように点Aで2つのグラフは交わるが，(***)のグラフが下に凸であるために，これがどこかで再び $y=mx$ のグラフをぬきかえし，解の個数が2個となることは答案を書く上では何らかの形で触れておきたい．

(2) 不等式への応用

不等式を扱う基本は「差をとって考える」，すなわち

$$\mathbf{A>B} \iff \mathbf{A-B>0}$$

であった．したがって，$f(x)>g(x)$ を証明するには

$$F(x)=f(x)-g(x)>0 \quad (g(x)\text{ を左辺に移項した})$$

を与えられた「定義域」で示すことになる．

例題 14

(1) $x>0$ のとき，不等式

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$$

を証明せよ．

(2) (1)を用いて，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であることを証明せよ．

解説 (1) $f(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \quad (x>0)$ ……①

とおくと，

$$f'(x)=e^x-1-x,\ f''(x)=e^x-1>0 \quad (\because x>0)$$

ゆえに $f'(x)$ は

$$\left.\begin{array}{l} x\geqq 0 \text{ で単調増加} \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \quad \therefore\ f'(x)>f'(0)=0 \quad (x>0) \quad \cdots\cdots②$$

したがって $f(x)$ は

$$\left.\begin{array}{l} x \geqq 0 \text{ で単調増加} \\ \quad f(0)=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad f(x)>f(0)=0 \quad (x>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\therefore \quad e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$$

(2)　$x>0$ のとき，(1)の不等式から

$$e^x > \frac{x^2}{2} \quad (x>0) \quad \therefore \quad 0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{x}$$

この式で，$x \to \infty$ のとき，$\dfrac{2}{x} \to 0$ ゆえ「はさみうち」により

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}=0$$

らしんばん

本文②,③で「$x \geqq 0$ で単調増加」と書いていることに注目!!
たとえば③でいうと与えられた条件「$x>0$」に引きずられて

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \text{ で単調増加 } (\because \quad f'(x)>0) \\ \text{また} \quad f(0)=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad f(x)>f(0)=0$$

と書いてしまいたいところである．――「単調増加」ということの意味を改めて考えてみよう．

「**単調増加を保証する定理 (p. 93)**」では「単調増加」の条件を

「任意の $x_1, x_2\ (x_1<x_2) \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$」 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$

と説明した．しかし本問のように「$x>0$」という x の範囲を与えると $(*)$ の x_1 を 0 にとることができないために「$f(0)$との大小関係」という点でハナシがつながらなくなってしまう．そこでこのような場合を考えてこの定理を少し精密に調整しておくことにする．すなわち

定　理

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能でかつ $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で単調増加である．

のようにする．(証明は区間の両端に注意すればほとんど同様である．)

区間 $[a, b]$ に属する任意の $x_1<x_2$ をとると

$a \leqq x_1<x_2 \leqq b$――x_1 を a，x_2 を b にとれる!!

したがって $f(x)$ は

$$\begin{cases} [a, b] \text{ で連続} \longrightarrow [x_1, x_2] \text{ で連続} \\ (a, b) \text{ で微分可能} \longrightarrow (x_1, x_2) \text{ で微分可能} \end{cases}$$

である．そこで「平均値の定理」を用いると

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \quad (x_1<c<x_2)$$

をみたす c が存在し，

「(a, b) で $f'(x)>0$ ⟶ (x_1, x_2) で $f'(x)>0$」

がいえて

$$f'(c)>0 \qquad \therefore \quad f(x_1)<f(x_2)$$

である．

このようにすれば x_1 を区間 $[a, b]$ の左端 a にとることができて

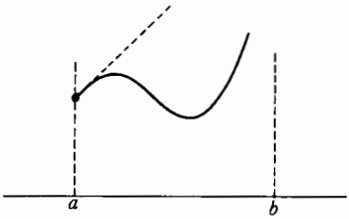
「$f(x)$ は $x \geqq a$ で単調増加である」

ということができる．(b と x_2 の関係についても同様)

ここで「ロルの定理」(p. 89) や「平均値の定理」(p. 90) の条件

「$[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能 $(a<c<b)$」

を思い出してもらいたい——たとえば左端に注目すると前ページの定理の調整のような区間の設定がここでも微妙に効いていることがわかる．($f'(c)$ を問題にするとき，端点で微分不可能でもかまわない)



$f'_R(a)$ が存在する

$f'_R(a)$ が存在しない

(2)は，**例題 12** (1) p. 109 では「ロピタルの定理」を用いて簡単にすませてしまった極限であるが，本問はそれを「素手」で示したわけである．

ハナシを少し拡張しておこう．一般に次の不等式が成り立つ．

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!} \qquad (x>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

ここでは「数学的帰納法」を用いて証明する．

いま，(**)の右辺を $f_n(x)$ とおくと，$f_n'(x)=f_{n-1}(x)$ で，

(i) $e^x>f_2(x)$ は成立 (本問(1))

(ii) $e^x>f_{m-1}(x)$ $(m \geqq 3)$ が成立すると仮定すると，$e^x-f_m(x)=g(x)$

とおいて

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=(e^x-f_m(x))'=e^x-f_{m-1}(x)>0 \\ g(0)=e^0-f_m(0)=1-1=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad g(x)>0 \qquad \therefore \quad e^x>f_m(x)$$

これより(**)が正しいことがわかる．

このことを用いると，本問と全く同様にして

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (x>0)$$

$$\therefore \quad 0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{x^n}{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}=\frac{(n+1)!}{x} \qquad \therefore \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=+0 \quad \left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty\right)$$

(e^x は x^n よりも「はやく発散」する)

である．また，$e^x=y$ とおくと $x=\log y$ で，$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ となるから

$$\lim_{y\to\infty}\frac{(\log y)^n}{y}=+0 \quad \left(\lim_{y\to\infty}\frac{y}{(\log y)^n}=\infty\right)$$

($\log y$ を何乗しても y より「ゆっくり発散」する)

この式で $y=\dfrac{1}{t}$ とおけば $y\to\infty$ のとき $t=\dfrac{1}{y}\to+0$ で $\log y=-\log t$ の変形を利用すると，

$$\lim_{t\to+0}t(-\log t)^n=\lim_{t\to+0}(-1)^n t(\log t)^n=0 \qquad \therefore \quad \lim_{t\to+0}t(\log t)^n=0$$

($\log t$ が $\pm\infty$ に発散しても，t の方がそれよりもはやく 0 にいく)

なども導かれる——みな同じファミリーと考えてよい．

5　近似式と関数の展開(ここはとりあえず「ナナメ読み」でもよい)

(1)　1次の近似式

「平均値の定理」によれば，

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a) \quad \cdots\cdots ①$$

(c は a と x との間——$f(x)$ はこの区間で微分可能，両端で連続)

であった．ここで，$f'(a)$ が存在してかつ $f'(x)$ が連続ならば，x を a に十分近くとると ($|x-a|$ を十分小さくとる時)

$$\boldsymbol{f'(c)\fallingdotseq f'(a)} \quad (「\fallingdotseq」は両辺が近似的に等しいことを表す.)$$

とおくことができて，①は近似的に

$$\boldsymbol{f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)} \quad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．これを $f(x)$ の「1次の近似式」という．

さらに②で $a=0$ ならば，$|x|$ が十分小さいとき，

$$\boldsymbol{f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x} \quad \cdots\cdots ③$$

で，たとえば，$f(x)=(1+x)^p$ (p は実定数) に適用してみると $f'(0)=p$ であるから，この場合の $f(x)$ の近似式は

$$(1+x)^p\fallingdotseq 1+px$$

で，この p の値に具体的な数値 -1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ をいれると

$$\frac{1}{1+x}\fallingdotseq 1-x,\ \sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x,\ \sqrt[3]{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}x,\ \cdots\cdots (x\fallingdotseq 0 \text{ のとき})$$

などが得られる．

また，全く同様にして

$$\sin x \fallingdotseq x,\ \cos x \fallingdotseq 1,\ \tan x \fallingdotseq x,\ e^x \fallingdotseq 1+x,\ \cdots\cdots\ (x \fallingdotseq 0 \text{ のとき})$$

であることもわかる．

（これらのことは $x \to 0$ のとき，

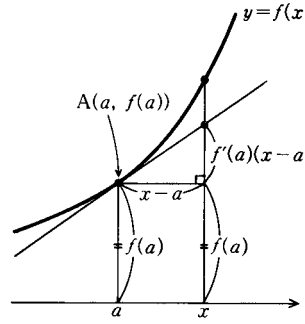
$$\frac{\sin x}{x} \to 1,\ \cos x \to 1,\ \frac{\tan x}{x} \to 1,\ \frac{e^x-1}{x} \to 1$$

などの極限からも予想できることがらである．）

注 ②の右辺を y とおいて得られる

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の方程式である．すなわち「**1次の近似式**」は，関数 $\boldsymbol{f(x)}$ の変化を，$\boldsymbol{x=a}$ の近くで「**1次関数におきかえて調べる**」ことである．このように複雑な関数 $f(x)$ を1次関数という最も簡単な形をした関数に近似してあつかう方法は，微積分でよくとる手法である．



(2) 2次の近似式

「平均値の定理」は次のように拡張される．

閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で2回以上微分可能である関数 $f(x)$ に対して

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+k(b-a)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

をみたす k の値はないか．いま

$$F(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-k(b-x)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とおくと（①を左辺に移項して a を x とおいた）$F(x)$ は上の区間で「連続」，「微分可能」の条件をみたすから

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f'(x)+f'(x)-(b-x)f''(x)+2k(b-x) \\ &= -(b-x)f''(x)+2k(b-x) \end{aligned}$$

また，

$$F(a)=0 \quad (\because ①),\ F(b)=0$$

であるから②の $F(x)$ は「ロルの定理」の条件をみたす．すなわち

$$F'(c)=-(b-c)f''(c)+2k(b-c)=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{2}f''(c)\quad (a<c<b)$$

として k は求まり①は

$$\boldsymbol{f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2\quad (a<c<b)}\ \cdots③$$

③で b を x とおくと

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$$

$$(c \text{ は } a \text{ と } x \text{ との間})\ \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

ここで $f''(a)$ が存在して，かつ $f''(x)$ が連続ならば，x を a に十分近くとると（$|x-a|$ が十分小さいとき）

$$\boldsymbol{f''(c)\fallingdotseq f''(a)}$$

であるから，$f(x)$ の「2 次の近似式」は

$$\boldsymbol{f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

で与えられる．

さらにこの式で，$a=0$ とおくと $|x|$ が十分小さいとき

$$\boldsymbol{f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2}$$

となる．これを用いると

$$(1+x)^p\fallingdotseq 1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2$$

$$\cos x\fallingdotseq 1-\frac{x^2}{2},\quad e^x\fallingdotseq 1+x+\frac{x^2}{2},\quad \log(1+x)\fallingdotseq x-\frac{x^2}{2}$$

などの近似式を求めることができる――**例題 14** (1)（p. 112）の右辺は，e^x の「2 次の近似式」である．

注❶　⑤の右辺を $g(x)$ とおくと，「2 次の近似式」は曲線 $\boldsymbol{y=f(x)}$ を放物線 $\boldsymbol{y=g(x)}$ で近似したものであることがわかる．そして，$f(a)=g(a)$，$f'(a)=g'(a)$，$f''(a)=g''(a)$ と，$x=a$ における $f''(a)$ までの変化の様子は $g(x)$ と同じであり，$f(x)$ の挙動を簡単な 2 次関数によって「1 次の近似式」よりもさらにくわしい精度で調べることができる．

注❷　「2 次の近似式」と「1 次の近似式」の精度について考えてみよう．いま，$x>a$ としておくと（$x<a$ のときも同様である），$f(x)$ の「1 次近似式」はその真の値

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)\ (a<c<x)\quad (\text{「平均値の定理」})$$

に対して

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)\quad (f(x)\text{ の「1 次の近似式」})$$

である．ゆえにこの場合の「誤差」を E_1 とすると

$$E_1=\{f(a)+f'(c)(x-a)\}-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}$$
$$=\{\boldsymbol{f'(c)-f'(a)}\}(\boldsymbol{x-a})$$

で，また $f(x)$ の「2次の近似式」は

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

であるから，この場合の「誤差」を E_2 とすると

$$E_2=\{f(a)+f'(c)(x-a)\}-\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\}$$
$$=\underbrace{\{\boldsymbol{f'(c)-f'(a)}\}(\boldsymbol{x-a})}_{(A)}-\underbrace{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{f''(a)(x-a)^2}}_{(B)}$$

そこで $|E_1|$ と $|E_2|$ の大小関係を調べるのだが，上式の第1項(A)は E_1 そのものであるから $|E_1|>|E_2|$ を示すにはこの(A)と(B)とが「同符号である」ことを示せばよい．

そこで(A)に「平均値の定理」

$$f'(c)-f'(a)=f''(d)(c-a)\quad(a<d<c<x)$$

を用いると

$$(A)=f''(d)(c-a)(x-a)$$

となるが，a に十分近い x の値に対しては d も a に十分近い値となり（「はさみうち」）$f''(d)$ の符号は $f''(a)$ の符号と一致する．

ここで

$$x-a>0\quad\therefore\quad(x-a)^2>0,\ c-a>0$$

に注意すると(A)が(B)に同符号であることがわかり，$|E_1|>|E_2|$ すなわち「**2次の近似式**」の方が「**1次の近似式**」よりよい近似であることがわかる．

(3) ティーラーの定理と関数の級数展開

「2次の近似式」で述べた「平均値の定理」を拡張するハナシは，実は n 次，またはそれ以上にまで拡張される．（これも高校数学の範囲を越えるが「発展的なテーマ」として少しだけ説明しておくことにする．）

関数 $f(x)$ が n 回以上微分可能であるとすると，前ページの⑤に相当する $f(x)$ の「展開式」は

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

（c は a と x との間）

のように表される——2次の場合と同様に証明される．これを「**ティーラーの定理**」といい，①の右辺を $f(x)$ の「**ティーラー展開**」という．

特にこの式で $a=0$ とおくとき，①は

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$

（c は 0 と x との間）……②

となる．これを「**マクローリンの定理**」といい，②の右辺を $f(x)$ の「**マクローリン展開**」という．

なお，$f(x)$ が何回でも微分可能なとき，$\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ であるような x の範囲で $f(x)$ は「**$(x-a)$のべき級数**」に展開される．すなわち

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots③$$

同様にして，$\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ であるような x の範囲で $f(x)$ は「**xのべき級数**」に展開される．すなわち

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k+\cdots\cdots \quad \cdots④$$

である．ここでは深入りしないが，$x=a$ における状況がわかりさえすれば③の形で，特に $x=0$ の状況がわかりさえすれば④の形で，われわれがよく知っている関数が「べき級数」に展開されることは大変興味深い——**整関数以外の関数が整式で表される!!**

④の形で展開されるポピュラーな関数の例をあげておこう——ただしカッコ内は収束するための x の範囲である．

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots \quad (|x|<1)\cdots\text{(i)}$$

（α は実数．特に α が自然数のときは x に制限ナシ——2 項定理!!）

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (|x|<1)\cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots \quad (x:\ \text{全実数})\cdots\cdots\text{(iii)}$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (-1<x\leqq 1)\cdots\cdots\text{(iv)}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\text{(v)}$$

（x：全実数）

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\text{(vi)}$$

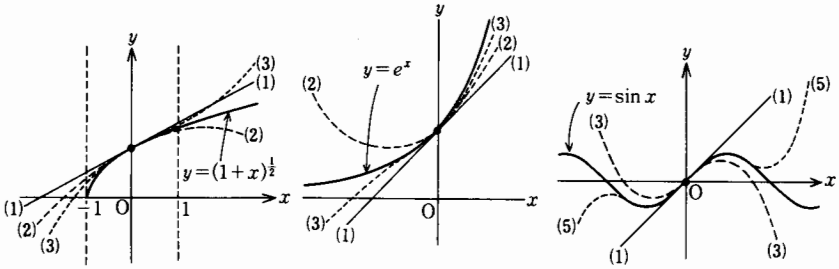
(x：全実数)

注❶ (ii)は「無限等比級数の和の公式」そのもの!!
また(iii)で $x=1$ とすると「e」の値が求められる．すなわち

$$\boldsymbol{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots}$$

注❷ 以上の例のうちのいくつかをグラフで示しておく．ただしカッコ内の数値は近似のオーダーを表すものとする．

(i)で $\alpha=\frac{1}{2}$ としたもの　　(iii)について　　(v)について



注❸ 不等式の証明問題

$$1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2>\frac{1}{\sqrt{1+x}}>1-\frac{x}{2} \quad (x>0)$$

なども，われわれとしてはマジメに

$$f(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\ ,\ g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

とおいて $f(x)$，$g(x)$ の増減を調べることにより $x>0$ で $f(x)>0$，$g(x)>0$ を示すわけであるが，先に述べた「マクローリン展開」を知ればこの不等式が展開式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

に由来していることがわかる．

第3節
問題解法の研究

発展問題1—連続，微分可能

(1)　関数 $g(x)$ はすべての実数に対して定義され微分可能であって $g(0)=0$ となるものとする．このとき

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & (x\neq 0)\\ g'(0) & (x=0)\end{cases}$$

とおけば，$f(x)$ は $x=0$ において連続となる．

このことを微分係数の定義を用いて証明せよ．

(2)　3つの正の定数 a，b，c が与えられたとき，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=\boxed{}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\boxed{}$$

である．

解　説　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=f(0)$

ゆえに $f(x)$ は，$x=0$ で連続である．

(2)　$\log\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=g(x)$ とおくと $g(x)$ は微分可能で，$g(0)=0$ となるから(1)を利用することができる．すなわち

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\log\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right) & (x\neq 0)\\ g'(0) & (x=0)\end{cases}$$

とおくと

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=f(0)=g'(0)$$

そこで $g'(x)$ を求めて $x=0$ とおけばよい．

$$g'(x)=\{\log(a^x+b^x+c^x)-\log 3\}'$$
$$=\frac{(a^x+b^x+c^x)'}{a^x+b^x+c^x}=\frac{a^x\log a+b^x\log b+c^x\log c}{a^x+b^x+c^x}\quad\cdots\cdots①$$
$$\therefore\quad g'(0)=\frac{\log a+\log b+\log c}{3}=\frac{\log abc}{3}$$
$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{\log abc}{3}}$$
$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\log(abc)^{\frac{1}{3}}$$
$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=(abc)^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\sqrt[3]{abc}}$$

らしんばん

本問(1)で求めていることは「$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)}$」をキチンと式で示すことである——これに「**ロピタルの定理（p. 96）**」を利用できないか．

関数 $g(x)$ は「すべての点で微分可能」であるから当然「連続」である．

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0,\ \lim_{x\to 0}x=0$$

したがって「ロピタルの定理」を用いて

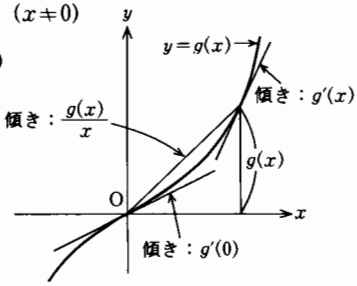
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\quad\left(=\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=g'(0)}\longleftarrow g'(0)\text{ の定義!!}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}g'(x)$$

とやりたいところだがこれはダメ!!——「**$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}g'(x)=g'(0)}$（$\boldsymbol{x=0}$ における $\boldsymbol{g'(x)}$ の連続性）**」が保証されていないからである．その点，本問(2)の

$$g(x)=\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)\quad(\lim_{x\to 0}g'(x)\text{ が存在し，その値は }g'(0)\text{ に等しい})$$

はウマクできていて，空欄を埋めるだけなら「ロピタルの定理」を用いて簡単にカタがつく．しかし**例題 1**（p. 69）のような $f(x)$，$g(x)$ ではそうはいかない．

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$



この $f(x)$，$g(x)$ は本問(1)の条件を満たし，しかも $g'(0)$ が存在し，その値は 0 であった．そこで $x\neq 0$ のときの $g'(x)$ を求めると

$$g'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)$$

で「$x\to 0$」のとき「$x\sin\frac{1}{x}\to 0$」であるが第2項目の「$\cos\frac{1}{x}$」は「$x\to +0$」のときも「$x\to -0$」のときも「限りなく振動」して $\lim_{x\to 0} g'(x)$ が存在しない——$g'(x)$ は $x=0$ で不連続!!　このように「$g'(0)$ を求める」ことと，「まず $g'(x)$ を求めておいて $\lim_{x\to 0} g'(x)$ を計算する」こととはちがうことがらであるから注意しなければならない．

発展問題 2—「左方微係数」と「右方微係数」

x の関数 $f(x)$ について

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

が存在するとき，その値を $f^*(a)$ で表すことにする．

(1)　$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在すれば，同じ a について $f^*(a)$ も存在するといえるか．

(2)　$f(x)=x+|x|$ について，$f'(0)$ および $f^*(0)$ が存在するかどうかを調べよ．

解　説　(1)　$\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\dfrac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{1}{2}\cdot\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

条件より $f'(a)$ が存在するから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim_{h'\to 0}\frac{f(a+h')-f(a)}{h'}=f'(a)\ (-h=h'\text{ とおいた})$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}f'(a)+\frac{1}{2}f'(a)=f'(a)$$

ゆえに $f^*(a)$ は存在して $f'(a)$ である．

(2)　(i)　$f'(0)$ について

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h+|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h+h}{h}=2$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{h+|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-h}{h}=0$$

($h\to +0$ のときは $h>0$，$h\to -0$ のときは $h<0$)

これらの値が異なるから $f'(0)$ は存在しない．

(ii) $f^*(0)$ について

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+|h|)-(-h+|-h|)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{2h}=1$$

ゆえに $\boldsymbol{f^*(0)}$ は存在してその値は 1 である.

らしんばん

$f^*(a)$ と $f'(a)$ を混同しないこと.

本問についていえば①で $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\mathrm{A}$, $\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\mathrm{B}$ とすると, A, B で用いている h は同じ h であるから

$h\to +0$ ならば A は右方微係数 $f_{\mathrm{R}}'(a)$, B は左方微係数 $f_{\mathrm{L}}'(a)$

$h\to -0$ ならば A は $f_{\mathrm{L}}'(a)$, B は $f_{\mathrm{R}}'(a)$

になる.

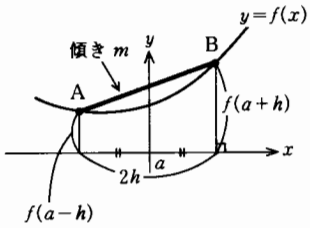
したがって $f^*(a)$ は $f(x)$ の $x=a$ における $f_{\mathrm{L}}'(a)$, $f_{\mathrm{R}}'(a)$ がそれぞれ存在すれば (それらが一致しなくても) $\dfrac{f_{\mathrm{L}}'(a)+f_{\mathrm{R}}'(a)}{2}$ として存在するが, $f^*(a)$ が存在したからといって $f'(a)$ が存在するとは限らない.

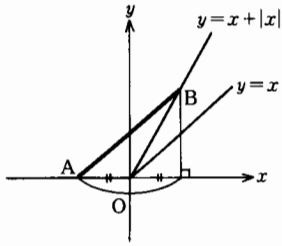
本問(1)についていえば $f'(a)$ が存在するから

$$f_{\mathrm{L}}'(a)=f_{\mathrm{R}}'(a)=f'(a)$$

であり, 当然 $f^*(a)$ は存在してその値は $f'(a)$ である.

$f^*(a)$ を「視覚的」にとらえるならば次の図 ($h>0$ とした) で「AB の傾き m」の $h\to 0$ のときの極限である.





①の第 2 項で分母を $(-h)$ に調整してあることに注目!!——$\boldsymbol{f'(a)}$ の定義を利用するときの式変形は,「分子の微小部分に分母の微小部分をあわせる」のがポイントである.

たとえば

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim_{2h\to 0}\frac{f(a+\boldsymbol{2h})-f(a)}{\boldsymbol{2h}}=2f'(a)$$

のようにやる.

発展問題 3—平均値の定理と曲線の凹凸

(1)　$0 \leqq x_1 < x_2 < x_3 \leqq \pi$ のとき，平均値の定理を用いて

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2}$$

を証明せよ．

(2)　$\lambda + \mu = 1$，$0 < \lambda < 1$，$0 \leqq x < y \leqq \pi$ である任意の λ，μ，x，y に対して

$$\sin(\lambda x + \mu y) > \lambda \sin x + \mu \sin y$$

が成立することを証明せよ．

解　説　(1)　$f(x) = \sin x$ とおくと，

$f'(x) = \cos x$ であるから，平均値の定理より

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \cos \alpha \quad (x_1 < \alpha < x_2) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2} = \cos \beta \quad (x_2 < \beta < x_3) \quad \cdots\cdots ②$$

ところで，$\cos x$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ で単調減少であるから

$$\alpha < \beta \iff \cos \alpha > \cos \beta$$

これと①，②から

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2} \quad (\because \quad \alpha < x_2 < \beta)$$

(2)　$\lambda + \mu = 1$，$0 < \lambda < 1$，$0 < \mu < 1$，$0 \leqq x < y \leqq \pi$ から，

$$0 \leqq x < \lambda x + \mu y < y \leqq \pi$$

（数直線上に点 $P(x)$，$Q(y)$ をとると $R(\lambda x + \mu y)$ は $\overline{PQ}$ を $\mu : \lambda$ に内分する点である．）

そこで，(1)の x_1，x_2，x_3 をそれぞれ x，$\lambda x + \mu y$，y とおくと

$$\frac{\sin(\lambda x + \mu y) - \sin x}{\lambda x + \mu y - x} > \frac{\sin y - \sin(\lambda x + \mu y)}{y - (\lambda x + \mu y)}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(\lambda x + \mu y) - \sin x}{(\lambda - 1)x + \mu y} > \frac{\sin y - \sin(\lambda x + \mu y)}{(1 - \mu)y - \lambda x}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(\lambda x + \mu y) - \sin x}{\mu(y - x)} > \frac{\sin y - \sin(\lambda x + \mu y)}{\lambda(y - x)}$$

ここで，$(y - x) > 0$ であるから，両辺に $\lambda\mu(y - x)$ をかけて

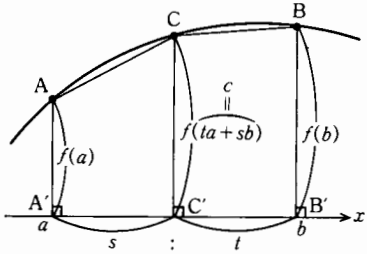
$$\lambda\{\sin(\lambda x + \mu y) - \sin x\} > \mu\{\sin y - \sin(\lambda x + \mu y)\}$$

$$\therefore \quad (\lambda + \mu)\sin(\lambda x + \mu y) > \lambda \sin x + \mu \sin y$$

$$\therefore \quad \sin(\lambda x + \mu y) > \lambda \sin x + \mu \sin y$$

らしんばん

$y=f(x)$ のグラフの凹凸と $f''(x)$ の符号の関係をどうとらえればよいかを考えてみよう．たとえば，ある区間 I で $f''(x)<0$ であるとする．



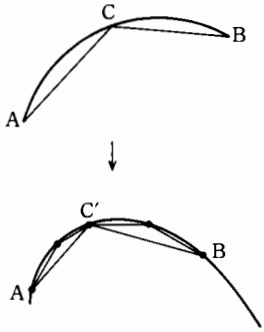
この区間で x の値を任意に3つとり，a，c，b $(a<c<b)$ とすると「平均値の定理」より

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\alpha)\ (a<\alpha<c)$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\beta)\ (c<\beta<b)$$

ところが $f''(x)<0$ だから $f'(x)$ は単調減少である．そこで $\alpha<c<\beta$ に対して $f'(\alpha)>f'(\beta)$ ゆえ

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



これがこの区間の任意の a，c，b で成立することは，**$y=f(x)$ のグラフが「上に凸」であることに**他ならない．(「下に凸」の場合は各自で考えよ．)

また，右上図の点 C′ が $\overline{A'B'}$ を $s:t$ に内分している点ならば

$$c=ta+sb\quad(s+t=1,\ s>0,\ t>0)$$

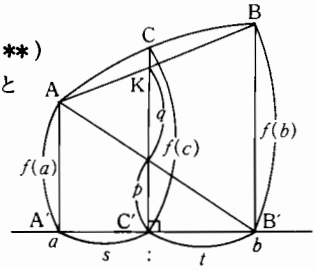
のように表されるから，これを(*)に代入すると

$$\frac{f(ta+sb)-f(a)}{(ta+sb)-a}>\frac{f(b)-f(ta+sb)}{b-(ta+sb)}$$

$s+t=1$ を用いて分母を払って整理すれば

$$f(ta+sb)>tf(a)+sf(b)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(c)>tf(a)+sf(b)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$



になる．右図で △B′AA′，△ABB′ に注目すると

$$tf(a)=p,\ sf(b)=q$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}&tf(a)+sf(b)=p+q=\overline{C'K}\\&f(c)=\overline{C'C}\end{aligned}\right\}$$

で，(**)は $\overline{C'C}>\overline{C'K}$ (C は K よりも上側)であることを表していることがわかる．これは曲線が「上に凸」であればきわめて当然のことである——微分法を用いないで曲線の凹凸を調べるときはこのようにやる．

本問についていえば，$f(x)=\sin x$ であるから，グラフは $0<x<\pi$ で「上に凸」で，本文に述べたことがらが成り立つのはあたりまえである．

したがって(1)で，「平均値の定理を用いて……」という条件がなければ，$y=\sin x$ があたえられた範囲で「上に凸」であることを確認した上で

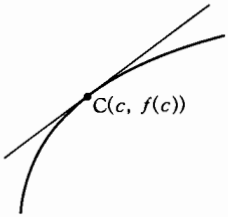
(AC の傾き)>(CB の傾き)

とすればよい．

上に述べたことがら（「凸関数」の性質）は「不等式の証明」などに応用されることが多い．たとえば微分可能な関数

$$y=f(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

のグラフが「上に凸」であるとする．



このとき，この曲線上の点 $C(c, f(c))$ における接線の方程式は

$$y=f'(c)(x-c)+f(c)$$

で与えられるが(***)との関係でいうと，任意の x の値に対して不等式

$$f'(c)(x-c)+f(c) \geqq f(x) \text{（等号は } x=c \text{ のときに成立）} \cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

が成り立つ．これはグラフの上下関係からほとんど明らかだが，マジメにやれば

$$g(x)=f'(c)(x-c)+f(c)-f(x)$$

とおいて

$$g'(x)=f'(c)-f'(x)$$

を求めると $f'(x)$ が単調減少であるから右の増減表が得られる．

x		c	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

すなわち $g(x)$ は $x=c$ において極小かつ最小の値 0 をとる．すなわち不等式(****)が成り立つ．

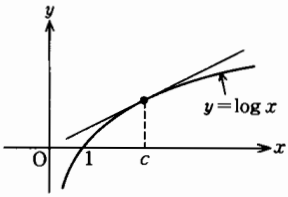
このことを利用しておもしろい例を1つあげておこう．上の $f(x)$ を

$$f(x)=\log x$$

にとると

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

であるからグラフは「上に凸」で(****)は，任意の x (>0) の値に対して



$$\frac{1}{c}(x-c)+\log c \geqq \log x$$

である．

ここで x の値を a_1，a_2，……，a_n として上の不等式に代入し，辺々を加えると

$$\frac{1}{c}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n-nc)+n\log c \geqq \log a_1+\log a_2+\cdots\cdots+\log a_n$$

が成り立つ．そこでこの c の値を

$$c=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

にきめると上の不等式の第1項のカッコの中は0となり

$$n\log\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geqq\log(a_1a_2\cdots\cdots a_n)$$

$$\therefore\quad \log\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geqq\frac{1}{n}\log(a_1a_2\cdots\cdots a_n)=\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

すなわち

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\quad(\text{相加平均}\geqq\text{相乗平均})$$

が示される．(ただし等号は $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=c$ のときに成立する．)

発展問題 4—平均値の定理と数列の極限

(1) 方程式

$$x-e^{-\frac{x}{2}}=0$$

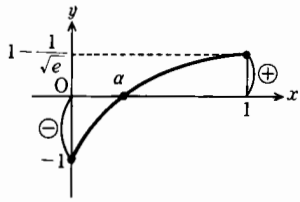
は，ただ1つの実数解 α をもち，α は0と1の間にあることを証明せよ．

(2) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$ とする．このとき各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が

$$a_{k+1}=f(a_k)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots),\ a_1=2$$

をみたすとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$ は(1)の実数解 α に等しいことを証明せよ．

解　説　(1)　$g(x)=x-e^{-\frac{x}{2}}$ とおくと



$$g'(x)=1+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}>0$$

これより，$g(x)$ は単調増加で

$$g(0)=-1<0$$

$$g(1)=1-\frac{1}{\sqrt{e}}>0$$

これより，$g(x)=0$ は，ただ1つの実数解 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ をもつ．

(「中間値の定理」p. 44 参照)

(2)　$f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\qquad\therefore\quad f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

このとき，与えられた条件と(1)とから

$$a_{k+1}=f(a_k),\ \alpha=f(\alpha)$$

辺々ひいて，「平均値の定理」を用いると

$$\begin{aligned}a_{k+1}-\alpha&=f(a_k)-f(\alpha)\\&=f'(c)(a_k-\alpha)\end{aligned}$$

(ただし c は a_k と α との間)

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{c}{2}}(a_k-\alpha)$$

$$\therefore\ |a_{k+1}-\alpha|=\frac{1}{2}e^{-\frac{c}{2}}|a_k-\alpha|<\frac{1}{2}|a_k-\alpha|$$

$$(\because\ c>0 \text{ より } 0<e^{-\frac{c}{2}}<1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad 0\leqq|a_n-\alpha|<\frac{1}{2}|a_{n-1}-\alpha|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n-2}-\alpha|<\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^r|a_{n-r}-\alpha|<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|2-\alpha|$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$，$|2-\alpha|$ は有限確定値であるから

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

らしんばん

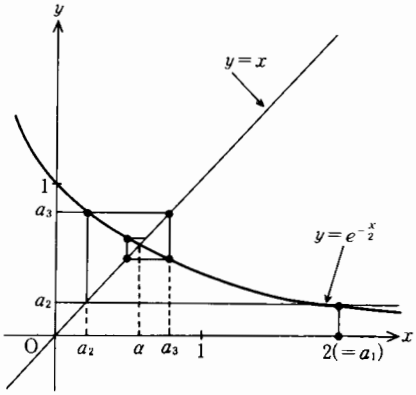
➡ (1)は「**中間値の定理**」である．本問の場合は $g(x)$ の「**単調性**」から解はただ1つであることがわかる．

➡ (2)について——

このような問題を解く場合にも「平均値の定理」は威力を発揮する．

ここで，

「$n\to\infty$ のとき，$a_n\to\alpha$」を「視覚的に」とらえるために「$y=x$ のグラフ」を利用するというハナシは，すでに「数列の極限」のところで説明した．(p. 18)



➡ 一般に $f(x)$ をすべての実数で定義された連続な関数とするとき任意の実数 x に対して

$$|f(x)-b|\leqq k|x-b|\ \ (b,\ k \text{ は実数},\ 0<k<1)$$

ならば

$$a_1=f(a),\ a_n=f(a_{n-1})\ \ (n\geqq2,\ a \text{ は実数})$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ は b に収束する．

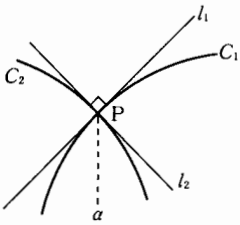
発展問題 5—直交する接線

関数 $f(x)=\sin x$ に対し，関数 $f^{(n)}(x)$ を，$f^{(0)}(x)=f(x)$

$f^{(n+1)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(n)}(x)$ により定める（$n=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots$）．

自然数 n を任意に1つきめたとき，2つの関数 $y=xf^{(n-1)}(x)$ および $y=f^{(n)}(x)$ のグラフを，それぞれ C_1，C_2 とすると，それらの交点Pにおける C_1，C_2 の接線 l_1，l_2 は互いに直交する．これを証明せよ．（やや難）

解　説　$f(x)=\sin x \Longrightarrow f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ については「高次導関数」(p. 87) ですでに説明した．



そこで2つの関数を

$$C_1:\ y_1=x\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$C_2:\ y_2=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

とおいて，2曲線 C_1，C_2 の交点Pの x 座標を α とすると，α に対して C_1，C_2 の y 座標は等しいから

$$\alpha\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

このとき点Pにおける C_1，C_2 の接線 l_1，l_2 の傾きを m_1，m_2 として $m_1\cdot m_2=-1$ であることを示せばよい．

$$y_1'=\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+x\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$y_2'=\sin\left(x+\frac{n+1}{2}\pi\right)$$

であるから

$$m_1=\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\pi\right)+\alpha\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$$m_2=\sin\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\pi\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

ここでハナシを簡単にするために $\alpha+\dfrac{n}{2}\pi=\beta$ とおくと

①より $\alpha\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\beta$　　$\therefore -\alpha\cos\beta=\sin\beta$

②より $m_1=\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)+\alpha\sin\beta=-\cos\beta+\alpha\sin\beta$

③より $m_2=\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\beta$

これらを用いると

$$m_1m_2=(-\cos\beta+\alpha\sin\beta)\cos\beta$$
$$=-\cos^2\beta+\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$=-\cos^2\beta-\sin^2\beta=-(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=-1$$

すなわち，l_1，l_2 は点 P において直交する．

らしんばん

$f^{(n)}(x)$ を $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ について順次求めていくと

$\sin x$，$\cos x$，$-\sin x$，$-\cos x$，$\sin x$，……で $f^{(4)}(x)$ 以下は「はじめの4つのくり返し」になる．このことに注目すると本問の C_1，C_2 は

$$\text{(i)}\begin{cases}x\sin x\\ \cos x\end{cases},\ \text{(ii)}\begin{cases}x\cos x\\ -\sin x\end{cases},\ \text{(iii)}\begin{cases}-x\sin x\\ -\cos x\end{cases},\ \text{(iv)}\begin{cases}-x\cos x\\ \sin x\end{cases}$$

のいずれかの組合せを考えればよく，しかも「(i)と(iii)」，「(ii)と(iv)」がたがいに原点について対称であることに気がつくと(i)と(ii)の場合だけを考えればすむ．

まず(i)の場合は

C_1：$y=x\sin x$　　$\therefore\ y'=\sin x+x\cos x$　（$=m_1(x)$ とおく）

C_2：$y=\cos x$　　$\therefore\ y'=-\sin x$　（$=m_2(x)$ とおく）

また，これらの交点の x 座標 $x=\alpha$ に対しては

$$\alpha\sin\alpha=\cos\alpha$$

が成り立つから

$$m_1(\alpha)\cdot m_2(\alpha)=(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)$$
$$=-\sin^2\alpha-\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$
$$=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-1$$

すなわち C_1，C_2 はこの点で直交する．　((ii)についても同様である．)

このようにやるといくらか簡単に見える．

発展問題6—「2曲線が接する」ということ

2曲線

$y=2\sin x$ ……①

$y=a-\cos 2x$ ……②

が，$0\leqq x\leqq 2\pi$ で接するような，定数 a の値を求めよ．

解　説　①，②の右辺をそれぞれ $f(x)$，$g(x)$ とすると

$$f'(x)=2\cos x$$
$$g'(x)=2\sin 2x$$

で，2曲線が $x=t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ で接するための条件は

「$f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$」

すなわち

$$\begin{cases} 2\sin t = a - \cos 2t & \cdots\cdots③ \\ 2\cos t = 2\sin 2t & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

となることが必要十分である．

そこで，まず④を解いて t の値を求め，③に代入して a の値を求める．

④より

$$\sin 2t - \cos t = 2\sin t\cos t - \cos t$$

$$= 2\cos t\left(\sin t - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \therefore\ \cos t = 0 \text{ または } \sin t = \frac{1}{2} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

$\cos t = 0$ から　　$t = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$

$\sin t = \dfrac{1}{2}$ から　　$t = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}$

以上の t の値に対して③から a の値を求めると

$t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$a = 2\sin\dfrac{\pi}{2} + \cos\pi = 2 - 1 = 1$

$t = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$a = 2\sin\dfrac{3\pi}{2} + \cos 3\pi = -2 - 1 = -3$

$t = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$a = 2\sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{3} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$t = \dfrac{5\pi}{6}$ のとき，$a = 2\sin\dfrac{5\pi}{6} + \cos\dfrac{5\pi}{3} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

ゆえに，とりうる a の値は　$\boldsymbol{a = -3,\ 1,\ \dfrac{3}{2}}$

らしんばん

2 曲線

$y = f(x)$，$y = g(x)$

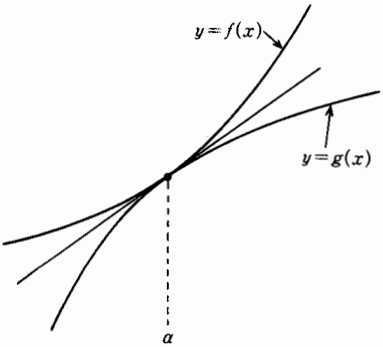
が，「**x 座標が α の点で接する**」ということは，この点で「**接線を共有する**」ということである．すなわち

$f(\alpha) = g(\alpha)$，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$

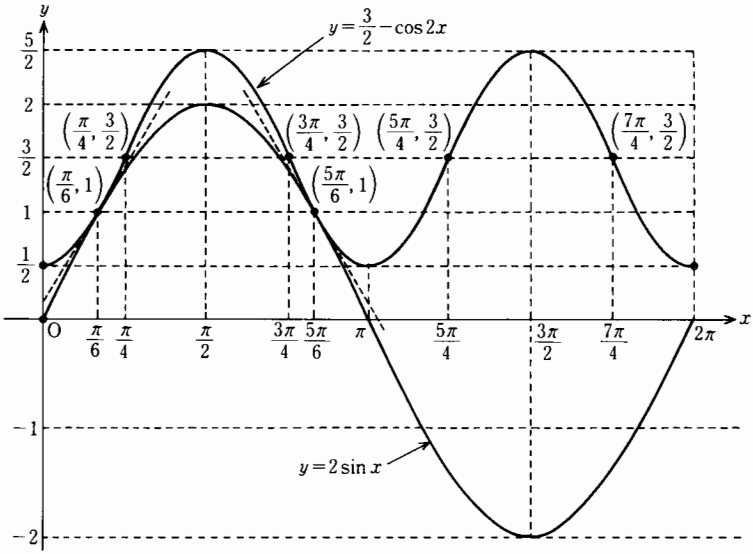
問題を解くにあたっては，2 つの方程式

$\boldsymbol{f(x) = g(x)}$，$\boldsymbol{f'(x) = g'(x)}$

が「**共通解 α**」をもつことである．



参考までに $a = \dfrac{3}{2}$ の場合について図示しておく．



発展問題 7—極大・極小と関数の増減

すべての実数に対して定義された関数

$$f(x)=\frac{4x-a}{x^2+1}\quad (a\text{ は実数の定数})$$

について，

(1)　$f(x)$ の極大値が 1 となるように a の値を求めよ．

(2)　a が，(1)で定めた値をとるとき，$f(x)$ の値域を求めよ．

解　説　(1)　$f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-(4x-a)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(2x^2-ax-2)}{(x^2+1)^2}$

……①

ゆえに $x=t$ で極値 1 をとるとすると $f'(t)=0$ であるから

$$\begin{cases} 2t^2-at-2=0 \quad (\because\ ①) \cdots\cdots② \\ f(t)=\dfrac{4t-a}{t^2+1}=1 \qquad \therefore\ t^2-4t+a+1=0 \cdots\cdots③\ (\text{必要}) \end{cases}$$

②，③から a を消去して，まず t を求めると③より

$$a=-t^2+4t-1 \cdots\cdots④$$

これを②に代入すると

$$2t^2-(-t^2+4t-1)t-2=0$$

$$\therefore\quad t^3-2t^2+t-2=(t-2)(t^2+1)=0 \qquad \therefore\quad t=2$$

これを④にいれて

$$a=-2^2+4\cdot 2-1=3$$

逆にこのとき（$a=3$ のとき）

$$f(x)=\frac{4x-3}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{-2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	1	↘

で右の増減表が得られ，$f(2)=1$ が極大値であることが確められる．（十分）

$\left(\text{このとき極小値は } f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4\right)$

ゆえに，求める a の値は $\boldsymbol{a=3}$ である．

(2) $f(x)$ が連続関数であることに注目して「$x\to\pm\infty$」の状況を調べると

$$f(x)=\frac{4-\frac{3}{x}}{x+\frac{1}{x}}\longrightarrow 0 \quad (x\to\pm\infty)$$

であるから，(1)の増減表とあわせて求める値域は $\boldsymbol{-4\leqq f(x)\leqq 1}$

らしんばん

本問(1)の「**極大値が1**」をどう読むか．スナオ（?）に読めばそのまま「$f'(x)$ の符号変化」を調べて「増減表」をつくる，ということになる．

その「符号変化」のメヤスとなる x の値は

$$f'(x)=0 \qquad \therefore\quad 2x^2-ax-2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

の2解 α，β $(\alpha<\beta)$ すなわち

$$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4},\ \beta=\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$$

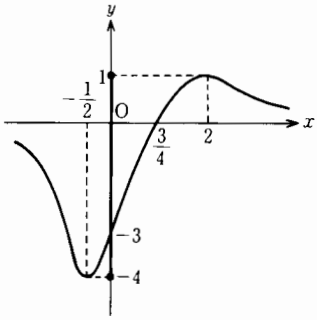
で，この α，β を用いて「とりあえず」増減表をつくると（この考え方も大切!!）右のようになる．

x		α		β	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

次に $f(\beta)=1$ から β（極大値を与える x の値）を消去して a の値を求めるのだが，上で求めた $\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$ をそのまま $f(x)$ に代入するには少し勇気がいる．せいぜい β が（$*$）の解であることから $2\beta^2-a\beta-2=0$ を利用して β を消去することになる――それにしてもメンドウだ．まして $f''(x)$ の符号を調べて極大，極小を確認する方法も本問についてはあまり有効ではない．そこで本問では本文に述べたように「極大値をとる x の値を t」とおいて

$$f'(t)=0,\ f(t)=1$$

のように「共通解の問題に帰着」させたわけである．しかしこの「$f'(t)=0$」の条件は $x=t$ で極大値をもつための「必要条件であるが十分条件ではない」ことに注意しておきたい．$a=3$ が求まったあとで「増減表」を示してあるのは，「十分性（このときたしかに1という極大値をもつ）」を確認しているわけで，このやり方では $a=3$ の値が求まった前半よりもこの確認の方がむしろ重要な意味をもつと考えなくてはならない．



参考までに本問の関数（$a=3$）のグラフの概形を示しておくと右図のようになる．

発展問題 8—凹凸とグラフ

$x>0$，$f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\log x}$ とする．

(1) $y=f(x)$ の増減を調べよ．

(2) $y=f(x)$ の凹凸を調べよ．

(3) $\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(4) 以上を参考にして $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

解　説　(1)「対数微分法」を用いる．

$$\log f(x)=(\log x)\log\frac{1}{x}=-(\log x)^2 \quad\cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=-2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\quad\cdots\cdots②$$

$x>0$，$f(x)>0$ だから $\log x$ の符号を調べることによって，右のような増減表が得られる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	1	↘

$f(1)=1$

が極大値となる．

(2) ②より

$$f'(x)=-2f(x)\frac{\log x}{x}\quad\cdots\cdots③$$

$$\therefore\quad f''(x)=-2\left\{f'(x)\cdot\frac{\log x}{x}+f(x)\cdot\frac{1}{x^2}-f(x)\cdot\frac{\log x}{x^2}\right\}$$

これに③を用いて右辺を整理すると

$$f''(x)=\frac{2f(x)}{x^2}\{2(\log x)^2+\log x-1\}$$
$$=\frac{2f(x)}{x^2}(2\log x-1)(\log x+1)$$

ゆえに $f''(x)=0$ となる x の値は $x=e^{\frac{1}{2}}$, e^{-1} で，これから次の凹凸表が得られる．

x	0	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\cup$	e^{-1}	$\cap$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\cup$

（変曲点は，(e^{-1}, e^{-1})，$(e^{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{4}})$）

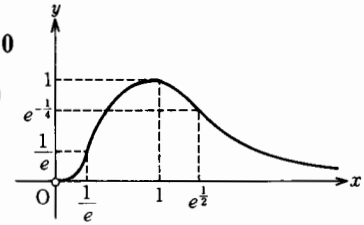
(3) ①より

$\lim_{x\to+0}\log f(x)=-\infty$ ∴ $\boldsymbol{\lim_{x\to+0} f(x)=+0}$

$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=-\infty$ ∴ $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x)=+0}$

$x\to+0$ のとき $\log x\to-\infty$

$x\to\infty$ のとき $\log x\to\infty$



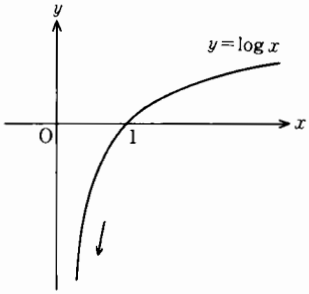
(4) 右図 （$y=0$ が漸近線）

らしんばん

$(x^n)'=nx^{n-1}$ にならって，ただ「形式的」に

$$\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^{\log x}\right\}'=(\log x)\left(\frac{1}{x}\right)^{\log x-1}$$

などとやってはいけない――「対数微分法」を利用する．



(3)については $y=\log x$ のグラフを利用して考えるとよい．すなわち，

$$\lim_{x\to+0}\log f(x)=\log\left(\lim_{x\to+0} f(x)\right)=-\infty$$
$$\therefore\ \lim_{x\to+0} f(x)=+0$$

である．

$x\to\infty$ のときも同様である．

肩に x のある式の微分は「対数微分法」を用いたが，それと同様に肩に x のある式の極限も対数を利用して考えるとよい．

(4)でグラフを描くとき，「原点の近くではどんな形になるか」が少し気にかかる――「$\lim_{x\to+0} f'(x)$」を調べてみたい．

本文①，②から $f'(x)$ を求めると

$$f'(x)=-2\frac{\log x}{x}\cdot f(x)$$

$$=-2\frac{\log x}{x}\cdot e^{-(\log x)^2}=-2\frac{\log x}{xe^{(\log x)^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで $\log x=-t$ とおくと $x=e^{-t}$ で，「$x\to+0$」のとき「$t\to+\infty$」である．

$$\therefore\quad -2\frac{\log x}{xe^{(\log x)^2}}=-2\frac{-t}{e^{-t}\cdot e^{t^2}}=2\frac{t}{e^{t^2-t}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

$$=2\frac{t^2-t}{e^{t^2-t}}\cdot\frac{t}{t^2-t}=2\frac{t^2-t}{e^{t^2-t}}\cdot\frac{1}{t-1}$$

$$=2\frac{u}{e^u}\cdot\frac{1}{t-1}\longrightarrow+0 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{「}t\to+\infty\text{」のとき } t^2-t=u\\ \text{とおくと「}u\to+\infty\text{」となる．}\end{array}\right)$$

すなわち，原点の近くでは「接線の傾きは限りなく0に近い値をとる」ことがわかる．なお

$$\frac{u}{e^u}=ue^{-u}\longrightarrow 0 \quad (u\to\infty)$$

についてはすでにp. 112でくわしく説明した．

また，少しメンドウな極限では「ロピタルの定理」(p. 96) に大きく期待するところだが，本問については(*)で

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{xe^{(\log x)^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{e^{(\log x)^2}+xe^{(\log x)^2}\cdot 2(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{e^{(\log x)^2}(x+2x\log x)}$$

と変形しても，分母が「$\infty\times 0$」($\lim_{x\to+0} x\log x=0$ もp. 109, 115に示した) の不定形となり，何らかの形で上と同様な「置きかえ」をせまられてほとんど役に立たない．もちろんはじめに(**)の形にまで変形しておけば

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t^2-t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t^2-t}\cdot(2t-1)}=+0$$

である．

発展問題9—方程式への応用

放物線

$$y=x^2+x-2 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　放物線①上の点P (a, b) での法線（点Pを通り，点Pでの接線に垂直な直線）を求めよ．

(2)　①の法線で，点Q $(0, c)$ を通るものが3本引けるとき，c のとりうる値の範囲を求めよ．

解　説　(1)　$y'=2x+1$

よって，点 $P(a, b)$ $(b=a^2+a-2)$ における法線の方程式は

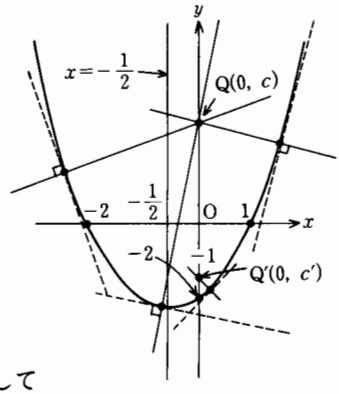
(i) $a \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき：

$$y-(a^2+a-2)=-\frac{1}{2a+1}(x-a)$$

$$\therefore \quad y=-\frac{1}{2a+1}(x-a)+a^2+a-2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{2a+1}x+a^2+a-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(2a+1)}} \quad \left(\boldsymbol{a \neq -\frac{1}{2}}\right)$$

(ii) $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき：$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$



(2) 法線が $Q(0, c)$ を通るのは(1)の(i)の場合であるから，(i)の式で $x=0$，$y=c$ として

$$c=a^2+a-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(2a+1)} \quad \cdots\cdots ②$$

これをみたす異なる 3 つの実数 a が存在するための条件を求めればよい．

右辺を $g(a)$ とおくと

$$g(a)=a^2+a-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(2a+1)} \quad \cdots\cdots ③$$

$$g'(a)=2a+1+\frac{1}{(2a+1)^2}$$

$$=\frac{(2a+1)^3+1^3}{(2a+1)^2}=\frac{2(a+1)(4a^2+2a+1)}{(2a+1)^2}$$

ここで，

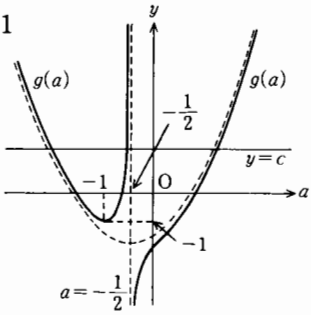
$$4a^2+2a+1>0 \quad \left(\frac{D}{4}=1^2-4<0\right)$$

であるから，$g'(a)=0$ をみたす a の値は $a=-1$ のみであり

$$\lim_{a \to -\frac{1}{2}-0} g(a)=\infty, \quad \lim_{a \to -\frac{1}{2}+0} g(a)=-\infty$$

に注意すると次の増減表が得られる．

a	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$+\infty$
$g'(a)$		$-$	0	$+$	×	$+$	
$g(a)$	$+\infty$	↘	-1 極小	↗	×	↗	$+\infty$



(ただし，$\lim_{x \to \pm\infty} g(a)=\infty$)

これより，求める条件は $\boldsymbol{c>-1}$

らしんばん

➡ (2)の②で，右辺のグラフをかいておいて，直線 $y=c$ を上下に動かしながら実数解の個数を調べるのがポイント！

②の分母を払って整理した3次方程式

$$4a^3+6a^2-4(c+1)a-2(c+2)=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

が3つの実数解をもつ条件として調べるのはかなり大変である――「基礎解析」ではそうやる．

「微積分」を学んでいるわれわれとしても(*)がパラメーター c についてスッキリと解けないとき（たとえば c^2 などがまじり込んでいるときなど）はそのままの形でやることになる――「たじろがずにやる」姿勢も場合によっては大切である．

②の右辺が，3角関数や，指数・対数関数などであらわされる関数であるときも同様である．(p. 110 の 例題 **13** を参照)

➡ 本文中のグラフ，$y=g(a)$ について説明しておく．

$a\to\pm\infty$ のとき $-\dfrac{1}{2(2a+1)}\to 0$ であるから，十分大きな（あるいは小さな）a の値に対して $g(a)$ の第4項目は無視できる．すなわち2次関数

$$y=a^2+a-\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots (**)$$

のグラフに限りなく近づく（漸近する）ことがわかる．

ここで $-\dfrac{1}{2(2a+1)}$ の正負に注意すると，$y=g(a)$ のグラフは

$$\begin{cases} a<-\dfrac{1}{2} \text{ のとき：} & (**) \text{ のグラフの上側} \\ a>-\dfrac{1}{2} \text{ のとき：} & (**) \text{ のグラフの下側} \end{cases}$$

であることがわかり，このハナシと漸近線 $a=-\dfrac{1}{2}$ を利用することで $g'(a)$ を計算しなくても，ほとんど「目見当で」このグラフの概形をおさえることができる．

発展問題 10―不等式への応用

関数 $f(x)$ および $g(x)$ が，次のように与えられている．

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\leqq 1) \\ \dfrac{1}{x}-1 & (x\geqq 1) \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2^{x-1}-1 & (x\leqq 1) \\ (x-1)\log 3 & (x\geqq 1) \end{cases}$$

（ただし，対数は自然対数とする．）

このとき，すべての実数 x について，$f(x)+pg(x)\geqq 0$ が成立する

ような p の範囲を求めよ．(やや難)

解　説　(i)　$x=1$ のとき：p にかかわらず　$f(1)+pg(1)=0$ である．

(ii)　$x>1$ のとき：

$$f(x)+pg(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)+p(x-1)\log 3=-\frac{x-1}{x}+p(x-1)\log 3\geqq 0$$

$x-1>0$ ゆえ

$$p\log 3\geqq\frac{1}{x}\quad\therefore\quad p\geqq\frac{1}{x\log 3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$x>1$ より $0<\dfrac{1}{x}<1$ であるから，右辺のとりうる値の範囲は

$$0<\frac{1}{x\log 3}<\frac{1}{\log 3}$$

ゆえに，①を $x>1$ でつねに成立させる p のとりうる値の範囲は

$$p\geqq\frac{1}{\log 3}$$

(iii)　$x<1$ のとき：

$$f(x)+pg(x)=-x+1+p(2^{x-1}-1)\geqq 0$$

ここで $x-1<0$ より $2^{x-1}-1<0$ に注意して，これを p について解くと

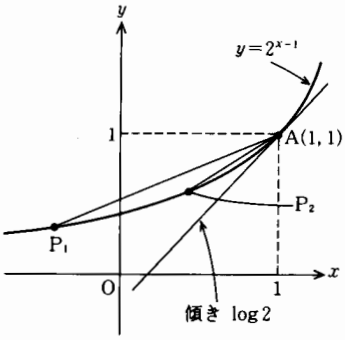
$$p\leqq\frac{x-1}{2^{x-1}-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

そこで $x<1$ において，この右辺のとりうる範囲を求めるのだが

$$\frac{2^{x-1}-1}{x-1}=m(x)$$

とすると，これは右図の「AP の傾き」を表すから

$$0<m(x)<[(2^{x-1})']_{x=1}$$
$$=[2^{x-1}\log 2]_{x=1}=\log 2$$
$$(\text{ただし，}[f'(x)]_{x=a}=f'(a))$$



これを②の右辺に用いると

$$\frac{1}{m(x)}=\frac{x-1}{2^{x-1}-1}>\frac{1}{\log 2}$$

ゆえに，$x<1$ で②をつねに成立させる p のとりうる値の範囲は

$$p\leqq\frac{1}{\log 2}$$

以上のことから(i), (ii), (iii)を同時に成立させる p の範囲は

$$\frac{1}{\log 3} \leqq p \leqq \frac{1}{\log 2} \quad (\log 2 < \log 3)$$

らしんばん

本問を

$$G(x)=f(x)+pg(x)=\begin{cases}(-x+1)+p(2^{x-1}-1) & (x \leqq 1)\\ \left(\dfrac{1}{x}-1\right)+p(x-1)\log 3 & (x \geqq 1)\end{cases}$$

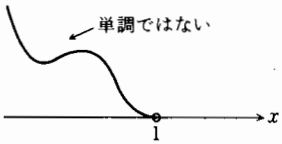
として $G'(x)$ を求め，$G(x)$ の増減を調べる方法でやれなくもない（やらなければならないときもある）がキチンとやるには相当メンドウである．

ここでふと「$G(1)=0$ に気がついてしまう」と

(i) $\begin{cases}G'(x)<0 \ (\text{すべての } x<1)\\ (x<1 \text{ で単調減少})\end{cases}$　(ii) $\begin{cases}G'(x)>0 \ (\text{すべての } x>1)\\ (x>1 \text{ で単調増加})\end{cases}$

である条件を求めればよい，という錯覚にとらわれる（なぜか同じ答えになる）がこれはダメ!!　それは「$G(1)=0$, (i), (ii)」が成立すれば「すべての x に対して $G(x) \geqq 0$」はいえるが「その逆」はいえないからである．

(i)についていえば右図のような場合をケントウしていないからである．



本問のような場合は「すべての実数 x について……が成立する p の範囲」とあるので，**パラメーター p に着目して，この p を他から切り離す方向で考える**のが妥当であろう．方程式の場合もそうであったが事実その方が簡単に扱える場合が多い．

ただ，このとき1つ注意しなければならないことがある．本問の例でいえば，与えられた不等式を

$$pg(x) \geqq f(x)$$

と変形し，両辺を $g(x)$ で割ることになるのだが，その際**「$g(x)<0$」のときは不等号の向きが逆向きになる**——本文の(i), (ii), (iii)はそのことのための「場合分け」である．

$m(x)=\dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}$ が，図の「AP の傾き」を表していることに着目して，$y=2^{x-1}$ が下に凸であることから，$x<1$ における $m(x)$ の範囲を求めたことは，かなり有効であった——点 P が点 A から左に離れるほど（図でいうと P_1 の方が P_2 より）AP の傾きは小さくなり，ついには0に近づいてしまうことがわかる．

なお，$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{2^{x-1}-1}{x-1}$ は $y=2^{x-1}$ の $x=1$ における「微分係数」である．

また，これに「平均値の定理」を用いれば

$$\frac{2^{x-1}-1}{x-1}=2^{c-1}\log 2 \quad (x<c<1)$$

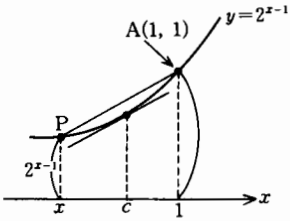
$$\left(\because \quad (2^{x-1})'=2^{x-1}\log 2\right)$$

で，この右辺についていえば

$$2^{c-1}\log 2<\log 2,$$

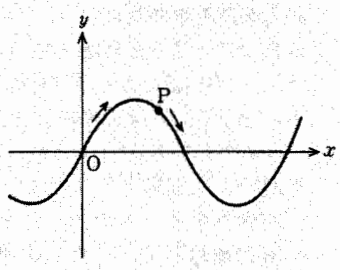
$$\lim_{x\to 1-0} 2^{x-1}\log 2=\log 2$$

だから，$\dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}$ の上限が $\log 2$ であることは簡単に説明される．



発展問題 11—速度ベクトル，加速度ベクトル

x-y 平面上の曲線 $y=\sin x$ に沿って，図のように左から右へ進む動点Pがある．Pの速さが一定値 V $(V>0)$ であるとき，Pの加速度ベクトル $\vec{a}$ の大きさの最大値を求めよ．ただし，Pの速さとはPの速度ベクトル $\vec{v}=(v_1, v_2)$ の大きさであり，また t を時間として $\vec{a}=\left(\dfrac{dv_1}{dt}, \dfrac{dv_2}{dt}\right)$ である．(やや難)



解　説　P(x, y) とすると，$y=\sin x$ で，$\vec{v}=(v_1, v_2)$ である．

ここに $v_1=\dfrac{dx}{dt}$，$v_2=\dfrac{dy}{dt}$ であるが，

$$v_2=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(\sin x)=\cos x\cdot\frac{dx}{dt}=v_1\cos x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で，$v_1{}^2+v_2{}^2=V^2$ をみたすから上に求めた v_2 をこれにいれると

$$v_1{}^2+(v_1\cos x)^2=V^2 \qquad \therefore \quad (1+\cos^2 x)v_1{}^2=V^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

次に $\vec{a}=\left(\dfrac{dv_1}{dt}, \dfrac{dv_2}{dt}\right)$ を求める．(ただし $\dfrac{dv_1}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ である．)

②の両辺を t で微分すると

$$2\cos x(-\sin x)\frac{dx}{dt}\cdot v_1{}^2+(1+\cos^2 x)\cdot 2v_1\frac{dv_1}{dt}=0$$

$$\therefore \quad (1+\cos^2 x)2v_1\frac{dv_1}{dt}=2\sin x\cos x\cdot v_1{}^3 \quad \left(\because \quad \frac{dx}{dt}=v_1\right)$$

ここで，$v_1=0$ とすると，$v_2=v_1\cos x=0$ したがって $V=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}=0$

となってしまう．

$$\therefore\quad v_1 \neq 0$$

$$\therefore\quad \frac{dv_1}{dt}=\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}{v_1}^2=\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}V^2$$

(②から ${v_1}^2=\dfrac{V^2}{1+\cos^2 x}$ を求めて代入)

また，第 2 成分 $\dfrac{dv_2}{dt}$ については①をさらに t で微分して

$$\frac{dv_2}{dt}=\frac{d}{dt}(v_1\cos x)$$

$$=\frac{dv_1}{dt}\cos x+v_1(-\sin x)\frac{dx}{dt}\quad \left(\begin{array}{l}\text{「積の微分法」と}\\ \text{「合成関数の微分法」}\end{array}\right)$$

$$=\cos x\frac{dv_1}{dt}-{v_1}^2\sin x$$

$$=\cos x\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}V^2-\frac{V^2}{1+\cos^2 x}\sin x=-\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}V^2$$

以上のことから

$$|\vec{a}|^2=\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2$$

$$=\left\{\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}V^2\right\}^2+\left\{\frac{-\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}V^2\right\}^2=\frac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}V^4$$

ここで $1+\cos^2 x=u$ とおくと，$\dfrac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}$ は

$$f(u)=\frac{2-u}{u^3},\quad f'(u)=\frac{2(u-3)}{u^4}<0\quad (1\leqq u\leqq 2)$$

ゆえに $f(u)$ は減少関数で，$u=1$ のとき最大となる．このとき，$\cos x=0$, $\sin x=\pm 1$ で，$|\vec{a}|$ の最大値は V^2 である．

らしんばん

➡ ベクトルで極限をとるということはその変数に注意してそのまま**各成分の極限をとる**ということである．**微分する場合も同様**である．

➡ 速度ベクトル，加速度ベクトルについて説明しておく．

平面上の曲線 C がパラメーターを用いて

$$C:\ \begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$$

で与えられているものとする．この曲線上の点 P の位置ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,y)$$

は t によって定まるから t の関数である．これを $\vec{p}(t)$ で表すことにすると，

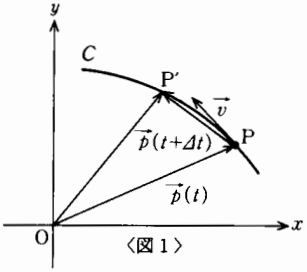
時刻 t, $t+\Delta t$ に対する C 上の2点の位置ベクトルはそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}(t),\ \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\vec{p}(t+\Delta t)$$

で表される．このとき

$$\Delta\vec{p}=\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)\quad(=\overrightarrow{\mathrm{PP'}})$$

は $[t, t+\Delta t]$ ($\Delta t<0$ のときは $[t+\Delta t, t]$) における動点Pの変位を表すベクトルで，$\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ はこの間の「平均変位」を表している．



〈図1〉

そこで $\Delta t\to 0$ としたときの極限を

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{d\vec{p}}{dt}\quad\cdots\cdots(*)$$

で表すことにすると，これは時刻 t における「瞬間の」変位を単位時間あたりのベクトルとして表したもので，この $\vec{v}$ を時刻 t における動点Pの「**速度ベクトル**」という．

(*)で，$x=f(t)$, $y=g(t)$ としてこれを成分計算すれば，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right)$$
$$=(f'(t), g'(t))$$

となり，速度ベクトル $\vec{v}$ とその大きさ $|\vec{v}|$ は

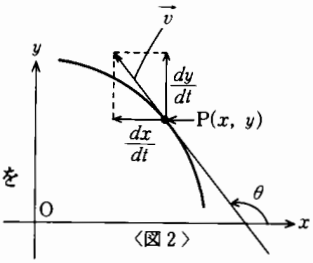
$$\vec{v}=\frac{d\vec{p}}{dt}=(v_x, v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

で表される．

また，〈図2〉で $\vec{v}$ と x 軸の正方向とのなす角を θ とすると

$$\tan\theta=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}\ \left(\frac{dx}{dt}\neq 0\right)$$



〈図2〉

で，$\vec{v}$ は曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ における接線の方向を表している．——事実，〈図1〉で $\Delta t\to 0$ とすると点P′は曲線 C に沿って点Pに限りなく近づき，$\Delta\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ の方向は点Pにおける C の接線の方向に近づくことがわかる．

同様にして，$[t, t+\Delta t]$ ($\Delta t<0$ のときは $[t+\Delta t, t]$) における速度ベクトルの平均変化率は

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

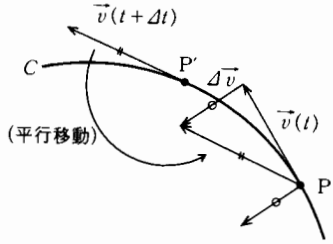
で，時刻 t における $v(t)$ の瞬間的変化すなわち「**加速度ベクトル**」は，単位時間あたりのベクトル

$$\vec{\alpha}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(\alpha_x, \alpha_y)$$

$$=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t),\ g''(t))$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(\alpha_x)^2+(\alpha_y)^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

で与えられる．



本問の「$|\vec{\alpha}|$ が最大」は何を意味するか．

$\vec{\alpha}$ は $\vec{v}$ の時刻 t における「変化率」を表している．ところが $|\vec{v}|=V$（一定）であるから $\vec{v}$ は方向しか変化しない(大きさは変化しない)．したがって $\vec{v}$ の方向，すなわち曲線 $y=\sin x$ 上の点Pで引いた接線の方向が最も変化するところで $|\vec{\alpha}|$ は最大値をとるはずである．このように考えると曲線の「まがりぐあい」の最もはげしいところ――図でいうと山と谷――で $|\vec{\alpha}|$ が最大値をとるのはごくあたりまえのことである．

ちなみに本問のような「等速運動」では，接線方向の加速度は0であるから「加速度ベクトル」の向きは法線方向で曲線の内側向きである．

発展問題12―曲率円（接触円）と曲率

放物線 $y=x^2$ と点A(2, 4) を共有する円

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

を考える．この2つの曲線の $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2}$ が等しく，$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=2}$ も等しくなるような a，b と r を求めよ．

ただし，$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2}$，$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=2}$ は，それぞれ y の x に関する1次，2次の導関数の，$x=2$ に対する値を表すものとする．

解　説　円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ……①

は点 A(2, 4) を通るから

$$(2-a)^2+(4-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ②$$

また①の両辺を x で微分すると

$$2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad (x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\therefore\quad (2-a)+(4-b)\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

さらに③の両辺を x で微分すると

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\therefore\quad 1+\left(\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2}\right)^2+(4-b)\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=2}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

一方，$y=x^2$ については

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad \therefore\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2}=4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2 \qquad \therefore\quad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=2}=2$$

であるから，これらを④，⑤に代入すると

$$\begin{cases}(2-a)+(4-b)\cdot 4=0\\ 1+4^2+(4-b)\cdot 2=0\end{cases}$$

これらを解いて a，b を求めると

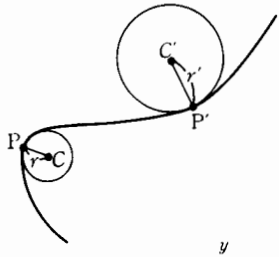
$$\boldsymbol{a=-32,\quad b=\frac{25}{2}}$$

であるから，これらを②に代入して r を求めると

$$r=\sqrt{(2+32)^2+\left(4-\frac{25}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{34^2+\left(-\frac{17}{2}\right)^2}=\sqrt{17^2\cdot\left(4+\frac{1}{4}\right)}=\boldsymbol{\frac{17\sqrt{17}}{2}}$$

らしんばん

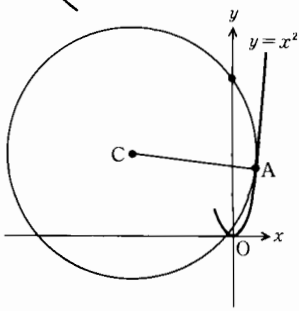


➡ $y=f(x)$ のグラフを直線，あるいは放物線で近似することについてはすでに述べたが，ここでは「曲線のまがりぐあい」に注目して，**この曲線のカーブの微小部分を円で近似することを考える**——急カーブは半径の小さい円で近似されるであろうことは直観的にわかる．

本問についていえば，$y=x^2$ 上の点 A(2, 4) 付近の状況を，円

$$(x+32)^2+\left(y-\frac{25}{2}\right)^2=\left(\frac{17\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

で近似しているわけである——右図



一般に曲線 $y=f(x)$ が，この曲線上の点 P(x, y) の近くで円

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

に近似されるためには(＊)から求められる Y，Y'，Y'' が $f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$ にそれ

ぞれ等しくなければならない．そこで，本問でやった手順にしたがってハナシを一般化しておく．(＊)の両辺を X で微分すると

$$2(X-\alpha)+2(Y-\beta)Y'=0$$

$$\therefore\quad (X-\alpha)+(Y-\beta)Y'=0$$

さらに X で微分すると

$$\therefore\quad 1+(Y')^2+(Y-\beta)Y''=0$$

ここで Y，Y'，Y'' にそれぞれ $y=f(x)$，y'，y'' を代入して α，β，r を求めると

$$\alpha=x-\frac{\{1+(y')^2\}y'}{y''},\quad \beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{\{1+(y')^2\}y'}{y''}\right)^2+\left(-\frac{1+(y')^2}{y''}\right)^2}=\frac{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

になる．

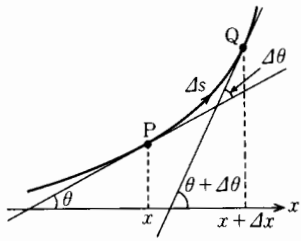
この円(＊)を点Pにおける「**曲率円（あるいは接触円）**」，$C(\alpha,\beta)$ を「**曲率中心**」，r を「**曲率半径**」という．

「曲線のまがりぐあい」の数量的表現――「曲率」について．

曲線 $y=f(x)$ 上に2点

$$P(x,y),\ Q(x+\Delta x,y+\Delta y)$$

をとり，この2点における接線と x 軸の正方向とのなす角をそれぞれ θ，$\theta+\Delta\theta$ とする――曲線上の点がPからQまで動いたとすれば，その間に**接線は $\Delta\theta$ だけ回転**したことになる．このとき，曲線上の弧 $\widehat{PQ}$ の長さを Δs とすると，$\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$ は2点P，Q間におけるこの「曲線の屈曲の平均」を「弧の長さの変化1に対する θ の変化量」として表している．このとき，点Pを点Qに限りなく近づけて



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=k$$

とおくと，**$|k|$ の値が大きいほど曲線の「まがりぐあい」が大きい．** k をこの曲線の点Pにおける「**曲率**」という――$y=f(x)$ について実際に計算してみよう．それには次の式変形を利用する．

$$\frac{\tan(\theta+\Delta\theta)-\tan\theta}{\Delta x}=\frac{\tan(\theta+\Delta\theta)-\tan\theta}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta x}\quad\cdots\cdots\cdots(**)$$

ここで，線分 $\overline{PQ}$ の長さを Δl とおくと

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta s}{\Delta l}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta s}{\Delta l}\cdot\frac{1}{\Delta x}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta s}{\Delta l}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

と表せる．そこで $\tan\theta=f'(x)$ $(\tan(\theta+\Delta\theta)=f'(x+\Delta x))$ に注意して，$\Delta x\to 0$ とすると

$$\frac{\tan(\theta+\Delta\theta)-\tan\theta}{\Delta x}=\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}\longrightarrow y''$$

また $\Delta\theta\to 0$，$\Delta s\to 0$，$\Delta l\to 0$ となり

$$\frac{\tan(\theta+\Delta\theta)-\tan\theta}{\Delta\theta}\longrightarrow(\tan\theta)'=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(y')^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta l}\longrightarrow 1,\quad \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\longrightarrow\sqrt{1+(y')^2}$$

であるから，(**) は

$$y''=\{1+(y')^2\}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\cdot 1\cdot\sqrt{1+(y')^2}$$

$$\therefore\quad k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

となる．すなわち，「曲率」の絶対値は先に述べた「曲率半径」の逆数になっており，「曲線のまがりぐあい」が急である（またはゆるやかである）ときは「曲率半径」が小さく（または大きく），「曲率」の絶対値は大きい（または小さい）すなわち曲線の微小部分の円による近似は，急カーブのときは半径の小さい円で，ゆるやかなカーブのときは半径の大きな円で近似されることがわかる．また曲率 k と y'' とが同符号であることに注意すれば k の符号が x 軸の正方向に対するまがりぐあいを表していることもわかる．

ちなみに前問についていえば，$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$ であるから k の値は

$$k=\frac{-\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\qquad\therefore\quad\frac{dk}{dx}=-\frac{2\cos x(1+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^{\frac{5}{2}}}$$

になり，$|k|$ は $\cos x=0$，$\sin x=\pm 1$（山と谷）のときに最大となる．

このとき「曲線のまがりぐあい」が最も急であることは前問の「らしんばん」でも視覚的にとらえた通りである．さらにこのとき $|k|=1$ であるからこのサインカーブの山と谷のまがりぐあいは半径 1 の円で近似されることもわかる．

発展問題 13—方程式の解の近似値

3 倍角の公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

によれば，$\alpha=\sin 10^\circ$ は方程式 $0.5=3x-4x^3$ の解である．

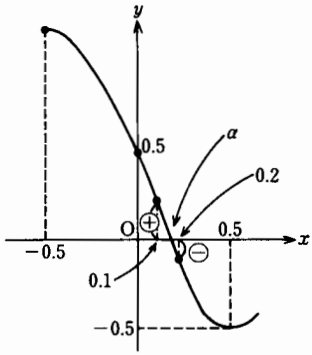
(1) $0.1<\alpha<0.2$ を示せ．

(2) $P(0.1, f(0.1))$（ただし，$f(x)=0.5-3x+4x^3$）における $y=f(x)$ の接線が x 軸と交わる点の x 座標を β とすると，β は α の 1 次の近似値である．β を小数第 2 位まで求めよ．

解　説　(1)　$f(x)=0.5-3x+4x^3$

とおき，$f(x)=0$ の解について調べる．

$$f'(x)=-3+12x^2=12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$=12(x+0.5)(x-0.5)$$



このとき，$0.1<x<0.2$ の x の値に対して $f'(x)<0$ であるから，$0.1\leqq x\leqq 0.2$ で $f(x)$ は単調減少である．

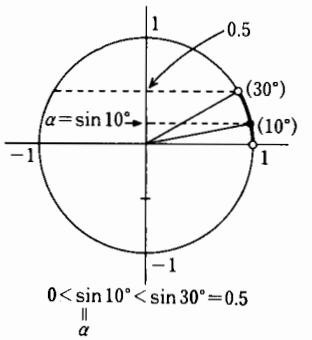
そして

$$f(0.1)=0.5-3\cdot(0.1)+4\cdot(0.1)^3=0.204>0$$
$$f(0.2)=0.5-3\cdot(0.2)+4\cdot(0.2)^3=-0.068<0$$

であるから「中間値の定理」より方程式 $f(x)=0$ は 0.1 と 0.2 の間に「ただ 1 つの実数解」をもつことがわかる．

しかしこの解が $\alpha=\sin 10^\circ$ である保証はない．($\alpha=\sin 10^\circ$ はこの範囲の外の解かもしれない．) そこで

$$\mathbf{0<\sin 10^\circ<\sin 30^\circ=0.5}$$



に注目すると $0\leqq x\leqq 0.5$ の範囲でも $f'(x)<0$ で，$f(x)$ はこの範囲で単調減少である．

$f(0.5)$，$f(0)$の符号を調べると

$$f(0.5)=0.5-3\cdot 0.5+4\cdot(0.5)^3=-0.5<0$$
$$f(0)=0.5>0$$

であるから上の説明と同様に $f(x)=0$ は $0<x<0.5$ に「ただ 1 つの実数解」をもつことがわかる．このことから上の $0.1<x<0.2$ に存在する解は $0<x<0.5$ に存在する解と一致し，それは $\alpha=\sin 10^\circ$ に他ならない．

(2)　$f'(0.1)=-3+12(0.1)^2$

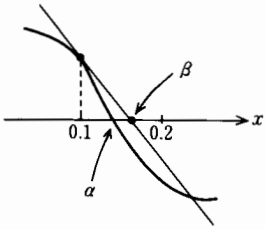
$$=-2.88$$

これより，点 $\mathrm{P}(0.1, f(0.1))$ における接線の方程式は

$$y-0.204=-2.88(x-0.1)$$

この式で $y=0$ とすれば

$$x=0.1+\frac{-0.204}{-2.88}$$
$$=0.1708\cdots\cdots$$



ゆえに求める β の値は

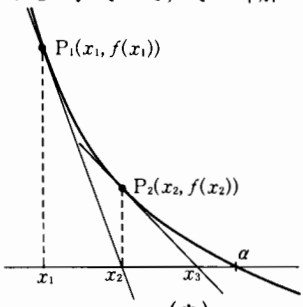
$$\boldsymbol{\beta=0.17}$$

である．

らしんばん

(2)について――これは「方程式の解の近似値を求める」方法である．

方程式，$f(x)=0$ が実数解をもつことや，ある区間内に1つの解が存在することがわかっても，その値を正確に求めることはむずかしい．そこで，その「解の近似値を求める方法はないか」ということになる．



$f(x)$ を微分可能な関数，方程式 $f(x)=0$ の1つの解を α，その1つの近似値を x_1 とする．

右図の点 $P_1(x_1, f(x_1))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$$

で，$f'(x_1)\neq 0$ ならば x 軸の交点は

$$x=\boldsymbol{x_1}-\frac{\boldsymbol{f(x_1)}}{\boldsymbol{f'(x_1)}}\ (=\boldsymbol{x_2}\ \text{とおく})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

本問の $\beta=0.17$ という近似値は，このようにして $x_1=0.1$ から求めた値である．

「x_2 が α の近似値であること」を「1次の近似式」を利用してたしかめておこう――$f(x)$ は近似的に

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)\ (x\ \text{は}\ a\ \text{に十分近い値})$$

であった．ここで α と x_1 は十分近いので $x=\alpha$，$a=x_1$ とおくと $f(\alpha)=0$，$f'(x_1)\neq 0$ で

$$0\fallingdotseq f(x_1)+f'(x_1)(\alpha-x_1)\qquad\therefore\quad \alpha\fallingdotseq x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

であることがわかる．

なお，3角関数表でみると $\sin 10^\circ=0.173648\cdots\cdots$ で，0.1 よりも 0.17 の方がよりよい近似であることがわかる．

ちなみに，$Q(0.2, f(0.2))$ で接線を引き，同様にして近似値を求めてみると，なぜかこの方がよい近似値 $0.1730\cdots\cdots$ をあたえることがわかる．

またハナシは少しちがうが，p. 116 で $x\fallingdotseq 0$ の時 $\sin x\fallingdotseq x$（角の単位はラジアン!!）であることを学んだ．実は，有効数字2桁としてこれが成り立つ $|x|$ の範囲は60分法の 15° ぐらいまでである．そこで $\sin 10^\circ$ にこの公式をあてはめると，

$$\sin 10^\circ\fallingdotseq\frac{\pi}{18}\fallingdotseq\frac{3.1416}{18}=0.1745\cdots\cdots$$

で，これもなかなかよい近似値である．

➡ もう少しくわしく説明しておこう．(＊)でもし x_2 の方が x_1 よりも解 α の「よりよい近似値」であることがわかれば，上の方法をくり返し用いることにより，解 α により近い近似値を求めていくことができる．

そこで，上で求めた x_2 が x_1 と α との間にあるための条件を求めてみる．少なくともこの時には，x_2 は x_1 よりも α に近い値になるはずである．

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2 \quad (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ との間})$$

であったから，この式で $x=\alpha$，$a=x_1$ とすると $f(\alpha)=0$ であるから，

$$0=f(x_1)+f'(x_1)(\alpha-x_1)+\frac{1}{2}f''(c)(\alpha-x_1)^2 \quad (c \text{ は } x_1 \text{ と } \alpha \text{ との間})$$

両辺を $f'(x_1)$ $(\neq 0)$ で割り，(＊)を利用すると

$$x_2-\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c)}{f'(x_1)}(\alpha-x_1)^2 \quad \left((*)\text{から } \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-x_1=-x_2\right)$$

また，(＊)は

$$x_2-x_1=-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

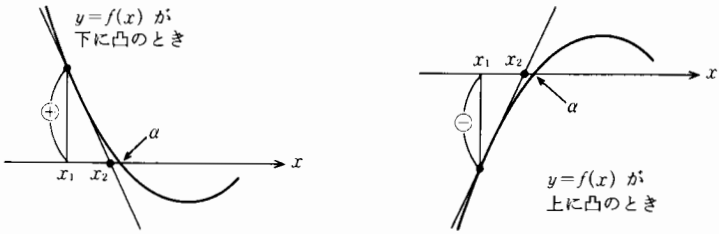
であるから，この2式の辺々をかけて

$$(x_2-\alpha)(x_2-x_1)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x_1)f''(c)}{\{f'(x_1)\}^2}(\alpha-x_1)^2$$

となり，「x_2 が x_1 と α との間」にあるための条件は，この右辺が負，すなわち

$$f(x_1)\cdot f''(c)>0 \quad (\boldsymbol{f(x_1)} \text{ と } \boldsymbol{f''(c)} \text{ が同符号}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

にまとめられる．c は x_1 と α との間のよくわからない値だから，この結果は特に「x_1 と α との間の $f''(x)$ の符号が一定で，$f(x_1)$ の符号と同じとき」に用いられる．



本問についていえば，$f(0.1)>0$，$f''(x)=24x>0$ $(0.1<x<\sin 10°)$
——$f(0.1)$ と $f''(x)$ が同符号で，$\beta=0.17$ は α のよりよい近似値になっており，さらに $f(0.17)=0.009652>0$ であるから，上にのべた方法を2回やれば解 α の「よりよい近似値」0.173637……を求めることができる．

以上のことから，一般に(＊＊)の条件がみたされているならば「解の近似値」は漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で与えられ，$x_n<x_{n+1}<\alpha$ または $\alpha<x_{n+1}<x_n$——数列 $\{x_n\}$ は「単調」かつ「有界」——で，$n\to\infty$ のとき $x_n\to\alpha$（x_1 と α との間に他の解が存在しないように x_1 をきめてあるものとする）となることがわかる．このようにして「方程式の解の近似値」を次々に求めていく方法を「ニュートン法」という．