第3章

積分法とその応用

「連続的に変化する量の総和」は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

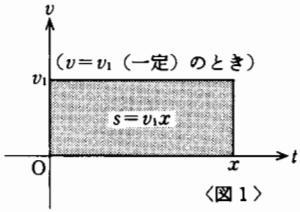
であたえられる．そのような量が
「微分法の逆演算」で求められる
そこがスゴイのだ!!

「微分法の逆演算」から「連続して変化する量の総和 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ 」へ

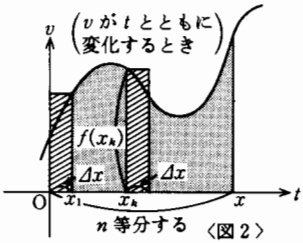
この章の最大のテーマは「面積」や「「体積」も含めて「**連続して変化する量の総和**」を求めるにはどうすればよいか，ということにある．たとえば「速度」が一定のとき

「**進んだ距離**」＝「**速度**」×「**かかった時間**」

で与えられることは誰もが認めるところであるが，この「**速度**」が時刻とともに変化するような場合はどうすればよいか――それには「**かかった時間**」を細分化し，それぞれの時間に進んだ距離を求めておいてそれらの総和で近似することから考える（〈図1〉，〈図2〉とも「アミをかけた部分の面積」が「進んだ距離」を表している）．



〈図1〉



〈図2〉

具体的に説明すると，かかった時間 x を n 等分した小区間を Δx とすると「進んだ距離」s は

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

となるのだが，ここで最も注目したいことは，**このような量が「微分法の逆演算（定積分の計算）」で求められる**，ということ!!

このことは「微積分学の基本定理」(p. 185) のところで詳しく説明する．そして，その応用として「積分についての具体的な問題」を解決する方法を考える．――次の手順で解説する．

(i) まず「**微分法の逆演算**」としての積分計算――主に「**置換積分法**」と「**部分積分法**」について「基本原理からその扱い方まで」をキチンと説明する．

(ii) 「**微積分学の基本定理**」について――$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$

(iii) (i)，(ii)で「**積分の概念**」を十分に理解した上で「**面積**」，「**体積**」，「**曲線の長さ**」，そして「**物理への応用**」から「**微分方程式**」へハナシを進める．

――これらを学ぶことを通して「微積分」というこの科目の全体像をしっかりととらえることが，この章の目的である．

第1節
積分の計算

まず，「微分法の逆演算」として「不定積分」を定義し，「微分法の公式の逆読み」から，いろいろな「不定積分の公式」を導く．
——ここで新しくあらわれる「置換積分法」，「部分積分法」については，その基本原理から解説する．

以上のことをふまえて，「定積分」を定義し，その「計算技術」——定積分の「置換積分法」，「部分積分法」なども含めて——を解説した上で，あらためてこの「定積分」を「$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$」との関係として考えてみることにする．

1　不定積分

ある区間で定義された関数 $f(x)$ に対して，関数 $F(x)$ が $F'(x)=f(x)$ である時，$F(x)$ を $f(x)$ の「原始関数」または「不定積分」という．

$f(x)$ の不定積分が存在するときこれを一般に

$$\int f(x)\,dx \quad (\text{記号「}\textstyle\int\text{」を「インテグラル」と読む})$$

で表す．いま $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$ であるとすると

$$(G(x)-F(x))'=f(x)-f(x)=0$$

$$\therefore\quad G(x)-F(x)=C \qquad \therefore\quad G(x)=F(x)+C \quad (C\text{ は定数})$$

$$(\text{逆に } G(x)=F(x)+C \text{ ならば } G'(x)=F'(x)=f(x))$$

である．このことから $f(x)$ の原始関数の1つ $F(x)$ を求めれば $f(x)$ の不定積分は「$F(x)+$（定数）」という形のもの全体として，「そのすべて」が求められることになる．すなわち

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \quad (C\text{ は任意の定数})$$

C を積分定数といい，$f(x)$ の不定積分を求めることを「$f(x)$ を積分する」という．

(1) 不定積分の基本公式

基本公式(1)

(1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k \neq 0)$

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

解　説　不定積分の定義より $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ だから(1)，(2)とも，右辺を微分すると左辺のインテグラルの中の関数――「被積分関数」という――がえられることは，ほとんど明らかである．

らしんばん

一般に k，l を定数として(1)，(2)を組み合わせると

$$\int \{kf(x)+lg(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)\,dx$$

が成り立つ．

なお(1)で $k=0$ の時は

$$(\text{左辺}) = \int 0\,dx = C \ (\text{積分定数}),\ (\text{右辺}) = 0$$

である．

基本公式(2)

(1) $\int x^p\,dx = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ (p は実数で $p \neq -1$ とする．$p=-1$ のときは(7)を参照!!)

(2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$　　(3) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(4) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

(6) $\int e^x\,dx = e^x + C$　　(7) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

解　説　(1)～(7)はいずれも「微分の公式」の逆読みで，右辺を微分すれば左辺の「**被積分関数**」になることが簡単に確かめられる．

らしんばん

➡ 上の(1)～(7)の C は「**積分定数**」である．(以下，積分定数については特にことわらない．)

➡ ここで1つ注意しておくと，「微分法の公式」をキチンと覚えていないと，「積分しているつもりで微分してしまう」あるいは「その逆」，ということがおこりやすい――慣れるまでは特に気をつけなければならない．

➡ (4)，(5)の $\operatorname{cosec} x$，$\sec x$，$\cot x$ は

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \cot x=\frac{1}{\tan x}$$

のことである．

例題 1

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int\sin 3x\cos x\,dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx\quad(a\neq 0)$

解　説　(1)　分子を項別に分けて割り算をしておくと簡単にいく．

$$\int\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\boldsymbol{\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C}$$

(2) $\displaystyle\int(\sec^2 x-1)\,dx=\boldsymbol{\tan x-x+C}\quad(1+\tan^2 x=\sec^2 x)$

(3) $\displaystyle\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C}$　(「半角の公式」)

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{2}\{\sin 4x+\sin 2x\}\,dx=\boldsymbol{-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C}$

(5) $\displaystyle\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$

$$\therefore\quad\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\{\log|x-a|-\log|x+a|\}+C=\boldsymbol{\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C}$$

らしんばん

➡ 本問は，「見た目で微分の公式の逆読み（積分）ができるもの」，あるいは「多少の式変形によってそれのできるもの」の例である．

特に，本問(3)～(5)のような「1次関数」の関数 $f(ax+b)$ については，

$F'(x)=f(x)$ ならば，「合成関数の微分法」により

$$(F(ax+b))'=a\cdot f(ax+b)$$

であるから $f(ax+b)$ の積分は

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\ \text{（ただし，}a\neq 0\text{）}$$

で，あることを利用する．しかし，この1次関数 $ax+b$ の部分が一般の関数で与えられる場合にはどうすればよいか――それについては次の「置換積分」のところでくわしく説明する．

➡ (3)は次数を下げるために「半角の公式」を利用した．

「3倍角の公式」を利用すれば，$\sin^3 x$，$\cos^3 x$ なども簡単に積分できる．

$$\int \sin^3 x\,dx=\int\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\,dx$$

$$\int \cos^3 x\,dx=\int\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\,dx$$

➡ (4)では3角関数の「積→和の公式」

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

を利用して，簡単に積分できる形に変形した――3角関数の積の形で与えられる関数の積分は「和（あるいは差）の形」になおして積分するのが1つの定石!!

➡ 「分数関数を積分できる形に変形する（部分分数に分解するという）方法」について説明しておく．次の(i)，(ii)の手順でやるとよい．

(i) 仮分数式――(分子の次数)≧(分母の次数)のとき

このときは，まず「割り算」を実行して

整式＋真分数式((分子の次数)＜(分母の次数))

の形に変形する――その上で次の(ii)へ進む．

(ii) 分母が因数分解されるとき

本問(5)のように分母が「互いに素」である2つ以上の因子に因数分解されるときは，それぞれの因子を分母とする「真分数式の和」に分解して積分する．

たとえば $\dfrac{3x-7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ などは

$$\frac{3x-7}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x-2)(x-3)}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の形に分解される――分母を払って「係数比較法（あるいは数値代入法）」を用いれば A，B，C の値が求まる．($A=-2$，$B=2$，$C=-5$)

(＊) の右辺の第2項についてはさらに

$$\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{D}{x-2}+\frac{E}{x-3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

の形に分解される．(上と同様にして D，E を求めると $D=E=1$)

しかしこの場合「積分を目的とした変形」ならば（＊）のままで止めておく方が実は都合がよい．そのわけは（＊＊）の左辺に注目すると

$$(\text{分母})=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$$

$$\therefore\ (\text{分母})'=2x-5=(\text{分子})$$

となっているため，（＊＊）の変形をする前に

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C \quad (\text{p. 161 参照})$$

のタイプの積分公式が利用できるからである．

(気づかずに（＊＊）まで分解してしまっても本問(5)にならって積分すればよい．)

部分分数に分解する例をもう1つあげておくと $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)^2}$ などは

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A'}{x-1}+\frac{B'}{x-2}+\frac{C'}{(x-2)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

の形に変形される．($A'=1$，$B'=-1$，$C'=1$)

「互いに素」という方針に従えば（＊＊＊）の左辺は

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A'}{x-1}+\frac{D'x+E'}{(x-2)^2}$$

として $A'=1$，$D'=-1$，$E'=3$ が求まるが，この場合右辺の第2項は

$$\frac{-x+3}{(x-2)^2}=\frac{-(x-2)+1}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

まで変形できる．このように「分母が累乗の因子を含んでいる時の分解」には少しだけ注意が必要である．

(2)　置換積分法

これは「合成関数の微分法」に対応するものである．

いま，

$$F(x)=\int f(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で，x が微分可能な t の関数 $g(t)$ である場合を考える．このとき $F(x)=F(g(t))$ で，これは t の関数である．そこで，「合成関数の微分法」にしたがって①の両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}F(x)=\left(\frac{d}{dx}F(x)\right)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

そこで，この両辺を t で積分してみると

$$F(x)=\int f(g(t))g'(t)\,dt \quad \cdots\cdots ②$$

になる．すなわち関数 $F(x)$ は積分を用いて①の形でも②の形でも表されることがわかる．このことから次の公式がえられる．

置換積分法

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt \ \ (\text{ただし}\ x=g(t)) \quad \cdots\cdots ③$$

解　説　この右辺の $g'(t)$ は $\dfrac{dx}{dt}$ のことである．したがってこの公式は次のように表すこともできる．

$$\int f(x)\,dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt$$

まず，この右辺に注目!!　$\dfrac{dx}{dt}$ は x を t で微分したときの導関数を表し，それなりに意味をもつ記号である．しかしこれを「**形式的に**」「**分母＝dt**」，「**分子＝dx**」**の分数とみて**，そのあとに続く dt と「**形式的に**」**約分する**と，そのまま左辺になる．

要するにこの公式の主張するところは左辺の dx をただ「形式的に」

$$dx=g'(t)\,dt \quad \left(\frac{dx}{dt}=g'(t)\ \text{の分母を「形式的に」払う．}\right)$$

とおきかえさえすれば，「x についての積分」が簡単に「t についての積分」におきかわり，その結果が t の式で求められる，ということである．

このような「形式的な分数計算」（？）については，すでに「**合成関数の微分法**」**(p. 73)** のところで説明した．

らしんばん

この公式には実は「2 通りの使い方」がある．

(i)　③を「**(左辺の形) ⟶ (右辺の形)**」**に見る**．これは 解説 で説明した通りの使い方である．

たとえば $\displaystyle\int\frac{x^4}{(x-1)^3}\,dx$ を計算するのに，先に述べた「部分分数に分解する」手順 (p. 158) にしたがってマジメ（？）にやるのは気が重い．

そこで「置換積分法」を利用する．

$x-1=t$ とおくと $x=t+1$ であるから，この両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=1 \qquad \therefore\ dx=dt$$

$$\therefore \int \frac{x^4}{(x-1)^3}\,dx = \int \frac{(t+1)^4}{t^3}\,dt = \int \frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^3}\,dt$$
$$= \int \left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right) dt$$
$$= \frac{t^2}{2}+4t+6\log|t|-\frac{4}{t}-\frac{1}{2t^2}+C$$
$$= \frac{(x-1)^2}{2}+4(x-1)+6\log|x-1|-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$$

（$t=x-1$ を代入して x の式で整理しておくこと!!　マジメに「部分分数に分解する」方法でやった場合とこの場合とでは式の形が少しちがってくるのだが，これは積分定数のズレの分であるから気にすることはない．）

以下この使い方を「置換積分法」の≪第1の方法≫とよぶことにする．――公式③を「(左辺の形) ⟶ (右辺の形)」という方向で用いていることに注目!!

(ii)　③を「(右辺の形) ⟶ (左辺の形)」に見る．

いま，$\int h(x)\,dx$ を求めようとするとき，「被積分関数 $h(x)$」が $h(x)=f(g(x))g'(x)$ のように表されていれば，この関数の積分は

$$\int h(x)\,dx = \int f(g(x))\boldsymbol{g'(x)\,dx} = \int f(u)\,\boldsymbol{du}\ (u=g(x)) \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

たとえば $\int \{f(x)\}^k f'(x)dx$ などの積分は $f(x)=u$ と置くと $f'(x)dx=du$ であるから $k \neq -1$ として

$$\int \{f(x)\}^k f'(x)dx = \int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1}+C = \frac{\{f(x)\}^{k+1}}{k+1}+C$$

$k=-1$ のときは $f(x)=u$ と置くと同様にして

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \log|u|+C = \log|f(x)|+C$$

とやることができる――この例では，$f(x)=u$ と書いたが，慣れてくると「式の形をにらむ」だけでやれるようになる――以下これを「置換積分法」の《第2の方法》とよぶことにする．(公式③を「(右辺の形)→(左辺の形)」という方向で用いていることに注目!!)

《第1の方法》，《第2の方法》をあわせて実例で説明する．

例題 2

次の不定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

解　説　(1)　$e^x=t$ とおいて，両辺を t で微分すると

$$e^x\frac{dx}{dt}=1 \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{e^x}\,dt=\frac{1}{t}\,dt$$

$$\left(\begin{array}{l} x=\log t \text{ ゆえ両辺を } t \text{ で} \\ \text{微分して } \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t} \\ \therefore\ dx=\dfrac{1}{t}\,dt \text{ としてもよい} \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad \int\frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx=\int\frac{1}{t-t^{-1}}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\int\frac{1}{t^2-1}\,dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C}$$

これは先に述べた置換積分法の《第1の方法》の用例である．

(2)　まず $\boldsymbol{\cos^3 x}$（奇数乗）に注目する．このとき $\cos x$ を1つ切り離して

$$\cos^3 x=\cos^2 x\cdot\cos x$$

と変形するのがポイント!!　それは

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x,\ \cos x=(\sin x)'$$

であることから，与えられた積分式が

$$\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\underbrace{(\sin x)'\,dx}\ \cdots\cdots\cdots①$$

となるからである．すなわち，$\sin x=u$ とおいて，上式①は次のように積分される．

$$\int u^2(1-u^2)\,du=\int(u^2-u^4)\,du$$

$$=\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C=\boldsymbol{\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C}$$

これは先に述べた置換積分法の《第2の方法》の用例である．

らしんばん

➡ 本問(1)は《第2の方法》でやることもできる．与えられた積分式を

$$\int\frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx=\int\frac{e^x}{(e^x)^2-1}\,dx=\int\frac{1}{(e^x)^2-1}(e^x)'\,dx\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

と変形して $e^x=t$ とおくと

$$(*)=\int\frac{1}{t^2-1}\,dt$$

で，以下は上の説明と同じになる．

➡ 本問の(2)を《第1の方法》でやれないか．

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x$$

であるから，被積分関数を $(1-\cos^2 x)\cos^3 x$ と変形しておいて $\cos x=u$ とおけば，これは u の多項式で表せる．

ところがこのとき

$$-\sin x\frac{dx}{du}=1 \qquad \therefore \quad \frac{dx}{du}=-\frac{1}{\sin x}$$

で，これを u の式で表すのは困難である．

$$(\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=\pm\sqrt{1-u^2})$$

このように《第1の方法》と《第2の方法》のどちらでやれば簡単にいくかは，場合によって違ってくる．われわれとしてはどちらの考え方も用意しておかなければならない．

➡ (2)についていえば $\cos x$（あるいは $\sin x$）の「奇数乗」が含まれているところが「ありがたい」ところで――一般に《第2の方法》が利用できる――そうでないときは「2倍角の公式」，「3倍角の公式」，あるいは「積→和の公式」などを駆使して「積の形がなくなるまで変形する」などのくふうをしなければならなくなる――「置換積分法」の「威力」を評価したい．

このタイプの例をあげておくと

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx,\quad \int f(\cos x)\sin x\,dx,\quad \int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$\int f(\log x)\frac{1}{x}\,dx,\quad \int f(e^x)e^x\,dx,\quad \int f(x^n)x^{n-1}\,dx$$

などがある．いずれも $f(\ \ )$ の中の関数を u などと置けば《第2の方法》が利用できる．

例題 3

(1)　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくとき，次の関係式を示せ．

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

(2)　上の関係を用いて不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}\,dx$ を計算せよ．

解　説　(1)　$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$（倍角公式）　……①

$$=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$（倍角公式）　……②

$$=2\left(\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

次に $\tan\dfrac{x}{2}=t$ の両辺を t で微分する――「合成関数の微分法」

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=1 \qquad \therefore\ \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{dt}=2$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{1+t^2}$$

(2) (1)より $\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと

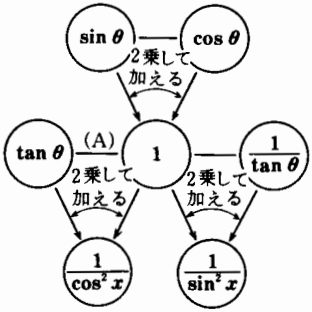
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

であるから

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{1}{t}\,dt=\log|t|+C=\mathbf{log}\left|\mathbf{tan}\,\frac{x}{2}\right|+C$$

らしんばん



本問(1)で用いた「3角関数の相互関係」を与える公式の運用は大変まぎらわしい．右の図を参考にして覚えるとよい．
——となりあう2つのものを2乗して加えると矢印方向のものがえられる．たとえば右図の(A)についていえば

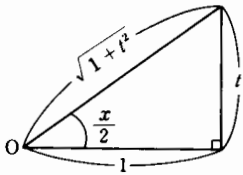
$$\tan^2\theta+1^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

である．

また本問(1)の①あるいは②以下については右図を参考にすると

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

(ただし右図は $0<x<\pi$ のときのハナシである)



で，これらを代入するとただちに結論がえられる——「tan」の値から「sin」「cos」の値を求めたいときによく使われる簡便な方法である．

本問(2)を「素手」でやるには，分母と分子に $\sin x$ をかけて

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1}{1-\cos^2 x}\sin x\,dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x-1}(-\sin x)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x-1}(\cos x)'dx$$

$$=\int\frac{1}{u^2-1}du \quad (\cos x=u \text{ とおいた.})$$

とすればよいが，場合によってはそうウマクはいかない．

本問のように，$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと，一般に「3角関数の積分」が「分数関数の積分」におきかえられる．このことは「3角関数の積分の最後の手段」として知っておくとよい．

$\left(\text{なおこのとき } \tan x=\frac{2t}{1-t^2} \text{ である}\right)$

(3)　部分積分法

これは「被積分関数」が「(2つの)関数の積の形であたえられる場合の積分法で，「積の微分法」に対応するものである．

「積の微分法」の公式によれば

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

であった．そこでこの両辺を再び x で積分すると左辺はもとの $f(x)g(x)$ にもどり

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)\,dx+\int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\therefore \quad \int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$$

である．このことから次の公式がえられる．

部分積分法

$$\int \boldsymbol{f'(x)g(x)\,dx}=\boldsymbol{f(x)g(x)}-\int \boldsymbol{f(x)g'(x)\,dx}$$

積分する　そのまま　そのまま　微分する

解　説　「積の微分法」の公式から直接に説明すればこのようになるが，この左辺のインテグラルの中に $f'(x)$ がはいっているので，このままの形では使いづらい．そこで $f'(x)$ を $h(x)$ とおきかえ，$h(x)$ の原始関数の1つを $H(x)$ とすると，上の公式は次のように読みかえられる．そして実際に使うときもそのように用いられる．すなわち

$$\int \boldsymbol{h(x)g(x)\,dx}=\boldsymbol{H(x)g(x)}-\int \boldsymbol{H(x)g'(x)\,dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

積分する　そのまま　そのまま　微分する

らしんばん

➡ 公式①の用い方のポイントは，左辺の被積分関数の，「積の形であたえられる2つの関数 $h(x)$ と $g(x)$」の特徴をよくにらんで

(i) **積分しやすいものを $h(x)$ にとる**

(ii) **微分しやすいものを $g(x)$ にとる**

(iii) **その結果①の右辺の第2項が積分しやすい形になる**

の3点に注意して式変形することである——これらについては「**コトバで理解する**」よりも「**実例で慣れる**」**ことの方が大切!!**

➡ 以上積分定数には何も触れずに説明してきた．しかし公式の右辺を微分するとたしかに左辺の被積分関数になることが簡単に確かめられる．したがって左辺の積分定数分のズレは右辺では第2項の積分定数分のズレとして調整されると考えればよい．

例題 4

次の不定積分を求めよ．

(1) $\int x\cos x\,dx$　(2) $\int(\log x)^2\,dx$　(3) $\int e^x\sin x\,dx$

解　説　(1) $(\sin x)'=\cos x$，$(x)'=1$

であるから　上の公式の証明にしたがって

$$f'(x)=\cos x=h(x)\text{ から }H(x)=\sin x,\ g(x)=x$$

と読んで「部分積分法」を利用する．

$$\int \underbrace{x}_{\text{そのまま}}\overbrace{\cos x}^{\text{積分する}}\,dx=\underbrace{x}_{\text{そのまま}}\overbrace{\sin x}^{\text{そのまま}}-\int \underbrace{1}_{\text{微分する}}\cdot\sin x\,dx$$

$$=x\sin x-(-\cos x)+C=\boldsymbol{x\sin x+\cos x+C}$$

(2) まず被積分関数を

$$(\log x)^2=1\cdot(\log x)^2=(x)'(\log x)^2$$

と読む．次に

$$\{(\log x)^2\}'=2\log x\cdot\frac{1}{x}$$

に注意して「部分積分法」を利用する．すなわち

$$\int \underbrace{1}_{\text{そのまま}}\cdot\overbrace{(\log x)^2}^{\text{積分する}}\,dx=\underbrace{x}_{\text{そのまま}}\overbrace{(\log x)^2}^{\text{そのまま}}-\int \underbrace{x}_{\text{微分する}}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=x(\log x)^2-2\int \log x\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

さらにこの右辺の第2項に部分積分法を用いると

$$\int \overset{\text{積分する}}{1}\cdot\underset{\text{そのまま}}{\log x}\,dx=\overset{\text{そのまま}}{x}\log x-\int \underset{\text{微分する}}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=x\log x-\int dx=x\log x-x+C_1$$

これを①にいれて

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2dx&=x(\log x)^2-2(x\log x-x+C_1)\\&=x(\log x)^2-2x\log x+2x-2C_1\\&=\boldsymbol{x(\log x)^2-2x\log x+2x+C}\end{aligned}$$

（ただし $-2C_1=C$ とおく）

(3)　はじめに $e^x\sin x$ の原始関数の1つを I としておく．

$$e^x\sin x=(e^x)'\sin x,\ (\sin x)'=\cos x$$

に注意して「部分積分法」を利用する．

$$\therefore\quad \int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

さらにこの右辺の第2項で

$$e^x\cos x=(e^x)'\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x$$

に注意すると，これにもやはり「部分積分法」が利用できて

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)\,dx$$

$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx=e^x\cos x+I+C_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

これを②に代入すると

$$I+C_2=e^x\sin x-(e^x\cos x+I+C_1)$$

$$\therefore\quad I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C_3\quad\left(C_3=-\frac{C_1+C_2}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \int e^x\sin x\,dx=I+C_4=\boldsymbol{\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C}$$

（$C=C_3+C_4$ は積分定数）

らしんばん

➡ (1)，(2)，(3)のそれぞれの「タイプ」を一般の形でまとめておくと次のようになる．

(1)のタイプ: $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$, $\int x^n e^x\,dx$

⟶「x^n を微分する」方向で進め，右辺の第 2 項で x の次数を下げる．さらにその第 2 項を同じ方針で部分積分する．

(2)のタイプ: $\int x^p(\log x)^n\,dx$ $(p \neq -1)$

⟶「$(\log x)^n$ を微分する」方向で進め，右辺の第 2 項で $(\log x)^n$ の次数を下げる．($p=-1$ のときは置換積分法の**《第 2 の方法》**)

(3)のタイプ: $\int e^x \sin x\,dx$, $\int e^x \cos x\,dx$, $\left(\int e^{-x}\sin x\,dx, \int e^{-x}\cos x\,dx\right)$

⟶部分積分を 2 回やると求めるものが再びあらわれる．

なお本問(2)の途中で計算した

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C_1$$

は，そのまま公式として用いてよい．

それでは $\int \log(x+1)dx$ ならどうすればよいか．

これは被積分関数を　$1\cdot\log(x+1)=(x+1)'\log(x+1)$　と読んで

$$\int \log(x+1)dx = (x+1)\log(x+1) - \underbrace{\int (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx}_{\text{ここがミソ!!}}$$

$$=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

とやる．——p. 165 の 解説 で述べた $H(x)$ を $x+1$ にとっていることに注目!!
このくふうをせずにこれを x にとると少しメンドウになる．

➔ (3)の I は $e^x\cos x$ の原始関数の 1 つ J と「ペアー」で考えると効果的である．すなわち，本文の②，③は

$$\left.\begin{array}{l} ②: I = e^x\sin x - J \\ ③: J = e^x\cos x + I \end{array}\right\}$$ ——これは I と J の連立方程式!!

これを解いて I，J を求め，あとで積分定数をつけておいてもよい．

また本問のみに関していえば $I-J$ を先に計算しておくと

$$I-J=\int e^x(\sin x-\cos x)dx$$

$$=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x(\cos x+\sin x)dx \quad (\text{部分積分法})$$

$$=e^x(\sin x-\cos x)-(I+J)+C_1$$

この式の両辺の J は消えるから I を左辺に移項して 2 で割れば

$$I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C \quad \left(C=\frac{C_1}{2}\ \text{は積分定数}\right)$$

である．この方法でやれば I を求めるための「**部分積分法**」は**1 回ですむ**．J を求めるには $I+J$ を整理して同様にやれば両辺の I が消えて J が簡単に求められる．

最後にこの積分を「**最も簡単にやる方法**」を紹介しておこう．

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$
$$(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x$$

辺々引いて

$$(e^x \sin x - e^x \cos x)' = 2e^x \sin x$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{e^x \sin x = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x)'}$$

辺々加えて

$$(e^x \sin x + e^x \cos x)' = 2e^x \cos x$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{e^x \cos x = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x)'}$$

これらを積分すれば（2式の右辺の「′」をとって積分定数をつければよい）$\int e^x \sin x\, dx$，$\int e^x \cos x\, dx$ が簡単に求められる．

なお，これらの積分の一般の形は

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$$
$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b \sin bx + a \cos bx) + C$$

であるが，これは覚えておかなくてもよい．

本問(3)はこの積分の$a=1$，$b=1$ の場合であり，$a=-1$，$b=1$ などの場合もよく出題されている．

➡ 被積分関数が積の形をしていればどんな場合でも「部分積分法」を用いればウマクいくか，というとそうはいかない．たとえば $\int \sin x \cos x\, dx$ などを「部分積分」でやろうとしてもかえってメンドウなことになってしまう．これは先に述べた「置換積分法」を利用して

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

とするか，あるいは倍角公式を用いて

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C \left(= \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} + C\right)$$

とするのがよい．この辺はウッカリダマされないように注意しなければならない．

また，本問(3)などでは③の被積分関数 $e^x \cos x$ を

$$e^x \cos x = e^x (\sin x)'$$

と読んで $(e^x)' = e^x$ を用いた「部分積分法」を実行すると

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

となり，移項すればこれは②に他ならない（モトにもどってしまった!!）．

このタイプのものの扱いでは「ドウドウめぐり」をおこしたりしないよう「求めるものは何か」を考えながら式変形をすることが大切である．

2 定積分の計算

(1) 定積分の定義とその基本公式

ある区間で定義された関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とするとき，この区間に属する2つの実数 a，b に対して **$f(x)$ の a から b までの「定積分」**を次のように定義する。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

このとき a をこの定積分の「下端」，b を「上端」という．

注 上の定義からわかるように，**「定積分」は x が a から b まで変化したときの，原始関数 $F(x)$ の変化量のことでしかない**（他に特別な意味をもたない）．したがって「下端」，「上端」の a と b との大小関係は「**$b \geqq a$ とはかぎらない**」から注意しなければならない．

定積分の基本公式

(1) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$ （特に $a=b$ のときは $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$）

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$ （どんな変数で積分しても同じ）

(3) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ （k は定数，$k=0$ でも成立）

(4) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

一般に，k，l を定数として

$$\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx+l\int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．

(5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ （a，b，c の大小関係は任意!!）

(6) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

解説 (1)〜(4)については「定積分の定義」から，ほとんど明らかである．

(5) $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とおくと，「定積分の定義」から右辺は

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$
$$=F(b)-F(a)$$

これは左辺に他ならない．そして，これは $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の大小関係にかかわりなく成立する――「c は a と b の間」とは限らないから注意!!

(6)については次のようにやればよい．

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\{F(x)-F(a)\}'=F'(x)=f(x)\quad\begin{pmatrix}F(a)\text{ は定数で}\\(F(a))'=0\end{pmatrix}$$

このことから

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)\quad(\text{定積分の「上端」}x\text{ の関数!!})$$

は $\boldsymbol{f(x)}$ の「原始関数」の1つであることがわかる．

らしんばん

なお(6)についてはあとで述べる「微積分学の基本定理」(p. 188) と比較参照されたい．

例題 5

次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 |e^x-2|\,dx$　(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt$

解　説　(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^0=-\frac{1}{2}\cos 0+\frac{1}{2}\cos\pi=-1$

(2) e^x と 2 との大小関係を調べると

$$\left\{\begin{array}{l}e^x\geqq 2 \iff x\geqq\log 2\\ e^x\leqq 2 \iff x\leqq\log 2\end{array}\right\}$$

また，$0<\log 2<\log e=1$ $(2<e=2.718\cdots\cdots)$

であるから

$$\int_0^1 |e^x-2|\,dx=\int_0^{\log 2}\underbrace{|e^x-2|}_{(\text{負})}\,dx+\int_{\log 2}^1\underbrace{|e^x-2|}_{(\text{正})}\,dx$$

$$=\int_0^{\log 2}-(e^x-2)\,dx+\int_{\log 2}^1(e^x-2)\,dx$$

$$=-\Big[e^x-2x\Big]_0^{\log 2}+\Big[e^x-2x\Big]_{\log 2}^1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$=-(2-2\log 2-1)+(e-2-2+2\log 2)=\boldsymbol{e-5+4\log 2}$$

(3) $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt=(F(x^2)-F(2x))'$$

$$=f(x^2)(x^2)'-f(2x)(2x)'=\boldsymbol{2xf(x^2)-2f(2x)}$$

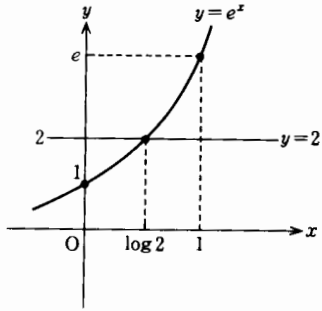
らしんばん

➡ (1)は「上端」の数値より「下端」の数値の方が大きい．このようなときでも「定積分」は「**定義通りに**」計算する―― 結果が負であってもかまわない．

➡ (2)は「絶対値のついた関数の定積分」の扱い方のハナシである．定積分

$$\int_0^1 |e^x-2|\,dx$$

は，このままでは積分することができない．そこでまず「被積分関数」$|e^x-2|$ の絶対値をはずすことを考えなければならない．



しかし，この関数の「絶対値をはずした形」は，「積分区間」$0\leqq x\leqq 1$ では

$$|e^x-2|=\begin{cases}-(e^x-2) & (0\leqq x\leqq \log 2)\\ e^x-2 & (\log 2\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

のように $x=\log 2$（「絶対値の中身」を0とする x の値）の前後で「ちがった表現」になる．そこで〈**定積分の基本公式**〉(5)を利用して，この積分区間を $0\leqq x\leqq \log 2$ と $\log 2\leqq x\leqq 1$ とに「分割して積分」するわけである――「**定積分の区間分割**」

➡ (2)の①の計算

$$-\Big[e^x-2x\Big]_0^{\log 2}+\Big[e^x-2x\Big]_{\log 2}^{1}$$

では，「$e^{\log 2}$」という形の数があらわれてくるが，これをこのままの形で残してはならない．必ず「2」とすること!!

$$a^{\log_a x}=x,\ \log_a a^x=x$$

であるが，これは，$\log_a x$ が本来「a を（$\log_a x$）乗すると x になる数」であることから当然である．

➡ (3)は「合成関数の微分法」の応用!!――**定積分の基本公式**(6)の解説を参照．

(2) 定積分の置換積分法

定積分の置換積分法

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり，関数 $x=g(t)$ が微分可能で，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

が成り立つ.

解　説　これは,「**定積分**」についての「**置換積分法**」である.

「不定積分」のところで説明した「置換積分法」によれば, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとして

$$F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

である.

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(g(\beta))-F(g(\alpha))$$
$$=\Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

らしんばん

この公式で左辺の dx を「形式的に」

$$dx=g'(t)\,dt$$

と置きかえることは「不定積分」の「置換積分法」の場合と同様であるが,「積分区間」については左辺の「**積分変数 x の a から b までの連続的な変化**」が右辺の「**積分変数 t の α から β までの連続的な変化**」に対応して変換されていることに注意しなければならない.

以下このことを右のような簡潔な表現で表すことにする.

x	$a\longrightarrow b$
t	$\alpha\longrightarrow\beta$

「定積分の置換積分法」についても, 不定積分の「置換積分法」のところで説明した《**第1の方法**》,《**第2の方法**》と同様に

(i)「(**左辺の形**)⟶(**右辺の形**)」……《**第1の方法**》に対応

(ii)「(**右辺の形**)⟶(**左辺の形**)」……《**第2の方法**》に対応

の用い方がある. **式の形をよくにらんでしっかりと「使い分け」ができるようになっておかなければならない.**

例題 6

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\ (a>0)$　(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

解　説　(1)　$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(2) $x=a\sin\theta$ とおくと

$$dx=a\cos\theta\,d\theta$$

x	$0\longrightarrow\frac{a}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2\theta}=a\sqrt{\cos^2\theta}$$
$$=a|\cos\theta|=a\cos\theta$$

$\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}\text{ から}\quad\cos\theta\geqq 0\right)$

であるから

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot e^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}\underbrace{(x^2)'\,dx}$

ここで $x^2=u$ と置くと

x	$0\longrightarrow 1$
u	$0\longrightarrow 1$

であるから

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{e-1}{2}}$$

らしんばん

(1)の不定積分について説明しておこう.

$x=\tan\theta$ とおくと

$$\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta=\int d\theta=\theta+C$$

これで積分はすんでいるわけだが，これを x の式にもどさなければならず，「$\tan x$ の逆関数」の知識がないとこの「不定積分」は手におえない．しかし本問のような「**定積分の置換積分**」の場合には「**積分区間**」も**変換されてしまうので，不定積分の結果が θ のままでも求められる**わけである——(2)についても同様．

(1)，(2)の置換はよく用いられる．定石として覚えておきたい．

➔ (3)について——これは「**定積分の置換積分法**」の公式を「**(右辺の形) → (左辺の形)**」(《**第2の方法**》) として用いる扱い方の例である．他の例をあげると

$$\int_1^e\frac{\log x}{x}\,dx=\int_1^e\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int_0^1 u\,du$$

$$=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\quad(\log x=u\ \text{とおいた})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int_0^1(1-u^2)\,du$$

$$=\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\quad(\sin x=u\text{とおいた})\quad\cdots\cdots(**)$$

などがある．いずれも不定積分の「置換積分法」で説明した内容の延長線上のハナシである．

また，上の説明では「公式の用い方の向き」をハッキリさせたいので文字「u」に置きかえて積分したが慣れてくると構造の簡単なものについては

本問(3)：$\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$

(*)：$\displaystyle\int_1^e\frac{\log x}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$

(**)：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

のように「**見た目で**」やれるようになる．

——「u と置く方法」を「**カンヅメ法**」，「見た目でやる方法」を「**ビンヅメ法**」といった人もいる．なかなかウマイ表現である．

本問(3)も慣れてしまえば最初に $x^2=u$ と置いて（これも被積分関数 xe^{x^2} の x をにらんだ上でのハナシだが）

$$2x\,dx=du\qquad\therefore\quad x\,dx=\frac{1}{2}\,du\qquad\begin{array}{c|c}x & 0\longrightarrow 1\\ \hline u & 0\longrightarrow 1\end{array}$$

で，$\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ の $x\,dx$ をこのように読んでこれを「形式的に」du に置きかえればよい．すなわち

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\int_0^1 e^u\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du$$

となる．このような扱い方にも慣れておきたい．

例題 7

置換積分法を用いて，次のことを証明せよ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots f(x)\text{ が偶関数のとき} \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots f(x)\text{ が奇関数のとき} \end{cases}$$

解　説　〈定積分の基本公式〉(5)より

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx \quad \left(\begin{array}{l}\text{「積分区間」を } x=0 \\ \text{で分割した．}\end{array}\right)\cdots\cdots①$$

ここで $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=A$ とおいて，これについて調べてみる．

いま **$f(x)$ が偶関数である場合**については，すべての x について

$$f(-x)=f(x)$$

$x=-t$ とおくと

$dx=-dt$

x	$-a\longrightarrow 0$
t	$a\longrightarrow 0$

$$\therefore\quad A=\int_a^0 f(-t)(-dt)=\int_0^a f(-t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt=\int_0^a f(x)\,dx$$

これを①に入れると

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

次に **$f(x)$ が奇関数である場合**について考えてみる．このときはすべての x について

$$f(-x)=-f(x)$$

であるから偶関数のときと同様に $x=-t$ とおくと

$$A=\int_a^0 f(-t)(-dt)=-\int_0^a f(t)\,dt=-\int_0^a f(x)\,dx$$

これを①に入れると

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=0$$

ゆえに題意は証明された．

らしんばん

➡「偶関数」と「奇関数」について説明しておく．

定義域内のすべての x について

$$f(-x)=f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

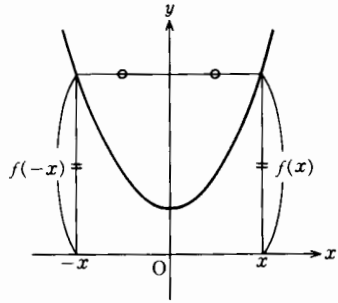
をみたす関数 $f(x)$ を「偶関数」という．このとき **$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．**

x^2-1，x^4，$\cos x$ などは「偶関数」である．

一方，すべての x について

$$f(-x)=-f(x) \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

をみたす関数 $f(x)$ を「奇関数」という．このとき **$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である．**

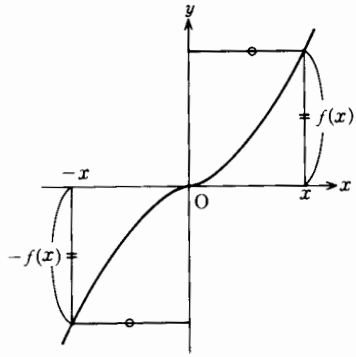


「偶関数」のグラフ

x，x^3，$\sin x$ などは「奇関数」である．

なお，$\dfrac{1}{x^2}$ などは偶関数，$\dfrac{1}{x}$ などは奇関数であるが，本問の場合でいうと「積分区間」の途中に「不連続点（$x=0$）」があるので，われわれの手におえない．したがってここではこれらの関数は除外して考えることにする

——ここで扱う奇関数のグラフは必ず原点を通る．



「奇関数」のグラフ

ところで（$*$）と（$**$）を用いると

「奇関数」×「奇関数」＝「偶関数」

など「数（奇数と偶数）の和」に対応する関係が成り立つことがわかる．たとえば $x\cos x$ は奇関数，$x\sin x$ は偶関数である．

また，「偶(奇)関数」を微分するとその導関数は「奇(偶)関数」になる．それは($*$)と($**$)の両辺を微分すると

$$(*)\longrightarrow -f'(-x)=f'(x) \qquad \therefore\ f'(-x)=-f'(x)$$

$$(**)\longrightarrow -f'(-x)=-f'(x) \qquad \therefore\ f'(-x)=f'(x)$$

であることから簡単に確かめられる．

なお，本問の結果は「公式」としてそのまま用いてよい．

本問は「基礎解析」で

$$\int_{-a}^{a}x^{2n}\,dx=2\int_{0}^{a}x^{2n}\,dx,\ \int_{-a}^{a}x^{2n+1}\,dx=0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{ただし，}\ n\ \text{は}\\ \text{負でない整数}\end{array}\right)$$

とやったことの，一般の場合への拡張である．

(3) 定積分の部分積分法

不定積分の「部分積分法」の公式から，定積分に関して次の公式が誘導される．

定積分の部分積分法

積分する　そのまま

$$\int_a^b \boldsymbol{f'(x)g(x)\,dx} = \Big[\boldsymbol{f(x)g(x)}\Big]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{f(x)g'(x)\,dx}$$

そのまま　微分する

解　説　$f(x)$，$g(x)$ をどのようにえらぶか，については「不定積分の部分積分法」のところで述べた通りである．すなわち

$$\int_a^b h(x)g(x)dx = \Big[H(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b H(x)g'(x)dx$$

（ただし $H'(x)=h(x)$ とする）

——与えられた式の形をよくにらんで，右辺の第2項の定積分が簡単にいくように式変形する．

らしんばん

もう少しくわしく説明しておく．

「不定積分の部分積分法」(p. 165) では

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

の $f(x)$ を $h(x)$ とおき，その原始関数の1つを $H(x)$ とおいて

$$\int h(x)g(x)dx = H(x)g(x) - \int H(x)g'(x)dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

として説明した．そこで右辺の $H(x)g'(x)$ の原始関数の1つを $K(x)$ とすると上の (*) は

$$\int h(x)g(x)dx = H(x)g(x) - K(x) + C$$

である．

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_a^b \boldsymbol{h(x)g(x)dx} &= \Big[H(x)g(x) - K(x) + C\Big]_a^b \\ &= \Big[H(x)g(x)\Big]_a^b - \Big[K(x)\Big]_a^b \\ &= \Big[\boldsymbol{H(x)g(x)}\Big]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{H(x)g'(x)dx}\end{aligned}$$

となる．

これが上に述べた公式の内訳である．

例題 8

(1)　部分積分法を用いて次の定積分を計算せよ．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx$$

(2)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とおく．このとき，n を 2 以上の整数として I_n を I_{n-2} で表し，これを用いて I_n を求めよ．

解　説　(1)　$(x-\alpha)'=1$ で，$(x-\beta)^2$ は簡単に（何度でも）積分されることに注目する．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\left[(x-\alpha)\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}1\cdot\frac{(x-\beta)^3}{3}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{(x-\beta)^4}{4}\right]_{\alpha}^{\beta}=\boldsymbol{\frac{(\alpha-\beta)^4}{12}}$$

(2)　$\sin^n x=\sin^{n-1}x\cdot\sin x$ と変形して「部分積分法」を用いる．

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx$$

$$=\Big[\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x(\cos x)\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

右辺の第 2 項を左辺に移項して整理すると，

$$nI_n=(n-1)I_{n-2}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}}$$

この式を順次かいてみると n が偶数のときと奇数のときとでハナシがちがうことがわかる．

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\quad I_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}I_{n-4},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad I_3=\frac{2}{3}I_1\ (n;\ 奇数),\quad I_2=\frac{1}{2}I_0\ (n;\ 偶数)$$

そこで先に I_0 と I_1 を計算しておく．

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\therefore\quad I_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1 & (n\text{ が奇数のとき})\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

らしんばん

(1)を「基礎解析」では

$$x-\alpha=x-\beta+\beta-\alpha$$

の変形を利用して，

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\int_\alpha^\beta\{(x-\beta)^3+(\beta-\alpha)(x-\beta)^2\}\,dx$$
$$=\left[\frac{(x-\beta)^4}{4}+(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{(\alpha-\beta)^4}{12}$$

と求めた．どちらの方法でもやれるようにしておきたい．

(2)の n に具体的な数値をいれてみると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{8}{15}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (**)$$

となる．しかし大きな問題の中の一部分として扱う場合は別として，これをいきなり公式として用いるのはカワイくない．

(*) は置換積分を用いて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx$$
$$=\left[-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

のようにマジメに計算するのが好ましい．

(**) は少しメンドウだが「半角公式」などを何度か用いて「和の形に変形」しておいて置換積分をする．たとえばはじめに被積分関数 $\sin^6 x$ を

$$\sin^6 x=(\sin^2 x)^3=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3$$
$$=\frac{1}{8}\left(1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left\{1-3\cos 2x+3\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}-(1-\sin^2 2x)\cos 2x\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{5}{2}-4\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 4x+\sin^2 2x\cos 2x\right\}$$

と変形しておけばはじめの 3 項についての積分は問題ナシ.

第4 項は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{3}\sin^3 2x\cdot\frac{1}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

のように置換積分すればよい.

➡ (2)の I_n で $\frac{\pi}{2}-x=t$ とおくと

$$dx=-dt$$

であるから

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{\cos^n x\,dx}$$

で, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ も同じ結果になることがわかる.

このハナシは一般に

$$\int_0^a \boldsymbol{f(x)dx}=\int_0^a \boldsymbol{f(a-x)dx}\quad (a\text{ は定数})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (***)$$

としてまとめられる. もう 1 つ例をあげておこう.

たとえば

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

の値を求めるのに (***) を利用してみよう.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

これらの 2 式を加えると

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad I=\frac{\pi}{4}$$

となる.

➡ ついでに本問(2)の積分区間を「$x:0\to\pi$」としてみよう.

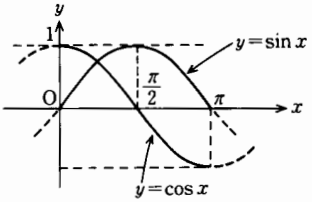
$$\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (****)$$

などはこの第2項で $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと

$$dx=dt \qquad \begin{array}{c|c} x & \dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\therefore \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$$



である．これを（****）に用いれば

$$\boldsymbol{\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx}$$

となる．しかし

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^n x\,dx$$

では第2項が

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$$

となるので

$$\boldsymbol{\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx=\begin{cases} 0 \ (n:\text{奇数}) \\ 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \ (n:\text{偶数}) \end{cases}}$$

（これらはグラフの概形からみてもほとんど明らか!!）

となる．

（4） 定積分と不等式

「被積分関数の大小関係」と「定積分の大小関係」とのかかわりについて調べておこう．

定積分と不等式

(1) $a \leqq x \leqq b$ で，$\boldsymbol{f(x) \geqq 0}$ ならば $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0}$

(2) $a \leqq x \leqq b$ で，$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}$ ならば $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx}$

解　説　(1)，(2)とも $a=b$ のときは等号が成立するから，$b>a$ としておく．

(1) $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると，$F'(x)=f(x)$ であるから「平均値の定理」より，

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)=f(c)$$

$$\therefore\quad F(b)-F(a)=f(c)(b-a)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

をみたす $c\ (a<c<b)$ が少なくとも1つは存在する．

ここで，$f(c)\geqq 0$，$b-a>0$ であるから，(①の右辺) $\geqq 0$ である．

$$\therefore\quad F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx\geqq 0$$

(ただし等号は区間 $[a, b]$ で「恒等的に $f(x)=0$」のときにかぎり成立する．)

(2)　これは(1)を利用して証明する．

$f(x)\geqq g(x)$ のときは　$f(x)-g(x)\geqq 0$ であるから

$$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\geqq 0$$

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)\,dx\geqq\int_a^b g(x)\,dx$$

(ただし等号は区間 $[a, b]$ で「恒等的に $f(x)=g(x)$」のときにかぎり成立する．)

らしんばん

➡ この定理は「逆」が成立しない!!　たとえば $\int_{-1}^2 x\,dx\geqq 0$ だが $x\geqq 0$ とはいえない．

➡ (1)の等号条件，すなわち

「$\int_a^b f(x)\,dx=0$ が成り立つとすれば $[a, b]$ でつねに $f(x)=0$ である」

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

このことを説明するのは少しむずかしい．

いま，$a\leqq x\leqq b$ である x に対して $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと

$$F'(x)=f(x)\geqq 0,\ F(a)=0$$

である．このとき「$f(x)>0$ の場合がある」とすると $F(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ の範囲で「必ず増加する」が，$x=b$ における関数値 $F(b)$ は

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt=0\ (\because\ (*))\ (=F(a))$$

で，実はそのようなことはおこりえない．したがって「$[a, b]$でつねに $f(x)=0$」がいえる．

例題 9

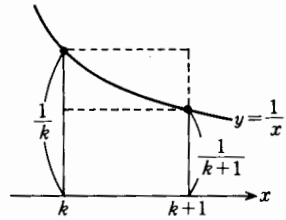
$\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ．ただし n は 2 以上の自然数とする．

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

解　説　$k \leqq x \leqq k+1$ $(k>0)$ とすると $\dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{k}$ であるから前の定理にしたがって

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

$$\therefore \quad \underbrace{\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx}_{\text{(A)}} \underbrace{< \frac{1}{k}}_{\text{(B)}}$$



(i)　(A)を用いて①の右側の不等式を証明する．

(A)で $k=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots,\ n-1$ とおいて辺々を加えると

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx+\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx+\cdots\cdots+\int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$=\int_1^n \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$$

この両辺に 1 を加えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

(ii)　(B)を用いて①の左側の不等式を証明する．

(B)で $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ とおいて辺々を加えると

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx+\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx+\cdots\cdots+\int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx+\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$=\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)$$

$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

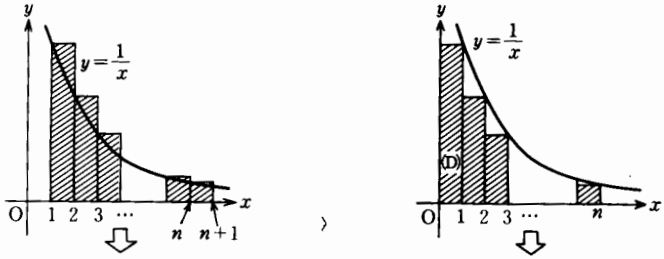
(i)，(ii)より①が示された．

らしんばん

➡ $f(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$ ……(＊)

の図形的な意味を考えてみると次の図の斜線部分の面積を表すから，「定積分と

面積の関係」――次で述べる――がわかっていれば



$$f(n)>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\log(n+1) \qquad f(n)<\underbrace{1}_{(D)}+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,dx=1+\log n$$

であることがすぐにわかる．

なお，この左側の不等式で $n\to\infty$ とすると，$\log(n+1)\to\infty$ となり，したがって(＊)で与えられる級数は∞に発散することがわかる――これは $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であっても，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとは限らない例としてよく用いられる．(p. 26)

3　微積分学の基本定理

(1)　「面積」と「定積分」の関係について

まず「面積」が「定積分」で与えられることの理由を次の手順にしたがって説明する．

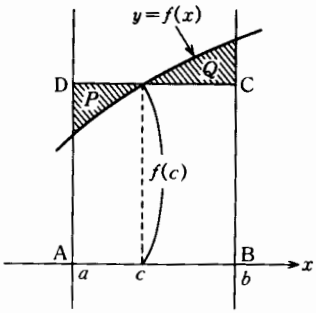
「面積」と「定積分」に関する諸定理

(1)　右図で，連続な関数 $y=f(x)$ $(\geqq 0)$ の表すグラフと x 軸，$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$\boldsymbol{S=(b-a)f(c)}$$

(c は a と b との間)

をみたす c が少なくとも1つは存在



する．

(2) 右図の斜線部分の面積は x の関数で，$S(x)$ と表すことができる．このとき

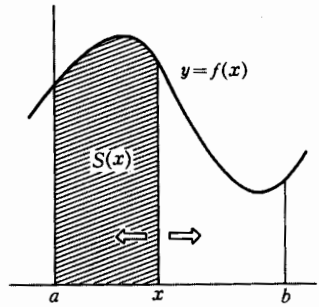
$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

である．

(3) $S(b)\,(=S)$ は

$$S(b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

で与えられる．



解　説　(1)について――図形的には「前ページの図の P と Q の面積を等しくするような x の値 c が a と b との間に存在し，面積 S を長方形 ABCD の面積で置きかえることができる」というほどの意味である．このことの一応の説明は次のようにする．

まず，$a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．

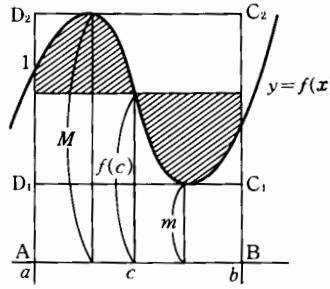
$M=m$ のときは，この区間で $f(x)$ は恒等的に M（一定）で

$S=$(長方形 ABCD の面積)

である．

$M\neq m$ のときは，右図の面積の関係から次の不等式が成り立つ．すなわち，

$$\underbrace{m(b-a)}_{\text{(長方形 ABC}_1\text{D}_1)} < S < \underbrace{M(b-a)}_{\text{(長方形 ABC}_2\text{D}_2)}$$



ゆえに，両辺を $b-a$（>0）で割ると

$$m<\frac{S}{b-a}<M$$

このとき，x が a から b まで連続的に変化すれば，関数値 $f(x)$ はそれに対応して最大値 M と最小値 m との間の値をとりながら変化し

$$f(x)=\frac{S}{b-a}$$

をみたす x の値が少なくとも1つは a と b の間に存在する――**「中間値の定理」**(p. 44 参照)

ゆえに，この x の値を c とすれば

$$f(c)=\frac{S}{b-a} \quad \therefore \quad S=(b-a)f(c) \ (c \text{ は } a \text{ と } b \text{ との間})$$

である．

(2)について――「導関数の定義」によれば

$$\frac{d}{dx}S(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}$$

で，(1)を用いると

$$S(x+\Delta x)-S(x)=\Delta x\cdot f(c)$$

(c は x と $x+\Delta x$ との間)

であるから

$$\frac{d}{dx}S(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot f(c)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x)$$

($\Delta x\to 0$ のとき，$x+\Delta x\to x$ で $c\to x$――「はさみうち!!」)

である．

(図は $\Delta x>0$ の場合で，$\Delta x<0$ のときは x と $x+\Delta x$ との大小関係がいれかわる．(1)は $S(x)-S(x+\Delta x)=(-\Delta x)\cdot f(c)$ として用いられる)

(3)について――(2)で求めた関係は，$S'(x)=f(x)$ で，このことから $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx=\Big[S(x)\Big]_a^b=S(b)-\underbrace{S(a)}_{=0}=S(b)$$

らしんばん

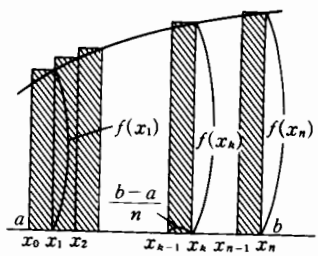
上の説明では，$S'(x)=f(x)$ であることから面積が $\int_a^b f(x)\,dx$ で求められることを示したが，少し見方をかえてみよう．

まず区間 $[a, b]$ を n 等分し，その端点と分点をそれぞれ

$x_0(=a)$，x_1，x_2，x_3，……，

x_k，……，$x_n(=b)$

とすると，その間隔は $\dfrac{b-a}{n}$ ($=\Delta x$ とおく) で，面積 S は図の小長方形の面積の総和 S_n，すなわち



$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_k)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

で近似される．ここで n を限りなく大きくすれば（限りなくコマカク分割すれば），S_n は限りなく S に近づくことは直観的に理解される．このことから「面積」S は，次の極限値として与えられる．

$$\boldsymbol{S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x}$$

このように小区間に分割して近似し，面積や体積を求める方法を「**区分求積法**」という．

ところでこの S は，前の説明では $S=\int_a^b f(x)\,dx$ と表されるので，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

ということになる．

しかし，S は面積であるから，$S\geqq 0$ でなくてはならない．前ページの図でいえば $\dfrac{b-a}{n}=\Delta x>0$，$f(x)\geqq 0$ のもとに S は定義されているわけである．

そこで，「**面積**」という具体的なイメージからは離れるが，これらの制限をとり除いて「$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$」のことを「$\int_a^b f(x)\,dx$」と書くことにすると

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

で，定積分「$\int_a^b f(x)\,dx$」をこのように定義することもできる——この場合のインテグラルは「微分法の逆演算」とは関係なく，「**限りなく細分化してそのすべてを加えあわせる**」という意味である．

そうするとこの「**面積**」と「**定積分**」に関する諸定理の(1)，(2)，(3)はそのまま成り立ち，それぞれ次のように表される．すなわち，

(1) $\longrightarrow \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)}$（$c$ は a と b との間）

——これを「**積分に関する平均値の定理**」という．

$\left(\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right.$ を「平均値」という$\left.\right)$

(2) $\longrightarrow \boldsymbol{\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)}$

——これと次の(3)をあわせて「**微積分学の基本定理**」という．

(3) $\longrightarrow \underbrace{\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx}}=\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ $\left(\begin{array}{l}\text{ただし，}F(x)\text{ は }f(x)\\ \text{の原始関数の1つとする．}\end{array}\right)$

$$\|$$

$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x}$ ←——この量が「微分法の逆演算」で求まる!!

要するにこの定理の「ネウチ（？）」は「(＊)のような量が“**微分法の逆演算**”によって求められる」というこの1点にある，といってよい．

「面積や体積を細分化して求める」という考え方は，「微分法」の発展のルートとは別に，古くはギリシャ時代からのものである．**それが実は「微分法の逆演算」であったことを発見したのが17～18世紀の数学者ニュートン（1642～1727）やライプニッツ（1646～1716）たちの業績**であったといわれている．したがって「定積分」を（＊）で定義することはむしろ自然でもあり歴史的でもあるわけである――現在，大学の「解析学」では「高校数学」と異なり（＊）を「定積分の定義」として議論が進められている．このことは知っておいてもよい．

（2）　定積分と無限級数

(1)で説明したことがらを，一応キチンとした「ことば」で表すと次のようになる．すなわち，無限級数

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \cdots\cdots ①$$

$$\left(\text{ただし，}\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x=a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

が収束してその和が存在するとき，それは「定積分（“微分法の逆演算”と読め!!）」で求められる――①を求めるには

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)\ \ (\text{ただし}\ F'(x)=f(x)) \quad \cdots\cdots ②$$

を計算すればよい，ということである．

実際の問題では**「無限級数」が与えられて，そこから「積分区間」と「被積分関数の形」とを読みとって積分する**ことになるのだが，これがなかなかむずかしい．

最もよく出てくる簡単な例で説明すると，それは①の a, b が $a=0,\ b=1$ の場合で，このときは $\Delta x=\dfrac{1}{n},\ x_k=\dfrac{k}{n}$ となり，①と②の関係は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

になる．このときの扱い方の基本は

(i)　**与えられた無限級数の Σ 以下から $\dfrac{1}{n}$ でくくり出す**――$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Sigma\frac{1}{n}\Big(\quad\Big)$

(ii)　$\Big(\quad\Big)$ **内を「$\dfrac{k}{n}$ の関数」で表す**――この形をみて $f(x)$ をきめる．

(iii)　**積分する**――$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

の手順になる．以下実例で説明する．

例題 10

定積分を用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}$

解　説　(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

$$\longrightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1=\mathbf{2(\sqrt{2}-1)}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{n}\left\{\cos\frac{0\cdot\pi}{2n}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}-\cos\frac{n\pi}{2n}\right\}$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{n}$$

$$\longrightarrow\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}\quad\left(\cos\frac{k\pi}{2n}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right),\ \frac{1}{n}\to 0\right)$$

らしんばん

(1)を例にしてもう少しくわしく説明する．前ページの①と②の関係は，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\|$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right)$$

であった．

(＊) で $a=0$，$b=1$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

であるから，まず①の形をつくり，$f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形から $f(x)$ を

$$\boldsymbol{f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\longrightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}}$$

と読んだわけである．

少し発想をかえて (＊) で $a=1$，$b=2$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_1^2 f(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

となり $f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ の形から $f(x)$ を

$$\boldsymbol{f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \longrightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

と読むこともできる．

この場合は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\longrightarrow\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^2=2(\sqrt{2}-1)$$

となって，本文に解説した結果と同じになる．

➡ (2)は最初から様子が少しちがっている．

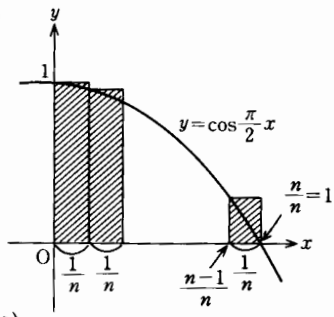
すなわち k の値が

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$

で

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\qquad\Big) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

の形になっている．



本文②では

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big)\longrightarrow\int_0^1\Big(\qquad\Big)\,dx \quad (n\to\infty)$$

の形を利用したいために式変形に少しくふうをしたが，実をいうとその必要は全くない．その理由は，上図に示すように（あえて図を用いて説明する）この場合もやはり区間 $[0,1]$ を n 等分して $n\to\infty$ とすることにより（***）で x 軸，y 軸と曲線 $y=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ とで囲まれる部分の面積を近似しているからである．したがって本文の②をやめていきなり

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}\longrightarrow\int_0^1 f(x)\,dx \quad (n\to\infty)$$

としてもよい．これは一般の場合についても同様で

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}}_{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x}=\int_a^b f(x)\,dx$$

である．

また本文では先の説明にならって $a=0,\ b=1$ としたが，$a=0,\ b=\dfrac{\pi}{2}$ とおけば

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\frac{\pi}{2}k}{n}\longrightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

$\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n}\right.$ から積分区間を $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}$ 以下から被積分関数を $f(x)=\cos x$ と読む!!$\Big)$

のように計算され，本文の結果と同じになる．

第2節
積分法の応用

x とともに連続して変化する量の総和は「$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$」で与えられる――前節ではこのような量が「微分法の逆演算（定積分）」で求められることを知った．ここではその応用として，まず「面積」，「体積」，「曲線の長さ」の求め方について研究し，「速度と変化（物理的な問題）」についても考えた上で「微分方程式」へハナシを進める．

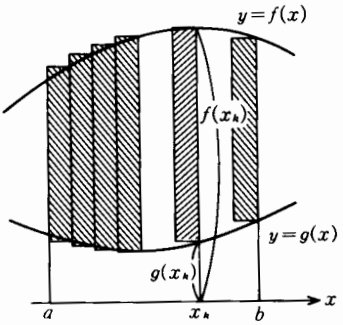
1　「$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$」の応用

(1)　面積

右図のような2つの曲線

$$y=f(x),\ y=g(x)\quad (f(x)\geqq g(x))$$

とにはさまれた $a\leqq x\leqq b$ の部分の面積を求めるにはどうすればよいか．



それにはまず，この区間を n 等分し，図のような細長い長方形の面積の和で，求める面積を近似する．その上で $n\to\infty$ とすると，これが求める面積 S と考えられるから

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)-g(x_k)\}\Delta x=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

を計算すればよい．

以下 例題 で説明する．

例題 11

a を正の定数とするとき，曲線

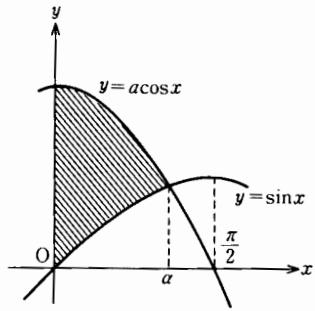
$$y=a\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

と両座標軸とで囲まれた図形の面積を，曲線

$$y=\sin x\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

が 2 等分するように a の値を求めよ．

解　説　①のグラフと両座標軸とで囲まれる図形の面積 S_1 は



$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx$$

$$=\Big[a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$$

また，①と②の交点の x 座標を α とすると

$$a\cos\alpha=\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \tan\alpha=a\ \left(0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

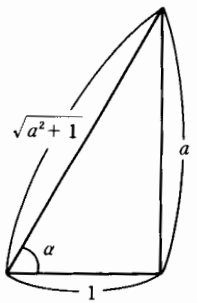
ゆえに右図の斜線部の面積 S_2 は，

$$S_2=\int_0^{\alpha}(a\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=\Big[a\sin x+\cos x\Big]_0^{\alpha}=a\sin\alpha+\cos\alpha-1$$

これが $\dfrac{S_1}{2}$ であるから

$$a\sin\alpha+\cos\alpha-1=\frac{a}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$



ここで，③から

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\quad (右図!!)$$

ゆえに，④に代入すると

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-1=\frac{a}{2}$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{a^2+1}=a+2\qquad \therefore\quad 4(a^2+1)=a^2+4a+4$$

$$\therefore\quad 3a^2-4a=a(3a-4)=0\qquad \therefore\quad \boldsymbol{a=\frac{4}{3}}\ (>0\ これは適する)$$

らしんばん

➡ 本問のように，①，②の交点が直接求められないときは，「交点の x 座標を α」とし，あとで消去する——この科目でよく用いる方法である．

例題 12

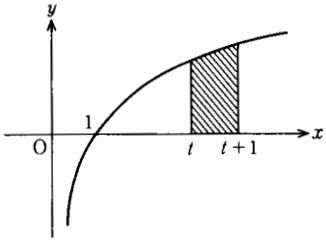
曲線 $y=\log x$ と，x 軸および2直線 $x=t$，$x=t+1$ $(t>0)$ とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．

(1) $S(t)$ を求めよ．

(2) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

(3) $S(t)$ の最小値を求めよ．

解　説　(1) $0<t\leqq 1$，$t\geqq 1$ とでハナシがちがう．

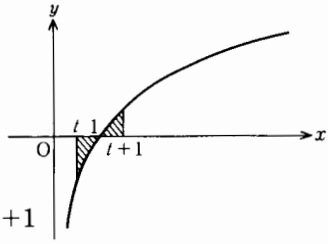


(i) $t\geqq 1$ のとき

$$S(t)=\int_t^{t+1}\log x\,dx\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_t^{t+1}$$

$$=\boldsymbol{(t+1)\log(t+1)-t\log t-1}$$



(ii) $0<t\leqq 1$ のとき，

$$S(t)=\int_t^1(-\log x)\,dx+\int_1^{t+1}\log x\,dx$$

$$=-\Big[x\log x-x\Big]_t^1+\Big[x\log x-x\Big]_1^{t+1}$$

$$=1+t\log t-t+(t+1)\log(t+1)-(t+1)+1$$

$$=\boldsymbol{(t+1)\log(t+1)+t\log t-2t+1}$$

(2) $t\geqq 1$ のときは

$$S'(t)=\log(t+1)-\log t=\log\frac{t+1}{t}>0$$

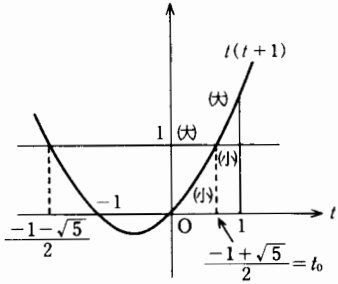
ゆえ，$S(t)$ は単調増加⟶$S(t)$ の最小値は $0<t\leqq 1$ のときを調べる．

$0<t\leqq 1$ のときは，

$$S'(t)=\log t+\log(t+1)$$

$$=\log t(t+1)$$

$S'(t)=0$ をみたす t の値は



(t_0 で $S'(t)$ の正負が逆転！)

$t(t+1)=1$

$\therefore\quad t^2+t-1=0 \qquad \therefore\quad t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

すなわち，$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ の前後で $S'(t)$ の符号は負から正にかわる．

ゆえに，$S(t)$ を最小にする t の値は $\boldsymbol{t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ （$=t_0$ とおく）

(3) $S(t_0)=(t_0+1)\log(t_0+1)+t_0\log t_0-2t_0+1$

ここで $S'(t_0)=0$ から $\log t_0+\log(t_0+1)=0$ である．

$\therefore\quad \log t_0=-\log(t_0+1)$

$\therefore\quad S(t_0)=\log(t_0+1)-2t_0+1=\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-(-1+\sqrt{5})+1$

$=\boldsymbol{\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+2-\sqrt{5}}$ （t_0 の値をそのまま代入してもよいが $S'(t_0)=0$ が利用できる．）

らしんばん

➡ $y=\log x$ のグラフから，$S(t)$ が $t\geqq 1$ のとき単調増加であることは直観的に了解される── $S(t)$ の最小がおこるのは，$0<t\leqq 1$ のときである．

➡ $S'(t)$ を求めるのに，たとえば $t\geqq 1$ のときは

$\{(t+1)\log(t+1)-t\log t-1\}'$

を計算してもよいが，①の形のままで「合成関数の微分法」を用いて

$S'(t)=\left\{\displaystyle\int_t^{t+1}\log x\,dx\right\}'=\{F(t+1)-F(t)\}'$ （$F(x)$ は $\log x$ の原始関数）

$=\log(t+1)-\log t=\log\left(1+\dfrac{1}{t}\right)>0$

とやればいくらか簡単にいく．$0<t\leqq 1$ のときも同様である．

例題 13

動点 P の座標が t を媒介変数として，

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \quad (a \text{ は正の定数，} 0\leqq t\leqq 2\pi)$$

で表されるとき，P のえがく曲線と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

解　説　$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)\geqq 0$

であるから x は t とともに単調に増加することがわかる．すなわち

t	$0 \longrightarrow 2\pi$
x	$0 \longrightarrow 2\pi a$

である．

また，y は $t=0$ から $t=\pi$ まで t の増加にともなって単調に増加し，$t=\pi$ から $t=2\pi$ までは単調に減少する．

ゆえに求める面積

$$S=\int_0^{2\pi a} \boldsymbol{y\,dx} \quad \text{（まずこの式をシッカリ書くこと!!）}$$

で $dx=a(1-\cos t)\,dt$ に注目すると，上の「**x に関する積分**」は「**パラメーター t に関する積分**」に置き換えられ次のように計算される．

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left\{1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right\}dt$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{3\pi a^2}$$

らしんばん

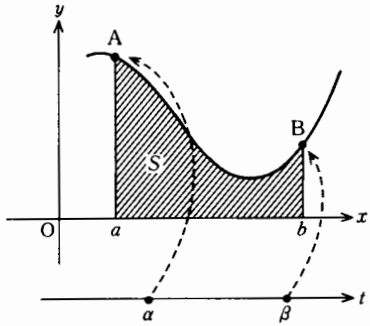
本問は，曲線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ がパラメーター t で与えられているときの例である．一般に，曲線 C の方程式がパラメーター t を用いて

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

で与えられ，$f(t)$ はこの区間で微分可能，$g(t)\geqq 0$ で

t	$\alpha \longrightarrow \beta$
x	$a \longrightarrow b$

とする．



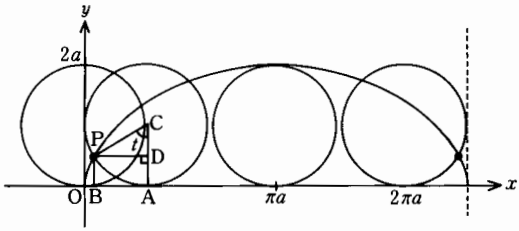
このとき，曲線 C と，x 軸および，$x=a$，$x=b$ とで囲まれる部分の面積は次の式で与えられる．

$$S=\int_a^b y\,\boldsymbol{dx}=\int_\alpha^\beta g(t)\,\boldsymbol{f'(t)\,dt}$$ ——「置換積分」の利用

ただし，$b>a$ でも $\beta>\alpha$ とはかぎらないから注意しなければならない．

本問の図形は円が定直線に接しながら，すべることなく回転していくとき，円周上の定点 P のえがく軌跡で，「**サイクロイド**」といわれている．

P の座標 (x, y) を与える方程式を導いておこう．



上図のように半径 a の円Cが角 t だけ回転して，x 軸に点Aで接する位置まできたものとする．そのときの円Cの中心をC，Pから x 軸およびACに下した垂線の足をB，Dとすると

$$\mathrm{OA}=\overset{\frown}{\mathrm{AP}}\text{ の長さ}=at$$

$$\therefore \begin{cases} x=\mathrm{OA}-\mathrm{BA}=\mathrm{OA}-\mathrm{PD}=\mathrm{OA}-\mathrm{PC}\sin t=at-a\sin t \\ y=\mathrm{PB}=\mathrm{AD}=\mathrm{AC}-\mathrm{DC}=a-a\cos t \end{cases}$$

である．

なおこの曲線では $\lim_{\theta\to+0}\dfrac{dy}{dx}=\infty$，$\lim_{\theta\to2\pi-0}\dfrac{dy}{dx}=-\infty$ である．確かめておくとよい．

例題 14

連立不等式

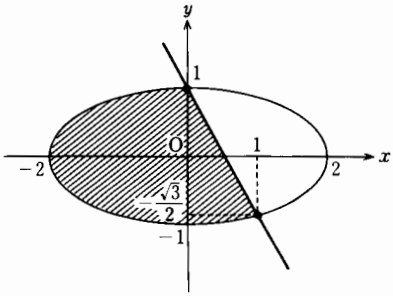
$$\frac{x^2}{4}+y^2\leqq 1,\qquad \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+y\leqq 1$$

の表す領域の面積を求めよ．

解　説　まず2つの領域の境界線の交点を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x+y=1 \quad \cdots ② \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases},\ \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

これを用いてあたえられた連立不等式のあらわす領域を図示すると右図のようになる．



境界線上の点は①，②を y について解いて

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\ \text{（楕(だ)円）},$$

$$y=1-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\ \text{（直線）}$$

ゆえに，求める面積は，

$$S=2\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx+\int_0^1\left\{\left(1-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right)-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx+\int_0^1\left\{1-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right\}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$$

第1項については，$x=2\sin\theta$ とおくと

$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$-2\longrightarrow 0$
θ	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

（この区間で $\cos\theta\geqq 0$）

$$\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\cos\theta|\cos\theta\,d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\pi$$

第3項についても同様にして

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

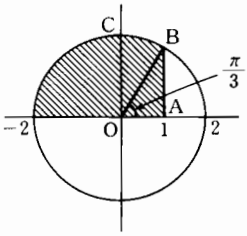
これより求める面積 S は

$$S=\pi+\left[x-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\pi+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{2}}$$

らしんばん

マジメに「置換積分」すれば上のようになるが $\sqrt{r^2-x^2}$ の定積分には「円の面積を与える公式 (πr^2)」を用いてもよい．右図で



$$\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx=\pi\cdot 2^2\times\frac{1}{4}$$

$$=\pi$$

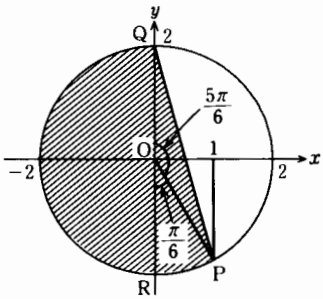
（半径2の四分円!!）

$$\therefore\quad \int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\underbrace{\pi\cdot 2^2\times\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}}_{\text{扇形OBC}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}}_{\triangle\text{OAB}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

➡ 楕円が円を y 方向に伸縮したものであることを認めるならば，求める領域は右図の領域を y 方向に $\frac{1}{2}$ 倍にしたものである．

右図の斜線部分の面積は

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 \cdots\cdots\cdots \text{左の半円} \\ \pi\cdot 2^2\times\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}\cdots\cdots \text{扇形 OPR} \\ \frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{5}{6}\pi\cdots\cdots \triangle\text{OPQ} \end{cases}$$



これらを加えて $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2+\pi\cdot 2^2\cdot\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{5}{6}\pi\right\}=\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{2}$$

となり，本文の積分の結果と一致する．

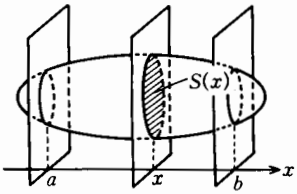
なお，楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ が囲む部分の面積は，この方法で

$$\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab \text{（半径 } a \text{ の円を } y \text{ 方向に } \frac{b}{a} \text{ 倍に伸縮!!）}$$

であることが簡単に確かめられる．

---

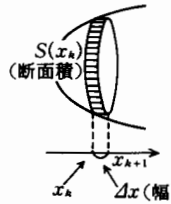
(2) 体積



点 x で x 軸と垂直な平面で立体 A を切った切り口の面積を $S(x)$ とするとき立体 A の $a\leqq x\leqq b$ の部分の体積 V を求めるには面積の場合と同様にこの区間を n 等分して考える．すなわち

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x=\int_a^b S(x)\,dx$$

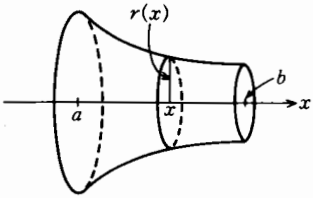
で与えられる．



特に，立体 A が右図のような回転体のときは，切り口の図形は円で，その半径を $r(x)$ とすれば

$$S(x)=\pi\{r(x)\}^2$$

であるから，この場合の体積は次の式で与えられる．



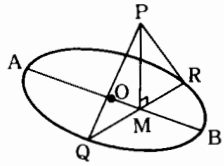
$$V=\int_a^b \pi\{r(x)\}^2\,dx=\boldsymbol{\pi\int_a^b\{r(x)\}^2\,dx}$$

例題 15

図において，△PQRは半径aの円Oの直径ABに垂直な2等辺3角形（PQ=PR）である．高さPMを，つねに

$$PM+OM=a$$

であるように保ちながら△PQRをAからBまで移動させるときにできる立体の体積を求めよ．



解　説　MがOに関してBと同じ側にあるときを考える．OM$=x$とすると，

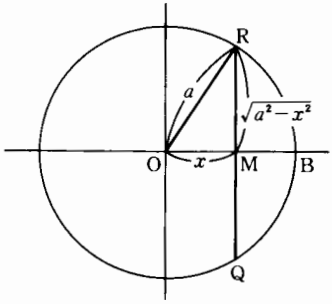
$$PM=a-x$$

$$QR=2\sqrt{a^2-x^2}$$

であるから，△PQRの面積は

$$S(x)=\frac{1}{2}(2\sqrt{a^2-x^2})(a-x)$$

$$=(a-x)\sqrt{a^2-x^2}$$



ゆえに求める体積Vは

$$V=2\int_0^a S(x)\,dx=2\int_0^a(a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$x=a\sin\theta$とおくと

$$dx=a\cos\theta\,d\theta$$

x	$0\longrightarrow a$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

であるから

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta\ \text{（この区間で}\ \cos\theta\geqq 0\text{）}$$

$$=2a^3\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\right\}$$

$$=2a^3\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(-\sin\theta)\,d\theta\right\}$$

$$=2a^3\left\{\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$=2a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

らしんばん

➡ 本問は「非回転体」の体積を求める例である．基本的には求める立体をよくにらんで，次の(i)，(ii)，(iii)にしたがって求めればよい．

(i)　まず積分しやすいように x 軸を選ぶ．

(ii)　x 軸と直交する平面でこの立体を切るときの断面積を x の関数 $S(x)$ として表す．

(iii)　積分区間をきめて $S(x)$ を積分する．

——キチンと立式できればあとは計算力の問題!!

➡ 上の解説では，

$$\int_0^a (x\text{ の有理関数})\times\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

を扱う「定石」として，$x=a\sin\theta$ とおいたが本問では次のように簡単にやることもできる．前ページの①で

$$2\int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2a\underbrace{\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{\text{(A)}}-2\underbrace{\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{\text{(B)}}$$

と変形すると，(A)の部分は円の面積を利用して

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$$

(B)については，$\sqrt{a^2-x^2}=t$ とおくと

$a^2-x^2=t^2$　　$\therefore\ -2x\,dx=2t\,dt$

$\therefore\ x\,dx=-t\,dt$

x	$0\longrightarrow a$
t	$a\longrightarrow 0$

$$\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_a^0 t(-t\,dt)=\int_0^a t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$$

と計算されて，

$$V=2a\cdot\frac{\pi a^2}{4}-2\cdot\frac{a^3}{3}=2a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

例題 16

(1)　x と y との間に，$y=e^x-x-1$ という関係があるとき，$\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int x^2\,dy\right\}$ を x の式で表せ．

(2)　曲線 $y=e^x-x-1$ の $0\leqq x\leqq 1$ の範囲にある部分を，y 軸のまわりに回転してできる容器の容積を求めよ．

解　説　(1)　$y=e^x-x-1$　　$\therefore\ dy=(e^x-1)\,dx$

ゆえに「置換積分法」により，

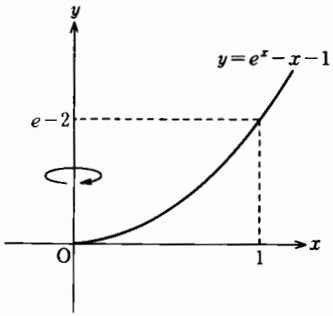
$$\int x^2\,dy=\int x^2(e^x-1)\,dx$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\left\{\int x^2\,dy\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\int x^2(e^x-1)\,dx\right\}=\boldsymbol{x^2(e^x-1)}$$

(2)　$f(x)=e^x-x-1$ とおくと

$$f'(x)=e^x-1>0\ \ (x>0)$$

$$f''(x)=e^x>0$$



ゆえに $y=f(x)$ は $x\geqq 0$ のとき単調増加で下に凸である．また

$$f(0)=0,\ f(1)=e-2$$

であるから，求める容積は

$$V=\int_0^{e-2}\pi x^2\,dy\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$=\pi\int_0^1 x^2(e^x-1)\,dx\quad(\because\ (1))$$

$$=\pi\left\{\int_0^1 x^2e^x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx\right\}$$

第 1 項の積分は「部分積分法」を 2 回用いて

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx$$

$$=e-2\left\{\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\right\}=e-2\left\{e-\Big[e^x\Big]_0^1\right\}=e-2$$

第 2 項の積分は，

$$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

であるから

$$V=\pi\left\{(e-2)-\frac{1}{3}\right\}=\boldsymbol{\pi\left(e-\frac{7}{3}\right)}$$

らしんばん

本問は「回転体」であるが，少しスナオでない例．

――本問では「y 軸のまわりの回転」であることに注目!!

V を与える積分式①は y 方向の積分である．そこで，ふつうなら与えられた x と y の関係式から x を y で表し，積分の中を y だけの式にして y で積分したいところであるが，本問についてはそうはいかない．それは，与えられた x と y の関係式

$$y=e^x-x-1$$

が，x について簡単に解けないからである．このようなときは，「置換積分法」を利用して「本来なら，y 方向で積分するところを x 方向の積分におきかえて」計算することで解決する――「置換積分法」の威力!!

簡単な例としては，y が x の3次関数で与えられるときなどの扱いについても同様である．

例題 17

t がすべての実数の範囲を動くとき，

$$t^2+x+1=0,\quad t^2-t+y-2=0$$

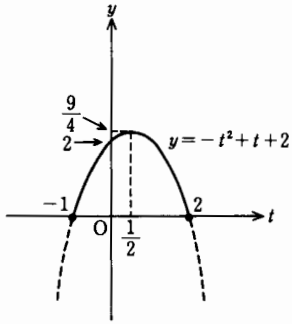
を満足する点 (x, y) のえがく曲線と x 軸とで囲まれた部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

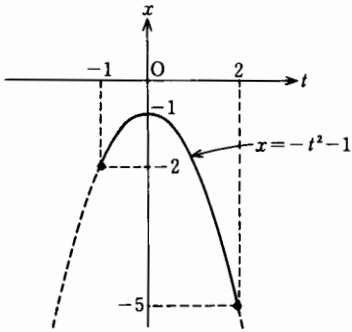
解　説　t に対する x，y の変化を調べると

$$x=-t^2-1$$

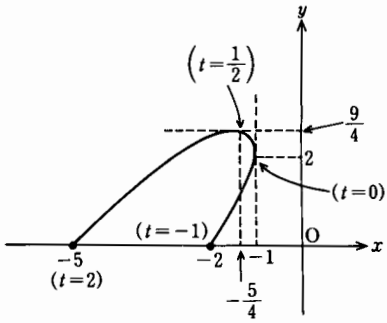
$$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

$$\left(\begin{array}{c} y=0 \text{ になるのは，} -t^2+t+2=-(t-2)(t+1)=0 \\ \therefore\quad t=2,\ -1 \end{array}\right)$$





まず「t-y グラフ」から $-1\leqq t\leqq 2$ について考えればよいことがわかる．次に「t-x グラフ」を見ると x は $-1<t<0$ で増加し，$0<t<2$ で減少する．これに対して y は $-1<t<0$ で増加し，さらに $0<t<\frac{1}{2}$ でも増加を続け，以後減少する．これらのこと



を「x-y グラフ」でとらえるとグラフの概形は前ページの図のようになる．

このことから求める立体の体積 V は

$$V=\int_2^{-1}\pi y^2\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$=\pi\int_2^{-1}(-t^2+t+2)^2(-2t)\,dt$$

$$=2\pi\int_{-1}^{2}(t^5-2t^4-3t^3+4t^2+4t)\,dt$$

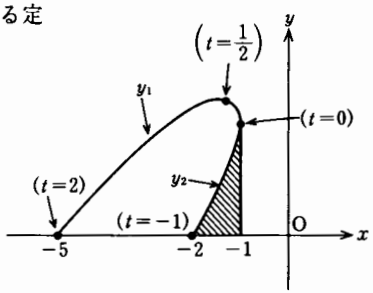
$$=2\pi\left[\frac{t^6}{6}-\frac{2}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4+\frac{4}{3}t^3+2t^2\right]_{-1}^{2}$$

$$=2\pi\left(\frac{63}{6}-\frac{66}{5}-\frac{45}{4}+12+6\right)=\boldsymbol{\frac{81}{10}\pi}$$

らしんばん

パラメーターで与えられる曲線の「回転体」の体積であるが，このままではどのような図形なのか全くわからない——本問についていえば，「x 軸とで囲まれた部分……」に着目して $y=0$ となる t の値 $t=2$，-1 を求め $-1\leqq t\leqq 2$ で x，y の変化を調べて，グラフの概形を求めた——**x，y の変化が t の変化に対して「単調でない」ところがむずかしい．**

本文の①についてはマジメに体積を求める定積分の式をたてて



$$V=\int_{-5}^{-1}\pi y^2\,dx-\int_{-2}^{-1}\pi y^2\,dx$$

$$=\int_2^0\pi y^2\frac{dx}{dt}\,dt-\int_{-1}^{0}\pi y^2\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_2^0\pi y^2\frac{dx}{dt}\,dt+\int_0^{-1}\pi y^2\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_2^{-1}\pi y^2\frac{dx}{dt}\,dt$$

と考えるとよくわかる．$t=2$ から -1 までを最初から積分することにより，**$-2\leqq x\leqq -1$ の斜線部分が「自動的」にくりぬかれるところがおもしろい．**

なお図形の状況によっては，パラメーター t による定積分

$$\int_\alpha^\beta\pi y^2\frac{dx}{dt}\,dt$$

で，$\alpha<\beta$ とはかぎらない．本問は $\alpha>\beta$ の例である．

t を消去して，x と y のナマの関係を求めることはできないか．

$$\begin{cases}t^2+x+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\\ t^2-t+y-2=0\end{cases}$$

辺々ひいて

$x+1+t-y+2=0$

$\therefore\quad t=y-x-3$

これを(＊)に代入して整理すると

$x^2-2xy+y^2$

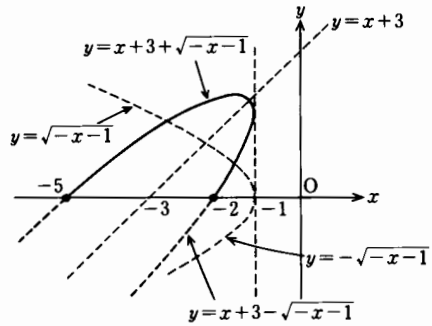
$\quad +7x-6y+10=0$……(＊＊)

これを y について解いてみる．

$y^2-2(x+3)y+x^2+7x+10=0$

$\therefore\quad \{y-(x+3)\}^2+x+1=0$

$\therefore\quad y=(x+3)\pm\sqrt{-x-1}$



これより体積 V は

$$V=\int_{-5}^{-1}\pi\{x+3+\sqrt{-x-1}\}^2\,dx-\int_{-2}^{-1}\pi\{x+3-\sqrt{-x-1}\}^2\,dx$$

を計算すればよい．

少しメンドウだが，展開して $\sqrt{-x-1}=t$ とおくと，「置換積分法」により上と同じ結果が得られる．

ちなみに（＊＊）がどんな2次曲線か．

一般に x，y の2次方程式

$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$ ……（＊＊＊）

で，$D=ab-h^2$ とすると（＊＊＊）は

$D>0$ ならば楕円（または円）

$D=0$ ならば放物線（または平行2直線）

$D<0$ ならば双曲線（または交わる2直線）

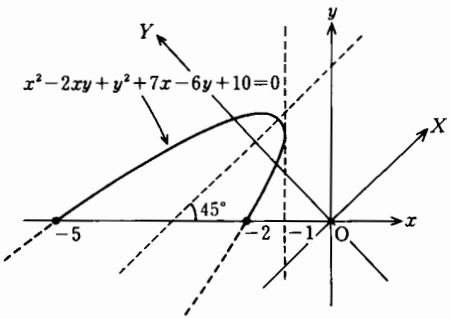
を表す

——代数幾何!!

そこで D を計算してみると

$D=ab-h^2=1\cdot1-1^2=0$

で，この曲線は「放物線」であることがわかり，$\tan 2\theta=\dfrac{2h}{a-b}$ の分母に注目するとこれが「$a-b=1-1=0$」であることから，座標軸を45°回転することにより「標準形」に変形されることもわかる．



$\left(\ \left(Y-\dfrac{13\sqrt{2}}{8}\right)^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(X-\dfrac{9\sqrt{2}}{16}\right)$ になる $\ \right)$

例題 18

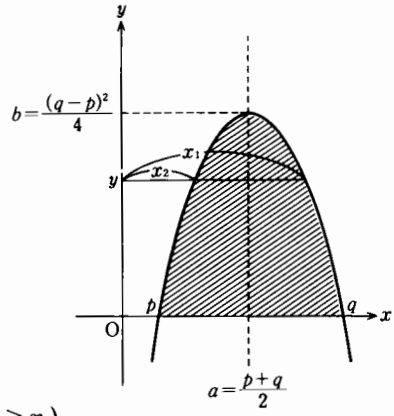
$0<p<q$ とする．
座標平面上で，

$$0 \leqq y \leqq (x-p)(q-x)$$

を満たす部分を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ．

解　説　境界線を表す放物線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= (x-p)(q-x) \\ &= -x^2+(p+q)x-pq \\ &= -\left(x-\frac{p+q}{2}\right)^2+\frac{(q-p)^2}{4} \cdots\cdots ① \end{aligned}$$



ここで，$\dfrac{p+q}{2}=a$，$\dfrac{(q-p)^2}{4}=b$ とおき，x について解くと

$$(x-a)^2=b-y \quad (\geqq 0)$$

$$\therefore \quad x-a=\pm\sqrt{b-y}$$

すなわち図の x_1，x_2 は

$$x_1=a+\sqrt{b-y}, \quad x_2=a-\sqrt{b-y} \quad (x_1 \geqq x_2)$$

ゆえに求める立体の体積は外側の回転体から内側の回転体をひいて，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^b \pi x_1{}^2\,dy-\int_0^b \pi x_2{}^2\,dy \\ &= \pi\int_0^b (x_1{}^2-x_2{}^2)\,dy=\pi\int_0^b (x_1+x_2)(x_1-x_2)\,dy \\ &= \pi\int_0^b 2a(x_1-x_2)\,dy \\ &= \pi(p+q)\int_0^b (x_1-x_2)\,dy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ &= 2\pi(p+q)\int_0^b \sqrt{b-y}\,dy=2\pi(p+q)\left[-\frac{2}{3}(b-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b \\ &= 2\pi(p+q)\cdot\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}(p+q)(q-p)^3} \end{aligned}$$

らしんばん

本問の図形はドーナツ状になる――このような図形を「環体」ということもある．

➡ ②に注目!! この式の $\int_0^b (x_1-x_2)\,dy$ は，図の放物線と x 軸とで囲まれる部分の面積である．これを S とおくと

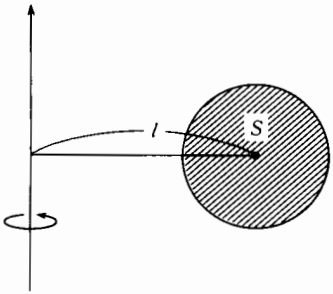
$$S=\underbrace{\int_0^b (x_1-x_2)\,dy}_{(y\text{ 方向に積分})}=\underbrace{-\int_p^q (x-p)(x-q)\,dx}_{(x\text{ 方向に積分})}=\frac{(q-p)^3}{6}$$

この式を②に代入すれば，いくらか計算は簡単にいく．

➡ ②について「もう少し別の読み方」を説明しておこう．回転軸から放物線の対称軸までの距離を l とすると②は

$$V=2\pi lS \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

に書きかえられる．$\left(l=\dfrac{p+q}{2}\right)$



これは，この「ドーナツ」をどこか1ケ所で切って伸ばしたものの体積を，高さ $2\pi l$，底面積 S の柱とみなして計算できる，という「感じ」である．

一般に回転する図形の面積を S，回転軸からこの図形の重心までの距離を l とすると，上の(＊)がその「環体」の体積を与えることが知られている．

これを「パップス・ギュルダンの定理」という――「重心」の定義についてはここでは触れないが，「その図形の中心」という程度の理解で十分である．

この結果は知っておくと都合がよい．

「環体」の体積＝(円周)×(断面積)

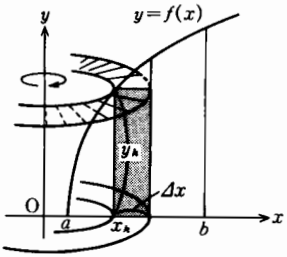
というのが，いかにも自然でおもしろい．

➡ このような立体の体積を求める方法を参考までにもう1つ説明しておく．

たとえば，本問の体積 V は

$$V=\int_p^q 2\pi xy\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

で与えられる．なぜか――それは，この立体を「輪切り」にすることにより説明される．(はやいハナシがバウムクーヘンの薄皮を1枚1枚に「はがす」のである．)



右図で，区間 $a\leqq x\leqq b$ を n 等分し，その1つを Δx とすれば，半径 x_k と $x_k+\Delta x$ との間にはさまれる薄皮の部分（高さ y_k とみなす）の微小体積は

$$\pi(x_k+\Delta x)^2y_k-\pi x_k{}^2y_k$$
$$=\pi\{2x_ky_k\Delta x+(\Delta x)^2y_k\}$$

であるから，求める体積は

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\{2x_ky_k\Delta x+(\Delta x)^2y_k\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\pi x_ky_k\Delta x+\lim_{n\to\infty}\pi\underbrace{\Delta x}_{\downarrow\ 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}y_k\Delta x}_{\downarrow\ S}$$

（S は上図の $y=f(x)$ と x 軸，$x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積）

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\pi x_ky_k\Delta x=\int_a^b 2\pi xy\,dx$$

になる．（ただし，これが実用的である場合はそう多くない）

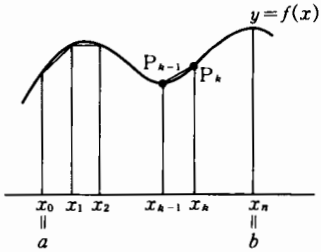
本問についてやっておこう．(**)から

$$V=\int_p^q 2\pi xy\,dx=\int_p^q 2\pi x\cdot(x-p)(q-x)\,dx$$
$$=-2\pi\int_p^q x(x-p)(x-q)\,dx=-2\pi\int_p^q(x-p+p)(x-p)(x-p+p-q)\,dx$$
$$=-2\pi\int_p^q\{(x-p)^3+(2p-q)(x-p)^2+p(p-q)(x-p)\}\,dx$$
$$=-2\pi\left[\frac{(x-p)^4}{4}+\frac{2p-q}{3}(x-p)^3-\frac{p(q-p)}{2}(x-p)^2\right]_p^q$$
$$=\frac{\pi}{6}(p+q)(q-p)^3$$

で，先に求めた結果と一致する．

---

(3)　曲線の長さ



「定積分」を用いて，曲線の長さを求めることができる．

曲線 $y=f(x)$ の，$a\leqq x\leqq b$ の部分の長さを求めることを考えてみよう．$f(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で連続な導関数をもつものとする．

いま，この区間を n 等分し，分点を a に近い方から順に

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_k,\ \cdots\cdots x_{n-1}\qquad(\text{ただし，}x_0=a,\ x_n=b)$$

とすれば，各 x_k ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$) に対して曲線上の点 $P_k(x_k, f(x_k))$ が定まる．そこで隣り合う 2 点

$$P_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1})),\ P_k(x_k,\ f(x_k))$$

を結ぶ線分の長さは

$$\overline{P_{k-1}P_k}=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}$$

ここで「平均値の定理」を用いると

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(c_k)(x_k-x_{k-1})\quad(x_{k-1}<c_k<x_k)$$

となる c_k が存在するから，上の線分の長さは

$$\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f'(c_k)(x_k-x_{k-1})\}^2}$$
$$=\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}(x_k-x_{k-1})\quad (x_k>x_{k-1}\ \text{とする})$$

求める曲線の長さは，このような線分の長さの和

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\Delta x\quad (\Delta x=x_k-x_{k-1})$$

で近似され，$n\to\infty$ $(\Delta x\to 0)$ としたときの極限値として与えられるから，これを「定積分」で書きかえると

$$\boldsymbol{L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\Delta x}$$
$$\boldsymbol{=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\Delta x}\ (\Delta x\to 0\ \text{のとき}\ c_k\to x_k)$$
$$\boldsymbol{=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

なお，この曲線上の点 (x, y) がパラメーター t を用いて表され，

$$\frac{dx}{dt}>0$$

x	$a\longrightarrow b$
t	$\alpha\longrightarrow\beta$

ならば「置換積分法」を用いて①の L は

$$\boldsymbol{L}=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dt}dt\qquad\left(\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)$$
$$\boldsymbol{=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

のように書きかえられる．①，②とも重要な公式であるから，いずれの形でも扱えるようになっておかなければならない．

注 ②で，パラメーター t を時間にとれば，$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}$，$\boldsymbol{\frac{dy}{dt}}$ **はそれぞれ動点 $\mathrm{P}(x, y)$ の x 方向，y 方向の速度成分**を表し(p. 144 参照)，したがって $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ は動点 P の速度の大きさ（速さ）を表していることになる．そこで②は，「基礎解析」ですでに学んだ直線運動の「道のり」を与える公式 $\int_{t_1}^{t_2}|v|\,dt$ を，x-y 平面上の曲線の上を動く動点のハナシにまで拡張したものと理解すればよい．

例題 19

アステロイド（星芒形）は次の方程式

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad (\text{ただし，}a>0)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

で与えられる．

(1) $x_0y_0\neq 0$ として，この曲線上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程

式を求め，x，y 両座標軸がこれから切りとる線分の長さを求めよ．

(2)　この曲線の全長を求めよ．

解　説　(1)　両辺を x で微分すれば

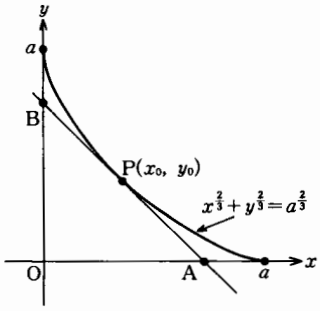
$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0 \qquad \therefore \quad y'=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

ゆえにこの曲線上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$y-y_0=-\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)$$

$$\therefore \quad y_0{}^{-\frac{1}{3}}y-y_0{}^{\frac{2}{3}}=-x_0{}^{-\frac{1}{3}}x+x_0{}^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad x_0{}^{-\frac{1}{3}}x+y_0{}^{-\frac{1}{3}}y=x_0{}^{\frac{2}{3}}+y_0{}^{\frac{2}{3}}$$



ここで，点 $P(x_0, y_0)$ はこの曲線上の点であるから与えられた方程式をみたす．

$$\therefore \quad x_0{}^{\frac{2}{3}}+y_0{}^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

ゆえに $P(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{x_0{}^{-\frac{1}{3}}x+y_0{}^{-\frac{1}{3}}y=a^{\frac{2}{3}}} \quad \cdots\cdots ②$$

これと x 軸，y 軸との交点 A，B の座標は

A は②で $y=0$ として $x=a^{\frac{2}{3}}x_0{}^{\frac{1}{3}}$　$\therefore$　$A(a^{\frac{2}{3}}x_0{}^{\frac{1}{3}}, 0)$

B は②で $x=0$ として $y=a^{\frac{2}{3}}y_0{}^{\frac{1}{3}}$　$\therefore$　$B(0, a^{\frac{2}{3}}y_0{}^{\frac{1}{3}})$

$$\therefore \quad \overline{AB}^2=(a^{\frac{2}{3}}x_0{}^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}y_0{}^{\frac{1}{3}})^2$$

$$=a^{\frac{4}{3}}(x_0{}^{\frac{2}{3}}+y_0{}^{\frac{2}{3}})=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^2 \qquad \therefore \quad \mathbf{AB}=\boldsymbol{a}$$

(2)　この曲線は x 軸，y 軸について対称であるから，第1象限の部分の長さを求め，4倍すればよい．

$$1+(y')^2=1+\left\{-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}} \quad (x>0)$$

そこで，「曲線の長さ」を求める公式（前ページの①）を用いて

$$\frac{L}{4}=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx=a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a=\frac{3}{2}a$$

$$\therefore \quad L=\boldsymbol{6a}$$

らしんばん

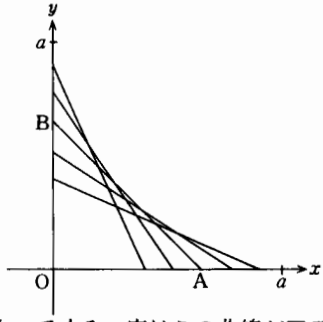
この曲線の概形をつかむにはどうすればよいか．$x>0$，$y>0$ にかぎると，

ともあれ

(i) 式の形から $y=x$ について対称

(ii) $y'<0$ より y は単調減少

(iii) 少しがんばって $y''>0$ がいえれば下に凸であることもわかる.



さらに本問(1)でこれらに加えて次のような情報が与えられることになる. すなわち, 長さ a (一定) の線分の両端 A, B をそれぞれ x 軸, y 軸上において動かし, このような線分をたくさん描くと 1 つの曲線の概形が浮かび上ってくる. 実はこの曲線がアステロイドなのである——図はこの状況を示したものである.

ついでに曲線

$$x^a+y^a=1 \cdots\cdots\cdots (*)$$

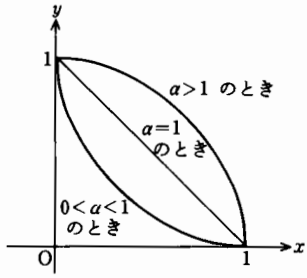
の概形も知っておくと便利がよい.

$$x^2+y^2=1 \quad (円)$$

$$x+y=1 \quad (直線)$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1 \quad (アステロイド)$$

を参考にすると(*)の表す曲線の概形が $a>1$, $a=1$, $0<a<1$ にしたがって図のようになるであろうことは容易に想像できる.



この曲線にもう少しつきあってみよう.

曲線①の両辺を $a^{\frac{2}{3}}$ で割ると

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

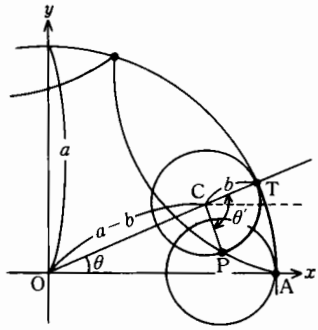
であるから

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos\theta,\ \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\sin\theta$$

とおくことができて①で与えられる曲線上の点 (x, y) は

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

で表される——アステロイドのパラメーター表示!!



そこでわれわれとしては, 「このような θ の図形的意味」が知りたい. 一般的なハナシからはじめよう. 図のように半径 a の円 C_1 の内側を半径 b $(a>b)$ の円 C_2 が「すべることなく転 (ころ) がる」とき, 最初 A にかさなっていた C_2 上の点 $P(x, y)$ のえがく曲線を考える. C_2 が θ' だけ

転がって図の位置にきたとすれば，

$$\overset{\frown}{\mathrm{PT}}=\overset{\frown}{\mathrm{AT}} \quad \therefore \quad a\theta=b\theta' \quad \therefore \quad \theta'=\frac{a}{b}\theta$$

ゆえに C_2 の中心を C とすれば $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と x 軸の正方向とのなす角は

$$\theta-\theta'=\theta-\frac{a}{b}\theta=-\frac{a-b}{b}\theta$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を成分で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-b)\cos\theta \\ (a-b)\sin\theta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b\cos\left(-\dfrac{a-b}{b}\theta\right) \\ b\sin\left(-\dfrac{a-b}{b}\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=(a-b)\cos\theta+b\cos\dfrac{a-b}{b}\theta \\ y=(a-b)\sin\theta-b\sin\dfrac{a-b}{b}\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

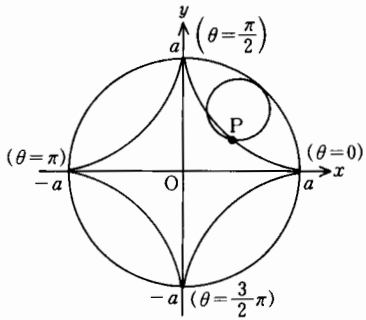
である．このような曲線も先に述べた「サイクロイド」(p. 196 **例題 13**) の一種で，「**ハイポサイクロイド**」という．

この曲線で特に「$\boldsymbol{a=4b}$ **のとき**」を調べてみると，(***)の2式は

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)=a\cos^3\theta \\ y=\dfrac{a}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)=a\sin^3\theta \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{「3倍角の公式」から} \\ \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta \\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{array}\right)$$

である．これは(**)に他ならない．

➡ アステロイドをパラメーター表示するとこの曲線が囲む部分の面積を求めることができる．全体の面積を S とすると



$$\frac{S}{4}=\int_0^a y\,dx$$

ここで，

$$y=a\sin^3\theta$$
$$dx=-3a\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

とおきかえると

$$\frac{S}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta(-3a\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=3a^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta\right\}$$

$$=3a^2\left\{\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right\} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{この公式は，ふりまわしたくは} \\ \text{ないが……}\ \text{p. 180 参照!!}\end{array}\right)$$

$$=\frac{3\pi}{32}a^2 \quad \therefore \quad S=\frac{3\pi}{32}a^2\times4=\frac{3\pi}{8}a^2$$

である．

➡ パラメーター表示されたアステロイドの全長は「もう1つの公式（p. 210 の②)」を用いて

$$\frac{L}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

で求めることもできる――各自で確かめよ．ここでは「パラメーター表示された曲線の長さを求める例」として，先に述べた「サイクロイド」の場合をあげておく．サイクロイドのパラメーター表示は

$$\begin{cases} x=at-a\sin t \\ y=a-a\cos t \end{cases} \quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

であったから

$$\frac{dx}{dt}=a-a\cos t,\ \frac{dy}{dt}=a\sin t$$

$$\therefore\quad L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt\quad\left(0\leqq\frac{t}{2}\leqq\pi\ \text{より}\ \sin\frac{t}{2}\geqq 0\right)$$

$$=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$$

---

(4) 物理的な問題について

ニュートンは，「微積分」を用いて「力（ちから）」というものを説明した――「微積分」は「自然現象を読みとる“ことば”」でもあったのである．したがって入試問題にも「微積分の応用」として「物理的な問題」の出題が少なくない．

以下例題で説明する．

例題 20

一直線上に距離 L だけ離れた2つの駅がある．一方の駅を出発して他方の駅まで所要時間 $T\ (>0)$ で電車を運転する．このとき電車の加速度 $\alpha(t)$ は次のように与えられるものとする．

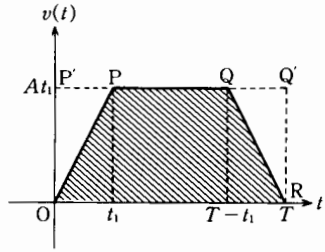
$$\alpha(t)=\begin{cases} A & (0\leqq t<t_1) \\ 0 & (t_1\leqq t<T-t_1) \\ -A & (T-t_1\leqq t\leqq T) \end{cases}$$

（ただし，A，t_1 は正の数で，$t_1<\dfrac{T}{2}$ とする）

(1) L を A，t_1 および T で表せ．

(2)　電車を運転する費用は，加速度の2乗を全運転時間にわたって積分したものに比例すると考える．運転時間を一定にして，運転費用を最小にするには，A，t_1 をどのように選べばよいか．

解　説　(1)　加速度 $\alpha(t)$ は，速度 $v(t)$ を時間 t で微分したものであるから，まず $v(t)$ を求める．



(i)　$0 \leqq t < t_1$ のとき，

$$v(t)=v(0)+\int_0^t A\,dt=At$$

(ii)　$t_1 \leqq t < T-t_1$ のとき，$\alpha(t)=0$ から $v(t)$ は一定で，$v(t_1)$ に等しい．$v(t_1)$ は(i)で $t=t_1$ とすればよいので

$$v(t)=v(t_1)=At_1$$

(iii)　$T-t_1 \leqq t \leqq T$ のとき

$$\begin{aligned} v(t)&=v(T-t_1)+\int_{T-t_1}^t(-A)dt \\ &=At_1+\Big[-At\Big]_{T-t_1}^t \\ &=At_1-At+A(T-t_1) \\ &=AT-At \end{aligned}$$

以上のことから t に対する $v(t)$ の関係をグラフに示すと上図のようになる．

ゆえに求める距離 L は，$v(t)>0$ に注意して

$$\begin{aligned} L&=\int_0^{t_1}At\,dt+\int_{t_1}^{T-t_1}At_1\,dt+\int_{T-t_1}^{T}(-At+AT)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots ① \\ &=\left[A\frac{t^2}{2}\right]_0^{t_1}+\Big[At_1\cdot t\Big]_{t_1}^{T-t_1}+\left[-A\frac{t^2}{2}+ATt\right]_{T-t_1}^{T} \\ &=\boldsymbol{At_1(T-t_1)} \end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned} \int_0^T\{\alpha(t)\}^2\,dt&=\int_0^{t_1}A^2\,dt+\int_{t_1}^{T-t_1}0\,dt+\int_{T-t_1}^{T}(-A)^2\,dt \\ &=2A^2t_1 \end{aligned}$$

ゆえに費用を c，比例定数を $k(>0)$ として

$$c=k\cdot(2A^2t_1)=2k\left(\frac{L}{t_1(T-t_1)}\right)^2t_1 \qquad (\because\ (1)より\ L=At_1(T-t_1))$$

$$=\frac{2kL^2}{t_1(T-t_1)^2}$$

この分子は一定であるから分母が最大となるときを調べればよい．t_1 を x とおくと分母は

$$f(x)=x(T-x)^2$$

$$\left(0<x<\frac{T}{2}\right)$$

x	0	…	$\frac{T}{3}$	…	$\frac{T}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	最大	↘	

$$\therefore\quad f'(x)=(T-x)^2-2x(T-x)=\underbrace{(T-x)}_{(正)}(T-3x)$$

ゆえに分母は $x=t_1=\dfrac{T}{3}$ で最大となり，したがってこの時 c は最小で，求める A と t_1 の値は

$$t_1=\boldsymbol{\frac{T}{3}},\quad A=\frac{L}{t_1(T-t_1)}=\boldsymbol{\frac{9L}{2T^2}}$$

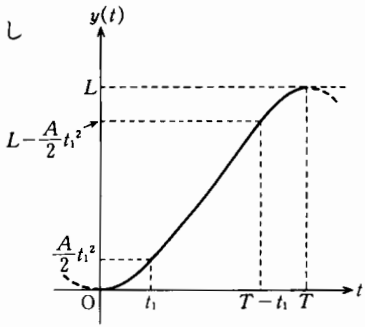
らしんばん

(1)の①以下は「基礎解析」でも学んだ「道のり」を求める公式 $\int_{t_1}^{t_2}|v(t)|\,dt$ であるが，実はこれは本文中の図でもわかるように，**$v(t)$ のグラフと x 軸とで囲まれた図形（本問でいえば台形OPQR）の面積**（斜線部分）に他ならない．したがって △OP′P，△RQ′Q，長方形OP′Q′R をにらんで，

$$T\times At_1-At_1^2$$

を計算すればよい．

なお，出発した駅からの距離を $y(t)$ として，この電車の運行状況を調べると



(i) $0\leqq t<t_1$ のとき

$$y(t)=y(0)+\int_0^t At\,dt=\frac{A}{2}t^2$$

(ii) $t_1\leqq t<T-t_1$ のとき

$$y(t)=y(t_1)+\int_{t_1}^t At_1\,dt$$

$$=\frac{A}{2}t_1^2+At_1(t-t_1)$$

(iii) $T-t_1\leqq t\leqq T$ のとき

$$y(t)=y(T-t_1)+\int_{T-t_1}^t -A(t-T)\,dt$$

$$=\left\{\frac{A}{2}t_1^2+At_1(T-2t_1)\right\}+\left[-A\frac{(t-T)^2}{2}\right]_{T-t_1}^t$$

$$=At_1(T-t_1)-\frac{A}{2}(t-T)^2=L-\frac{A}{2}(t-T)^2\quad(\because\quad At_1(T-t_1)=L)$$

のようになり，図のようなグラフが得られる．

「変化する量の総和を求める原理」について——結論からいうと，上でやったように積分すればよいのだが，もう少しくわしく説明しておく．

等速直線運動で，「進んだ距離」を求める公式は

「進んだ距離」＝「速さ」×「時間」……(＊)

である．しかし，この「速さ」が「時間とともに変化する量」であるときはどうすればよいか——**そのときは，この運動を等速運動とみなすのに十分なほど時間を細分化して考える．(つまり「積分」する!!)**

たとえば，十分短い時間 Δt_k（この場合の Δt_k はふつうかかった時間の n 分の1にとる）の間に動点Pが等速度 v_k で進んだとみなせるならば，この間に進んだ距離は，$v_k \times \Delta t_k = v_k \Delta t_k$ となる．したがってこれらの総和は $\sum_{k=1}^{n} v_k \Delta t_k$ で，この n を限りなく大きくとることにより，t が t_1 から t_2 まで変化する間の動点Pの「変位（この間でつねに $v_k > 0$ ならば進んだ距離）L」は次のように求められる．

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} v_k \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt \quad \left(\begin{array}{l} v(t) \text{ が一定ならば，これは} \\ (*)\text{そのもの!!} \end{array}\right)$$

——本問(1)の①に示した積分は実はこうした意味をもっているわけである．このような考え方は上にのべた直線運動にかぎらずいろいろな場合に適用される．

たとえば，断面積 S の管を通って流れる水の速度が時刻 t において $v(t)$ であるとき，$t = t_1$ から t_2 までの間に流れる水の量 V は

$$V = \int_{t_1}^{t_2} S \cdot v(t)\, dt \quad (t_2 > t_1)$$

(水の量＝単位時間の流出量×時間＝断面積×速度×時間)

で与えられる．

また，加えられる力が物体の位置 x の関数 $f(x)$ で与えられるとき，この物体を x 軸に沿って $x = a$ の位置から $x = b$ の位置 $(b > a)$ まで動かすときの「仕事（＝力×距離）」W は

$$W = \int_a^b f(x)\, dx$$

である．

この他「電気量」，「エネルギー」など「変化する量の総和」を，そのときのパラメーターで積分して求める例は多い．

例題 21

原点Oを通り，$x \geqq 0$ で単調増加であるような曲線 $y = f(x)$ の，$x \geqq 0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる容器を，鉛直方向を y 軸にとって，水をいれた．この容器の底に穴をあけ，水を流し出すとき，その流出速度は水の深さの平方根 $\sqrt{y}$ に比例する．

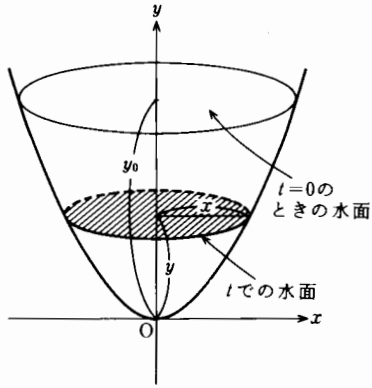
このとき，水面の降下速度を一定にするには，$f(x)$ をどのように定めればよいか．

解　説　深さ y のときの水の体積は

$$V=\int_0^y \pi x^2\,dy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であるからこの両辺を t で微分すると

$$\frac{dV}{dt}=\pi x^2\frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



一方，水の流出速度は $k\sqrt{y}$ $(k>0)$ で，「(減少速度)＝－(流出速度)」だから

$$\frac{dV}{dt}=-k\sqrt{y}$$

これを②に用いると

$$-k\sqrt{y}=\pi x^2\frac{dy}{dt} \quad (k>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，水面の高さは時間とともに減少するから，$\dfrac{dy}{dt}=-a$ $(a>0)$ とおくと③は

$$-k\sqrt{y}=\pi x^2(-a) \qquad \therefore\ \sqrt{y}=\frac{\pi a}{k}x^2 \qquad \therefore\ y=\frac{\pi^2a^2}{k^2}x^4$$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=Ax^4}\ (A>0)$$

（これは O を通り $x\geqq 0$ で単調増加，水面の降下速度は $\dfrac{k\sqrt{A}}{\pi}$）

らしんばん

水の流出（あるいは流入）に関する典型的なタイプの問題である．

ポイントは

(i)　①をキチンと立式できること⟶ 一般には $V=\int_0^y S(y)\,dy$

(ii)　①の両辺を「t で微分」する（これがわかりにくい!!）――「合成関数の微分法」!!

この 2 点をおさえれば，「何をやればよいか」が見えてくる．

また，本問は

$\dfrac{dV}{dt}$……体積増加率　$\left(\text{減少のときは } \dfrac{dV}{dt}<0\right)$

$\dfrac{dy}{dt}$……水面の上昇速度　$\left(\text{降下のときは } \dfrac{dy}{dt}<0\right)$

のハナシであるが，場合によっては $\frac{dS}{dt}$（水面の広がる速さ），あるいは $V=0$ になるまでに要する時間などを求めさせたりするときもある．

いずれにしても問題文をよく読んで，「求めるものを文字式でキチンと表現できるようになっておく」ことが大切である．

2　微分方程式

(1)　微分方程式——変化の基本法則の表現

y が x の関数であるとき，x，y，および y'（y'' などの高次導関数をふくむ場合もある）についての等式を「微分方程式」という——最高次のものが n 次導関数ならば，これを n 階の微分方程式という．そして，「この等式を満たすために，y は x のどのような関数であることが必要十分か」を定めることを「微分方程式を解く」という．

微分方程式について，その形式の上から説明すれば以上のようなことになるのだが，それを内容の上から理解するためには「微分方程式のはたす役割」という立場から，もう少しくわしく説明しなければならない——実は「微分方程式」は，力学，電磁気学その他の物理学の分野はもちろんのこと，いまや科学の多くの分野でその核心的な役割をになっており，近代的な思考方法の重要な要素ともなっている．

一般に，「事物の変化の基本法則」は微分方程式でとらえられることが少なくない．そして，それをそれぞれの条件下で解くことによって，「その基本法則がその条件下で働いたとき，どのような結果がもたらされるか」が明らかになるのである．

たとえば，ある種の細菌が1時間毎に2倍に繁殖し，50時間後にコップ一杯になったとする．この変化の状況を逆にたどっていくと，49時間目には半分，48時間目には4分の1，47時間目には8分の1であったはずである．さらにもう少し前の時刻である40時間目については 2^{-10}（約1000分の1）で，はじめのうちの変化の状況はほとんど目に見えない程度なのだが，あとになればなるほどその変化は大きくなり，しまいの数時間で急激にふえていることがわかる．しかしこのことは，細菌の繁殖のペースにラスト・スパートがかかっているわけではない．個々の細菌は終始一貫して同じ法則の

もとで繁殖しているにもかかわらず，全体としてはこのような結果になってしまうのである．

この現象を「数学的に記述する」にはどうすればよいか——微分方程式を利用する．

上にのべた細菌の例でいえば，この現象をつらぬく基本法則は時刻 t における細菌の数を P とするとき，その増加率 $\dfrac{dP}{dt}$ がつねに P に比例していることにある．このことは微分方程式

$$\frac{dP}{dt}=kP \quad (k=2)$$

で表される．

もう1つ例をあげると放射性物質の崩壊がある．これは上の例とちがって時間とともにその物質の量が減少し，その減少する速度の大きさはそのときの物質の量に比例する．したがってこのときの変化の状況も上と「同じ形」の微分方程式を用いて表されるが比例定数 k は負の値となる．

いずれにしても，これらの現象を支配している基本法則は

$$\frac{dy}{dx}=ky \quad \cdots\cdots ①$$

という形の微分方程式を用いて記述されていることに注目したい．

高校数学の範囲で扱える微分方程式のタイプはそう多くはないが，特に①の形をしたものは，

$$\frac{dy}{dx}=k \quad (\text{変化率が一定})$$

の形をしたものとならんでどの教科書にもあらわれる．それは，この形の変化の法則そのものが，きわめて基本的な形をしているからである．

①の微分方程式の解き方については後で解説するとして，これを解いた結果は

$$y=Ce^{kx} \quad (C\ \text{は任意定数})$$

の形になる——これは①を満たし，しかも①を満たすものはこの形のものしかない．ところで C はどういう意味をもっているのか．

細菌の繁殖の例にハナシをもどそう．

$$\frac{dP}{dt}=kP \iff P=Ce^{kt} \quad (C\ \text{は任意定数})$$

であった．しかし，この定数 C の値をきめたいと思ってもこの値は微分方程式だけからはきまらない．それは「**微分方程式というものが単に変化の法**

則を示しているにすぎない」からである．

それでは，この任意定数 C の値をきめるにはどうすればよいか――それは，この例でいえばはじめの細菌の数が問題で，これがきまれば時刻 t における細菌の数がきまる．すなわち，$t=0$ のとき $P=P_0$ であるとすればこれらを代入して

$$P_0=Ce^0=C \qquad \therefore \quad P=P_0e^{kt}$$

となる．

微分方程式の解の中に**任意定数 C** がはいっているのは，計算の形式からいえば不定積分を求めるときの積分定数というほどの意味でしかないが，内容的には**微分方程式**というものの本質が「**さまざまな場合に適用できる基本法則の表現**」であって，その解に各現象の具体的な条件（初期条件など）を与えることにより任意定数 C の値がきまり，したがってその法則の具体的な現象に関する表現が確定することになるわけである．

ここでは①の形の微分方程式を例にひいて説明したが，他の形のものについても考え方は同様である．

（2）　いろいろな微分方程式とその解き方の基本

微分方程式を一般的に解くのは容易ではないが，いくつかのものについてはわれわれの知識の範囲内で処理できる――目で見てすぐにわかるものは別として，以下基本的なタイプの微分方程式とその扱い方のいくつかを実例で解説する．

例題 22

次の微分方程式を解け

(1) $\dfrac{dy}{dx}=ky$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y-2}(y>2)$　　(3) $\dfrac{dy}{dx}=xe^{2y}$

解　説　(1)　y が恒等的に 0（以下 $y\equiv0$ と書く）ではない（$y\not\equiv0$）とき，$y\not\equiv0$ のときがあるから，両辺を y でわると

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=k \qquad \left(\begin{array}{l}y\not\equiv0 \text{ であるような } x \text{ の範囲}\\ \text{について考えている}\end{array}\right)$$

この両辺を x で積分すると

$$\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx=\int k\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

この左辺に置換積分法の公式――**便宜的に「左辺の dx を約分」する**――

を適用すると

$$\int \frac{1}{y}\,dy=\int k\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\therefore \quad \log|y|=kx+C_1 \qquad \therefore \quad |y|=e^{kx+C_1}=e^{C_1}e^{kx}$$

$$\therefore \quad y=\pm e^{C_1}e^{kx}$$

ここで，$\pm e^{C_1}$ をあらためて C とおきかえると求める y は

$y=Ce^{kx}$ （ただし $C=\pm e^{C_1}$—— 0 でない任意定数） ……③

また，y が恒等的に 0 であるとき，これは明らかに与えられた微分方程式を満たすから，これも③の形に含めて求める y は次のようになる．

$\boldsymbol{y=Ce^{kx}}$ （$\boldsymbol{C}$ は任意の定数）

これは明らかに与えられた微分方程式を満たす．（以下，この確認は省略する．）

(2) 分母を払うと

$$(y-2)\frac{dy}{dx}=-(x-1)$$

であるから両辺を x で積分すると

$$\int (y-2)\frac{dy}{dx}\,dx=\int -(x-1)\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$$\therefore \quad \int (y-2)\,dy=-\int (x-1)\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(y-2)^2=-\frac{1}{2}(x-1)^2+C_1$$

$$\therefore \quad (x-1)^2+(y-2)^2=2C_1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=C} \ \ (C=2C_1,\ \ y>2)$$

(3) $e^{-2y}\dfrac{dy}{dx}=x$

と変形して両辺を x で積分すると

$$\int e^{-2y}\frac{dy}{dx}\,dx=\int x\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$\therefore \quad \int e^{-2y}\,dy=\int x\,dx \qquad \therefore \quad -\frac{1}{2}e^{-2y}=\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{e^{-2y}=C-x^2} \quad (C=-2C_1)$$

（(2)，(3)のような場合，特に指示がなければ「$y=\cdots\cdots$」の形で答えなくてもよい．）

らしんばん

本問の(1)，(2)，(3)に共通していえることは，①，④，⑤の左辺ではいずれも「置換積分法」を利用しているが，これらは**事実上「変数 y についての積分」である**，という点にある．

もう少しくわしく説明すると，たとえば(1)の「① →②」の変形は，**内容としては「置換積分法」として理解すべきことがら**ではあるが，**この微分方程式を解くには「結果として②が約束されればよい」**わけだから，式変形に少し「形式上の」くふうをすれば，与えられた微分方程式からいきなり②をつくってしまうことができる．

それにはまず，与えられた等式で $\dfrac{dy}{dx}$ の「dx」と「dy」とを切り離し，これらに「形式的な分数計算」を許して変数 x はすべて右辺に，変数 y はすべて左辺に整理する．すなわち

$$\frac{1}{y}\,dy=k\,dx \qquad \left(\begin{array}{l}\text{変数 } x \text{ と変数 } y \text{ が右辺と}\\ \text{左辺に分離された!!}\end{array}\right)$$

次にこの両辺に，これも「形式的に」$\int$ をつけると

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int k\,dx$$

となり，これは本文の②に他ならない――「形式的な」変形だけで②が得られたことに注目したい――このようにして変数 x，y を両辺に分離することができるタイプの微分方程式を**「変数分離形」の微分方程式**とよんでいる．そしてこれは微分方程式を解く上で最も基本的なものの1つである．

本問(2)，(3)を上にならって変形すると

(2)：$(y-2)\,dy=-(x-1)\,dx \qquad \therefore\ \int(y-2)\,dy=\int-(x-1)\,dx$

(3)：$e^{-2y}\,dy=x\,dx \qquad \therefore\ \int e^{-2y}\,dy=\int x\,dx$

となる．以下，このタイプのものはこのように扱うことにする．

この他にも，微分方程式にはいろいろなタイプがあって，それらの解法についてもいろいろと研究されているが，**われわれが無条件に解けなければならないのは，この「変数分離形」までである**．入試問題にはもう少し複雑なものも出題されてはいるが，その場合は出題の意図にもとづく「誘導」がついているのが普通であるから，それにしたがって解くことができれば十分である．

微分方程式の解について

(1)を例にして説明する．(1)では

$$\frac{dy}{dx}=ky\cdots\cdots(\mathrm{A}) \iff y=Ce^{kx}\quad (C\text{ は任意の定数})\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

を示した．このとき(B)は，**微分方程式(A)の「一般解」**であるという．

これに初期条件，たとえば「$x=0$ のとき $y=1$」などを与えると，(B)に代入

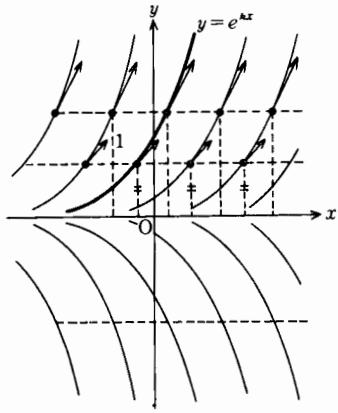
することにより任意定数 C の値が $C=1$ ときまり，(B)は $y=e^{kx}$ に決定する．このように**任意定数を含まず1つに決定された微分方程式(A)の解を「特殊解」**という．

このハナシを「視覚的に」とらえて説明すると次のようになる．

(A)：　**ある曲線上の任意の点 $P(x, y)$ における「接線の傾き」が y に比例する（比例定数は k）**

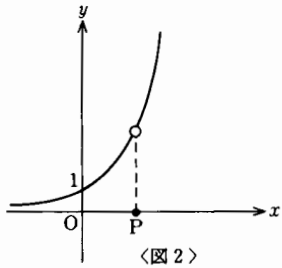
(B)：　**条件(A)のもとに点 P を動かしていくときに得られる曲線の方程式**

しかし，このような曲線は1つとは限らない——右図に示すように実は無数にある．この例でいうと $y=\pm e^{kx}$ を x 軸に沿って平行移動して得られるすべての曲線が条件をみたしており（「**解曲線群**」という），これに初期条件を与えることによって1つの「**解曲線**」が決定する．これは上に述べた「一般解」，「特殊解」に対応するものと考えればよい．（〈図1〉）



（yがきまれば「接線の傾き」は ky——yに比例！）　〈図1〉

ところで(A)から(B)を求める過程でわれわれは「y は恒等的に0ではない」として出発した．これは「y はたまたま0であるときがあるかもしれないが，0でないところもあるとして，その0でない y について」というほどの意味である．そうすると $y=\pm e^{C_1}e^{kx}$ という，決して0という値をとりえない関数が求められた．したがって，もし微分方程式(A)$(y\neq 0)$ に $y=0$ となる点Pの存在する関数 y が解としてあったとしてもP以外の点では $y=\pm e^{C_1}e^{kx}(\neq 0)$ の形でなければならずしたがって点Pで解曲線は不連続となってしまう．（〈図2〉）



〈図2〉

つまり，「y が恒等的に0ではない」という条件のもとに求められる y は，われわれとしては $y=\pm e^{C_1}e^{kx}$（微分可能）以外にはありえないとしてよい．

一方，y が恒等的に0のときは明らかに微分方程式(A)が成立するのでこれも解である——この解も含めて y を1つの式で表すことはできないか!!　本文③の $C=\pm e^{C_1}$ は決して0という値はとりえないのだが，この C に0をも認めてしまえば $C=0$ とおくことにより解 $y=0$ も表すことができ，e^{C_1} が正のすべての実数を表し得るから **C を任意の定数として解は1つの式(B)で表しきれる**というわけである．

➔ 少しメンドウな解の扱い方についてもここで説明しておこう．たとえば微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=y(1-y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

で，$y\equiv 0$，$y\equiv 1$ は明らかに(＊)を満たすからこれは(＊)の解である．

そこで $y\neq 0$，$y\neq 1$ であるような y に対して(＊)を解くと

$$\int\frac{1}{y(1-y)}dy=\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right)dy=\int dx$$

$$\therefore\quad \log|y|-\log|1-y|=x+C_1 \qquad \therefore\quad \left|\frac{y}{1-y}\right|=e^{x+C_1}$$

$$\therefore\quad \frac{y}{1-y}=Ce^x\,(C=\pm e^{C_1}) \qquad \therefore\quad y=\frac{Ce^x}{1+Ce^x} \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

が得られる．そしてこの定数 C に $C=0$ を許せば解「$y=0$」も(＊＊)に含めて表すことができる．しかしここで困ったことは**とりあえずのところ C にどんな数値を代入しても解「$y=1$」を表すことができない**ように見える——少し工夫をしてみよう．それには(＊＊)の分母子を C で割り

$$y=\frac{e^x}{\dfrac{1}{C}+e^x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

と変形してから「$C\to\infty$」としてみる．そうすると(＊＊＊)は $y=1$ となり，解「$y=1$」が実は **(＊＊)のこのような C の値に対する解の表現**であることがわかる．しかしわれわれとしては「キモチがわるい」のでこのような場合の「一般解」は

$$「\ y=\frac{Ce^x}{1+Ce^x},\ \ y=1\ 」$$

と2つの式で表すことにする．——このような一般解もあるわけである．

次の例ではどうか——またハナシがちがってくる．

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

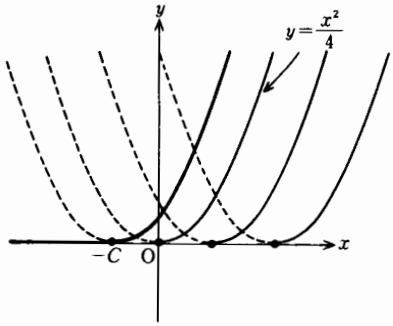
$y\equiv 0$ は明らかにこの微分方程式をみたすから解である．そこで $y\neq 0$ であるような y に対して(＊＊＊＊)を解くと

$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy=\int dx$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{y}=x+C>0 \iff y=\frac{1}{4}(x+C)^2 \quad (x>-C)$$

となり，これが微分方程式(****)の一般解である．

しかし，こうなると C をどのような値にとってもこの式で解「$y=0$」を表すことはできない．そしてこの解「$y=0$」で特徴的なことはこれが単に1つの解曲線を表すにとどまらず，一般解で表される解曲線につねに接しているので，下の図の太線に示すように場合によっては途中で一般解が表す1つの曲線に乗りかえるような解が無数にあらわれてきて「トンデモナイ(?)」ことになってしまう．



この場合の「$y=0$」のような解を実は「特異解」というのだが高校数学では扱わないことになっている．したがってわれわれとしても今のところは「そのようなこともあるのか」という程度の理解で十分であり，あまりこだわると本末転倒ということにもなりかねないのでここでは深入りしないことにする．

例題 23

x の関数 y は

$$y'-2y=e^x \qquad x=0 \text{ のとき } y=2$$

を満たすという．

(1) $y=ue^{2x}$ とおくとき，u の満たす微分方程式を求めよ．

(2) y は x のどんな関数で表されるか．

解　説　これは「変数分離形」ではないが，誘導にしたがってやれば解ける．

(1) $y=ue^{2x} \qquad \therefore \quad y'=u'e^{2x}+2ue^{2x}$

これらを，与えられた微分方程式にいれると

$$(u'e^{2x}+2ue^{2x})-2ue^{2x}=e^x$$

$$\therefore \quad u'e^{2x}=e^x \qquad \therefore \quad \boldsymbol{u'=e^{-x}}$$

(2) (1)より

$$u=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C$$

$$\therefore \quad y=ue^{2x}=(-e^{-x}+C)e^{2x}=-e^x+Ce^{2x}$$

ここで初期条件，$x=0$ のとき $y=2$ をいれると

$2=-1+C \qquad \therefore \quad C=3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=-e^x+3e^{2x}}$

らしんばん

(1)の誘導「$y=ue^{2x}$ とおく…」は，どこからきたか!!

一般のハナシに拡張してまとめておこう．本問のような

$$y'+f(x)y=g(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

の形をした微分方程式を「**1階線形微分方程式**」という．

このタイプのものは次のように扱う．

(i) **$g(x)$ が恒等的に0のとき——これは「変数分離形」!!**

$$\frac{y'}{y}=-f(x) \qquad \therefore \quad \log|y|=-\int f(x)\,dx=-F(x)+C_1$$

$$(\text{ただし } F'(x)=f(x))$$

$$\therefore \quad y=Ce^{-F(x)} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(ii) **$g(x)$ が一般の関数のとき**——上の解の C を未知関数 u にとりかえたものを y とおく．

$$y=ue^{-F(x)} \qquad \therefore \quad y'=u'e^{-F(x)}\underbrace{-uf(x)e^{-F(x)}}_{=\,f(x)y}$$

これを(*)にいれると，**$f(x)y$ がうまく消えて**

$$u'e^{-F(x)}=g(x) \qquad \therefore \quad u'=g(x)e^{F(x)}$$

となるから，この u' を積分して u，そして y が求められる．

したがって本問の「誘導のタネあかし」をすれば $y=ue^{2x}$ の e^{2x} は，微分方程式 $y'-2y=0$ を解いて得られたものであることがわかる．

本問は(*)の $f(x)$ が -2 という定数で与えられていることに注目!!

このようなときは実はウマイ方法がある．

一般に(*)の **$f(x)$ の部分が定数 k で与えられている微分方程式**

$$y'+ky=g(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

を解くには **$(e^{kx}y)'$ を計算してみるとよい．**

$$(e^{kx}y)'=ke^{kx}y+e^{kx}y'$$
$$=e^{kx}(y'+ky)=e^{kx}g(x)$$

$$\therefore \quad e^{kx}y=\int e^{kx}g(x)\,dx \qquad \therefore \quad y=e^{-kx}\int e^{kx}g(x)\,dx$$

となって(**)をみたす y を比較的簡単に求めることができる．本問はこれを $k=-2$ としてやればよい．このように誘導がつけられるときもある．

なお，変数分離形の微分方程式 $y'=ky$ $(y'-ky=0)$ もこのタイプの微分方程式の1つであるから，この方法を適用すれば「変数分離」というどこか気分のスッキリしない方法を避けて通ることができる——上のやり方にしたがえば，$g(x)=0$ とおくとただちに解 $y=Ce^{kx}$ が得られる．

(3) 微分方程式の応用

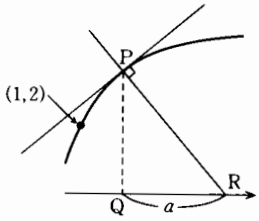
例題 24

点 (1, 2) を通る曲線がある．この曲線上の任意の点 P から x 軸におろした垂線の足を Q，P での法線が x 軸と交わる点を R とすれば，R はつねに Q の右側にあって $\overline{QR}=a$（一定）であるという．この曲線はどんな曲線か．

解 説

点 $P(x, y)$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{y'}$ であるから，この法線の方程式は

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$



である．x 軸との交点の X 座標はこの式で $Y=0$ とおいて

$$X-x=yy' \qquad \therefore \quad X=x+yy'$$

よって，$R(x+yy', 0)$，$Q(x, 0)$ である．

このとき，R はつねに Q の右側にあって，$\overline{QR}=a$ であるから

$$(x+yy')-x=a \qquad \therefore \quad y\frac{dy}{dx}=a \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad \int y\,dy=\int a\,dx \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}y^2=ax+C \cdots\cdots ②$$

これが点 (1, 2) を通るから，

$$2=a+C \qquad \therefore \quad C=2-a$$

ゆえに求める曲線の方程式は

$$\frac{1}{2}y^2=ax+2-a \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y^2=2ax-2a+4}$$

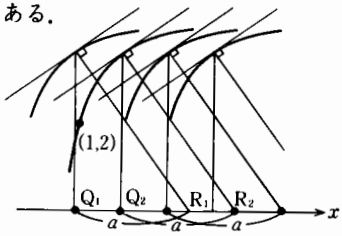
らしんばん

微分方程式は本問のように用いられるときもある．

「R はつねに……QR＝a」がポイント!!

本文中の①はこのような条件，あるいは性質をひとまとめにして述べたものである．そして②は，このような性質の曲線を具体的な形で示したわけで，これを

$$y^2=2a\left(x+\frac{C}{a}\right)=2a(x+C')$$



$$\left(C'=\frac{C}{a}\ \cdots\ \text{任意定数}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{図で，}\overline{Q_1R_1}=a,\ \overline{Q_2R_2}=a\\ \cdots\cdots\text{いつでも}\ \overline{Q_nR_n}=a\end{array}\right)$$

と変形すれば，これは放物線 $y^2=2ax$ を x 軸の方向に平行移動して得られる曲線全体（解曲線群）を表し，これに点 $(1,2)$ を通るという初期条件を与えることにより，そのうちの1つが指定されることがわかる．

例題 25

連続な関数 $f(x)$ が，

$$f(x)=x^2+x+1+2\int_0^x f(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たしている．このとき $f(x)$ を求めよ．

解　説　①の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=2x+1+2f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

これを，「変数分離形」の扱いのできる形に式変形することはできないか——すなわち②を

$$\{f(x)+Ax+B\}'=2\{f(x)+Ax+B\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の形に変形したい．もしそのような A，B が存在するならば，

$$f'(x)+A=2f(x)+2Ax+2B$$

$$\therefore\quad f'(x)=2f(x)+2Ax+2B-A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

④を②とくらべて

$$\left.\begin{array}{l}A=1\\ 2B-A=1\end{array}\right\}\qquad \therefore\quad A=1,\ B=1$$

実際，②は次の形に変形される．

$$\{f(x)+x+1\}'=2\{f(x)+x+1\}$$

ここで，$f(x)+x+1=Y$ とおくと「変数分離形」が利用できる．

すなわち

$$\frac{dY}{dx}=2Y \qquad \therefore\quad Y=Ce^{2x}$$

$$\therefore\quad f(x)+x+1=Ce^{2x} \qquad \therefore\quad f(x)=Ce^{2x}-x-1$$

次に①で x を0にすると $f(0)=1$ であるから，これを初期条件として用いると

$$1=C-1 \qquad \therefore\quad C=2 \qquad\qquad \therefore\quad \boldsymbol{f(x)=2e^{2x}-x-1}$$

らしんばん

➡ 本問①のように，未知関数の積分を含んだ方程式を「**積分方程式**」といい，これからその関数を決定することを，「**積分方程式を解く**」という．本文では与えられた積分方程式①から，微分方程式②を導いたが，②から $f(0)=1$ という初期条件は求まらない．すなわち，①から②を出しただけでは，①のもつ条件のすべてをつくしたことにはならない．そこで $\int_a^a f(t)\,dt=0$ を用いて $f(0)=1$ を求めておくのである．

➡ 微分方程式②は前に述べた「1 階線形微分方程式」である (p. 227)．②は，

$$y'-2y=2x+1$$

であるから先に述べた

$$(e^{-2x}y)'=-2e^{-2x}y+e^{-2x}y'$$
$$=e^{-2x}(y'-2y)=e^{-2x}(2x+1)$$

を利用して y を求めてもよいし，$y=ue^{2x}$ とおいて求めてもよい．

また，本文で述べた方法については，「2 項間漸化式」の基本形

$$a_{n+1}=2a_n+2n+1,\quad a_1=1$$

から一般項 a_n を求めるときに，右辺の 1 次式 $2n+1$ を両辺にふりわけて

$$a_{n+1}+A(n+1)+B=2(a_n+An+B)$$

と変形されるような定数 A，B を求めたやり方と比較参照されたい．

➡ **「特殊解」が 1 つ求まれば，「一般解」はそれを用いて表される．**

まず微分方程式

$$y'=2y+2x+1 \cdots\cdots(*)$$

の右辺，$2x+1$ が1 次の整式であることに注目して，とりあえず「$(*)$を満たす r 次の整式 y はないか」と考える．

もし，そのような解 y があるとすれば，それに対して$(*)$の両辺はともに $(r-1)$ 次の整式でなくてはならない．そこでいま $r\geqq 2$ としてみると$(*)$の左辺は $(r-1)$ 次式，右辺は r 次式となり実はこのようなことはありえない．したがって$(*)$を満たす整式の解 y があるとすればそれは 1 次式 $y=px+q$ の形でなくてはならない．——そのようなものはあるか．

$y'=p$ であるから，これらを$(*)$に代入してみる．

$$p=2(px+q)+2x+1=(2p+2)x+2q+1$$

これが恒等的に成立するならば

$$\left.\begin{array}{l}2p+2=0\\2q+1=p\end{array}\right\}\quad \therefore\ p=-1,\ q=-1 \qquad (\text{あった!!})$$

ゆえに，$y=-x-1$ は$(*)$の解である．これを y_1 とおくと

$$y_1'=2y_1+2x+1 \cdots\cdots(**)$$

そこで，$(*)$と$(**)$で辺々の差をとると

$$y'-y_1'=2(y-y_1) \qquad \therefore\ (y-y_1)'=2(y-y_1)$$

ここで，$y-y_1=Y$ とおけば，これは「変数分離形」である．

$\therefore\quad Y'=2Y \qquad \therefore\quad Y=y-y_1=Ce^{2x}$

$\therefore\quad y=y_1+Ce^{2x}=Ce^{2x}-x-1$

となり，このような立場から「誘導」がつけられるときもある．

例題 26

すべての実数 x，y において

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ち，$f(0)\neq 0$，$f'(0)=a$ とする．

(1)　$f(0)$ を求めよ．

(2)　すべての x において微分可能であることを示せ．

(3)　$f(x)$ を求めよ．

解　説　(1)　①で，$x=y=0$ とすると

$f(0)=f(0)\cdot f(0) \qquad \therefore\ \boldsymbol{f(0)=1}\quad (\because\quad f(0)\neq 0)$

(2)　①で y を h とおくと，$f(x+h)=f(x)\cdot f(h)$ であるから

$$f(x+h)-f(x)=f(x)\cdot f(h)-f(x)=f(x)\{f(h)-1\}$$

$$\therefore\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}\quad (\because\quad f(0)=1)$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$$

であるから②の極限値は存在し，したがって任意の x で $f(x)$ は微分できて

$$f'(x)=af(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

(3)　③で与えられる微分方程式を解くと

$$f(x)=Ce^{ax}$$

ここで，(1)から $f(0)=1$ であるから $C=1$ である．

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=e^{ax}}$$

らしんばん

このように未知の関数が満たすべき条件式が与えられたとき，それを「**関数方程式**」といい，与えられた関数方程式を満たす関数を求めることを「**関数方程式を解く**」という――微分方程式，積分方程式なども関数方程式の一種である．

本問についていえば，①をみて指数関数らしいことはわかる．しかし，このよ

うな性質をもつものは他にないか——それ以外にはありえないことを順次明らかにしていくのである．

➡ 与えられた関数方程式の「微分可能性」を確かめないで

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

を x について微分してはならない．本問については実際には微分可能だから

$$f'(x+y)=f'(x)f(y)$$

この式で $x=0$ とおくと

$$f'(y)=f'(0)\cdot f(y)=af(y) \qquad \therefore \quad \frac{f'(y)}{f(y)}=a$$

これは「変数分離形」で $f(y)=Ce^{ay}$ などとやりたいところだが，そうはいかない．それはまだ **$f(x)$ という関数が微分可能かどうかハッキリしない** ($f'(x)$ が存在するかどうかわからない) からである——「微分可能でない」$f(x)$ が他にあって①を満たすかもしれない!!

——**発展問題 20** (p. 283) と比較してみよ．

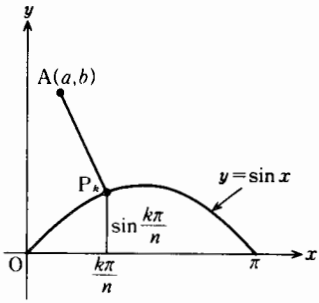
第3節
問題解法の研究

発展問題1—$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$ と定積分

x-y 平面上に点 $P_k\left(\frac{k\pi}{n}, \sin\frac{k\pi}{n}\right)$ $(k=1, 2, 3\cdots\cdots)$ がある．

このとき $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{AP_k}^2$ を最小とするような点Aの座標を求め，最小値を示せ．

解　説　点Aの座標を (a, b) とおくと



$$\overline{AP_k}^2=\left(\frac{k\pi}{n}-a\right)^2+\left(\sin\frac{k\pi}{n}-b\right)^2$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{AP_k}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\left\{\left(\frac{k\pi}{n}-a\right)^2+\left(\sin\frac{k\pi}{n}-b\right)^2\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$=\int_0^{\pi}\{(x-a)^2+(\sin x-b)^2\}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\{x^2-2ax+a^2+\sin^2 x-2b\sin x+b^2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-ax^2+(a^2+b^2)x+2b\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi^3}{3}-a\pi^2+(a^2+b^2)\pi-2b-2b+\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi^3}{3}-\pi^2 a+(a^2+b^2)\pi-4b+\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi\left(a-\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi\left(b-\frac{2}{\pi}\right)^2+\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}$$

ゆえに

$$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi}\right) \text{ のとき最小値：} \frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}$$

らしんばん

本文①は

$$\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left\{\left(\pi\frac{k}{n}-a\right)^2+\left(\sin \pi\frac{k}{n}-b\right)^2\right\}$$

$$=\pi\int_0^1 \{(\pi x-a)^2+(\sin \pi x-b)^2\}\, dx$$

とすることもできるが，本文のように「区間 $[0, \pi]$ の n 等分」と見るのが自然である．

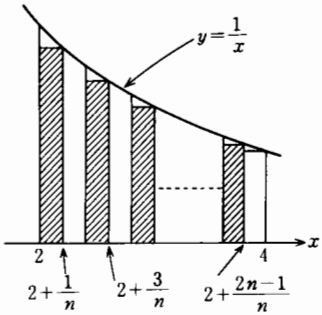
このタイプの問題で少しやりにくい例をあげておく．たとえば

$$a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+(2k-1)}$$

これを正直にやろうとすると，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2+\dfrac{2k-1}{n}}$$



と変形できるから，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを利用して，区間 $[2, 4]$ を n 等分したいところだが，右図でもわかるように $2k-1$ に $k=1$, 2, 3……n を代入していくと「1つとび」の状況がおこってうまくない．そこで次のように式変形を「くふう」する．

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

これは a_n に

$$\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+2n}$$

を加えて「1つとび」の「すき間」を埋めておき，あとで埋めた部分を引いて「帳尻」をあわせたわけでこうすると(*)は

$$a_n=\underbrace{\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{k}{2n}}}_{\text{(区間 }[1,2]\text{ を }2n\text{ 等分)}}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}}_{\text{(区間 }[1,2]\text{ を }n\text{ 等分)}}$$

と変形されるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}\Big[\log x\Big]_1^2=\log\sqrt{2}$$

となる．

また，a_n が「積の形」で与えられるものなどは，対数をとって「和の形」に変形するとうまく解決されることが多い．たとえば

$$a_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

などで $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めるには(**)の両辺の対数をとって

$$\log a_n=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\longrightarrow\int_0^1\log(1+x)\,dx=2\log 2-1=\log\frac{4}{e}$$

$$\therefore\quad a_n\to\frac{4}{e}\quad(n\to\infty)$$

のようにする．

発展問題2—周期関数と定積分

$[x]$ によって，実数 x を超えない最大の整数を表し，

$$f(x)=\left|x-2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|$$

とおく．

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n}e^{-2x}f(x)\,dx$ の値を求めよ．**(やや難)**

解　説　(1)　$\left[\frac{x+1}{2}\right]=k$ (整数)

となる x の範囲は

$$k\leqq\frac{x+1}{2}<k+1$$

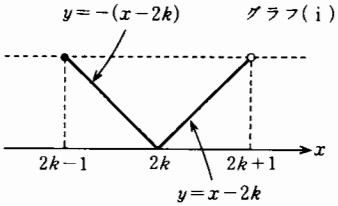
$$\therefore\quad 2k-1\leqq x<2k+1$$

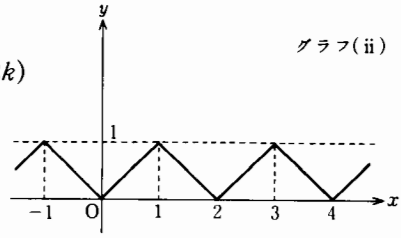
であるから，グラフはこの範囲で

$$y=f(x)=|x-2k|$$

$$=\begin{cases}-(x-2k)\ (2k-1\leqq x<2k)\\ x-2k\ (2k\leqq x<2k+1)\end{cases}$$

(グラフ(i))





この k に $0,\pm1,\pm2,\pm3,\ \cdots\cdots$ を

与えるとグラフ(ii)が得られる——$f(x)$ は，「周期 2」の「周期関数」である．(式で表せば $f(x+2k)=f(x)$)

(2) $$\int_0^{2n} e^{-2x}f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k}^{2k+2} e^{-2x}f(x)\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\left(=\int_0^2+\int_2^4+\cdots\cdots\cdots+\int_{2n-2}^{2n}\right)$$

ここで $\boldsymbol{x=s+2k}$ とおくと

$dx=ds$

x	$2k \longrightarrow 2k+2$
s	$0 \longrightarrow 2$

であるから，

$$\int_{2k}^{2k+2} e^{-2x}f(x)\,dx=\int_0^2 e^{-2(s+2k)}f(s+2k)\,ds$$

$$=e^{-4k}\int_0^2 e^{-2s}f(s)\,ds \qquad (\because\ f(s+2k)=f(s)\ ) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

この $f(s)$ は

$$f(s)=\begin{cases} s & (0\leqq s\leqq 1) \\ 2-s & (1\leqq s\leqq 2)\end{cases}$$ (グラフ(ii)で区間 $[0,2]$ を見る!!)

$$\therefore\quad \int_0^2 e^{-2s}f(s)\,ds=\int_0^1 e^{-2s}s\,ds+\int_1^2 e^{-2s}(2-s)\,ds$$

$$=\int_0^1 se^{-2s}\,ds-\int_1^2 se^{-2s}\,ds+2\int_1^2 e^{-2s}\,ds \quad (=I \text{ とおく})$$

ここで，「部分積分法」を用いて第 1 項，第 2 項の不定積分を求めておくと

$$\int se^{-2s}\,ds=s\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2s}\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2s}\right)ds$$

$$=-\frac{1}{2}se^{-2s}-\frac{1}{4}e^{-2s}+C=-\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{2}\right)e^{-2s}+C$$

であるから

$$I=\left[-\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{2}\right)e^{-2s}\right]_0^1-\left[-\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{2}\right)e^{-2s}\right]_1^2+2\left[-\frac{1}{2}e^{-2s}\right]_1^2$$

$$=-\frac{2}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-4}=\frac{(1-e^{-2})^2}{4}$$

これを②にいれると

$$\int_{2k}^{2k+2} e^{-2x}f(x)\,dx=\frac{(1-e^{-2})^2}{4}e^{-4k}$$

さらにこれを①にいれると

$$\int_0^{2n} e^{-2x}f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-e^{-2})^2}{4}e^{-4k}$$

$$=\frac{(1-e^{-2})^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-4})^k=\frac{(1-e^{-2})^2}{4}\cdot\frac{1-(e^{-4})^n}{1-e^{-4}}\quad(\text{等比級数})$$

ここで，$0<e^{-4}<1$ ゆえ $n\to\infty$ のとき $(e^{-4})^n\to 0$ である．

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{2n}e^{-2x}f(x)\,dx=\frac{(1-e^{-2})^2}{4}\cdot\frac{1}{1-e^{-4}}$$

$$=\frac{(1-e^{-2})^2}{4}\cdot\frac{1}{(1-e^{-2})(1+e^{-2})}=\boldsymbol{\frac{e^2-1}{4(e^2+1)}}$$

らしんばん

(2)の積分計算の「ウマミ」は，被積分関数を構成している $f(x)$ が「周期関数（周期2）」であることにある．

まず，「**周期関数の積分**」の基本的な扱い方から説明する．

周期が p である周期関数は，すべての実数 x に対し

$\boldsymbol{f(x+p)=f(x)}$　（ $f(x+kp)=f(x)$，ただし k は整数 ）

（正で最小の周期を基本周期という）

が成り立つ．このとき，$\boldsymbol{f(x)}$ の「**周期の整数倍——$\boldsymbol{n}$ 周期——にわたる積分**」は次のように「**(1周期分の積分)×$\boldsymbol{n}$**」に帰着させることができる．すなわち，

$$\int_\theta^{\theta+np}f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\theta+kp}^{\theta+(k+1)p}f(x)\,dx\quad\cdots\cdots(*)$$

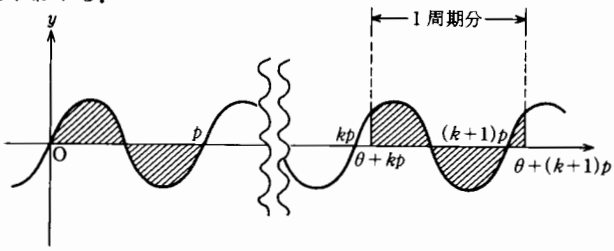
の「右辺の $\sum_{k=0}^{n-1}$ からあとの積分」が

$$\int_{\theta+kp}^{\theta+(k+1)p}\boldsymbol{f(x)\,dx}=\int_0^p\boldsymbol{f(x)\,dx}\quad\cdots\cdots(**)$$

となることは，$y=f(x)$ のグラフを描いてみれば——下図は $y=\sin x$ のグラフ（周期 2π）——ほとんど明らかであり，このことから

$$\int_\theta^{\theta+np}\boldsymbol{f(x)\,dx}=\boldsymbol{n}\int_0^p\boldsymbol{f(x)\,dx}$$

であることがわかる．



しかし，このハナシをマジメ（？）に「計算で」やるならば本問(2)にならって(**)の左辺で $x=s+kp$ とおくと

$dx=ds$

x	$\theta+kp\longrightarrow\theta+(k+1)p$
s	$\theta\longrightarrow\theta+p$

である．これを θ の関数とみて $g(\theta)$ とおくと

$$g(\theta)=\int_{\theta+kp}^{\theta+(k+1)p} f(x)\,dx$$
$$=\int_{\theta}^{\theta+p} f(s+kp)\,ds=\int_{\theta}^{\theta+p} f(s)\,ds$$

これを θ で微分すると

$$g'(\theta)=\frac{d}{d\theta}\int_{\theta}^{\theta+p} f(s)\,ds$$
$$=f(\theta+p)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{p})'}_{\text{ワスレルナ}}-f(\theta)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{\theta})'}_{\text{ワスレルナ}}=f(\theta+p)-f(\theta)=0$$

すなわち $g(\theta)$ は θ に関して一定である．

$$\therefore\quad g(\theta)=g(0)=\int_0^p f(s)\,ds=\int_0^p f(x)\,dx$$

さて，前ページに述べた(＊)，(＊＊)がどのように用いられるか——これは実例で説明する．たとえば

$$J=\int_0^{\pi}|\sin nx+\cos nx|\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx \quad (3\text{ 角関数の合成})$$

そこで $nx+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと

x	$0\longrightarrow\pi$
t	$\dfrac{\pi}{4}\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}+n\pi$

$$n\,dx=dt\qquad\therefore\quad dx=\frac{1}{n}\,dt$$

$$\therefore\quad J=\frac{\sqrt{2}}{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+n\pi}|\sin t|\,dt \qquad \left(\begin{array}{l}|\sin t|\text{ が周期 }\pi\text{ の周期関数}\\ \text{であることに注目!!}\end{array}\right)$$

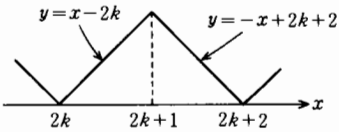
$$=\frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi}|\sin t|\,dt \quad (\text{これは(＊)のハナシ!!})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{n}\times n\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt=2\sqrt{2} \quad \left(\begin{array}{l}\text{これは(＊＊)}\\ \text{のハナシ}\end{array}\right)$$

——これは $|\sin t|$ のグラフを書いてみれば，ほとんど直観的に了解されることがらである．

あらためて本問の積分をながめてみる——「被積分関数」が「周期関数 $\boldsymbol{f(x)}$」と「そうでない関数 $\boldsymbol{e^{-2x}}$」との積で構成されていることに注目したい——上に述べたような「周期関数のみ」の場合とちがって単純に「1 周期分の n 倍」というわけにはいかない!!　そこで本問は「置換積分法」の「威力」を利用して最初からキッチリと積分計算をしたわけである．(もちろん途中で $f(x)$ の周期性が利用される．)

本問の積分を「周期性」をアテにしないでやるには



$$f(x)=\begin{cases}x-2k & (2k\leqq x\leqq 2k+1)\\ -x+2k+2 & (2k+1\leqq x\leqq 2k+2)\end{cases}$$

であることから，$\boldsymbol{x=2k+1}$ **で積分区間を分割して**

$$\int_{2k}^{2k+2}e^{-2x}f(x)\,dx=\int_{2k}^{2k+1}e^{-2x}(x-2k)\,dx+\int_{2k+1}^{2k+2}e^{-2x}(-x+2k+2)\,dx$$

を計算すればよい．

本問は $f(x)$ に「ガウス記号」などを用いているのでわかりにくいが

「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx$ の値を求めよ」

という問題と同じに見えてくれないと困る．（$f(x)=|\sin x|$ で周期が π）

したがって「扱い方」をこの問題でまとめておくのもよい．

$$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx$$

であるから $x=t+k\pi$ とおくと

$dx=dt$

x	$k\pi \longrightarrow (k+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$\therefore\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx=\int_0^{\pi} e^{-(k\pi+t)}|\sin(k\pi+t)|dt$$

$$=e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\underbrace{|\sin t|}_{(正)}dt$$

$$=e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\ dt$$

$$=e^{-k\pi}\left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\pi}\quad (\text{p. 169 で説明した})$$

$$=e^{-k\pi}\cdot\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\ (\text{等比数列で公比 } e^{-\pi} \text{ は } 0<e^{-\pi}<1)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

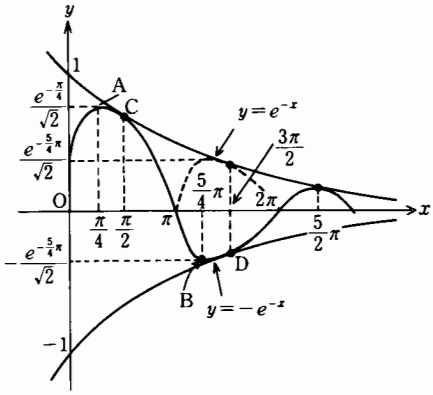
となり，これはよくあるハナシである．

ついでに曲線

$y=e^{-x}\sin x\ (x\geqq 0)$

のグラフについて説明しておこう．

この関数の「増減と極値」についてはすでに p. 98 **例題 9** で調べたが，これは2つのグラフ $y=e^{-x}$, $y=-e^{-x}$ の間にはさまれて x の増加とともに振動が小さくなっていくので「減衰曲線」と呼ばれたりする（図は x 方向にかなり縮めた）．また $y=e^{-x}|\sin x|$ のグラフはこのグラフの x 軸より下の部分を x 軸について折りかえしたものである．



発展問題 3—定積分と極限

(1) $f(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x\{\cos(x+t)+\sqrt{3}\sin(x+t)\}\,dt$

を求めよ．(やや難)

(2) $0\leqq a\leqq\pi$ における $f(a)$ の最大値，最小値およびそのときの a の値を求めよ．　(やや難)

解　説　(1) $\displaystyle\int_a^x\{\cos(x+t)+\sqrt{3}\sin(x+t)\}\,dt=g(x)$ とおいて「変数 t についてマジメに積分」すれば，

$$g(x)=\Big[\sin(x+t)-\sqrt{3}\cos(x+t)\Big]_a^x \quad \left(\begin{array}{l}t\text{ 以外の変数 }x\text{ は}\\ \text{定数扱い!!}\end{array}\right)$$

$$=\{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\}-\{\sin(x+a)-\sqrt{3}\cos(x+a)\}\ ①$$

$$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(x+a-\frac{\pi}{3}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$$=4\cos\left(\frac{3x+a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{x-a}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots③$$

ゆえに

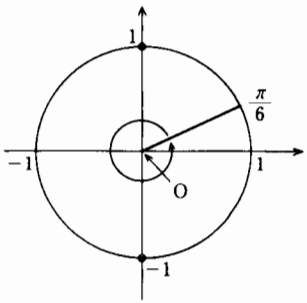
$$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{4\cos\left(\dfrac{3x+a}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}\times 2}$$

$$=\left\{\lim_{x\to a}2\cos\left(\frac{3x+a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\times\left\{\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\right\}\quad\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\right)$$

$$=2\cos\left(2a-\frac{\pi}{3}\right)\times 1=\mathbf{2\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)}$$

(2) $0\leqq a\leqq\pi$，$\therefore\ 0\leqq 2a\leqq 2\pi$

$$\therefore\ \frac{\pi}{6}\leqq 2a+\frac{\pi}{6}\leqq 2\pi+\frac{\pi}{6}$$



この範囲で，$2\sin\left(2a+\dfrac{\pi}{6}\right)$ の最大値，最小値と，それらを与える a の値を調べればよい．

最大値：2 このとき $\sin\left(2a+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

$\therefore\ 2a+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　　$\therefore\ \boldsymbol{a=\dfrac{\pi}{6}}$

最小値：-2　このとき $\sin\left(2a+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$

$\therefore\ 2a+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$　　$\therefore\ \boldsymbol{a=\dfrac{2}{3}\pi}$

らしんばん

➡ $g(x)=\int_a^x\{\cos(x+t)+\sqrt{3}\sin(x+t)\}\,dt$ ……(＊)

を求める積分計算では「**x を定数とみて t で積分**」した．t と x とをゴチャマゼにしないこと!!

また，①→②は3角関数の「合成公式」，②→③は「差→積の公式」を用いたが，最初に「合成公式」を用いて

$$\cos(x+t)+\sqrt{3}\sin(x+t)=2\sin\left(x+t+\frac{\pi}{6}\right)$$

と変形しておいてから積分すればいくらかスッキリする．

➡ 次のような考え方はどうか――「$g(a)=0$」に注目!!

$$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)\quad(g(a)=0)$$

これは $g(x)$ の「**$x=a$ における微分係数**」の定義に他ならない．

そこで先に $g'(x)$ を求めておいて $x=a$ とおく．(よく用いられる!!)

まず $g'(x)$ を求めるには（＊）の被積分関数（これを $h(x)$ とおく）をよくにらんで「**積分変数 t に関係のない変数 x をインテグラルの外に追い出す**」ことを考えるのだが，これに加法定理を用いると

$$\begin{aligned}h(x)&=(\cos x\cos t-\sin x\sin t)+\sqrt{3}(\sin x\cos t+\cos x\sin t)\\&=(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos t+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)\sin t\\&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos t+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin t\quad(\text{「合成公式」})\end{aligned}$$

であるから変数 x は次のように分離される．

$$g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\int_a^x\cos t\,dt+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\int_a^x\sin t\,dt$$

ここで $\int_a^x\cos t\,dt$，$\int_a^x\sin t\,dt$ を実際に計算してもよいが，「基本公式」

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)}\quad(\text{p. 170「定積分の基本公式(6)」})\ \cdots\cdots(＊＊)$$

を用いると

$$\begin{aligned}g'(x)=&\,2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\int_a^x\cos t\,dt+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x\\&-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\int_a^x\sin t\,dt+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x\quad\cdots\cdots(＊＊＊)\end{aligned}$$

となり，$x=a$ とおくと第1項と第3項が消えて

$$g'(a)=2\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\cos a+2\cos\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\sin a$$

$$=2\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)\quad(=f(a))$$

となる．また x をインテグラルの外に追い出すだけなら「**置換積分法**」を利用することもできる．(p. 160 を参照!!)（＊）で $x+t=u$ とおくと

$dt=du$

t	$a\longrightarrow x$
u	$x+a\longrightarrow 2x$

$$\therefore\quad g(x)=\int_{x+a}^{2x}\{\cos u+\sqrt{3}\sin u)\,du$$

$$\therefore\quad g'(x)=\{\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)\}\cdot\underbrace{(\boldsymbol{2x})'}_{\text{ワスレルナ!!}}$$

$$-\{\cos(x+a)+\sqrt{3}\sin(x+a)\}\cdot\underbrace{(\boldsymbol{x+a})'}_{\text{ワスレルナ!!}}$$

$$=2\{\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x\}-\{\cos(x+a)+\sqrt{3}\sin(x+a)\}$$

$$\therefore\quad g'(a)=2\{\cos 2a+\sqrt{3}\sin 2a\}-\{\cos 2a+\sqrt{3}\sin 2a\}$$

$$=\cos 2a+\sqrt{3}\sin 2a=2\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)$$

となり上の結果と一致する．しかし基本公式（＊＊）をうまく用いたつもりで，

$$g'(x)=\cos(x+x)+\sqrt{3}\sin(x+x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x\quad\cdots\cdots(****)$$

$$\therefore\quad g'(a)=\cos 2a+\sqrt{3}\sin 2a=2\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)$$

などとやってはいけない．――ナルホド結果は一致するが，それは（＊＊＊）で $x=a$ とおくと，$\int_a^a\cos t\,dt=0$，$\int_a^a\sin t\,dt=0$ から，その第1項と第3項が消えてしまうからであって，（＊＊＊＊）の $g'(x)$ がマチガイであることは（＊＊＊）の積分と比較してみれば簡単に確かめることができる．

「**積分に関する平均値の定理**」(p. 188) を使うことはできないか．

すなわち

$$\int_a^b \boldsymbol{f(t)\,dt}=(\boldsymbol{b-a})\boldsymbol{f(c)}\quad(c\text{ は }a\text{ と }b\text{ との間})$$

となる c が存在する．

そこで $g(x)$ でとりあえず x を固定すると

$$\int_a^x\{\cos(x+t)+\sqrt{3}\sin(x+t)\}\,dt\quad(=g(x))$$

$$=(x-a)\{\cos(x+c)+\sqrt{3}\sin(x+c)\}\quad(c\text{ は }a\text{ と }x\text{ との間})$$

であるから，その上で $x\to a$ とすると $c\to a$ である．(「はさみうち」)

$$\therefore\quad f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\{\cos(x+c)+\sqrt{3}\sin(x+c)\}$$

$$=\cos 2a+\sqrt{3}\sin 2a=2\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)$$

――これでよい．

発展問題 4―定積分と漸化式――π という数

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx \quad (n \text{ は負ではない整数})$$

とおくとき，次のことを証明せよ．

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$0<\tan x<\dfrac{4}{\pi}x$

(2)　$n>0$ のとき，$0<I_n<\dfrac{\pi}{4(n+1)}$

(3)　$I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$　(やや難)

解　説　(1)　$f(x)=\dfrac{4}{\pi}x-\tan x$

とおくと

$$f'(x)=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\cos^2 x}$$

ゆえに $f'(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ で

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

単調減少 ($\cos x$ がこの区間で正で単調減少)，かつ連続であり，この間に $f'(x)=0$ となる $x=\alpha$ がただ1つ存在するから $f(x)$ の増減は表のようになる．

$$\therefore\quad f(x)>0 \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\quad 0<\tan x<\frac{4}{\pi}x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①を用いると

$$0<\tan^n x<\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n \qquad \therefore\quad 0<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n dx=\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx=\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\quad 0<I_n<\frac{\pi}{4(n+1)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

(3) $$I_{n+2}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan^2 x+1)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\quad\left(\tan' x=\frac{1}{\cos^2 x}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

(4) ③で $n=2k$ とおくと

$$\frac{1}{2k+1}=I_{2k+2}+I_{2k}$$

ゆえに

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_{2k+2}+I_{2k})$$

$$=(I_2+I_0)-(I_4+I_2)+(I_6+I_4)-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n(I_{2n+2}+I_{2n})$$

$$=I_0+(-1)^n I_{2n+2}$$

ここで，②の n を $2n+2$ におきかえると

$$0<I_{2n+2}<\frac{\pi}{4(2n+2+1)}=\frac{\pi}{4(2n+3)}$$

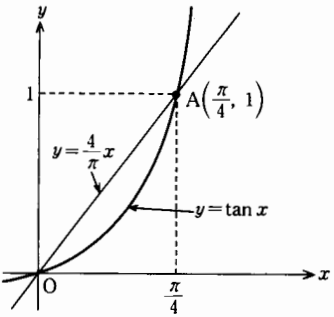
で，$n\to\infty$ のときは $I_{2n+2}\to 0$（「はさみうち」!!）

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$$

らしんばん

(1)はグラフをかけばイッパツ!!

—— $0<x<\frac{\pi}{4}$ で $y=\tan x$ のグラフが「下に凸」であることを示せばすむ．



「無理数 π」が無限級数で表された!!

すなわち，

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これは「無限級数の和の公式」を用いて次のように求めてもよい．

$$1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

左辺を積分すると

$$\int_0^1 \{1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}\}\,dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

最右辺を積分すると

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}-(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

ここで(**)の第2項では $0\leqq\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\leqq x^{2n}$ が成り立つから

$$0\leqq\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx\leqq\int_0^1 x^{2n}\,dx=\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}$$

で，$n\to\infty$ とすれば $\dfrac{1}{2n+1}\longrightarrow 0$，したがって $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx\longrightarrow 0$ となる．

ゆえに $n\to\infty$ のときは(*)と(**)（p. 173 **例題** ❻ (1)参照!!）から

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

よく似たハナシをもう1つしておこう．

$$1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-x)^n}{1+x}$$

両辺を積分すると

$$\int_0^1 \{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}-(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\ \cdots\cdots(***)$$

右辺の第2項は

$$0\leqq\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\leqq\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

であるから $n\to\infty$ とすれば $\dfrac{1}{n+1}\to 0$，したがって $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\to 0$ となる．

ゆえに(***)で $n\to\infty$ とすると上と同様にして

$$\mathbf{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2}$$

（$\log(1+x)$ の展開（p. 120）で $x=1$ としてみよ．）

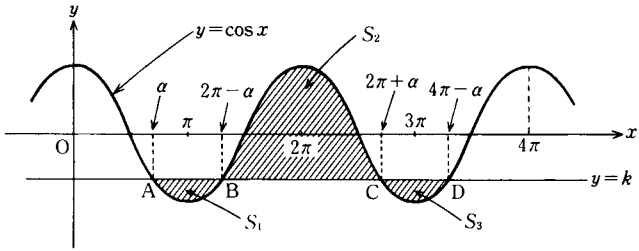
発展問題 5—面積の最小

直線 $y=k$（k は定数で $|k|<1$）と曲線 $y=\cos x$（$0\leqq x\leqq 4\pi$）とで囲まれる3つの図形の面積の和が最小となるように k の値を定めよ．

解　説　交点の x 座標は方程式

$$\cos x = k \quad \cdots\cdots ①$$

の解として与えられ，そのうちの最小のものを α とすると $0<\alpha<\pi$ であり他の解は α を用いて小さい順に $2\pi-\alpha$，$2\pi+\alpha$，$4\pi-\alpha$ と表される．



ゆえに面積の和を S とすると

$$S=\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}(k-\cos x)\,dx+\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi+\alpha}(\cos x-k)\,dx+\int_{2\pi+\alpha}^{4\pi-\alpha}(k-\cos x)\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

$$=2\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}(k-\cos x)dx+\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi+\alpha}(\cos x-k)dx \quad (\text{周期性から } S_1=S_3)$$

$$=4\Big[kx-\sin x\Big]_{\alpha}^{\pi}+2\Big[\sin x-kx\Big]_{2\pi-\alpha}^{2\pi} \quad \left(\begin{array}{l}S_1,\ S_2 \text{ の } \pi,\ 2\pi \\ \text{に関する対称性!!}\end{array}\right)$$

$$=4\{k\pi-(k\alpha-\sin\alpha)\}+2[-2k\pi-\{\sin(2\pi-\alpha)-k(2\pi-\alpha)\}]$$

$$=2k(2\pi-3\alpha)+6\sin\alpha \quad \cdots\cdots ③$$

ここに α は①を満たすから $k=\cos\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ で，これを③に代入すると

$$S=2(2\pi-3\alpha)\cos\alpha+6\sin\alpha$$

ゆえに，これを α で微分して S の増減を調べると

$$S'=2\{-3\cos\alpha-(2\pi-3\alpha)\sin\alpha\}+6\cos\alpha$$

$$=2(3\alpha-2\pi)\sin\alpha$$

これより S の増減表は右のようになり，S を最小にする α の値は

$$\alpha=\frac{2\pi}{3} \quad \therefore \quad k=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

α	(0)	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小かつ最小	↗	

らしんばん

「交点の x 座標」が直接求められないとき，「とりあえず α とおいてあとで α を消去する」方法についてはすでに説明した——p. 194

本問では③の変数を α か，あるいは k に統一するのだが，α を k では表せないので k を α で表して「α について微分」したわけである．**k と α とがともなって変化していることに注意!!**

➜ 少し見方をかえてみよう．

S を最小にする k（あるいは α）の値を求めるだけなら次のようにやることができる．

面積 S_1，S_2，S_3 は基本的には k の関数であるから，それぞれを $S_1(k)$，$S_2(k)$，$S_3(k)$，それらの和を $S(k)$ と表すことにすると

$$S(k)=S_1(k)+S_2(k)+S_3(k)$$

で，これを k で微分すると

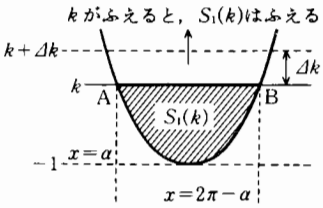
$$S'(k)=S_1'(k)+S_2'(k)+S_3'(k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

ところで

$$\begin{cases} S_1(k) \text{ は } k \text{ の増加とともに増加する——} S_1'(k)>0 \\ S_2(k) \text{ は } k \text{ の増加とともに減少する——} S_2'(k)<0 \\ S_3(k) \text{ は } k \text{ の増加とともに増加する——} S_3'(k)>0 \end{cases}$$

である．このことをふまえて，「**面積と定積分に関する諸定理（2）**（p. 185）」を利用すると

$$S_1'(k)=\lim_{\Delta k\to 0}\frac{S_1(k+\Delta k)-S_1(k)}{\Delta k}$$
$$=\overline{\mathrm{AB}}$$



同様にして

$$S_2'(k)=-\overline{\mathrm{BC}} \quad (\because \quad S_2'(k)<0)$$
$$S_3'(k)=\overline{\mathrm{CD}}$$

となるから，これらを(*)にいれると，

$$\boldsymbol{S'(k)=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}}}$$
$$=\{(2\pi-\alpha)-\alpha\}-\{(2\pi+\alpha)-(2\pi-\alpha)\}+\{(4\pi-\alpha)-(2\pi+\alpha)\}$$
$$=4\pi-6\alpha$$

$S'(k)=0$ のとき

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad k=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

k	(-1)	……	$-\frac{1}{2}$	……	(1)
α	(π)	……	$\frac{2\pi}{3}$	……	(0)
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘		↗	

となり，グラフから k の増加とともに α が減少することを考えると右の増減表が得られる．すなわち，$S(k)$ を最小にする k の値は

$$k=-\frac{1}{2} \quad \left(\alpha=\frac{2\pi}{3}\right)$$

である——$S(k)$ の最小値を求めるにはこの α の値に対して本文②の積分計算を実行することになる．

発展問題 6—面積——空間図形で考える

z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で，x-y 平面より上（z 軸の正の方向）にあり，平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ より下（z 軸の負の方向）にある部分を D とする．D の面積を求めよ．　（やや難）

解　説　D は，

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 0\leqq z\leqq 1-x+\sqrt{3}y & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

で表される．平面

$$x-\sqrt{3}y+z=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

上の点で，$x=0$，$y=1$ とすると

$$z=1+\sqrt{3}>0$$

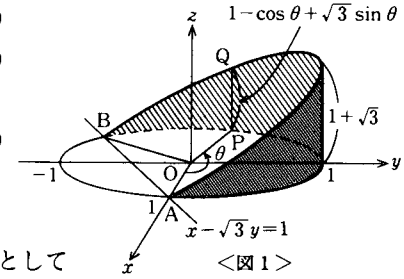
また xy 平面との交線は③で $z=0$ として

$$x-\sqrt{3}y=1$$

これと①との交点を求めると

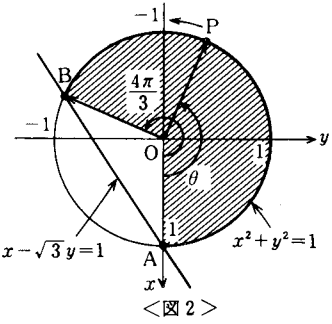
$$\mathrm{A}(1,0,0),\ \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$$

が得られる．



<図 1>

以上のことからこの図形を図示すれば右図のようになる．——ただし〈図 2〉は z 軸の正方向から見た図である．



<図 2>

このとき図のように $\angle\mathrm{AOP}=\theta^{rad}$ とおくと P の座標は

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta,0)$$

で表される．この時条件①は不要となり，②は

$$0\leqq z\leqq 1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta \quad \left(=\overline{\mathrm{PQ}},\ 0\leqq\theta\leqq\frac{4\pi}{3}\right)$$

よって，求める D の面積 S は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$（長さを L とする）に沿っての変数 $l=\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ の積分から変数 θ の積分に変換され

$$S=\int_0^L \overline{\mathbf{PQ}}\,\boldsymbol{dl}=\int_0^{\frac{4\pi}{3}}\overline{\mathrm{PQ}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{4\pi}{3}}(1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\,d\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$$=\left[\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\right]_0^{\frac{4\pi}{3}}$$

$$=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}}$$

らしんばん

④に注目してもらいたい．これは $\overrightarrow{OP}$ が x 軸の正方向となす角が θ のとき，高さが $1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ であるから

$$\int_0^{\frac{4}{3}\pi}(1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\,d\theta$$

という単純なハナシではない――この場合は $l=\overset{\frown}{AP}=r\theta=\theta$ $(r=1)$ で $dl=d\theta$ だからこうなるのだが，たとえば，底面の円の半径が 2 であるときはそうはいかない．

たしかに P の座標は $(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ で高さ $\overline{PQ}$ は

$$\overline{PQ}=1-2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

だがこれをそのまま θ で積分して

$$\int_0^{\frac{4}{3}\pi}(1-2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta)\,d\theta$$

とやるわけにはいかない．

この場合 $\int_0^L \overline{PQ}\,dl$ の l は $l=2\theta$ で，したがって $\boldsymbol{dl=2d\theta}$ になり，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{4\pi}{3}}(1-2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta)\boldsymbol{2\,d\theta}$$

としなければならない．あくまでも「**l の関数で与えられる高さ**」を底面の円周に沿って **A** から **B** まで「**l で積分する**」という考え方が基本である．

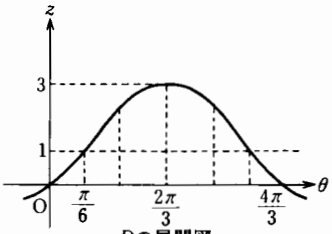
さらに θ に対する側面の高さについて調べてみると

$$1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$$

$$=1+2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\quad(「3\text{ 角関数の合成}」)$$

のように変形される．



D の展開図

このように円筒を平面で切った時の側面をのばすとキレイなサインカーブの型紙を作ることができる．

発展問題 7—「双曲線関数」と面積

双曲線 $x^2-y^2=1$ の上に点 $\mathrm{P}(x, y)$ (ただし $x>0, y>0$) をとり，$x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t\geqq 0)$ とおけば

(1) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ となることを示せ.

(2) 原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ と点 $\mathrm{P}(x, y)$ とを結ぶ直線，x 軸およびこの双曲線によって囲まれる図形の面積が $\dfrac{t}{2}$ で与えられることを証明せよ.

解　説　(1) $x^2-y^2=1$　$\therefore$　$y^2=x^2-1$

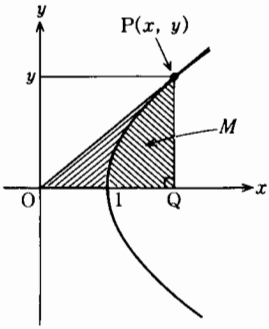
これに $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ を代入すれば

$$y^2=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad y=\pm\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

ここで $e^t-e^{-t}=e^{-t}(e^{2t}-1)\geqq 0$ $(t\geqq 0)$ と，条件の $y>0$ とあわせて

$$y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

(2) 問題の図形は，右図の $\triangle\mathrm{OPQ}$ から M の部分をひいたものだから求める面積 S は



$$S=\frac{1}{2}xy-\int_1^x y\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$，$y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ であるから

$$dx=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt$$

x	$1 \longrightarrow x$
t	$0 \longrightarrow t$

$$\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{e^{-t}(e^{2t}-1)}{2}\geqq 0\right)$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\int_0^t\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})-\frac{1}{4}\int_0^t(e^{2t}-2+e^{-2t})\,dt$$

$$=\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)=\boldsymbol{\frac{t}{2}}$$

らしんばん

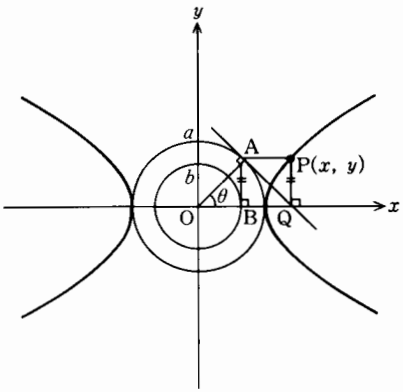
双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)\quad\cdots(*)$$

は，3角関数を用いて

$$\boldsymbol{x=a\sec\theta,\ \ y=b\tan\theta}$$

のようにパラメーター表示された．



この θ は右図に示すような角である．（△OAQ により $x=\overline{OQ}$，△OBA により $y=\overline{BA}$ を考えよ．）

この「おきかえ」は

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$$

であることを利用している．

次の計算をみてもらいたい．

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}-\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}=1$$

すなわち $\sec\theta$，$\tan\theta$ のかわりに2つの関数 $\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$，$\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ を用いて双曲線(*)を

$$\boldsymbol{x=a\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ \ y=b\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

のようにパラメーター表示することができる．このように表すと微分，積分の計算が簡単にいくこともあって，かえって都合のよいことも多い．

ただし，(**)で $a\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}>0$ だから，(**)は双曲線の「$x>0$（右半分）」の部分だけしか表すことができない．左側は

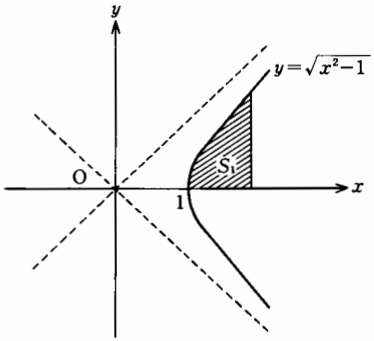
$$x=-a\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ \ y=b\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

で表すことになる．

本問(2)の①で y を

$$y=\sqrt{x^2-1}$$

と表すとこの右辺の第2項目の積分は



$$S_1=\int_1^x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

であることがわかる．

一般に

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx,\ \ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad(a>0)$$

のタイプの積分を計算するには

$$\text{複号が}\begin{cases}\oplus\text{のとき}: x=a\cdot\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\ (\text{あるいは}\ x=a\tan\theta)\\ \ominus\text{のとき}: x=a\cdot\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\ (\text{あるいは}\ x=a\sec\theta)\end{cases}$$

(ただし，$\ominus$のとき $x<0$ なら $x=-a\cdot\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ とおく)

と置くとウマクいくときが多い．

しかし――「部分積分法」を用いればこの積分は上のようなパラメーター表示を用いないでもやれることはやれるが少しメンドウなので，次のような「誘導」をつけて出題されることが多い．(以下複号同順とする．)

$$\{\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|\}'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$$

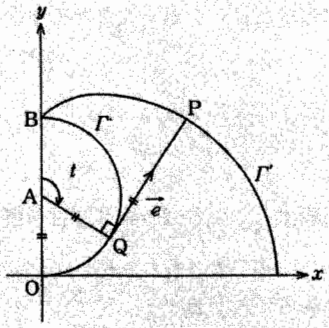
$$\left\{\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)\right\}'$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\pm a^2\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\sqrt{x^2\pm a^2}$$

$$\therefore\quad \int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)+C$$

発展問題 8―「伸開線(インボリュート)」と面積

原点をOとし，平面上の2点 A(0,1)，B(0,2) をとる．OBを直径とし，点 (1,1) を通る半円を Γ とする．長さ π の糸が一端をOに固定して，Γ (ガンマと読む) に巻きつけてある．この糸の他端Pを，それが x 軸に到達するまでゆるむことなくほどいてゆく．糸と半円との接点をQとし，∠BAQの大きさを t とする．(右図)



(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を t を用いて表せ．

(2) Pがえがく曲線 Γ' と，x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解　説　(1)　まず $\overline{OA}=\overline{AQ}=1$, $\overline{QP}=\overset{\frown}{QB}=1\cdot t=t$ である.

次に $\overrightarrow{AQ}$ が x 軸の正方向となす角は $\dfrac{\pi}{2}-t$ であるから

$$\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\quad(\text{単位ベクトル})$$

ゆえに $\overrightarrow{QP}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}$ は，これを $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転すればよいから，

$$\vec{e}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{2} & -\sin\dfrac{\pi}{2}\\ \sin\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}+\overline{QP}\,\vec{e}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sin t-t\cos t}\\ \boldsymbol{\cos t+t\sin t+1}\end{pmatrix}$$

(2)　$P(x, y)$ とすると

$$\begin{cases}x=\sin t-t\cos t\\ y=\cos t+t\sin t+1\end{cases}\qquad\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$$

$$\begin{array}{c|c}x & 0\longrightarrow\pi\\ \hline t & 0\longrightarrow\pi\end{array}$$

$$\therefore\quad S=\int_0^\pi y\,dx=\int_0^\pi y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^\pi(1+\cos t+t\sin t)\cdot t\sin t\,dt$$

$$=\int_0^\pi(t\sin t+t\sin t\cos t+t^2\sin^2 t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi\left\{t\sin t+\frac{1}{2}t\sin 2t+t^2\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right\}dt$$

$$=\int_0^\pi t\sin t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin 2t\,dt+\left[\frac{t^3}{6}\right]_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\cos 2t\,dt$$

ここで

$$\int_0^\pi t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\cos t\,dt=\pi+\Big[\sin t\Big]_0^\pi=\pi$$

$$\int_0^\pi t\sin 2t\,dt=\left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos 2t\,dt$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi=-\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi t^2\cos 2t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\sin 2t\right]_0^\pi-\int_0^\pi t\sin 2t\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt=\frac{\pi}{2}$$

これらを代入すると

$$S=\pi+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{6}}$$

らしんばん

本問の図で説明しよう．

Γ：Γ' の「**縮閉線（エボリュート）**」――実は $\boldsymbol{\Gamma'}$ **の「曲率中心（p. 147 参照!!）」の軌跡**

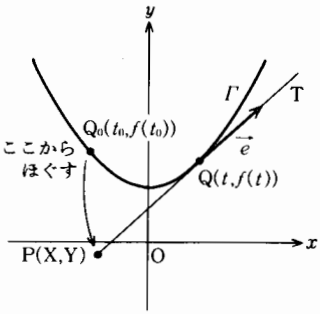
Γ'：Γ の「**伸開線（インボリュート）**」

という．そして，本問の図でいえば直線 PQ は，

$$\begin{cases}\text{P における } \Gamma' \text{ の法線}\\ \text{Q における } \Gamma \text{ の接線}\end{cases}$$

になっている．本問では，Γ が「円」であるが，これは一般の曲線についてもいえることである．

本問(1)の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分をパラメーター t で表すハナシは，与えられた曲線 Γ が「半径 1 の円」であることからかなりウマクいったが，図のような曲線 Γ：$y=f(x)$ の場合はどうすればよいか．



右の $\mathrm{Q_0}(t_0, f(t_0))$ を始点として，曲線 Γ の $\mathrm{Q_0}$ より右の部分に糸が巻きつけてあるものとする．この糸を，**ゆるむことなく点 $\mathbf{Q}(t, f(t))$ までほぐす**時，糸の先端の点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分を t で表すことを考える．

基本的には

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

を計算すればよいのだが，第 2 項の $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を求めるのが少しメンドウである．しかし $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の特徴を

$$\begin{cases}\text{(i)}\ \ \textbf{長さは } \overline{\mathrm{QP}}=\widehat{\mathrm{Q_0Q}}\ (=l \text{ とおく}) \text{ ―― 糸をほぐすのだ!!}\\ \text{(ii)}\ \ \textbf{方向は点 } \mathbf{Q}(t, f(t)) \textbf{ における接線方向（図の } \overrightarrow{\mathrm{PT}} \textbf{ 方向）の逆向き．}\end{cases}$$

とおさえてしまえば，ともかく求めることができる．

すなわち，(i)については

$$l=\int_{t_0}^{t}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

を計算することで求まる．(ii)については $\vec{m}=(1, f'(t))$ 方向の単位ベクトルが

$$\vec{e}=\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\begin{pmatrix}1\\ f'(t)\end{pmatrix}$$

で，この逆向きを考えればよいから $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=-l\vec{e}$ である．したがって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求め

るにはこれらを(＊)に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}-l\vec{e}=\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}-\frac{l}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

を計算すればよいことがわかる．

このタイプの問題についてこれ以上深入りはしないが，「曲線のパラメーター表示」を求める場合，ベクトルの考え方がいろいろな形で利用されることは知っておくとよい．

発展問題 9―非回転体の体積

x-y 平面上の曲線

$$y=\sin x\ \ (0\leqq x\leqq \pi)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を z 軸に平行に動かしたときに描かれる曲面と，3 平面

$$x+y+z=a\cdots\cdots\cdots ②,\quad y=0,\ z=0$$

で囲まれた立体の体積 V を次にしたがって求めよ．ただし，①と②は点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ で交わるものとする．

(1)　x 軸に垂直で点 $(x, 0, 0)$ を通る平面による，この立体の切り口の面積 $S(x)$ を求めよ．

(2)　$S(x)$ を用いて，体積 V を求めよ．**(やや難)**

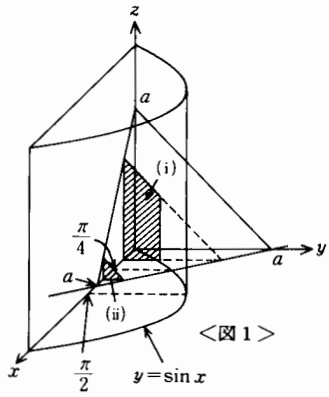
解　説　(1)　$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ は②をみたすから

$$a=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である．以下 x-y 平面で考える．

$$\begin{cases} y=\sin x\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x+y=a\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②' \end{cases}$$

①，②′ の交点が $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ であるから，$0\leqq x\leqq \frac{\pi}{4}$ のときと　$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq a$ $\left(=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}<\pi\right)$ のときとではハナシがちがう――場合を分けて考えなけ



<図1>

ればならない.

(i) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき:

断面の図形を x 軸の正方向から見ると〈図 3〉のようになる.

$$x+y+z=a$$

で, とりあえず x を固定して $y=0$ とおくと

$$z=a-x$$

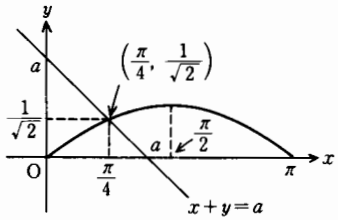
同様に, x を固定して $y=\sin x$ とおくと

$$z=a-x-\sin x$$

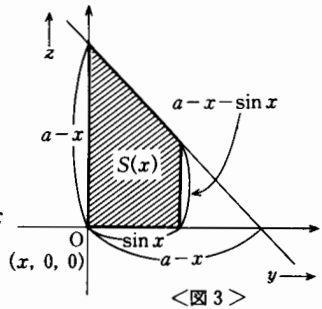
ゆえに, 求める面積 $S(x)$ は台形の面積の公式から

$$S(x)=\frac{1}{2}\{(a-x)+(a-x-\sin x)\}\sin x$$

$$=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{sin}^2\,\boldsymbol{x}$$



<図 2>



<図 3>

(ii) $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq a$ のとき: 立体の切り口は直角 2 等辺 3 角形になり,

$$S(x)=\frac{1}{2}(a-x)^2=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2$$

(2) (1)の(i), (ii)にしたがって, $S(x)$ を積分して体積 V を求めると,

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{-(x-a)\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right\}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{a}\frac{1}{2}(x-a)^2\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{-(x-a)\sin x-\frac{1}{4}(1-\cos 2x)\right\}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{a}\frac{1}{2}(x-a)^2\,dx$$

ここで「部分積分法」を用いて $(x-a)\sin x$ の不定積分を求めておくと

$$\int(x-a)\sin x\,dx=-(x-a)\cos x-\int(-\cos x)dx$$

$$=-(x-a)\cos x+\sin x+C \quad (C:\ \text{積分定数})$$

ゆえに

$$V=\left[(x-a)\cos x-\sin x-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{(x-a)^3}{6}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{a}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}+a-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)^3$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$=-\frac{3}{8}+\frac{3\pi}{16}+\frac{\sqrt{2}}{24}$$

らしんばん

空間のイメージがとらえられない場合はまず〈図2〉を描いて考えるとよい．それには

$$a=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq\frac{3.14}{4}+\frac{1.414}{2}=1.492<\frac{\pi}{2}$$

をメヤスにする．

発展問題10―「つるまき線」と回転体の体積

円柱：$x^2+y^2\leqq a^2$，$0\leqq z\leqq h$（ただし，$a>0$，$h>0$）の表面上に2点 $A(a,0,0)$，$B(a,0,h)$ をとる．点Aを出発した動点Pが円柱の側面を，内部を左手に見ながら進み，1まわりして点Bに達するものとする．このとき次の問に答えよ．

(1) Pの動く距離が最短となるような，Pの軌跡を y-z 平面に正射影して得られる曲線 C の方程式を求めよ．

(2) (1)の曲線 C と z 軸とで囲まれる y-z 平面内の図形を，z 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

解　説　(1)　$\angle AOQ=\theta$ とおくと $\overset{\frown}{AQ}=a\theta$ で，展開図をつくると〈図2〉のようになるから

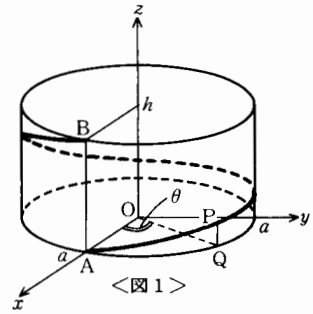
$$z=a\theta\cdot\frac{h}{2\pi a}=\frac{h\theta}{2\pi}$$

ゆえにPの座標は

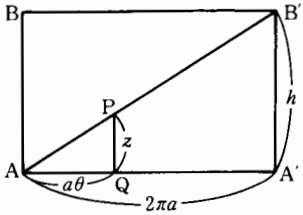
$$P\left(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ \frac{h\theta}{2\pi}\right)$$

この点Pを y-z 平面に正射影すると $x=0$ で，

$$y=a\sin\theta,\quad z=\frac{h\theta}{2\pi}$$



<図1>



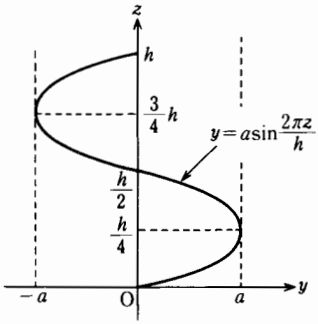
<図2>

この2式から θ を消去して y, z の関係式を求めると，第2式から

$$\theta=\frac{2\pi z}{h}$$

これを第1式にいれて

$$\boldsymbol{y=a\sin\frac{2\pi z}{h}}\quad (x=0,\ 0\leqq z\leqq h)$$



<図3>

(2) $V=\int_0^h \pi y^2\,dz$

この式で $y=a\sin\theta$, $z=\frac{h\theta}{2\pi}$ だから

$$\therefore\quad dz=\frac{h}{2\pi}\,d\theta$$

z	$0\longrightarrow h$
θ	$0\longrightarrow 2\pi$

$$\therefore\quad V=\int_0^{2\pi}\pi(a\sin\theta)^2\frac{h}{2\pi}\,d\theta=\frac{a^2h}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$

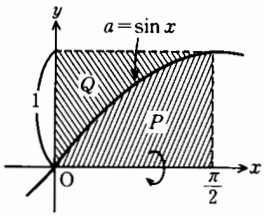
$$=\frac{a^2h}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{a^2h}{4}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\pi a^2h}$$

らしんばん

➡ 距離を最短にするには〈図2〉のような展開図をかいて，A と B′（B′ は〈図1〉の B にあたる）とを直線で結べばよい．

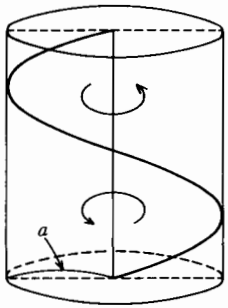
本問のように，円柱に巻きついた曲線を「**つるまき線**」という．



➡ 本問(2)の結果に注目!!

結果の $\frac{1}{2}\pi a^2h$ は「底面の半径 a，高さ h の円柱の体積の半分!!」になっている．

実は右図の領域 P, Q を x 軸のまわりに回転して得られる図形の体積 V_P, V_Q は等しい．



$$V_P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

$$V_Q=\underbrace{\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}}_{\text{円柱の体積}}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}$$

である．したがって本問については上に述べたハナシがわかればその4つ分のことであるから

$$\underbrace{\pi a^2 h}_{\text{円柱の体積}}\times\frac{1}{2}$$

となるのはあたりまえのことである．

発展問題 11—回転体の体積と無限等比級数

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ を C とする．C 上の点 $A_1\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ における接線と x 軸との交点を P_1 とし，P_1 を通って x 軸に垂直な直線と C との交点を A_2，点 A_2 における C の接線と x 軸との交点を P_2 とする．以下同様にくり返し，一般に C 上の点 A_n における接線と x 軸との交点を P_n とし，P_n を通って x 軸に垂直な直線と C との交点を A_{n+1} とする．2つの線分 A_nP_n，$A_{n+1}P_n$ と C とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V_n とおく．

(1)　点 P_n の x 座標を求めよ．

(2)　V_n を求めよ．

(3)　無限級数 $V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n+\cdots\cdots$ の和を求めよ．

解　説　(1)　$y=\dfrac{1}{x}$，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

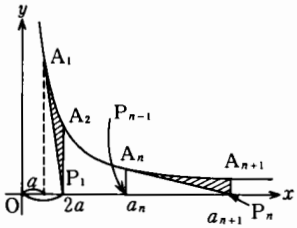
曲線 C 上の点 $A_n\left(a_n, \dfrac{1}{a_n}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{a_n}=-\frac{1}{{a_n}^2}(x-a_n)$$

これと x 軸との交点の x 座標は $y=0$ とおいて

$$a_n=x-a_n \qquad \therefore\quad x=2a_n$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=2a_n$$



($a_{n+1}=2a_n$ になる)

ゆえに数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=a$，公比2の等比数列である．

$\therefore\quad a_n=a\cdot 2^{n-1}$

ゆえに点 P_n の x 座標は $a_{n+1}=\boldsymbol{2^n a}$

(2) 求める体積は $a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ の範囲で，曲線 C の回転部分から円錐部分（$\triangle A_nP_{n-1}P_n$ が回転してできる部分）をひけばよい．

$$V_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2dx-\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2(a_{n+1}-a_n)$$

$$=\pi\int_{a_n}^{2a_n}\frac{1}{x^2}\,dx-\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{a_n}\right)^2\cdot a_n\quad(\because\quad a_{n+1}=2a_n)$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{a_n}^{2a_n}-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{a_n}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2a_n}\right)-\frac{\pi}{3a_n}=\frac{\pi}{6a_n}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6a}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}}$$

(3) (2)より，$V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n+\cdots\cdots$ は公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で「和」V が存在する．(p. 22 参照!!)

$$\therefore\quad V=\frac{V_1}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{\pi}{6a}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{3a}}\quad\left(\because\quad V_1=\frac{\pi}{6a}\cdot\frac{1}{2^0}=\frac{\pi}{6a}\right)$$

らしんばん

本問では，P_1，P_2，……，P_n の x 座標が等比数列になったが，曲線 C のあたえ方で等差数列になるときもある．

たとえば

$C:\ y=e^{-x}$

とすると，$y'=-e^{-x}$ で C 上の点 $A_n(a_n, e^{-a_n})$ ($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$) における接線の方程式は

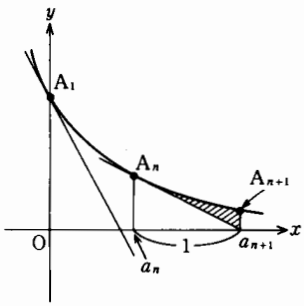
$y-e^{-a_n}=-e^{-a_n}(x-a_n)$

この式で $y=0$ とおくと

$x-a_n=1\qquad\therefore\quad x=a_n+1$

$\therefore\quad a_{n+1}=a_n+1$

で，$a_1=0$ とすると，$a_n=n-1$ になる．



この場合の V_n を求めると

$$V_n=\int_{n-1}^{n}\pi(e^{-x})^2\,dx-\frac{\pi}{3}\{e^{-(n-1)}\}^2\cdot 1$$

$$=\frac{\pi(e^2-3)}{6e^2}\cdot(e^{-2})^{n-1}\quad(0<e^{-2}<1)$$

すなわち「無限等比級数の和は存在」してその値は次のようになる．

$$V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n+\cdots\cdots=\frac{\pi(e^2-3)}{6e^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-2}}=\frac{\pi(e^2-3)}{6(e^2-1)}$$

発展問題 12―回転体――斜軸回転

x-y 平面上において，放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=x$ との原点O以外の交点をAとする．この直線と放物線によって囲まれる部分を，直線OAを軸として回転して得られる立体の体積を求めよ．(やや難)

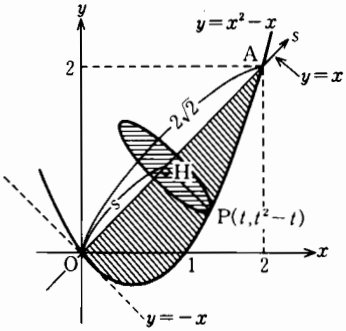
解　説　与えられた放物線と直線

$$\begin{cases} C:\ y=x^2-x \\ l:\ y=x \end{cases}$$

の交点はこれらを連立させて解いて

$$x=y=0,\ 2$$

$$\therefore\quad \mathrm{A}(2,2)$$



次に曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t)$ から直線 l に下した垂線の足をHとし，$\mathrm{OH}=s$ とおくと点Hの座標は

$$\mathrm{H}\left(\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\quad (0\leqq s\leqq 2\sqrt{2})$$

で，求める体積は次の式で与えられる．すなわち，

$$V=\int_0^{2\sqrt{2}}\pi\overline{\mathrm{PH}}^2\,ds$$ (積分変数が「$s(=\overline{\mathrm{OH}})$」であることに注目!!) …①

ここで $\overline{\mathrm{PH}}$ を求めておく――l は $x-y=0$ であるから「点と直線の距離の公式」を用いると，

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{|t-(t^2-t)|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{|2t-t^2|}{\sqrt{2}}$$

また，s と t との関係は $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\begin{pmatrix}\frac{s}{\sqrt{2}}\\ \frac{s}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{s}{\sqrt{2}}-t\\ \frac{s}{\sqrt{2}}-(t^2-t)\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\quad \frac{s}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-t\right)+\frac{s}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-t^2+t\right)=0\qquad \therefore\quad s=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$$

ゆえに s に関する積分式①は t に関する積分式におきかえられる．すなわち

$$ds=\frac{2t}{\sqrt{2}}\,dt=\sqrt{2}\,t\,dt$$

s	$0\longrightarrow 2\sqrt{2}$
t	$0\longrightarrow 2$

として①は

$$V=\int_0^2 \pi\left(\frac{|2t-t^2|}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{2}\,t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2(t^5-4t^4+4t^3)\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{t^6}{6}-\frac{4}{5}t^5+t^4\right]_0^2=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

らしんばん

「点と直線の距離の公式」を用いないで $\overline{\mathrm{PH}}$ を求めるためにPの座標をマジメに計算すると $\mathrm{P}(\sqrt{\sqrt{2}\,s},\ \sqrt{2}\,s-\sqrt{\sqrt{2}\,s})$ となる．

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{PH}}^2=\left\{\sqrt{\sqrt{2}\,s}-\frac{s}{\sqrt{2}}\right\}^2+\left\{(\sqrt{2}\,s-\sqrt{\sqrt{2}\,s})-\frac{s}{\sqrt{2}}\right\}^2$$

$$=2^{\frac{3}{2}}s-2^{\frac{7}{4}}s^{\frac{3}{2}}+s^2$$

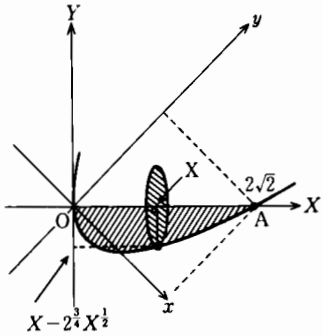
$$\therefore\quad V=\int_0^{2\sqrt{2}}\pi(2^{\frac{3}{2}}s-2^{\frac{7}{4}}s^{\frac{3}{2}}+s^2)\,ds\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$=\pi\left[2^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}s^2-2^{\frac{7}{4}}\cdot\frac{2}{5}s^{\frac{5}{2}}+\frac{s^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

としてもよい．しかし，これをやるなら座標軸の回転を利用する方がスッキリする．

x-y 座標軸を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して X-Y 座標軸が得られたとすると，この変換は

$$\begin{cases} x=X\cos\frac{\pi}{4}-Y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \\ y=X\sin\frac{\pi}{4}+Y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



で与えられるから，C と l とで囲まれる領域

$$D=\{(x,y)\mid x^2-x\leqq y\leqq x\ \ (0\leqq x\leqq 2)\}$$

の条件式を X, Y の関係に変換すると

$$\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\leqq\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\leqq\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)^2-(X-Y)\leqq X+Y\leqq X-Y$$

$$\therefore\quad (X-Y)^2\leqq 2\sqrt{2}\,X,\quad Y\leqq 0$$

$$\therefore\quad X-Y\leqq\sqrt{2\sqrt{2}\,X}=2^{\frac{3}{4}}X^{\frac{1}{2}}\quad(\because\quad X\geqq 0,\ Y\leqq 0\ \text{より}\ X-Y\geqq 0)$$

$$\therefore\quad X-2^{\frac{3}{4}}X^{\frac{1}{2}}\leqq Y\leqq 0$$

すなわち領域 D は

$$D'=\{(X,Y)\mid X-2^{\frac{3}{4}}X^{\frac{1}{2}}\leqq Y\leqq 0\}$$

に変換される．ゆえに求める体積は

$$V=\int_0^{2\sqrt{2}}\pi(X-2^{\frac{3}{4}}X^{\frac{1}{2}})^2\,dX=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}(X^2-2^{\frac{7}{4}}X^{\frac{3}{2}}+2^{\frac{3}{2}}X)\,dX$$

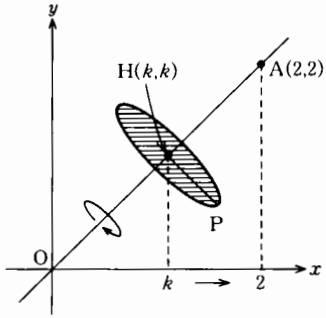
で，これは(*)に示した積分計算に他ならない．

よくあるマチガイの例を1つあげておく——たとえばHの座標を $H(k, k)$ とおいて $\overline{HP}^2$ を求めると，

$$\overline{HP}^2=2^2k-2^{\frac{5}{2}}k^{\frac{3}{2}}+2k^2$$

となるが

$$V=\int_0^2 \pi\overline{PH}^2\,dk$$
$$=\pi\int_0^2(2^2k-2^{\frac{5}{2}}k^{\frac{3}{2}}+2k^2)\,dk$$
$$=\frac{8\pi}{15}$$



とはできない．それは回転軸OAと垂直な断面を考えたところまではよいのだが，それを x 軸の方向に積分しているからである．

この方法を修正すると次のようになる．

$OH=s$ とおいて $y=x$ の傾き1に注目すると

$$s=\sqrt{2}\,k \qquad \therefore\quad ds=\sqrt{2}\,dk$$

s	$0\longrightarrow 2\sqrt{2}$
k	$0\longrightarrow 2$

となるから本文①の積分は

$$V=\int_0^2 \pi\overline{PH}^2\sqrt{2}\,dk=\sqrt{2}\int_0^2(2^2k-2^{\frac{5}{2}}\cdot k^{\frac{3}{2}}+2k^2)\,dk$$

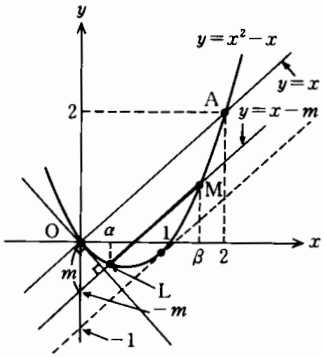
となる．これならよい．

回転体の体積を「輪切り」にして求める方法があった．すなわち

$$V=\int_p^q 2\pi xy\,dx \quad (\text{p. 208 参照}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

このハナシを用いて本問をやれないか!!

まず右図のように $y=x$ に平行な直線 $y=x-m(m\geqq 0)$ を引き，放物線 $y=x^2-x$ との交点をL，Mとする——**「線分LMの長さ」と「線分LMから回転軸 $y=x$ への距離」がほしい．**



L，Mの x 座標をそれぞれ α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とすれば

$$x^2-x=x-m$$
$$\therefore\quad x^2-2x+m=0$$
$$\therefore\quad \alpha=1-\sqrt{1-m},\ \beta=1+\sqrt{1-m}$$

(ただし $D\geqq 0$ より $m\leqq 1$　　$\therefore\ 0\leqq m\leqq 1$)

これより $\overline{LM}$ は

$$\overline{LM}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)\quad (y=x-m \text{ の傾きは } 1)$$
$$=\sqrt{2}\,\{(1+\sqrt{1-m})-(1-\sqrt{1-m})\}$$
$$=2\sqrt{2}\sqrt{1-m}\longrightarrow \text{これは } (**) \text{ の } y \text{ にあたる}$$

ここで $y=x-m$ と $y=x$ との距離は

$\dfrac{m}{\sqrt{2}} \longrightarrow$ これは（＊＊）の x にあたる．$\left(dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}dm\right)$

さらに m の範囲（$0 \leqq m \leqq 1$）から（＊＊）の積分区間は $[0,1]$ に変換され

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\pi\, xy\, dx=\int_0^1 2\pi\frac{m}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{1-m}\,\frac{1}{\sqrt{2}}dm$$

x	$0 \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
m	$0 \longrightarrow 1$

$$=2\sqrt{2}\,\pi\int_0^1 m\sqrt{1-m}\,dm$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi\left\{\left[m\cdot\left(-\frac{2}{3}(1-m)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(1-m)^{\frac{3}{2}}\,dm\right\}$$

（「部分積分法」）

$$=2\sqrt{2}\,\pi\cdot\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{5}(1-m)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

となり同じ結果が得られる．しかしこの方法は「参考程度の理解」でよい．

発展問題 13—カテナリー（懸垂線）と曲線の長さ

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 上の2点A，Bを両端とするこの曲線の弧の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ で表すことにする．

(1) A，Bの x 座標をそれぞれ a，b（ただし，$a<b$）として，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を a，b で表せ．

(2) P_0，Qはこの曲線上の点で，その x 座標がそれぞれ0，1であるものとする．P_0，Qを両端とするこの曲線の弧の上に，P_0 からQに向かって次々に点 P_1，P_2，……P_{n-1} をとって，$\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}=\overset{\frown}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}}$ となるようにする．P_0，P_1，……，P_{n-1} の y 座標をそれぞれ y_0，y_1，……y_{n-1} として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k{}^2$ の値を求めよ．

解　説　(1)　$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$　　$\therefore\ y'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$$\therefore\ \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right\}^2}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right\}^2}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\ (\geqq 1)$$

$$\therefore\ \overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_a^b\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_a^b=\frac{1}{2}\{(e^b-e^{-b})-(e^a-e^{-a})\}$$

(2)　$\overset{\frown}{\mathrm{P_0Q}}$ は(1)で $a=0,\ b=1$ とおいて $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$

$\overset{\frown}{\mathrm{P_0P}_k}$ は(1)で $a=0,\ b=x_k$ とおいて $\frac{1}{2}(e^{x_k}-e^{-x_k})$

このとき，$\overset{\frown}{\mathrm{P_0P}_k}$ は $\overset{\frown}{\mathrm{P_0Q}}$ の $\frac{k}{n}$ 倍であるから

$$\frac{1}{2}(e^{x_k}-e^{-x_k})=\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{2}(e-e^{-1})=\frac{k}{2n}(e-e^{-1})$$

ゆえに

$$y_k{}^2=\left\{\frac{1}{2}(e^{x_k}+e^{-x_k})\right\}^2=\left\{\frac{1}{2}(e^{x_k}-e^{-x_k})\right\}^2+1$$

$$=\left\{\frac{k}{2n}(e-e^{-1})\right\}^2+1$$

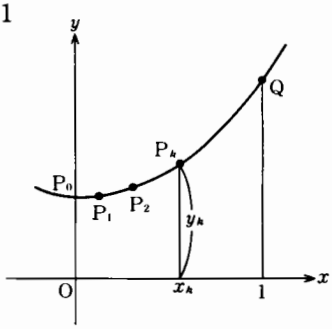
$$=\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2+1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k{}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2+1\right\}$$

$$\longrightarrow\quad \int_0^1\left\{\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2x^2+1\right\}dx$$

$$=\left[\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2+1=\frac{\boldsymbol{e^2+10+e^{-2}}}{\boldsymbol{12}}$$



らしんばん

➡ $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\quad(a>0)$

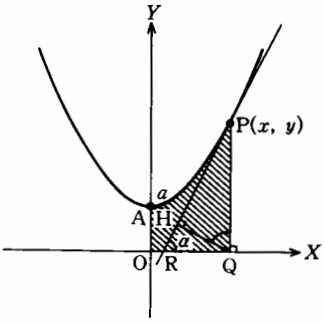
で表される曲線を「カテナリー（懸垂曲線）」という．本問はこの a の値が1のときのハナシである．

この曲線の特徴をいくつかまとめておく．

以下第1象限で考えることにするが，他の場合も同様である．

(i)　右図で，図形OAPQの面積を S，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ の長さを l とすると，

$\boldsymbol{S=al}$ （$=a^2y'$ ← 次の(＊＊)から）



である――やってみればよい．

$$y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\right\}^2}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\ (\geqq 1)$$

$$=\frac{y}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad S=\int_0^x y\,dx=a\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=al$$

またこの l は

$$l=\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^x\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\,dx$$

$$=\left[\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\right]_0^x=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\ (=ay')\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

である．

(ii) P における接線に x 軸上の点 Q から垂線 QH を下ろすと

QH$=a$ **(一定)，PH**$=l$

である．これもやってみよう．

点 $P(x, y)$ における接線の方程式は

$$Y-y=y'(X-x)\qquad \therefore\quad y'X-Y-xy'+y=0$$

である．これに点 $Q(x, 0)$ から垂線 QH を下ろすとその長さは「点と直線の距離の公式」を用いて

$$\mathrm{QH}=\frac{|y'x-0-xy'+y|}{\sqrt{(y')^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{(y')^2+1}}=a\quad (\because\ y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})>a,\ (*))$$

となる．また

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{PQ}^2-\mathrm{QH}^2}=\sqrt{y^2-a^2}\ (\triangle\mathrm{PQH}\text{ に「ピタゴラスの定理」})$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\right\}^2-a^2}$$

$$=a\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\right\}^2}=a\sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2}=l\ (\because\ (**))$$

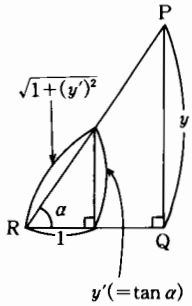
である．

しかしこのハナシは次のようにやるともう少し簡単に説明される．すなわち，$\angle\mathrm{PRQ}=\alpha$ とすると $\tan\alpha$ は直線 PR の傾きであるから

$$\tan\alpha=y'$$

ここで右図を用いて先に $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ を y' で表しておくと

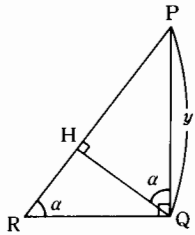
$$\sin\alpha=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$



である．これを用いると

$$\mathrm{QH}=\mathrm{PQ}\cos\alpha=y\cos\alpha$$
$$=\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}=a\ (\because\ (*))$$
$$\mathrm{PH}=\mathrm{PQ}\sin\alpha=y\sin\alpha$$
$$=\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}\cdot y'=l\ (\because\ (*),(**))$$

となる．



(iii)　この曲線の形について――「太さと重さの一様な綱の両端を同じ高さにかけて垂らす」とこの曲線の形になることが知られている――「懸垂(曲)線」という名前も，実はこのことに由来している．

発展問題 14―「エピサイクロイド」と曲線の長さ

原点Oを中心にもつ半径2の固定された円板をAとする．半径1の円板Bを，その中心Cが点 (3, 0) に重なるように置くとき，点 (4, 0) に重なるBの周上の点をMとする．BをAの周に沿って滑らないようにころがして，OCが x 軸の正の方向となす角が θ になったときの，Mの位置の座標を (X, Y) とする．

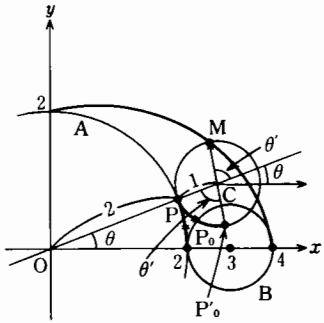
θ が0から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとして，次の問に答えよ．

(1)　X と Y とを θ の関数として表せ．

(2)　Y の最大値を求めよ．

(3)　Mのえがく曲線の長さを求めよ．

解　説　(1)　2つの円板AとBとの接点をPとし，Pの最初の位置 (2, 0) を $\mathrm{P_0}$ とすると，OCが x 軸の正方向となす角が θ となるときの状況は右図のようになる．(ただし，θ' は円板Bの回転角)



このとき円板B上の点 $\mathrm{P_0}$ が $\mathrm{P_0}'$ の位置にきていたとすると，MはCに関して $\mathrm{P_0}'$ と対称で

$$\overset{\frown}{\mathrm{P_0P}}=\overset{\frown}{\mathrm{P_0'P}}$$
$$\therefore\quad 2\cdot\theta=1\cdot\theta'$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ が x 軸の正方向となす角は

$\theta+\theta'=\theta+2\theta=3\theta$

$\therefore\quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$

$$=\begin{pmatrix}3\cos\theta\\3\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos 3\theta\\\sin 3\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\theta+\cos 3\theta\\3\sin\theta+\sin 3\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{X=3\cos\theta+\cos 3\theta,\quad Y=3\sin\theta+\sin 3\theta}$$

(2) $\dfrac{dY}{d\theta}=3\cos\theta+3\cos 3\theta=3(\cos 3\theta+\cos\theta)$

$=6\cos 2\theta\cos\theta$ (「和→積の公式」より)

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最大で，その最大値 $Y_{\max}$ は

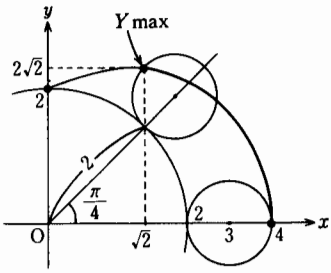
θ	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dY}{d\theta}$		+	0	−	(0)
Y		↗	$2\sqrt{2}$	↘	

$$Y_{\max}=3\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(3) 求める長さを L とすると，

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\ \cdots\cdots ①$$



$$\frac{dX}{d\theta}=-3\sin\theta-3\sin 3\theta$$

$$=-3(\sin\theta+\sin 3\theta)$$

$$=-6\sin 2\theta\cos\theta$$

$$\frac{dY}{d\theta}=6\cos 2\theta\cos\theta$$

$$\therefore\quad \left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2$$

$$=(-6\sin 2\theta\cos\theta)^2+(6\cos 2\theta\cos\theta)^2$$

$$=36(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)\cos^2\theta=36\cos^2\theta$$

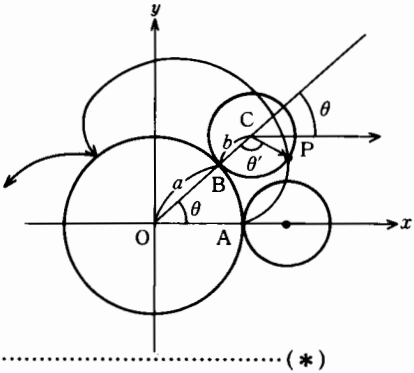
これを①に代入して

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{36\cos^2\theta}\,d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\quad(\cos\theta\geqq 0)$$

$$=6\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{6}$$

らしんばん

このように，定円に外接するもう1つの円Cがすべることなく転がっていくとき，Cの周上に固定した点の描く図形を「**エピサイクロイド**」という．一般的なハナシをしておこう．



図のように，半径 a の円に外接する半径 b の円Cが「すべることなく転がる」とき，最初Aにかさなっていた C 上の点 $P(x, y)$ のえがく図形の方程式はどのように与えられるだろうか．

右図で

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

である．$\overrightarrow{OC}$ は

$$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}(a+b)\cos\theta\\(a+b)\sin\theta\end{pmatrix}$$

で簡単に求まるが，$\overrightarrow{CP}$ を求めるのは少しメンドウである——$\overrightarrow{CP}$ と x 軸の正方向とのなす角 φ を求めなければならない．円Cの回転角を θ' とすると $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{PB}$ であるから

$$a\theta=b\theta' \qquad \therefore \quad \theta'=\frac{a}{b}\theta$$

$$\therefore \quad \varphi=\theta-\pi+\theta'=\theta-\pi+\frac{a}{b}\theta=\frac{a+b}{b}\theta-\pi$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}b\cos\varphi\\b\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta-\pi\right)\\b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta-\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\cos\frac{a+b}{b}\theta\\-b\sin\frac{a+b}{b}\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに(*)を成分で表すと

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+b)\cos\theta\\(a+b)\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b\cos\frac{a+b}{b}\theta\\-b\sin\frac{a+b}{b}\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases}x=(a+b)\cos\theta-b\cos\frac{a+b}{b}\theta\\y=(a+b)\sin\theta-b\sin\frac{a+b}{b}\theta\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

となる．本問の曲線は，実はこのような曲線の「出発点」が外側を回転する円Cの「半回転分ズレたもの」であり，原点を中心に $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転すれば一般的な

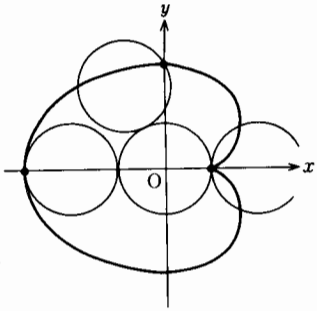
形のものに重なる．

特に $a=b$ のとき，(**) は

$$\begin{cases} x=a(2\cos\theta-\cos 2\theta) \\ y=a(2\sin\theta-\sin 2\theta) \end{cases}$$

となり，右の図のようになる．

この図形は「カージオイド（心臓形）」とよばれている．



発展問題 15—物理への応用

深さ x メートルでの断面が半径 $e^{-\frac{x}{8}}$ メートルの円であるような十分深いタンクに水が満たされている．

(1) 深さ h メートルまでの水をくみ上げるのに必要なエネルギー E を，積分を用いて表せ．ただし，x メートルのところにある水をくみあげるのに必要なエネルギーは，水 1 立方メートルあたり $10^3 gx$ ジュールとする．(ただし g は定数) **(やや難)**

(2) 水のくみ上げ作業に使われる単位時間あたりのエネルギーを 10^5 ジュール/時とする．水面の下降速度が最小になるときの深さ h_0 を求めよ．**(やや難)**

(3) (2)で求めた深さ h_0 まで水をくみ上げるのに要する時間 t はいくらか．

解　説　(1) 深さ x メートルでのタンクの断面積は

$\pi(e^{-\frac{x}{8}})^2=\pi e^{-\frac{x}{4}}$(メートル)^2 で，この深さにおける微小距離 dx（メートル）に対する水の体積は

$\pi e^{-\frac{x}{4}}\,dx$（メートル）^{3}

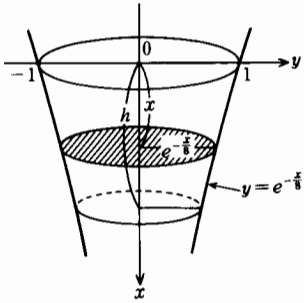
これをくみ上げるのに必要なエネルギーは

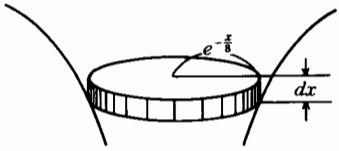
$10^3 gx\times\pi e^{-\frac{x}{4}}\,dx$

$=10^3\pi gxe^{-\frac{x}{4}}\,dx$（ジュール）

x が 0 から h まで変化する時の，この量の総和が求めるものである．

$$\therefore\quad E=\int_0^h 10^3\pi gxe^{-\frac{x}{4}}\,dx$$





$$=\mathbf{10^3\pi g}\int_0^h \boldsymbol{xe^{-\frac{x}{4}}\,dx}\ \text{(ジュール)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①で E は h の関数で与えられているから，

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=10^3\pi ghe^{-\frac{h}{4}}\cdot\frac{dh}{dt}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$\dfrac{dE}{dt}=10^5$（ジュール/時）と左辺が一定であるから，$\dfrac{dh}{dt}$ が最小となるのは，②の右辺の $he^{-\frac{h}{4}}$（$=f(h)$ とおく）が最大になるときである．

$$f'(h)=e^{-\frac{h}{4}}-\frac{h}{4}e^{-\frac{h}{4}}$$
$$=\frac{4-h}{4}e^{-\frac{h}{4}}$$

h	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(h)$		$+$	0	$-$
$f(h)$		↗	最大	↘

で，$h=4$ のとき $f(h)$ は最大になる．

$\therefore\quad \boldsymbol{h_0=4}$ **(メートル)**

(3)　(1)，(2)より

$$10^5t=10^3\pi g\int_0^4 xe^{-\frac{x}{4}}\,dx$$

$$\therefore\ t=\frac{\pi g}{100}\int_0^4 xe^{-\frac{x}{4}}\,dx=\frac{\pi g}{100}\left\{\left[-4xe^{-\frac{x}{4}}\right]_0^4-\int_0^4\left(-4e^{-\frac{x}{4}}\right)dx\right\}$$
$$=\frac{\pi g}{100}\left\{-16e^{-1}+4\left[-4e^{-\frac{x}{4}}\right]_0^4\right\}$$
$$=\frac{\pi g}{100}\left\{-\frac{16}{e}-\frac{16}{e}+16\right\}=\boldsymbol{\frac{\pi g}{100}\left(16-\frac{32}{e}\right)}\ \text{(時間)}$$

らしんばん

(1)の立式がむずかしい．要は

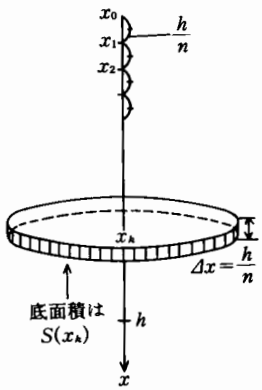
「連続して変化する量の総和」⟺「定積分」

ということなのだが，今までに解説してきた問題とちがって何か「キモチワルさ」が少しのこる．

そこで初心にかえって（？）深さ h を n 等分してみることにする．

深さ x における断面積を $S(x)$ とすると $x=x_k$ を底面とし，厚さが $\Delta x\left(=\dfrac{h}{n}\right)$ である水板の体積は

$S(x_k)\Delta x$（メートル）^{3}



で，この深さにある水を1（メートル）^{3} だけくみ上げるのに必要なエネルギーは

10^3gx_k　（ジュール）

であるから $k=1,2,3\cdots n$ にわたって全体をくみ上げるために必要なエネルギーの総量は

$$\sum_{k=1}^{n}\{(10^3gx_k)\cdot S(x_k)\Delta x\}=\sum_{k=1}^{n}10^3gx_kS(x_k)\Delta x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

である．ここまでツメてくると「$10^3gx_kS(x_k)$ という量は何か」ということになるのだが，これに対してわれわれは（＊）を見ただけでは「速度」とか「力」のようなハッキリした概念，あるいはコトバを用意できないことがわかる．この量はそのあとに続く Δx と組合せになって「エネルギー」という量を構成しているわけでそれがこの問題の１つの「困難さ」にもなっている．

それでも（＊）で $n\longrightarrow\infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}10^3gx_kS(x_k)\Delta x\longrightarrow\int_0^h 10^3gxS(x)\,dx=10^3g\int_0^h xS(x)\,dx$$

となり「連続して変化する量の総和」として意味をもつわけである．

このような扱いにも慣れておきたい．

(2)で単位時間あたりのエネルギーを「毎時 10^5 ジュール」（一定）にとっていることに注目!!　また(1)で E は h の関数として与えられている．これらをよくにらんで②の条件式を導くわけである．

なおこのような単位時間あたりのエネルギー（仕事）を「**仕事率**」という．

毎秒１ジュールの仕事をする場合の仕事率が１ワット（W）である．

本問についていえば

$$\frac{10^5}{60\times60}=\frac{1000}{36}=27.777\cdots\cdots(\mathrm{J/sec=W})$$

で，この「ポンプ」は約 28 ワット（W）ということになる．

発展問題 16―同次形の微分方程式

曲線 $Y=f(X)$ $(X>0)$ で表される曲線上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ における接線に，原点から下した垂線の長さが x であるという．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　この曲線がみたす微分方程式を求めよ．

(2)　$u=\dfrac{y}{x}$ として，(1)の微分方程式を u と x の式に書き直せ．

(3)　(2)の微分方程式を解き，曲線 $Y=f(X)$ の方程式を求めよ．

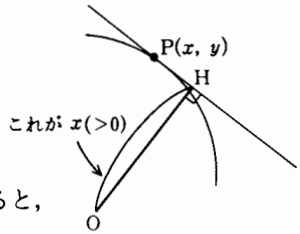
解　説　(1)　点 $\mathrm{P}(x,y)$ における曲線 $Y=f(X)$ の接線を l とすると

$$l:\ Y-y=f'(x)(X-x)$$

$$\therefore\quad f'(x)X-Y-xf'(x)+y=0$$

原点から l に下した垂線の長さが x だから，

$$\frac{|-xf'(x)+y|}{\sqrt{\{f'(x)\}^2+1}}=x \quad (>0)$$



両辺が正であるから2乗して整理すると

$$\boldsymbol{2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$y=ux$ であるからこの両辺を x で微分すると，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$$

これらを①にいれて

$$2x(ux)\left(\frac{du}{dx}x+u\right)+x^2-(ux)^2=0$$

$$\therefore\quad 2ux^2\left(\frac{du}{dx}x+u\right)+x^2(1-u^2)=0$$

この両辺を $x^2(\neq 0)$ でわって整理すると

$$\boldsymbol{2ux\frac{du}{dx}+u^2+1=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②は次のように変形される．

$$\frac{2u}{u^2+1}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}\quad (\text{変数分離形!!})$$

両辺を x で積分して

$$\int\frac{2u}{u^2+1}\,du=-\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore\quad \log(u^2+1)=-\log x+C_1\quad (C_1:\ \text{定数})$$

$$=\log C-\log x=\log\frac{C}{x}\quad (\log C=C_1)$$

$$\therefore\quad u^2+1=\frac{C}{x}$$

ここで $u=\dfrac{y}{x}$ を代入すると

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\frac{C}{x}\qquad\therefore\quad x^2+y^2=Cx\quad \left(\left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2\right)$$

$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{Cx-x^2}$$

これが曲線 $Y=f(X)$ 上のどの点でも成り立つから x，y を X，Y にかきかえると，求める曲線の方程式は

$$\boldsymbol{Y=\pm\sqrt{CX-X^2}\quad (X>0)}$$

(これは，中心 $\left(\dfrac{C}{2},0\right)$，半径 $\dfrac{C}{2}$ の円である．)

らしんばん

➡ ①を変形してみると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}\quad\left(=\frac{1}{2}\left\{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}\right\}\right)$$

で，分母，分子がともに2次の同次式である．この時，右辺は $\frac{y}{x}$ の関数として表され，**$\frac{y}{x}=u$ すなわち $y=xu$ とおくと与えられた微分方程式は「変数分離形」の微分方程式を解くことに帰着させることができる——「同次形の微分方程式」という．**

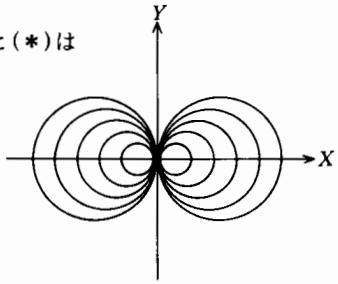
➡ 本問で得られた曲線は

$$\left(X-\frac{C}{2}\right)^2+Y^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

であるが，$\frac{C}{2}$ をあらためて C とおいてみると(*)は

$$(X-C)^2+Y^2=C^2\quad\cdots\cdots(**)$$

これは右図のような「円族」を表している——本問は $X>0$ であるから右側である．



➡ (**)の円族の1つを右下図のように

$$(X-c)^2+Y^2=c^2$$

とする．$\angle\mathrm{OPH}=\theta$ とすると

$\angle\mathrm{ORP}=\theta$ （接弦定理）

$\therefore\quad\angle\mathrm{OCP}=2\theta$ （中心角）

$\therefore\quad\angle\mathrm{CPQ}=\frac{\pi}{2}-2\theta$

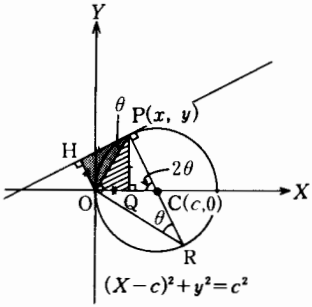
$\therefore\quad\angle\mathrm{OPQ}=\angle\mathrm{CPH}-\angle\mathrm{OPH}-\angle\mathrm{CPQ}$

$=\frac{\pi}{2}-\theta-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\theta\ (=\angle\mathrm{OPH})$

$\therefore\quad\triangle\mathrm{OPH}\equiv\triangle\mathrm{OPQ}$

ゆえに次のことがわかる．

$$\begin{cases}\mathrm{OH}=\mathrm{OQ}=x\ (\text{本問})\\ \mathrm{PH}=\mathrm{PQ}=y\end{cases}$$



発展問題 17—「等角うずまき線」と「変数分離形」

曲線 C は

$$\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}\quad\left(\begin{array}{c}0\leqq\theta\leqq\alpha\\ f(\theta)>0,\ f(0)=1\end{array}\right)$$

で表され，その上に点 (x,y) をとるとき，ベクトル (x,y) からベ

クトル $\left(\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ への角はつねに $\dfrac{2\pi}{3}$ であるという．このとき

(1)　関数 $f(\theta)$ を求めよ．

(2)　曲線 C の長さ $l(\alpha)$ を求めよ．

(3)　$\lim\limits_{\alpha\to\infty} l(\alpha)$ を求めよ．

解　説　(1)　$(x, y)=(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)=\vec{x}$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right)=(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta)=\vec{v}$$

とおくと，$\vec{x}$ と $\vec{v}$ のなす角がつねに $\dfrac{2\pi}{3}$ であるから内積の定義より

$$\vec{x}\cdot\vec{v}=|\vec{x}||\vec{v}|\cos\frac{2\pi}{3} \quad\cdots\cdots①$$

この両辺をそれぞれ計算すると

$$\vec{x}\cdot\vec{v}=f(\theta)\cos\theta\cdot\{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta\}$$
$$+f(\theta)\sin\theta\cdot\{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta\}$$
$$=f(\theta)f'(\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=f(\theta)f'(\theta)$$

$$|\vec{x}|=\sqrt{\{f(\theta)\cos\theta\}^2+\{f(\theta)\sin\theta\}^2}=\sqrt{\{f(\theta)\}^2}=f(\theta)\quad(>0)$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta\}^2+\{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta\}^2}$$
$$=\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2} \quad\cdots\cdots②$$

これらを①にいれて

$$f(\theta)f'(\theta)=-\frac{1}{2}f(\theta)\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2}$$

$f(\theta)\neq 0$ ゆえ

$$-2f'(\theta)=\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2} \quad\cdots\cdots③$$

(右辺)>0 ゆえ，$f'(\theta)<0$ で，この条件のもとに両辺を2乗すると

$$4\{f'(\theta)\}^2=\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2$$

$$\therefore\quad 3\{f'(\theta)\}^2=\{f(\theta)\}^2 \qquad \therefore\quad f'(\theta)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}f(\theta)$$

ここで $f(\theta)>0$，$f'(\theta)<0$ であることから

$$f'(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{3}}f(\theta) \qquad \therefore\quad f(\theta)=Ce^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}\ (C\text{ は定数})$$

これに初期条件 $f(0)=1$ を用いると $C=1$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(\theta)=e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}}$$

(2) $f(\theta)=e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}$, $f'(\theta)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}$ を②に入れると

$$|\vec{v}|^2=\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}\right\}^2+\left\{e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\theta}+e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\theta}=\frac{4}{3}e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\theta} \qquad \therefore\ |\vec{v}|=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}$$

$$\therefore\ l(a)=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^a|\vec{v}|\,d\theta$$

$$=\int_0^a\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}\,d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[-\sqrt{3}\,e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}\right]_0^a=\mathbf{2(1-e^{-\frac{a}{\sqrt{3}}})}$$

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}e^{-\frac{a}{\sqrt{3}}}=0 \qquad \therefore\ \lim_{a\to\infty}l(a)=\mathbf{2}$

らしんばん

原点をO，動点をPとするとき，本問のように「$\overrightarrow{OP}$ からその接線方向へ測る角がつねに一定値 $\varphi(\neq 0)$」である点Pの軌跡を**「等角うずまき線（あるいは対数うずまき線）」**という．一般的には次のように表される．

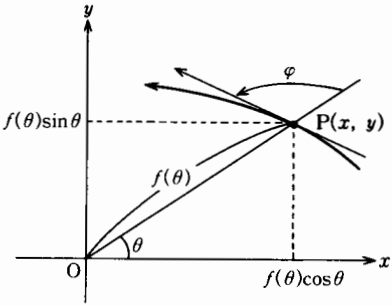
$$f(\theta)=ka^{\theta}\ (=ke^{\theta\log a}>0) \quad\cdots\cdots(*)$$

（ただし，θ は $\overrightarrow{OP}$ が x 軸の正方向となす角，$f(\theta)$ は距離 $\overline{OP}$ を表すものとする．k は正の定数，a は φ からきまる定数である．）

この時，曲線は

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=f(\theta)\cos\theta}\\ \boldsymbol{y=f(\theta)\sin\theta}\end{cases}$$

と表される．



本問では上に述べた一定角 φ が $\dfrac{2\pi}{3}$ で与えられているが以下「φ のままで」ハナシを進めると本文③は

$$\frac{1}{\cos\varphi}f'(\theta)=\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2} \quad\cdots\cdots(**)$$

（右辺>0 より $f'(\theta)$ と $\cos\varphi$ が同符号であることに注意!!）

となり(**)の両辺を2乗して

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\{f'(\theta)\}^2=\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)\{f'(\theta)\}^2=\{f(\theta)\}^2 \qquad \therefore\ (\tan^2\varphi)\{f'(\theta)\}^2=\{f(\theta)\}^2$$

ここで $0<\varphi<\pi$ のときを考えると $\sin\varphi>0$ だから $\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ は $\cos\varphi$ と同符号であることがわかる．

$\therefore\ f'(\theta)\tan\varphi=f(\theta)\ (>0)$（変数分離形!!）　$\therefore\ f(\theta)=Ce^{\frac{\theta}{\tan\varphi}}$

この時，$f(0)=k$ であれば $C=k$ であるから $f(\theta)$ は

$f(\theta)=ke^{\frac{\theta}{\tan\varphi}}$（本問では $k=1$，$\tan\varphi=-\sqrt{3}$）

さらにこの式で

$e^{\frac{1}{\tan\varphi}}=a$ ……………………………………（***）

とおけば $f(\theta)=ka^{\theta}$，すなわち（*）の形になる．

また，θ が θ_1 から θ_2 まで変化するとき点Pの通過する「道のり」L を求めると

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}|\vec{v}|\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2}\,d\theta \quad (\text{本文②より})$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\cos\varphi}f'(\theta)\,d\theta \quad (\because\ (**))$$

$$=\frac{1}{\cos\varphi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}f'(\theta)\,d\theta=\frac{1}{\cos\varphi}\Big[f(\theta)\Big]_{\theta_1}^{\theta_2}=\frac{f(\theta_2)-f(\theta_1)}{\cos\varphi}$$

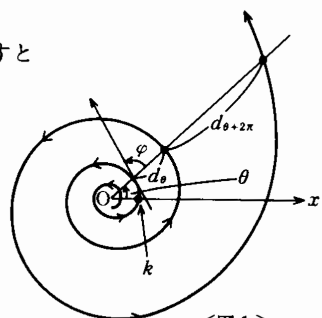
で，**L は $f(\theta_2)-f(\theta_1)$ に比例し，その比例定数は $\frac{1}{\cos\varphi}$** であることがわかる．

次に点Pが原点Oのまわりを1回転するとき，Pの位置がOからどれくらい「ズレる」かを調べてみよう．

θ から1回転するときの「ズレ」を d_θ で表すと

$$d_\theta=f(\theta+2\pi)-f(\theta)$$
$$=ka^{\theta+2\pi}-ka^{\theta}=k(a^{2\pi}-1)a^{\theta}$$
$$d_{\theta+2\pi}=f(\theta+2\pi+2\pi)-f(\theta+2\pi)$$
$$=ka^{\theta+4\pi}-ka^{\theta+2\pi}=k(a^{2\pi}-1)a^{\theta+2\pi}$$
$$d_{\theta+4\pi}=k(a^{2\pi}-1)a^{\theta+4\pi}$$
$$\vdots$$

――**「等比数列的に」ズレることがわかる．**



＜図1＞

以下にまとめておこう．

a と φ との関係を与える（***）に注目すると

(i)　$0<\varphi<\frac{\pi}{2}\Longleftrightarrow a>1$

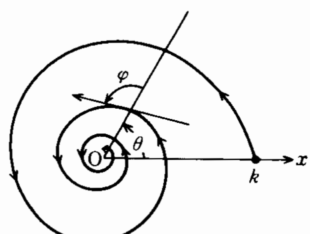
　d_θ は回転とともに増加する．〈図1〉

(ii)　$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\Longleftrightarrow 0<a<1$

　d_θ は回転とともに減少する．〈図2〉

であることがわかる．

（なお $a=1$ のとき，φ から $f(\theta)$ は定義されないが d_θ はつねに0で，求める図形は円になる．（接線 ⊥ 半径））



＜図2＞

φ が $-\pi<\varphi<0$ の時も同じようにして

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0 \text{ ならば〈図 2〉の逆まわり} \\ -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2} \text{ ならば〈図 1〉の逆まわり} \end{cases}$$

になる．

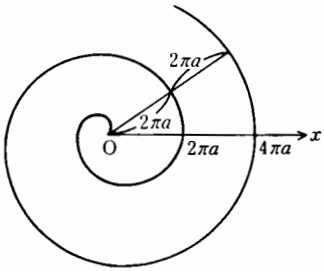
この曲線に特徴的なことは一様に拡大しても，縮小しても，ある角度だけ回転するともとの図形に重ねあわせることができる(相似)．またこの曲線の形が，小さいものは巻貝の形から大きいものは星雲の形にいたるまで自然界に多く見かけられるのもおもしろい．

なお，「うずまき線」はこのタイプの他にもいろいろある．たとえば，

$$f(\theta)=a\theta \quad (a>0)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{(原点のまわりを 1 回転すると} \\ 2\pi a \text{ だけズレる．}\end{array}\right)$

で与えられるようなもの――これは「アルキメデスのうずまき線」といわれている．右に概形を示しておく．



発展問題 18―積分方程式

(1) 関数 $f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で連続で

$$f(x)=\cos x+\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)\sin t\,dt$$

が成り立つとき $f(x)$ を求めよ．

(2) すべての実数 x に対して，次の方程式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

$$\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf(x-t)\,dt=e^{-x}-1$$

解　説　(1)，(2)ともに共通していることは，インテグラルの中に積分変数 t 以外の変数 x が混入していることである．このような場合は，まず「インテグラルの中から x を追い出す」ことを考えなければならない．

(1) 加法定理を用いて，$\sin(x-t)$ を分解すると

$$\sin(x-t)=\sin x\cos t-\cos x\sin t$$

であるから，$\sin x$，$\cos x$ をインテグラルから分離することができる．すなわち，

$$f(x)=\cos x+\int_0^{\pi} f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\sin t\,dt$$

$$=\cos x+\sin x\left\{\int_0^{\pi} f(t)\sin t\cos t\,dt\right\}-\cos x\left\{\int_0^{\pi} f(t)\sin^2 t\,dt\right\}$$

ここに $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\cos t\,dt$，$\int_0^{\pi} f(t)\sin^2 t\,dt$ は定数であるから，それぞれを A，B とおくと $f(x)$ は次のように形がきまる．

$$f(x)=\cos x+A\sin x-B\cos x=A\sin x-(B-1)\cos x$$

そこで，あらためて A，B について考えると

$$A=\int_0^{\pi} f(t)\sin t\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\{A\sin t-(B-1)\cos t\}\sin t\cos t\,dt$$

$$=A\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t\,dt-(B-1)\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=A\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi}-(B-1)\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{3}(B-1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$B=\int_0^{\pi} f(t)\sin^2 t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\{A\sin t-(B-1)\cos t\}\sin^2 t\,dt$$

$$=A\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\sin t\,dt-(B-1)\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=A\left[-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi}-(B-1)\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{4}{3}A\ \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①，②を解いて，A，B を求めると

$$A=\frac{6}{17},\quad B=\frac{8}{17}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=\frac{6}{17}\sin x+\frac{9}{17}\cos x}$$

(2) **「インテグラルの中から x を追い出す」**のであるが，$f(x-t)$ の f は特に指定されていないので(1)の例のように加法定理などを用いることはできない．

そのようなときはどうすればよいか――**「置換積分法」を利用する――**

$x-t=u$ とおくと

$t=x-u$

$\therefore\quad dt=-du$

t	$0\longrightarrow x$
u	$x\longrightarrow 0$

である．

$$\therefore\quad \int_0^{x} tf(x-t)\,dt=\int_x^{0}(x-u)f(u)(-du)$$

$$=\int_0^x (x-u)f(u)\,du$$

$$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$$

で，x をインテグラルの外に分離することができる．そこで，与えられた積分方程式は

$$\int_0^x f(t)\,dt+x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du=e^{-x}-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots③$$

と変形される．その上でこの**両辺を x で微分する**と

$$f(x)+\int_0^x f(u)\,du+xf(x)-xf(x)=-e^{-x}$$

$$\therefore\quad f(x)+\int_0^x f(u)\,du=-e^{-x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

さらにこの**両辺を x で微分する**と

$$f'(x)+f(x)=e^{-x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

となり，要するに $f(x)$ を求めるにはこの「微分方程式」を解けばよい．

⑤の両辺に e^x をかけると

$$e^xf'(x)+e^xf(x)=1$$

$$\therefore\quad \{e^xf(x)\}'=1 \qquad \therefore\quad e^xf(x)=x+C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで積分定数 C をきめる「初期条件」は，④の両辺で $x=0$ とおくと $f(0)=-1$ が得られ，これを用いると $C=-1$ がきまる．

$$\therefore\quad e^xf(x)=x-1 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{f(x)=e^{-x}(x-1)}\quad \text{（これは③をみたす）}$$

らしんばん

⑴，⑵とも被積分関数に混入した積分変数 t 以外の変数 x（この場合，インテグラルの中では x を定数とみる）を分離する典型的な例である．

特に⑵の方法についてはすでに p. 181 で説明した．

⑵の⑥の積分定数 C は，④からきめているからこの解 $f(x)$ が④を満たすことは問題ないとしても，これが③を満たすかどうかはわからない．したがって，解の最後につけた「これは③を満たす」という「言いわけ(？)」は

$$③\xrightarrow[\text{微分}]{}④\ \ (\xrightarrow[\text{微分}]{}⑤)$$

という式変形に「気を配っている」ことを示しているわけで，ただの「アクセサリー？」ではない．——厳密にいえば実際に確かめなければならない……．

また「微分方程式」⑤の解き方についてはすでにくわしく説明した（p. 227）ので，ここでは触れないことにする．

発展問題 19—連立微分方程式

t を変数とする関数 $x=x(t)$ と $y=y(t)$ が

$$\frac{dx}{dt}=x+y,\ \frac{dy}{dt}=4x+y,\ x(0)=2,\ y(0)=0$$

を満たしている.

(1) $\dfrac{d}{dt}(\alpha x+y)=\lambda(\alpha x+y)$ が成立するような 2 数の組 $(\alpha\ ,\ \lambda)$ を 2 つ求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{du}{dt}=ku$ の解は $u=Ce^{kt}$ (C は任意の定数) である. (1)で求めた 2 組の $(\alpha\ ,\ \lambda)$ に対し, $u=\alpha x+y$, $k=\lambda$ とおくことにより $x(t)$, $y(t)$ を求めよ.

解　説　(1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\alpha x+y)&=\alpha\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\\&=\alpha(x+y)+(4x+y)\\&=(\alpha+4)x+(\alpha+1)y=\lambda(\alpha x+y)\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

両辺を比較すると

$$\begin{cases}\alpha+4=\lambda\alpha\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②\\ \alpha+1=\lambda\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③\end{cases}$$

③から $\alpha=\lambda-1$ ゆえ, これを②にいれると

$$(\lambda-1)+4=\lambda(\lambda-1)\qquad\therefore\ \ \lambda^2-2\lambda-3=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

$$\therefore\ \ (\lambda+1)(\lambda-3)=0\qquad\therefore\ \ \lambda=3,\ -1$$

ゆえに③とから

$$(\boldsymbol{\alpha}\ ,\ \boldsymbol{\lambda})=(\mathbf{2}\ ,\ \mathbf{3}),\ (\mathbf{-2}\ ,\ \mathbf{-1})$$

(2) (1)で求めた α, λ の値に対して①が成り立つから, 与えられた微分方程式

$\dfrac{du}{dt}=ku$ で $u=\alpha x+y$, $k=\lambda$ とすると

$$\alpha x+y=Ce^{\lambda t}$$

ここで, $t=0$ とおくと

$$\alpha x(0)+y(0)=C$$

初期条件 $x(0)=2$, $y(0)=0$ を用いると,

$$C=2\alpha\qquad\therefore\ \ \alpha x+y=2\alpha e^{\lambda t}$$

これに 2 組の $(\alpha\ ,\ \lambda)$ の値をいれると

$$\begin{cases} 2x+y=4e^{3t} \\ -2x+y=-4e^{-t} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{x=e^{3t}+e^{-t}} \\ \boldsymbol{y=2e^{3t}-2e^{-t}} \end{cases}$$

らしんばん

このような微分方程式を「**連立微分方程式**」という．

ここで「**連立漸化式**」の解法（これは基礎解析!!）を思い出そう．たとえば

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+y_n \\ y_{n+1}=4x_n+y_n \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

をどう解くか——1つの方法として

$$\alpha x_{n+1}+y_{n+1}=\lambda(\alpha x_n+y_n) \quad \cdots\cdots(**)$$

を満たす実数 α，λ が存在すれば，この α，λ に対して数列 $\{\alpha x_n+y_n\}$ は初項 αx_1+y_1，公比 λ の等比数列であるから

$$\alpha x_n+y_n=\lambda^{n-1}(\alpha x_1+y_1)$$

と変形することができる．この α，λ は(**)に(*)を代入して両辺を比較することにより（本問(1)の扱いと同じことに注目!!）

$$(\alpha\ ,\ \lambda)=(2\ ,\ 3),\ (-2\ ,\ -1)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 2x_n+y_n=3^{n-1}(2x_1+y_1) \\ -2x_n+y_n=(-1)^{n-1}(-2x_1+y_1) \end{cases}$$

そこでこの2式を x_n，y_n について解けばよい．

なお(**)を

$$x_{n+1}+\beta y_{n+1}=\lambda(x_n+\beta y_n)$$

とおいてもよいがこのときの β，λ は

$$(\beta,\ \lambda)=\left(\frac{1}{2}\ ,\ 3\right),\ \left(-\frac{1}{2}\ ,\ -1\right) \left((**)\text{の両辺を}\ \alpha\ \text{でわれば}\ \beta=\frac{1}{\alpha}\right)$$

となる．これは本問(1)についても同様である．

「連立漸化式」の場合は，与えられた2式から一方の数列を消去してもう1つの数列についての「3項間漸化式」を導いて解く方法があった．本問のような連立微分方程式もそれにならって解くことができる．

$$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=4x+y \end{cases}$$

第一式より

$$y=x'-x \qquad \therefore \quad y'=x''-x'$$

これらを与えられた第2式の y'，y にいれると，

$$(x''-x')=4x+(x'-x) \qquad \therefore \quad x''-2x'-3x=0$$

になる——このような微分方程式を「**2階線形微分方程式**」という．

要は，これを解いて x を求め，$y=x'-x$ に代入すればよいのだが，ここで少し一般的なハナシをしておきたい．

$$y''+ay'+by=0 \quad \cdots\cdots(***)$$

を解くにはどうすればよいか——それには「3項間漸化式」にならって，y''，y'，

y をそれぞれ λ^2, λ, 1 とおき2次方程式（「固有方程式」という）をつくる．

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

ここで判別式 $D>0$ のときは実数解を α, β $(\alpha\neq\beta)$（「固有値」という）とおくと，解と係数の関係から

$$a=-(\alpha+\beta),\quad b=\alpha\beta$$

これを(***)にいれると，

$$y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=0 \qquad \therefore \quad \begin{cases}(y'-\alpha y)'=\beta(y'-\alpha y)\\(y'-\beta y)'=\alpha(y'-\beta y)\end{cases}$$

「変数分離形」の解法を用いると

$$\begin{cases}y'-\alpha y=C_1e^{\beta t}\\y'-\beta y=C_2e^{\alpha t}\end{cases}\cdots\cdots\cdots(****) \qquad \therefore \quad (\beta-\alpha)y=C_1e^{\beta t}-C_2e^{\alpha t}$$

両辺を $\beta-\alpha$ $(\neq 0)$ でわれば，この微分方程式の一般解 y は α, β と任意定数 A, B を用いて

$$y=Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t} \quad \left(A=-\frac{C_2}{\beta-\alpha},\ B=\frac{C_1}{\beta-\alpha}\ \text{は任意定数}\right)$$

として求められる．本問についていえば

$$x''-2x'-3x=0 \longrightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0$$

（この2次方程式は本文中の④と一致している!!）

$$\therefore \quad \lambda=3,\ -1\ (\text{これが}\ \alpha,\ \beta)$$

$$\therefore \quad \begin{cases}x=Ae^{3t}+Be^{-t}\\y=x'-x\\\quad=(3Ae^{3t}-Be^{-t})-(Ae^{3t}+Be^{-t})=2Ae^{3t}-2Be^{-t}\end{cases}$$

あとは初期条件から A, B を求めればよい．

また，$D=0$ すなわち $\alpha=\beta$ のとき(****)の2式は共に

$$y'-\alpha y=C_1e^{\alpha t}$$

となるが，このときは「1階線形微分方程式（p. 227）」として解けばよい．

$D<0$ すなわち α, β が虚数のときの例としては，物理で出てくるポピュラーなものに

$$y''=-ky \quad (k>0 \quad \text{単振動})$$

などがあるが，これは次の問題で説明する．

発展問題 20—$y''=-ky$ について

関数 $f(x)$ は2回微分可能で，$f''(0)=-1$ を満たし，かつ任意の実数 x, y に対して

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．また，①を y について微分して $f'(0)$ の値を求めよ．

(2) $f''(x)=-f(x)$ を導け．

(3) $F(x)=f(x)\cos x-f'(x)\sin x$，$G(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$ とおくとき，関数 $F(x)$，$G(x)$ はともに定数であることを示し，それらの値を求めよ．

(4) $f(x)$ を決定せよ．

解　説　(1) ①で $y=0$ とおくと，

$$2f(x)=2f(x)f(0) \qquad \therefore\ 2f(x)\{f(0)-1\}=0$$

ここで，$f(x)$ が恒等的に 0 であるとすると $f''(0)=-1$ を満たさないから，$f(x)$ は恒等的には 0 でない．

$$\therefore\ f(0)-1=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{f(0)=1}$$

次に，$f(x)$ は 2 回微分可能であるから①の両辺を x を定数とみて y について微分すると

$$f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)f'(y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

この式で $y=0$ とおくと

$$f'(x)-f'(x)=2f(x)f'(0) \qquad \therefore\ f(x)f'(0)=0$$

$f(x)$ は恒等的には 0 でないから $\boldsymbol{f'(0)=0}$

(2) ②はさらに y で微分できて，

$$f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$$

ここで $y=0$ とおくと

$$f''(x)+f''(x)=2f(x)f''(0)$$

$$\therefore\ 2f''(x)=2f(x)\cdot(-1) \qquad \therefore\ f''(x)=-f(x)$$

(3) $f(x)$ が 2 回微分可能であることに注意して

$$\begin{aligned}F'(x)&=\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}-\{f''(x)\sin x+f'(x)\cos x\}\\&=-\{f(x)+f''(x)\}\sin x=0 \quad (\because\ (2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G'(x)&=\{f'(x)\sin x+f(x)\cos x\}+\{f''(x)\cos x-f'(x)\sin x\}\\&=\{f(x)+f''(x)\}\cos x=0\end{aligned}$$

ゆえに $F(x)$，$G(x)$ はともに定数である．

そこで $x=0$ のときの値を求めると

$$\left.\begin{aligned}F(0)&=f(0)\cos 0-f'(0)\sin 0=1\\G(0)&=f(0)\sin 0+f'(0)\cos 0=0\end{aligned}\right\} \quad (\because\ (1))$$

であるから

$$\boldsymbol{F(x)\equiv 1,\ \ G(x)\equiv 0}$$

(4)　(3)より

$$\begin{cases} f(x)\cos x - f'(x)\sin x = 1 \cdots\cdots ③ \\ f(x)\sin x + f'(x)\cos x = 0 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③，④より $f'(x)$ を消去する（③×$\cos x$＋④×$\sin x$）と，

$$\boldsymbol{f(x)=\cos x}$$

らしんばん

➡「$f(x)$ は2回微分可能」がポイント!!―― 例題 **26** (p. 231) の扱いと比較されたい．

➡ 本問の(3)で与えてある $F(x)$，$G(x)$ は微分方程式

$$f''(x)=-f(x),\ f(0)=1,\ f'(0)=0 \cdots\cdots (*)$$

を解くためのなかなかうまい誘導になっている．これは前問で説明した方法によっても固有値が虚数になってしまい，そのままでは手におえないが，物理をやった人ならこれが微分方程式を用いた「単振動」の表現であることはすぐにわかるにちがいない．

(時刻 t における加速度 $x''(t)$)＝－(時刻 t における変位 $x(t)$)

そこで(＊)をにらんで見当をつける――$f(x)=\cos x$ とおけば，これは条件をみたすから解である．しかし「これ以外にはないか」という問題がのこる．

この $f(x)$ の一意性については次のようにやれば一応説明できる．

もし解となる $f(x)$ が2つあるとすれば，$f_1(x)$，$f_2(x)$ とおくと，いずれも(＊)の条件をみたす．すなわち，

$$f_1''(x)=-f_1(x),\ f_1(0)=1,\ f_1'(0)=0$$
$$f_2''(x)=-f_2(x),\ f_2(0)=1,\ f_2'(0)=0$$

そこで，$f_1(x)-f_2(x)=g(x)$ とおくと

$$g''(x)=f_1''(x)-f_2''(x)=-f_1(x)+f_2(x)$$
$$=-\{f_1(x)-f_2(x)\}=-g(x)$$
$$\therefore\ \ g''(x)+g(x)=0$$

また，

$$g(0)=f_1(0)-f_2(0)=1-1=0,\ g'(0)=f_1'(0)-f_2'(0)=0-0=0$$

示したいことは「$f_1(x)\equiv f_2(x)$ すなわち $g(x)\equiv 0$」ということである!!

そこで，次のような $G(x)$ をつくってみる．

$$G(x)=\{g(x)\}^2+\{g'(x)\}^2$$

この時 $G(x)\equiv 0$ ならば $g(x)\equiv 0$，$g'(x)\equiv 0$ がいえるのだが

$$G'(x)=2g(x)g'(x)+2g'(x)g''(x)$$
$$=2g'(x)\{g(x)+g''(x)\}=0 \qquad \therefore\ \ G(x)\text{ は定数}$$
$$G(0)=\{g(0)\}^2+\{g'(0)\}^2=0^2+0^2=0$$

以上のことから $G(x)\equiv 0$

$\therefore \quad g(x)=f_1(x)-f_2(x)\equiv 0 \qquad \therefore \quad f_1(x)\equiv f_2(x)$

したがって，(＊)の解は $f(x)=\cos x$ 以外にはありえないとにげることもできるがこれもなかなかむずかしい．

「単振動」の解析――次のような微分方程式

$$y''=-ky \quad (k>0) \qquad \cdots\cdots (**)$$

を一般的に解く方法はないか．それには少し工夫がいる．

(＊＊) の両辺に $2y'$ をかけてみよう．($y'\equiv 0$ のときは (＊＊) で $y''\equiv 0$，したがって $y\equiv 0$ だからこれ以外の時を考える．)

$$2y'y''=-2kyy'$$

$y''=\dfrac{dy'}{dx}$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ に注意して両辺を x で積分すると

$$(y')^2=-ky^2+C \quad (\geqq 0)$$

となるが $C\geqq ky^2$ でなくてはならないから $C=ka^2$ ($a\geqq|y|$) とおくことができる．すなわち

$$(y')^2=-ky^2+ka^2=k(a^2-y^2)$$

$$\therefore \quad y'=\pm\sqrt{k(a^2-y^2)} \qquad \cdots\cdots (***)$$

ところで y は $|y|\leqq a(-a\leqq y\leqq a)$ であるから

$$y=a\sin\theta$$

とおくことができる．その上で(＊＊＊)をにらむと

$$(\text{左辺}) \ =y'=\frac{dy}{dx}=a\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$(\text{右辺}) \ =\pm\sqrt{k(a^2-a^2\sin^2\theta)}=\pm\sqrt{k}\cdot a\cdot|\cos\theta|$$

この絶対値と複号に注意して結局(＊＊＊)は

$$a\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}=\pm\sqrt{k}\ a\cos\theta$$

となるが，いまは $\cos\theta\neq 0$ のときを考えているから

$$\frac{d\theta}{dx}=\pm\sqrt{k} \qquad \therefore \quad \int d\theta=\int\pm\sqrt{k}\,dx$$

$$\therefore \quad \theta=\pm\sqrt{k}\,x+\alpha \quad (\alpha\text{は任意定数}) \qquad \therefore \quad y=a\sin(\pm\sqrt{k}\,x+\alpha)$$

これを形の上で整理すると求める y は

$$y=a\sin(\sqrt{k}\,x+\alpha)$$

として求められる．

($y=a\sin(-\sqrt{k}\,x+\alpha)$ のときは，$y=-a\sin(\sqrt{k}\,x-\alpha)$ と変形し，$-a$ を a，$-\alpha$ を α にあらためておきなおせば上の形になる．)

なお $a=0$ も認めれば，この解には $y\equiv 0$ も含まれる．

このときの a，α は，例えば $x=0$ のときの y，y' の値がわかれば決定することができる．すなわち「単振動」は，**最初の時刻における位置と速度がわかればそれ以後の運動が確定する**――本問(1)の $f(0)$，$f'(0)$ はそのために求めたものである．

➡ 前問で説明した「2階線形微分方程式」

$$y''+ay'+by=0$$

で，**固有値 α，β が虚数解のとき**の扱いに「ケリ」をつけておこう．まず，$y=uv$ とおく——このようにおけば，u と v のうちの一方は自由にきめられる．

$$y'=u'v+uv'$$

$$\therefore\quad y''=u''v+2u'v'+uv''$$

これらをもとの微分方程式にいれると

$$(u''v+2u'v'+uv'')+a(u'v+uv')+buv=0$$

$$\therefore\quad u''v+u'(2v'+av)+u(v''+av'+bv)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

ここで，左辺の第2項が0となるように v を選ぶと

$$2v'+av=2\frac{dv}{dx}+av=0 \qquad \therefore\quad \frac{dv}{dx}=-\frac{a}{2}v \qquad \therefore\quad v=Ce^{-\frac{a}{2}x}$$

特に $C=1$ として $v=e^{-\frac{a}{2}x}$ とおくと

$$v'=-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x},\quad v''=\frac{a^2}{4}e^{-\frac{a}{2}x}$$

となり，これを（****）にいれると $2v'+av$ は当然0であるから，

$$e^{-\frac{a}{2}x}u''+u\left\{\frac{a^2}{4}e^{-\frac{a}{2}x}+a\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\right)+be^{-\frac{a}{2}x}\right\}=e^{-\frac{a}{2}x}\left\{u''+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)u\right\}=0$$

$$\therefore\quad u''+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)u=0 \qquad \therefore\quad u''=\frac{a^2-4b}{4}u$$

固有値 α，β が虚数，すなわち固有方程式の判別式 $a^2-4b<0$ に注意すると，この u は（**）の k を $k=\dfrac{4b-a^2}{4}$ とおけば求められる．すなわち，

$$u=A\sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+\alpha\right)$$

$$\therefore\quad y=uv=Ae^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+\alpha\right)\quad (A,\ \alpha \text{ は任意定数})$$

このようにすれば解 y を，一応求めることができる．

➡ われわれの範囲を少し越えるが，「**オイラーの公式**」

$$\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}\quad \textbf{（指数関数と3角関数がドッキング!!）}$$

——これは数学全体からみても驚異的な公式である——を用いると，前問の $D>0$ のときの α，β をそのまま

$$\alpha=p-qi,\quad \beta=p+qi\quad (q>0)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{ただし}\\ \left.\begin{array}{l}\lambda^2+a\lambda+b=0\\ (a^2-4b<0)\end{array}\right\}\longrightarrow\lambda=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad p=-\frac{a}{2},\quad q=\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\quad (>0)$$

とおいて y を求めてみよう．前問の表現にならえば

$$y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}\quad (\text{ただし } A,\ B \text{ は複素数の定数})$$

$$=Ae^{(p-qi)x}+Be^{(p+qi)x}=e^{px}(Ae^{-qxi}+Be^{qxi})$$
$$=e^{px}\{A(\cos qx-i\sin qx)+B(\cos qx+i\sin qx)\}$$
$$=e^{px}\{(A+B)\cos qx+(B-A)i\sin qx\}$$

どんな実数 x に対しても y は実数だから $A+B$, $(B-A)i$ は実は実数である．そこで

$$A+B=C,\ (B-A)i=D \quad (C,\ D\text{ は実数定数})$$

とおくと「3 角関数の合成公式」が利用できて

$$(A+B)\cos qx+i(B-A)\sin qx=C\cos qx+D\sin qx$$
$$=\sqrt{C^2+D^2}\sin(qx+\alpha)$$

であるから $\sqrt{C^2+D^2}$ をあらためて A とおき，p, q を a, b で表すと

$$y=Ae^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+\alpha\right)$$

を得る．

索　　引

ア

アステロイド ……212, 213

イ

e ……40, 82
1 次の近似式 ……115
1 階線形微分方程式 ……227
一般解 ……223
陰関数 ……78
陰関数の微分法 ……78
インテグラル ……155

ウ

うずまき線 ……278
右方極限値 ……31
右方微係数 ……123
右方微分可能 ……69

エ

エピサイクロイド ……267, 269

オ

オイラーの公式 ……287

カ

カージオイド（心臓形） ……270
解曲線 ……224
回転体 ……257, 259
加速度ベクトル ……142, 144
カテナリー（懸垂線） ……264, 265
関数の極限 ……35
関数の極限 ……30
関数のグラフ ……101
関数の増減 ……93, 133
関数の連続性 ……42, 55
関数の連続性についての定理 …43
関数方程式 ……231
環体 ……207
環体の体積 ……208

キ

奇関数 ……176
逆関数の微分法 ……73
級数 ……20
極限 ……1
極限値 ……3, 31
極限値に関する定理 ……5
極小 ……97
極小値 ……97
曲線の長さ ……209
極大 ……97
極大・極小 ……97, 133
極大・極小に関する定理 ……99
極大値 ……97
曲率 ……145, 147
曲率円 ……145, 147
近似式 ……115

ク

偶関数 ……176
区間 ……43
区分求積法 ……188
グラフの凹凸 ……102, 125, 135
グラフの凹凸に関する定理 ……102

ケ

原始関数 ……155

コ

高次導関数 ……85, 86
合成関数の微分法 ……72
コーシーの平均値の定理 ……94, 95
固有値 ……283
固有方程式 ……283

サ

サイクロイド ……197
最小 ……97
最小値 ……100
最大 ……97
最大値 ……100
最大値・最小値 ……100
最大値・最小値の存在定理 ……44
左方極限値 ……31
左方微係数 ……123
左方微分可能 ……69
3 角関数の相互関係 ……164
3 角関数の微積分 ……36
3 角関数の微積分の基礎となる極限 ……36
3 角関数の微分法 ……78
3 角，指数・対数関数の導関数 …78

シ

指数・対数関数の微積分 ……40
指数・対数関数の微分法 ……81, 82
自然対数 ……41, 83
実数解の存在範囲 ……109
斜軸回転 ……261
周期関数 ……236
周期関数と定積分 ……235
周期関数の積分 ……237
収束 ……5
収束・発散 ……3, 5
縮閉線（エボリュート） ……254
循環小数 ……24
伸開線（インボリュート） 252, 254
振動 ……4, 5

ス

数学的帰納法 ……13
数列 ……3
数列の極限 ……3, 128
数列の極限に関する定理 ……5

セ

正の無限大 ……4, 5
積，商の微分法 ……70
積分定数 ……156, 157
積分に関する平均値の定理 ……188
積分法 ……153
積分方程式 ……230, 278
積分法の応用 ……193
接線 ……129
漸化式と極限 ……47
漸近線 ……103

ソ

双曲線関数 ……250
速度ベクトル ……142, 144

タ

第 n 次導関数 ……86
第 n 部分和 ……20
対数うずまき線 ……276
対数微分法 ……85

体積 ……200
第2次導関数 ……85
単振動 ……285, 286
単調減少 ……19
単調増加 ……19, 113
単調増加を保証する定理 ……93
単調増加の条件 ……93
単調・有界 ……49

チ

置換積分法 ……159, 160, 161
中間値の定理 ……44

ツ

つるまき線 ……257, 258

テ

ティーラーの定理 ……118
定積分 ……170, 233
定積分と極限 ……240
定積分と漸化式 ……243
定積分と不等式 ……182
定積分と無限級数 ……189
定積分の基本公式 ……170
定積分の計算 ……170
定積分の置換積分法 ……172
定積分の部分積分法 ……178

ト

等角うずまき線 ……274, 276
導関数 ……67
同次形の微分方程式 ……272, 274
特異解 ……226
特殊解 ……224
ド・モルガンの法則 ……53

ナ

ニ

2階線形微分方程式 ……282
2項間漸化式 ……16
2項定理 ……17
2次の近似式 ……116
ニュートン法 ……152
任意定数 ……220

ヌ

ネ

ノ

ハ

媒介変数(パラメーター)表示関数の微分法 ……74
ハイポサイクロイド ……213
はさみうち ……10
発散 ……4, 5, 31
パップス・ギュルダンの定理 …208
速さ ……217
半角公式 ……180

ヒ

非回転体 ……255
微積分学の基本定理 ……185, 188
被積分関数 ……156
微分可能 ……121
微分可能性 ……68, 232

微分係数（微係数）……67
微分不可能 ……69
微分法 ……65, 67
微分方程式 ……219, 221
微分方程式の応用 ……228
微分法の応用 ……89
微分法の基本公式 ……70

フ

物理的な問題 ……214
物理への応用 ……270
不定形 ……33, 97
不定積分 ……155
不定積分の基本公式 ……156
不等式と極限に関する定理 …9, 35
負の無限大 ……4, 5
部分積分法 ……165
不連続 ……42

ヘ

平均値の定理 ……90, 125, 128
平均値の定理とその応用 ……89
変化する量の総和 ……217
変化率 ……145
変曲点 ……102
変数分離形 ……223, 232, 274

ホ

方程式の実数解 ……109

マ

マクローリンの定理 ……119

ミ

ム

無限級数 ……20
無限級数の一般的な扱い ……25
無限級数の収束 ……25, 50, 52
無限級数の収束・発散と無限級数の和 ……20
無限級数の和 ……53
無限数列 ……3
無限等比級数 ……21
無限等比級数の収束条件に関する定理 ……22
無限等比数列 ……12
無限等比数列の収束・発散に関する定理 ……13
無限等比数列の収束条件 ……13
無理関数 ……34

メ

面積 ……193, 248
面積と定積分に関する諸定理 …185
面積と定積分の関係 ……185
面積の最小 ……245

モ

ヤ

ユ

有界 ……19
有限確定値 ……31, 42
有限数列 ……3
有理化 ……33, 46

ヨ

ラ

ライプニッツの定理 ……88
ラグランジュの平均値の定理 92, 95
ラジアン ……37, 79

リ

ル

レ

連続 ……42, 69, 121
連続関数 ……43
連続関数を扱う上での基礎となる定理 ……44
連続関数の性質 ……44
連続して変化する量の総和 ……271
連続と微分可能性についての定理 ……68
連続・不連続 ……42
連立漸化式 ……282
連立微分方程式 ……281, 282

ロ

ロピタルの定理 ……94, 96
ロルの定理 ……89

ワ