第３章

関数とグラフ

「関数」には
「２つの意味」がある．
それを
キチンとした形で
説明するために
「写像」の考え方からはいることに
する．

〈「関数」の記号「$f(x)$」には二重の意味がある――〉

「関数」という概念は慣れるまで大変わかりにくい．その理由は本文p.213にも書いたが，たとえば

$$f(x)=2x+1$$

などというとき，この「$f(x)$」という記号には

(i)　**xを2倍して1を加える操作**――「対応関係」の説明

(ii)　**xを2倍して1を加えた数値**――その結果として得られる数値

の「**二重の意味**」があり，「教える方」も「習う方」もその状況によって適当に，それもほとんど無意識的に使い分けているような数学用語であるからである．この章を書くにあたっての最初の困難は，**これをどのように説明すればナットクしてもらえるか**という点にあった――(ii)についてはともかくとして，「**関数の合成**」や「**逆関数**」などを説明するにはどうしても(i)の意味について触れなければならず，そのためには高校の数学の教科書からいつの間にか消えていってしまった「**写像**」という概念から説き起こさなければならなかったという事情があった．したがって本書では

第1節　写像としての関数――主に(i)の意味についての解説

第2節　関数とそのグラフ――(ii)の意味の実践としてグラフを描く

第3節　問題解法の研究　――応用問題の解説

という手順で構成し，なるべくキチンとした形で「関数の概念」を伝えることが出来るように配慮した．とはいえ，かつての「数Ⅰ」の「写像と関数」をそのまま転用した訳ではなく，**われわれが「関数」の概念をよりよく理解するための「必要最小限のことがら」に限った**ことはもちろんである．諸君にとっては現行の高校の教科書には「**写像**」という言葉は用いられておらず，そのために多少の異和感を感じるかもしれないが，それでもあえてここで解説した理由は「高校数学」というワクをはずせば，むしろこれが一般的な説明であり，説得力もあるからである．

まして「**基礎解析**」では「**対数関数**」が「**指数関数の逆関数**」として定義され，「**代数・幾何**」の「1次変換」では「**線形写像**」という言葉がほとんど「頻出用語」であり，「**微積分**」でも「**合成関数の微分法**」，「**置換積分**」，「**微分方程式**」などで，そのキチンとした扱いを求められることを考えると，ここで関数の考え方と扱い方の基本をしっかり身につけておく方が「より効果的である」と判断したからである．

第1節
「写像」としての関数

「関数の概念」は「近代数学」の発展の中で歴史的に形成されたものである．

以来，時代によっていろいろな定義が用いられ，今日でも「数学全体」としても，「高校数学」としてもいろいろな変化が起こっており，**なかなか「わかりにくい概念」の1つ**である――ハナシが「少し難しくなる」かもしれないが，ここでは**「関数とは何か」**ということを「しっかりと」理解してもらいたい．

「その形成の歴史的経緯」から説明をはじめよう．

1　関数とは何か

「関数」は「近代数学」の中心となる概念であって，もともとは**「変化と運動をとらえる手段」**として人々が獲得した概念であった――実際「幾何学」などにおいて「学問の原型」といわれる「幾何学原本」を残したギリシァの数学は「関数の概念」をもっていなかった．たとえば「正弦」といわれる「三角比」は用いられたが「三角関数」が考察されていたわけではない．

また，15世紀後半には「ネピア(1550～1617　スコットランド)」が「対数」を発見し，天文学の計算などに大いに用いられたが「対数関数」そのものが認知されていたわけではない．

しかし，このような人々の必要から誕生した「関数」の考え方もはじめはさほど明確な定義がなされていたわけではなく，「2つの変化量の間の対応関係」とか，あるいは「変数と定数とからなる式」といった程度の「あいまい(？)な説明」でしかなかったらしい．「微積分」を発見した「ニュートン(1642～1727　イギリス)」，「ライプニッツ(1646～1716　ドイツ)」にしても，その業績を引き継ぎ18世紀にさらに多くの業績を残した「オイラー(1707～

1783　スイス→ロシア)」にしても，「微積分学」の時代に至ってもキチンとした「関数概念」の確立はまだ見られなかったようである．

そして「**集合の要素に1つずつ数を対応させる**」という今日(こんにち)的な「**関数概念**」をはじめて確立したのは「ディリクレ(1805～1859　ドイツ)」であるといわれている．以後「カントル(1845～1918　ドイツ)」の「**集合論**」，「デデキント(1831～1916　ドイツ)」による「**写像(対応関係)概念**」の確立を経て今日の「関数概念」に至るものと考えられる．

もちろん，途中にはわれわれの測り知ることの出来ないほどの「あれこれ」があったに違いないが，われわれとしては，このような歴史的経緯を，ほんの少しだけ意識しながら今日的な「**関数**」について考えてみることにしたい．

注　ルネッサンスと共にはじまり，17世紀の「微積分の発見」でピークに達しその後150年ほどの発展をとげた数学を「**近代数学**」という．また，それ以前の数学を「**中世数学**」，それ以後19世紀から20世紀にかけて発展した数学を「**現代数学**」という．

関数の定義

2つの変数 x，y があって，**x の値を定めると，それに応じて y の値が1つ定まるとき，y を「x の関数」といい**

$$y=f(x)$$

と書く．このとき，**x を「独立変数(または単に変数)」**といい，**y を「従属変数」**という．また，**変数 x の値の範囲を「定義域」**といい，**それに応ずる従属変数 y の値の範囲を「値域」**という．

解　説　これが現在の**高校数学における「関数」の「標準的定義」**である，たとえば，半径 x cmの円の面積を y cm²とすれば

$$y=\pi x^2$$

という関係式によって「**x の値に対する y の値が1つ定まる**」から「y は x の関数である」というハナシである．

この関数の「**定義域**」も「**値域**」も，ともに「正の実数全体の集合」であり，この例で言えば「$f(x)$」は次のように説明される．

$$f(x)=\pi x^2$$

$$\longrightarrow\quad f(1)=\pi\cdot 1^2=\pi,\ f(2)=\pi\cdot 2^2=4\pi,\ f(3)=\pi\cdot 3^2=9\pi\ \cdots\cdots\cdots$$

もう1つ例をあげよう．

$$f(x)=2x+1$$

$$\longrightarrow\quad f(1)=3,\ f(2)=5,\ f(3)=7,\ \cdots\cdots\cdots$$

である．

らしんばん

関数を表す記号「$f(x)$」について——

本文で用いた「$f(x)$」という記号は，「ライプニッツ」が考案したといわれていて，なかなか便利のよい記号であるが，慣れるまではわかりにくい．それはこの「$f(x)$」には，実は次に示すような2つの意味があるからである．

すなわち

(i)　xの関数 ←—— xの式，あるいは対応関係の説明

(ii)　関数値 ←—— xの値に対する「従属変数yの値」

具体的に例をあげて説明しよう．たとえば，本文にあげた例

$$f(x)=2x+1$$

で説明すると，この「$f(x)$」という記号には

(i)　「xを2倍して1を加える」という操作 ←——対応関係の説明!!

(ii)　「xを2倍して1を加えた」数値 ←——「関数値」そのもの!!

の意味があり，「$f(\ \ )$」はこの両方の意味を実に「たくみに」表していて「感動的」でさえある——「関数の合成」，「逆関数」など，「操作(対応関係の説明)」に注目する場合は，この「(i)」がよりスッキリした理解を与えることになり，「微積分」など「量の変化」が問題になる分野では「(ii)」が当然大きな意味をもつことになる．しかも，この「2つの意味」を「場合に応じて適当に使い分ける」ことが出来なくてはならず，そのことが「関数とは何か」ということの理解を「より難しくしている」と考えられる——実際，上に述べた「関数の定義」からはこの「(i)の意味」を読みとりにくい．

そのために本書ではあえて「写像」という言葉を用いて「(i)の意味」を「ある程度キチンとした形で」解説することにしたが，この言葉に振りまわされてかえって難しく感じたのでは困る．言い方をかえるとこの「写像」などという言葉はどうでもよいのであって，要は

$y=2x+1$ ←—— xの関数y
$u=2t+1$ ←—— tの関数u　〉←—— (いずれにしても「2倍して1を加える」ということ!!)

を「同じ」と見てもらいたいというハナシである——以下の解説では「写像」という言葉を「関数」という言葉におきかえて読むとよい．

なお「(ii)の意味」についてはすでに第1章の「数と式(p.48)」でも用いているが，このあとに述べる「いろいろな関数のグラフ(p.231以下)」で「より実践的に」用いることになる——「関数のグラフ」は「1つ1つのxの値に対するyの値(関数値)」を「x-y平面」上に示したもので，上に述べた「(i)の意味」をも含めて「関数」を「視覚的(ビジュアル)に」とらえる手段であると考えればよい．

2 「写像」としての関数

「写像(しゃぞう)」は「集合」とならんで「現代数学」の基礎概念である．いろいろな対象が「集合」として1まとめに把握されて来ると，次は「2つの集合の間の関係はどうなっているのか」ということが問題になる．そのような経緯から生まれたのが「写像」という考え方であり，先に述べた「関数」の「2つの意味」のうち，「対応関係の説明」の部分を一般的なハナシにまで拡張したものであると考えればよい――「数Ⅰ」では「関数の合成」，「逆関数」などの「ある限られた部分」でしか問題にはならないが，実をいうとこれは「代数・幾何」の「1次変換」などにも関係し，きわめて「基本的で重要な概念」である．そのつもりでキッチリと学んでおきたいことがらの1つである．

(1) 「写像」の定義

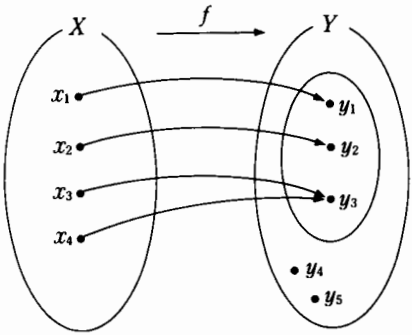
「写像」の定義

2つの集合 X，Y (X と Y は同じ集合であってもよい)があって，X の任意の要素に対して，Y の要素を1つずつ対応させる規則 f が定められているとき，この「**規則 f**」を **X から Y への「写像」**といい

「$f: X \longrightarrow Y$」，あるいは「$X \xrightarrow{f} Y$」

のように表す．

解　説　右の図を参考にして上の定義を確認してもらいたい．



「**写像 f**」による「**集合 X の要素 x**」に対応する「**集合 Y の要素 y**」を「**f による x の像**」といい，「$f(x)$」で表す．すなわち

$$y=f(x)$$

で，このとき x を「**f による y の原像(あるいは逆像)**」という．

また，「写像」を表すのに「**集合 X の要素 x に集合 Y の要素 y を対応させる**」という意味から

$$f: x \longmapsto y$$

と書くこともあり，さらにこのとき「$y=f(x)$」だから

$$x \longmapsto f(x)$$

あるいは単に

$$y=f(x)$$

などと書くこともある．

これらの関係を上の図で説明すると

$$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ y_3=f(x_3),\ y_3=f(x_4)$$

であり，言いかえると

y_1，y_2 の「原像」はそれぞれ x_1，x_2

y_3 の「原像」は x_3 と x_4

y_4，y_5 の「原像」はない

ということである．

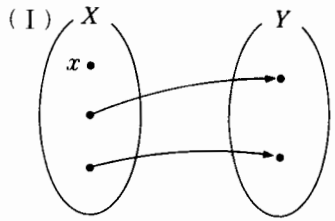
らしんばん

次のような「対応関係」は「写像」ではない!!

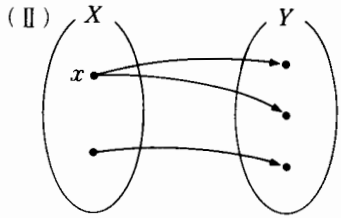
上に述べた「写像の定義」で，特に注意しておかなければならないことは

集合 X のどんな要素に対しても集合 Y の要素を1つずつ対応させる

ということである．したがって次に示すような「対応関係」は「写像」ではない．



（Y の要素と対応関係をもたない X の要素(たとえば上の x のようなもの)があるとき）



（X の1つの要素（たとえば上の x）に対して Y の要素が2つ以上対応しているとき）

他方，本文の図にも示したように，Y の要素には「y_4，y_5」のように X の要素と対応関係をもたないものや，「y_3」のように X の2つ以上の要素と対応するものがあってもよい――「数」から離れた例で言えば「選挙の投票(ただし，1人1票でキケンなし)」を考えてみるとよい．

これらのことはこのあと，**「合成写像(合成関数)」，「逆写像(逆関数)」などを考えるときに重要な意味を持つことになる**(p.220以下)．

ここまで来ると「写像の定義」は「ディリクレによる関数の定義」とはかなり違ったものになる．特徴をまとめておくと

(i)「数」だけでなくいろいろなものの集合を対象にすることが出来る．

(ii)「求められた結果(数値)」ではなく「対応関係」に注目している．

しかし，今日ではこの「写像」と全く同じ意味で「関数」という言葉が用い

られている——以下，本書ではそのように扱うことにする．

なお，少し説明を加えるならば「X，Yが同じ集合(たとえばX，Yがともに2次元ベクトルなど)」のときを「**変換**(へんかん)」，特に「X，Yがともに数の集合」のときを「**関数**」などと区別して言うときもある．

「定義域」と「値域」，「上への写像」と「1対1写像」について——

集合Xから集合Yへの写像

$$f: X \longrightarrow Y$$

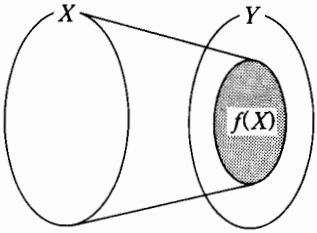
で，集合Xをfの「**定義域**」といい，集合Yをfの「**終域**」という．また$x \in X$のfによる像$f(x)$の全体の集合を「**値域**」といい，これを「$f(X)$」で表す．

すなわち

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

で，$f(X)$とYとの包含関係は

$$\boldsymbol{f(X) \subseteq Y} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\boldsymbol{f(X)}\text{ は }\boldsymbol{Y}\text{の}\\ \text{部分集合!!}\end{array}\right)$$



である．特に

$$\boldsymbol{f(X) = Y}$$

のとき，すなわち

任意の「$y \in Y$」に対して「$y = f(x)$」である「$x \in X$」が存在する

とき，fをXからYへの「**上への写像(または全射)**」という．

また

$$\text{「}\boldsymbol{x_1 \neq x_2}\text{」ならば「}\boldsymbol{f(x_1) \neq f(x_2)}\text{」} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{「原像」が違えば}\\ \text{「像」も違う!!}\end{array}\right)$$

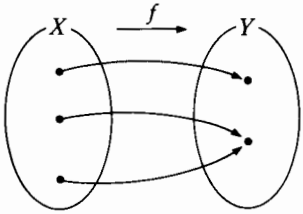
であるとき，fをXからYへの「**1対1写像(または単射)**」という．

これは「対偶(p.139)」をとって

$$\text{「}\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}\text{」ならば「}\boldsymbol{x_1 = x_2}\text{」} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{「像」が同じならば}\\ \text{「原像」も同じ!!}\end{array}\right)$$

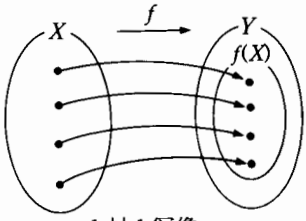
と書きかえてもよい．

さらにfが「上への写像」であり，かつ「1対1写像」であるとき，これを「**上への1対1写像(または全単射)**」といい，この場合は集合Xのすべての要素と集合Yのすべての要素が1つずつ対応していることになる——「**上への1対1写像**」は「**逆写像(逆関数)**」の存在条件である(p.223，224)．



上への写像

(Yの要素にあまりがない)



1対1写像

($f(X)$の要素にダブリがない)

具体的な例で説明しよう．R を実数全体の集合とするとき

$$f(x)=x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

で定められる写像

$$f:\quad R \longrightarrow R$$

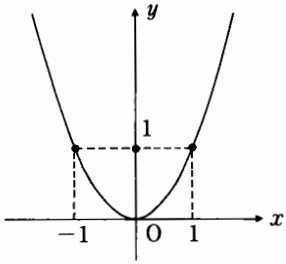
は「上への写像」でもなく，「1対1写像」でもない．

たとえば「$y=-1$」とすると「$x^2=-1$」で，これを満たす実数 x は存在しない――「上への写像」ではない．

また，「$-1 \neq 1$」であるが

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^2=1 \\ f(1)=1^2=1 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \boldsymbol{f(-1)=f(1)}$$

である――「1対1写像」ではない．



しかし，「終域」や「定義域」を調整すれば「(*)で定められる写像」も「上への写像」，あるいは「1対1写像」としてとらえることが出来る．

まず，**「終域」を「$\boldsymbol{R_+}$(負でない実数全体の集合)」**にかえると，写像

$$f:\quad R \longrightarrow R_+$$

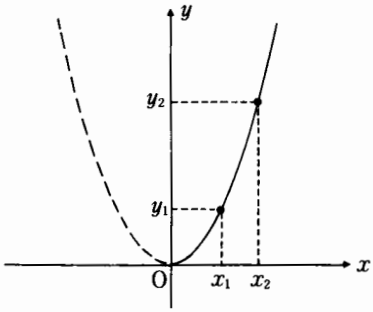
は**「上への写像」**になる．すなわち

どんな「$\boldsymbol{y \in R_+}$」に対しても「$\boldsymbol{\pm\sqrt{y} \in R}$」が存在する

そして

$$f(\pm\sqrt{y})=(\pm\sqrt{y})^2=y \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{任意の実数は「}\pm\sqrt{y}\text{」}\\ \text{で表されるからである．}\end{array}\right)$$

しかし，まだ「1対1写像」ではない．そこで**「定義域 $\boldsymbol{R}$」を「負でない実数全体の集合 $\boldsymbol{R_+}$」に制限するか，あるいは「正でない実数全体の集合 $\boldsymbol{R_-}$」**にかえると



$$f:\quad R_+ \longrightarrow R_+$$
$$f:\quad R_- \longrightarrow R_+$$

はいずれも**「上への1対1写像」**になる．

また，この他に「上への写像」，「1対1写像」が問題になる典型的な例として「1次変換(平面上の点の対応)」があるが，これは「代数・幾何」で学ぶことになるのでここでは触れない――『諸橋の代数・幾何講義(p.198～200)』を参照されたい．

(2) いろいろな写像

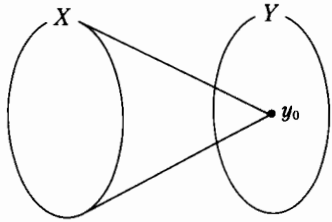
写像の例をあげておこう.

(i) 定値写像

集合 X から集合 Y への写像で，Y のある1つの要素 y_0 が，X の任意の要素に対応するとき，すなわち

$$f(x)=y_0 \longleftarrow \text{一定値}$$

であるとき，f を「**定値写像**」という.



このとき

$$f(X)=\{y_0\}$$

である.

(ii) 恒等写像

1つの集合 A があって，**A の任意の要素にそれ自身を対応させると**，この対応は A から A への1つの写像である．この写像を **A 上の「恒等写像」**といい，I_A などと表す．たとえば

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\{a,\ b,\ c\}$$

では

$$I_A:\ A \longrightarrow A \qquad\qquad I_B:\ B \longrightarrow B$$

$$\begin{pmatrix} 1 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \\ c \longmapsto c \end{pmatrix}$$

となる――集合 A だけを問題にするようなときは，「I_A」を略して単に「I」などと書くこともある.

また，A の任意の要素 x に対し，A 上の「恒等写像」を f とすると

$$f(x)=x$$

である.

(iii) 式と写像

「式」があれば，その「式」によって「対応」を定めることが出来るので「集合」を適当に決めることによって「写像」が作られる.

たとえば，分数式「$\dfrac{x-1}{x+1}$」があれば，「x」に「$\dfrac{x-1}{x+1}$」を対応させることが考えられる．しかし，「$\dfrac{x-1}{x+1}$」は「$x=-1$」では定義されないので「実数の集合 R」から「-1」を除いた集合

$$R'=\{x \mid x\in R,\ x\neq -1\}$$

を「定義域」にとり，$\boldsymbol{R}'$ から $\boldsymbol{R}$ への「写像」として

$$\boldsymbol{f}:\quad \boldsymbol{x} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+1}\quad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}')$$

を考えることに注意する．これはまた

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\quad (x\in R')$$

などと書いてもよい．

(iv)　方程式と写像

たとえば方程式

$$x^2+y=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

があるとき，「実数 x」に「①を満たす実数 y」を対応させると，R から R への写像 f が得られて

$$f:\quad x \longmapsto 1-x^2(=y),\ \text{すなわち}\quad f(x)=1-x^2$$

となる．

しかし方程式が

$$\boldsymbol{x^2+y^2=1}\qquad (y^2=1-x^2\geqq 0\quad \therefore\quad -1\leqq x\leqq 1)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のようなときに，「実数 $x(|x|\leqq 1)$」に「この方程式を満たす実数 y」を対応させることを考えてみると，「$x=1$」に対応する y の値は「$y=0$」の1つだけだが「$x=0$」に対しては「$y=\pm 1$」の2つある．したがって「定義域」を

$$\boldsymbol{X=\{x\,|\,-1\leqq x\leqq 1\}}$$

としても「X から R への写像」というわけにはいかない――p.215(Ⅱ)

このようなときは②から「$x\in X$」に対応する y の値を求めてみると

$$y^2=1-x^2(\geqq 0)\quad \therefore\quad y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

のように「2つ」あるから，この「対応関係」を「2つ」に分解して

$$f_1(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ (x\in X),\ \ f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}\ \ (x\in X)$$

と表すことになる．

注　「写像のカンジ」をよりよく了解するために「その他の例」もあげておく，

(i)「数列」の例：数列 $\{a_n\}$ の「一般項 a_n」は「自然数」で表されている．これは「自然数の集合 N」から R への写像である――『諸橋の基礎解析講義(p.110)』を参照!!

(ii)「面積，体積」の例：これらは「図形の集合 F」から「負でない実数 R_+」への写像と見ることが出来る．

(iii)「確率」の例：「おこり得る可能性の度合(確率空間)」から集合「$X=\{x\,|\,0\leqq x\leqq 1\}$」への写像．

(iv) **「微分」の例**：関数 $f(x)$ に対して，その「導関数 $f'(x)$」を対応させることを「微分する」という．これは「微分可能な関数全体の集合 F」から「関数全体の集合 G」への写像

$$D:\quad F \longrightarrow G$$

のことである．写像 D(すなわち「微分」)は次の性質をもつ．すなわち

$$D(f+g)=D(f)+D(g)$$
$$\longleftarrow\quad (f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$
$$D(fg)=D(f)\cdot g+f\cdot D(g)$$
$$\longleftarrow\quad (f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

である．

(3) 写像の合成と逆写像

(i) 写像の相等

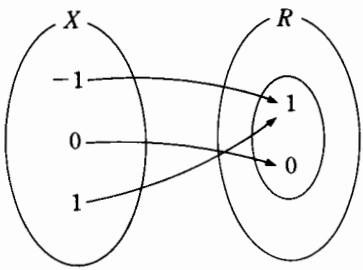
「写像が等しい」ということの説明からはじめよう．たとえば集合

$$X=\{-1,\ 0,\ 1\}$$

から実数全体の集合 R への写像 f, g を

$$f:\quad x \longmapsto x^2,\qquad g:\quad x \longmapsto x^4$$

とする．このとき f も g も右図のような「対応関係」となり，集合 X の任意の要素 x の f, g による像 $f(x)$ と $g(x)$ は同じものになる．



一般に，集合 X から集合 Y への写像 f, g において，**「任意の $x\in X$」**に対してその像が等しいとき，すなわち

$$f(x)=g(x)$$

であるとき**「f と g は等しい」**といい

$$f=g$$

と書く．

(ii) 合成写像 ⟵「合成関数」と読め!!

集合 X, Y, Z に対して 2 つの写像

$$f:\quad X \longrightarrow Y,\qquad g:\quad Y \longrightarrow Z$$

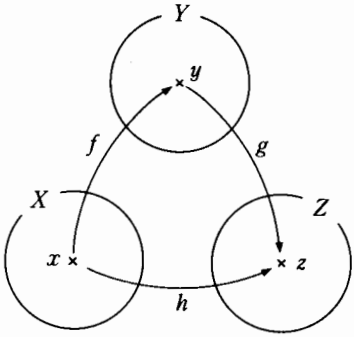
があり，まず f により「$x\in X$」に対して「$y\in Y$」が対応し，さらに g により「$y\in Y$」に対して「$z\in Z$」が対応するものとする．

このような「対応関係」が成り立つならば，「$x\in X$」を直接「$z\in Z$」に対応させる第 3 の写像

$$h:\quad X \longrightarrow Z$$

を考えることが出来る．この「写像h」を「**fとgとの合成写像**」といい，「**$g \circ f$**」と書く――gとfとの順序に注意!!

この過程をもう少し詳しく調べてみよう．



上に述べたことがらは

$$y=f(x),\quad z=g(y)$$

で，この2式からyを消去すると

$$z=g(f(x))$$

となり，これが合成写像「$z=h(x)$」であることから「$f \circ g$」でなく「**$g \circ f$**」で表すわけである．すなわち

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))$$

である．

ここで，「$g \circ f$」と「$f \circ g$」とが「違うことがら」であることについて触れておきたい．ただし，この2つを同時に考えることが出来るのは

$$f:\quad X \longrightarrow Y,\qquad g:\quad Y \longrightarrow X$$

という条件のもとでのハナシである．これも実例で説明しよう．

たとえば，RからRへの2つの写像f，gを

$$f(x)=x+1,\quad g(x)=2x$$

とすると，「**fとgとの合成写像$g \circ f$**」は

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2(x+1)=2x+2$$

となるが，「**gとfとの合成写像$f \circ g$**」は

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x+1$$

で，これらは「等しくない」ことがわかる．すなわち一般には

$$f \circ g \neq g \circ f \longleftarrow \text{交換則は不成立!!}$$

である．

さらに，RからRへの写像hを

$$h(x)=1-x$$

として加えて3つの写像の合成，「$h \circ (g \circ f)$」と「$(h \circ g) \circ f$」について考えてみよう――「カッコ(　)」は「数の演算」のときと同様に「合成を優先させる記号」であり「$h \circ (g \circ f)$」は，まずfとgとを合成して「$g \circ f$」を作り，その上で「$g \circ f$」とhとを合成する記号である．この約束に従って計算すると

$$(g \circ f)(x)=2x+2$$

$$\therefore\quad (h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(2x+2)$$
$$=1-(2x+2)=-2x-1$$

となる．次に

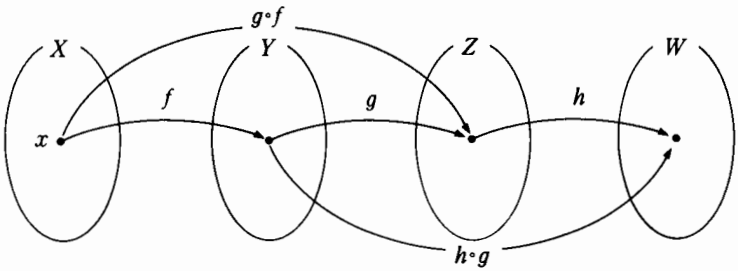
$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(2x)=1-2x$$
$$\therefore\quad ((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(x+1)$$
$$=1-2(x+1)=-2x-1$$

で，結局

$$\boldsymbol{h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f}\ \longleftarrow\ \text{結合則!!}$$

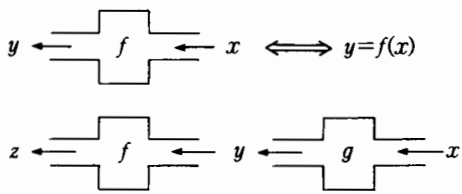
が成り立つことがわかる．

以上のことから**「写像の合成」は「数の演算」の「乗法」とよく似ていておもしろい**．事実「1次変換」ではその合成が「行列の積」で表される．比較して確かめておくとよい――『諸橋の代数・幾何講義(p.201，202)』を参照!!　ここでは次の図で確認しておくとよい．



注　「合成写像」の記号「$f\circ g$」について――

まずp.212で示した「関数」を表す記号「$f(x)$」の「$f(\ \ )$」を「操作あるいは機能」を表すための「機械，あるいは装置」としてイメージするために右のような図を描いてみる――**「ブラックボックス」**という．「合成写像」とはこのような装置の「連結」のことであり，次に述べる「逆写像」はこのような「はたらき」の「逆操作」のことに他ならない．2つの写像 g，f があるとき，x をまず g に入れ，出てきた y を f に入れることにより z が得られるものとする．この g と f とをつないで1つの装置と見ると，全体として「x を入れれば，z が出る装置」を考えることが出来る．このことを



$$\boldsymbol{f\circ g=F}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

と表すわけで，これは

$$f(g(x))=F(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

と基本的に同じと考えてもよい．しかし(**)の形式の「$F(x)$」では「$F(\quad)$にxを入れたもの(数値など)」という「カンジ」を引きずっているが，**「合成写像」の本質が「手続き（対応関係の規則）の合成」**にあることに注目して，**「規則の間の問題」**としてより明確にしたのが(*)の表現であると考えればよい．

(iii)　逆写像 ←――「逆関数」と読め!!

写像fの逆写像f^{-1}が存在するためにはfが**「上への1対1写像**(p.216)」でなくてはならない．そのことについて説明しよう．

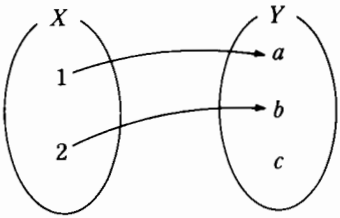
2つの集合

$$X=\{1,\ 2\},\quad Y=\{a,\ b,\ c\}$$

の間に右図のように対応する写像

$$f:\quad X \longrightarrow Y$$

を考えると，これは「上への写像」ではない．すなわち「$f(x)=c$」となるxが存在しない．



したがって「YからXへのfの逆対応」では「cの像が存在しない」ので これは写像ではない―― p.215の(Ⅰ)にあたる．

したがってこの「逆対応」が写像であるためにはfが**「上への写像」でなくてはならない．**

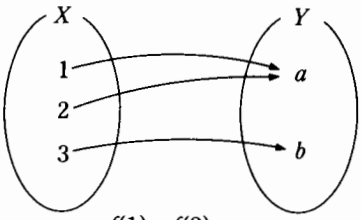
次に

$$X=\{1,\ 2,\ 3\},\quad Y=\{a,\ b\}$$

として右図のように対応する写像

$$f:\quad X \longrightarrow Y$$

を考える．これは「上への写像」ではあるが「1対1写像」ではなく，「YからXへのfの逆対応」を考えると「$a\in Y$」の像が「1」と「2」の2つあることになって，これも写像ではない―― p.215の(Ⅱ)にあたる．



$f(1)=f(2)=a$

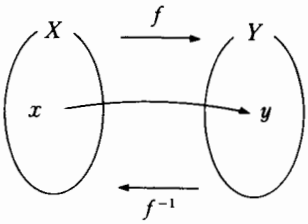
したがってこの「逆対応」が写像であるためには**「1対1写像」であることも必要**である．

これらのことから，ある写像

$$f:\quad X \longrightarrow Y$$

の「逆対応」が写像

$$g:\quad Y \longrightarrow X$$



であるためには，fが「上への1対1写像」であることが必要であり，逆にfが「上への1対1写像」であれば「fの逆対応」として新しい写像gを作ることが出来る．

このとき，写像gをfの「逆写像」といい，これを「f^{-1}（エフ・インバースと読め!!）」で表す．

記号を用いて説明すると

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

であるから

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$$

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y$$

となり，合成写像「$f^{-1}\circ f$」，「$f\circ f^{-1}$」はそれぞれ「恒等写像」I_X，I_Yである．

なお「$X=Y$」のときは

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=e \text{（}e\text{は恒等写像）}$$

と表すことにする．

注 「数Ⅰ」の他にこの「逆写像(逆関数)」の考え方が大きく必要とされる分野は「基礎解析」の「対数関数(指数関数の逆関数)」，「代数・幾何」の「1次変換」などがある――このことは覚えておくとよい．

逆写像，合成写像の逆写像

写像f，gがともに逆写像をもつとき

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$　　(2) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

である．

解　説 (1) 「f^{-1}の定義」からほとんど明らかである．

(2) この等式の意味は「$f\circ g$」の逆写像が「$g^{-1}\circ f^{-1}$」であるということだから，その証明は

$$(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})=e \text{（恒等写像）} \cdots\cdots ①$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)=e \text{（恒等写像）} \cdots\cdots ②$$

が成り立つことを示せばよい．それには「写像の合成」では「結合則」が成り立つ(p.222)ことを利用する．

①の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})&=f\circ g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\\&=f\circ e\circ f^{-1} \quad \longleftarrow \quad g\circ g^{-1}=e\\&=f\circ f^{-1}=e \quad \longleftarrow \quad f\circ f^{-1}=e\end{aligned}$$

②もほとんど同様にして示される．

$$\therefore\quad (f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$$

である．

らしんばん

この定理の「**写像 f, g がともに逆写像をもつとき……**」に注目したい．これは f, g が逆写像をもつとき，その合成写像「$f\circ g$」も逆写像をもつことが前提になっている．このことについて考えてみよう．

逆写像については

逆写像が存在する　⟺　上への1対1写像

であることはすでに述べた(p.224)．いま

$$g:\quad X \longrightarrow Y$$
$$f:\quad Y \longrightarrow Z$$

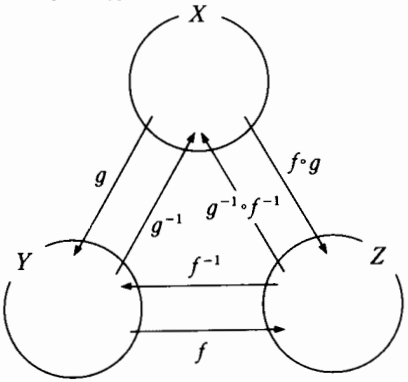
とすると

f, f^{-1}

g, g^{-1}

$f\circ g$, $(f\circ g)^{-1}$

の関係は右図で表され，**それぞれが「上への1対1写像」であることから「合成が保たれる」**わけである．



特に「$Z=X$」のとき，「$f\circ g=e$（恒等写像）」ならば「$g\circ f=e$」も成り立ち，これらを満たす g は f^{-1} である．すなわち

$f\circ g=g\circ f=e$（恒等写像）

を満たす g が存在するとき g を「f^{-1}」（あるいは f を「g^{-1}」）と定義してもよい．

(2)の

$$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\quad\cdots\cdots(*)$$

をどう理解すればよいか．これは「行列の演算」の公式

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\quad\cdots\cdots(**)$$

とよく似ている．これは「逆行列」をもつ2つの行列 A, B が「1次変換」という「平面上の点の変換(上への1対1写像)」の具体的内容を表し，A^{-1}, B^{-1} がそれらの「逆変換(逆写像)」を表していることを考えると，きわめて「あたりまえ」のハナシである —— この場合(＊)は，**「行列の積の逆行列」としての(＊＊)を「1次変換の合成の逆変換」として説明したもの**であると考えればよい．

——『諸橋の代数・幾何講義(p.202, 203)』を参照!!

さて(＊)を「よりよく」理解するために

g:　シャツを着る，　f:　服を着る

という「日常的な操作(対応関係)」におきかえて説明しよう．このとき

$f \circ g$：　シャツを着て服を着る　⟵　操作の合成!!

であり，これは「出かけるとき」のハナシである．帰ってきたときは $(f \circ g)^{-1}$ だが，これは上の「$f \circ g$」を「逆に」やるわけで

$g^{-1} \circ f^{-1}$：　服を脱いでシャツを脱ぐ　⟵　$(f \circ g)^{-1}$

となり，これが「シャツを脱いで服を脱ぐ」では「おかしなことになってしまう」わけである．

「数Ⅰ」らしい例で説明しよう．

$$f(x)=x+1,\ g(x)=2x \longrightarrow (f \circ g)(x)=2x+1$$

であった(p.221)．これを「操作」として説明すると

f：　1を加える
g：　2倍する
$\rangle$ $f \circ g$：　2倍して 1を加える

ということである．したがってこの「逆操作」は

$(f \circ g)^{-1}$：　1を引いて $\frac{1}{2}$ 倍する　⟶　$g^{-1} \circ f^{-1}$

すなわち

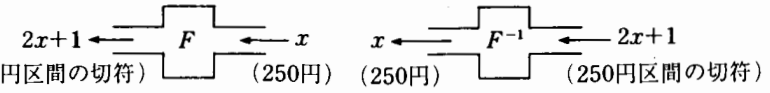
$$F(x)=2x+1$$

の「逆関数(逆写像)」である「$F^{-1}(x)$」は

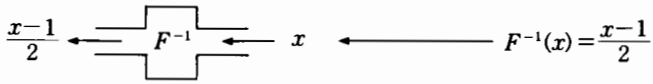
$$F^{-1}(x)=\frac{x-1}{2} \longleftarrow 1\text{を引いて}\frac{1}{2}\text{倍する} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

であることが簡単に了解される．

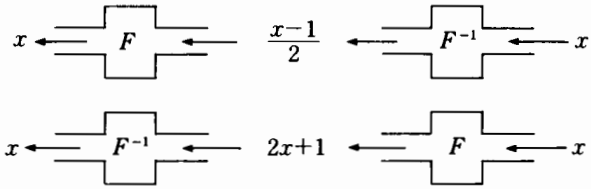
「ブラックボックス(p.222)」で表してみよう．「自動販売機」を思い出してもらえばよい．



であるが，問題は「F^{-1}」に「一般に用いている変数 x」を入れるとどうなるかが知りたい．それが上に述べた(***)で



となる．また，F と F^{-1} との合成写像「$F \circ F^{-1}$」，「$F^{-1} \circ F$」は「恒等写像」であるから



となるのは「あたりまえ」である.

「逆関数(逆写像)」を「機械的に(？)」求める方法とその原理については次の**例題 1**で詳しく説明するが，その前にこのように**「関数(写像)」を，まず「操作(あるいは機能)」として了解しておくことは大切**である.

例題 1

(1)　R から R への写像

$$f(x)=ax+b \quad (a \neq 0)$$

の逆写像(**逆関数**) f^{-1} を求めよ.

(2)　$A=\{x \in R \mid x \neq -a\}$ から $B=\{x \in R \mid x \neq a\}$ への写像

$$f(x)=\frac{ax-1}{x+a}$$

の逆写像(**逆関数**) f^{-1} を求めよ.

解　説　(1)　$f(x)$ を y とおくと

$$y=f(x)=ax+b \quad \cdots\cdots ①$$

f の逆写像 f^{-1} を得るためには，まず「$y \in R$ に f で対応する $x \in R$」を求める――「f の逆の対応関係」を調べなくてはならない.

そのためには，まず「①を x について解く」ことを考える. ①より

$$ax=y-b \qquad \therefore \quad x=\frac{y-b}{a} \quad (a \neq 0) \quad \cdots\cdots ②$$

すなわち「$y \in R$ に対して $\dfrac{y-b}{a} \in R$ を対応させる」ことで f の逆写像を得る――これが**「写像になっている」**ことに注意!!

あらためて文字を y から x に書きかえて

$$f^{-1}: \quad R \longrightarrow R \qquad x \longmapsto \frac{x-b}{a}$$

(文字はこのようなとき習慣的に「x」を用いる)

である. またこれは

$$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}, \text{ あるいは } y=\frac{x-b}{a}$$

と書いてもよい――特にこの第2式は**「②の x と y とを入れかえたもの」**になっていることに注目したい.

(2)　考え方は(1)と同様である.

$$y=f(x)=\frac{ax-1}{x+a}, \quad x \in A, \quad y \in B$$

これを「x について解く」方向で式変形すると

$$y(x+a)=ax-1 \qquad \therefore \quad (a-y)x=ay+1$$

ここで「$y \in B$」より「$y \neq a$」であるから両辺を「$a-y$」で割ると

$$x=\frac{ay+1}{a-y}$$

x と y とを入れかえて

$$\boldsymbol{y=f^{-1}(x)=\frac{ax+1}{a-x}}$$

らしんばん

求めた「$f^{-1}(x)$」は正しいか．たとえば(1)では

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a\text{倍して}b\text{を加える}}}{f(x)=ax+b} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ b\text{を引いて}a\text{で割る}}}{f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}}$$

このハナシはp.226で説明した——正しいのは「あたりまえ」に見える．

しかし(2)になるとこのように簡単には見えない．そこで**「検算」の方法**についても説明しておく．それは「$(f \circ f^{-1})(x)$」，「$(f^{-1} \circ f)(x)$」を計算してみればよい．

$$(f \circ f^{-1})(\underset{\sim}{x})=f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{x-b}{a}\right)=a\left(\frac{x-b}{a}\right)+b=\underset{\sim}{x}$$

$$(f^{-1} \circ f)(\underset{\sim}{x})=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(ax+b)=\frac{(ax+b)-b}{a}=\underset{\sim}{x}$$

すなわち

$$\boldsymbol{f \circ f^{-1}=f^{-1} \circ f=I_R} \longleftarrow \text{恒等写像}$$

で，「$f^{-1}(x)$」が正しく求められたことがわかる．

(2)についても同様の計算をすると

$$\boldsymbol{f^{-1} \circ f=I_A,\ f \circ f^{-1}=I_B} \longleftarrow \text{いずれも恒等写像}$$

となる——計算して確かめておくとよい．

「f^{-1}を求める手続き」について——(1)，(2)で「f^{-1}」を求めた方法をまとめると次のような手順になる．

まず，**「上への1対1写像」が「xの式」で与えられている．**すなわち

$$\boldsymbol{f(x)=(x\text{の式})}$$

(i) **この式を y とおく** $\longrightarrow$ $\boldsymbol{y=f(x)=(x\text{の式})}$ ……(＊)

(ii) **x について解く** $\longrightarrow$ $\boldsymbol{x=(y\text{の式})}$ ……(＊＊)

(iii) **x と y とを入れかえる** $\longrightarrow$ **逆写像(逆関数)が求まる**

となる——いかにも(＊)を「形式的に x について解き直しただけ」のように見える．まず最初に

「fの逆写像f^{-1}」が存在するかどうか

を確認しなくてはならないのではないか(？)——実は「**このままでよい**」のであるが，そのことをキチンと説明しておきたい．

「f:　$X \longrightarrow Y$」の逆写像「f^{-1}」は

「$y \in Y$」に「$x \in X$」を対応させる

写像である．したがって「(＊)をxについて解く」という「(ii)の作業」は

「$y \in R$」に「fで対応する$x \in R$」を求める

ということに他ならず，「(ii)」を実行して(＊)を(＊＊)の形で表すことが出来た段階で(＊＊)の「$y \in R$に$x \in R$を対応させる対応関係」は「写像」であり，**これがまさに「fの逆写像」**であるから「fが逆写像をもつかどうか」はもはや問題にはならない——**すでに「逆写像が求まってしまった!!」**わけである．

あとは「慣習にしたがった表現」にするために「xとyとを入れかえる」という「(iii)」を実行するだけのことである．

このように上に述べた(i)～(iii)は，ただの形式ではなくて「それなりの意味がある」ことをナットクしておくことは大切である——「うまくいかない例」，「そのままではうまくいかない例」をあげてこのハナシを確認しておくことにする．

〈例1〉たとえば本問(1)で「$a=0$」としてみよう．

$y=f(x)=b \longleftarrow$ 一定値

であるが，fは**「定値写像**(p.218)」であり，もちろん**「1対1写像」**でないから「逆写像」は存在しない（$\longleftarrow$ xについて解けない!!）．

要するに(＊)の形で与えられる式を**「xについて解いて」(＊＊)の形の式に変形することが出来なければ「逆写像」は存在しないのである．**

〈例2〉p.220でとりあげた

f:　$R \longrightarrow R$　　$x \longmapsto x^2$

ではどうなるか．

$y=f(x)=x^2$ ……(＊＊＊)

とおき，「xについて解く」のだが，これは「yの条件」によってハナシが違って来る．

$y \geqq 0$ならば　$x=\pm\sqrt{y}$ $\longleftarrow$ xについて解けた!!

$y<0$ならば(＊＊＊)を満たすxの実数値なし $\longleftarrow$ 解けない!!

したがって(＊＊＊)を「xについて解いて」(＊＊)の形に表すためには

f_+:　$R_+ \longrightarrow R_+ \Longrightarrow f_+^{-1}: R_+ \longrightarrow R_+$

，または

f_-:　$R_- \longrightarrow R_+ \Longrightarrow f_-^{-1}: R_+ \longrightarrow R_-$

のように**「定義域」と「値域」を制限しなければならないことがわかる．**

それぞれxとyとを入れかえて「逆写像(逆関数)」は

$$y=f_{+}^{-1}(x)=\sqrt{x} \quad \longleftarrow \quad x\geqq 0,\ y\geqq 0 \text{ で考える!!}$$

$$y=f_{-}^{-1}(x)=-\sqrt{x} \quad \longleftarrow \quad x\geqq 0,\ y\leqq 0 \text{ で考える!!}$$

となる.

なお「(ii)」と「(iii)」の手続きは逆にしてもよい——各自で確かめてみるとよい.

第2節
いろいろな関数とそのグラフ

「関数」を「視覚的(ビジュアル)に」とらえるには「グラフ」を描くとよい．
ここでの主な目的は

(i) **最初にわれわれの扱う関数にはどのようなものがあるかを確認する**
(ii) **「関数」の具体的な姿を「x-y 平面上の点の集合」としてとらえる**
(iii) **具体的に「いろいろな関数のグラフ」を描くことにより，その関数のもつ諸性質をより鮮明にとらえる**

ことである．

1　関数の分類

われわれの扱う「関数」は，基本的には「式で表されるもの」が主体である．これらを「式の種類」に注目して分類しよう．

たとえば「整式で表されている関数」を「整関数」という――以下「数の分類(p.7，8)」にならって次のように分類する．

- **有理関数**
  - **整関数：**　x^2+x+1，x^3+2x^2+x+1
  - **分数関数：**　$\dfrac{1}{x-1}+x$ ←――（分母に1次以上の整式がくるもの）
- **無理関数：**　$\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}+x$ ←――（根号内に1次以上の整式がくるもの）

しかし，これらは「関数」の「ほんの一部」であって，この他にも，**指数関数，対数関数，三角関数**（まとめて「**初等超越関数**」という）がある――「基礎解析」で学ぶことになる．

これらの関数に対し，上に述べた関数を「**代数関数**」とよんでいる．

しかし，この「数Ⅰ」で学ぶものは，この「代数関数」のうち

整関数 ⟶ 主に「1次関数」と「2次関数」

分数関数 ⟶ 主に「分母が1次式」のもの

無理関数 ⟶ 主に「根号内が1次式」のもの

と考えてよい．

ここで，わざわざ「主に……」と書いた理由は，「ハナシの行きがかりで多少ハミ出すこともあり得る」というほどのことで，ほとんど気にすることはない．

注 本文の最初に

基本的には「式で表されるもの」……

と書いた――「式から関数を作るハナシ」はp.218で詳しく述べたが，実は「数と式」で解説したような「式」で表すことの出来ない関数も考えられる．

たとえば

自然数 n から「n 番目の素数」への対応

自然数 n から「π の小数第 n 桁の数」への対応

郵便料金――ガウス記号 $[x]$ で表されるようなもの

指数，対数，三角関数（⟵ 整式ではない）

などがあるが，われわれとしては「とりあえずのところは触れないでおこう」ということだが，考え方の基本としては「同じ」と考えてよい．

2 「関数」のグラフ

(1) 「グラフ」についての考え方と扱い方の基本

(i) 「グラフ」とは何か

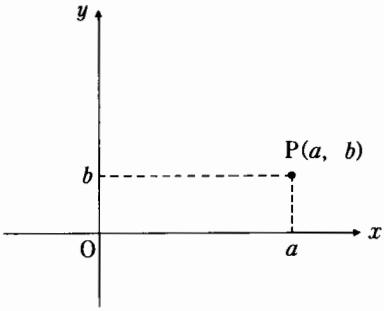
実数の「順序つきペア」で構成される集合

$$\{(x,\ y)\mid x,\ y\in R\}$$

を「R^2，または $R\times R$」と書くとこれは「x-y 平面」上の点の集合と1対1に対応する――以下「**x-y 平面**」を「R^2」で表し

$$(a,\ b)\in R^2$$

で「**x-y 平面**」上の点 **P** の「座標」$(a,\ b)$ を表すものとする．



一方，関数

$y=f(x)$

の「定義域」と「値域」はp.212で述べたように「R（実数全体の集合）」の部分集合である．したがって「R^2」の部分集合

$F=\{(x,\ f(x))\mid x\in R$（実数）は f の定義域$\}$

は「x-y 平面」上の点の集合となる．これを

関数「$y=f(x)$」のグラフ

という，このとき「グラフ F」は「x-y 平面」上の点の集合であるから1つの図形を形(かたち)作る．逆にこの「図形（グラフ F）」の任意の点の座標を $(x,\ y)$ とすると，x，y は等式「$y=f(x)$」を満たす――「グラフ」から「関数 $y=f(x)$」がどのような「対応関係」であるか（定義域の各 x の値に対してどんな実数値を対応させているか）を読みとることが出来る．すなわち

「$y=f(x)$」を「図形（グラフ）の方程式」

という．

また，2つの関数 f，g があって，「$f=g$」ならばもちろんこの2つのグラフは一致する．逆に2つのグラフが一致すれば，「定義域」は明らかに等しく，また，「定義域」に含まれる任意の実数 x の値に対して「$f(x)=g(x)$」であるから「$f=g$」であることもわかる．

「関数 $y=f(x)$」の「グラフ」を描くには「独立変数（p.212）」x のいろいろな値

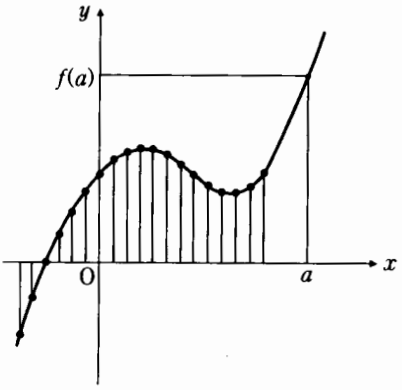
$x=a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots\cdots$

に対応する「$f(x)$」の値（関数値）を求め，「x-y 平面」上に点

$(a_1,\ f(a_1)),\ (a_2,\ f(a_2)),\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

をとり，この手続きを繰り返して点の間隔を十分に小さくしていけば，これらの点をつなぐ1つの線（曲線）を得ることが出来る――もちろんこのグラフを完全に描くことは出来ないが，「x の変化に対応する $f(x)$ の変化の概要」を知るのに必要な程度の「くわしさ」には達し得るのである．



このように「グラフ」は「関数」を「視覚的（ビジュアル）に」表したものである．

注❶ 本文の

実数の「順序つきペア」……

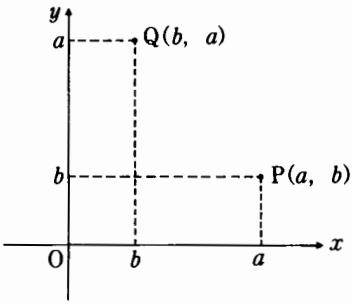
に注目してもらいたい．これは

$a \neq b$

ならば，$(a,\ b)$ と $(b,\ a)$ とが「異なるものである」ことを意味しており，これは「x-y 平面」上の点として見れば

$(a,\ b) \neq (b,\ a)$

は明らかである——右図．



注❷ ここで「関数 $y=f(x)$ のグラフ」上の点 $(x,\ f(x))$ というときの「$f(x)$」は**「独立変数 x に対する関数値」**として扱っている——p.213で説明した**「関数の2つの意味」**のうちの「(ii)の意味」である．

注❸ 「x-y 平面」上の点 $A(a,\ b)$ に対して

点 A が「関数 $y=f(x)$ のグラフ」上 $\Longleftrightarrow$ $b=f(a)$

は「グラフの意味」を考えると「あたりまえ」のことではあるが一応確認しておきたい．たとえば関数

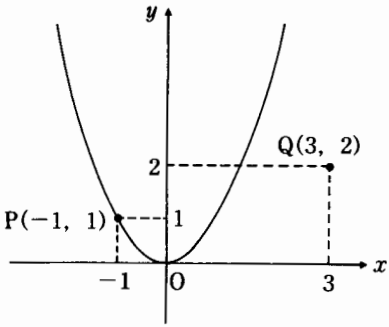
$y=x^2$ ……(＊)

を例にとると，**点 $P(-1,\ 1)$ などはこの「グラフ上」の点であるが，点 $Q(3,\ 2)$ などはそうではない**——(＊)に入れて

P ⟶ $1=(-1)^2$

Q ⟶ $2 \neq 3^2$

であることから確認されることである．



(ii) グラフの移動

≪1≫平行移動

「グラフ」の平行移動

「関数 $y=f(x)$ のグラフ F」を

x 軸方向に α，y 軸方向に β

だけ平行移動して得られる「図形(グラフ) F'」の方程式は

$y-\beta=f(x-\alpha)$

で表される．

解　説　関数

$y=f(x)$ ……①

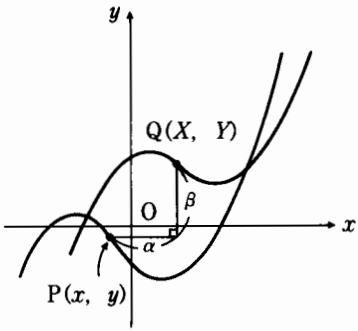
で表される「図形(グラフ) F」上の点 $P(x,\ y)$ を

x 軸方向に α，y 軸方向に β

だけ平行移動して点 Q$(X,\ Y)$ が得られたとすると

$$\begin{cases} X=x+\alpha \\ Y=y+\beta \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{x=X-\alpha} \\ \boldsymbol{y=Y-\beta} \end{cases}$$

である．



この点 P$(x,\ y)$ は①の表す「グラフ F」上の点であるから代入して x，y を消去すると

$$Y-\beta=f(X-\alpha)$$

$\longleftarrow$ X と Y との関係式

すなわち点 Q$(X,\ Y)$ は

$$y-\beta=f(x-\alpha)$$

上の点である．すなわち「図形(グラフ) F'」を表す方程式は

$$\boldsymbol{y-\beta=f(x-\alpha)}$$

である．

らしんばん

「x 方向に α，y 方向に β の平行移動」をベクトルで表すと「**$(\alpha,\ \beta)$ の平行移動**」のように表せて簡単である――以下，このように書くことにする．

この定理の主張していることは，「①のグラフ」を $(\alpha,\ \beta)$ 平行移動して得られる「グラフ」を表す方程式を得るには①で「単純」に

$$\boldsymbol{x\to(x-\alpha),\quad y\to(y-\beta)}$$ $\longleftarrow$ **「プラス」に間違えないこと!!**

とおきかえればよい，ということである．

その結果として得られた「グラフ」

$$y-\beta=f(x-\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を $(-\alpha,\ -\beta)$ だけ平行移動してみよう．それには

$$x\to x-(-\alpha)=x+\alpha,\quad y\to y-(-\beta)=y+\beta$$

とおけばよいから，これらを(＊)に入れて

$$(y+\beta)-\beta=f((x+\alpha)-\alpha) \qquad \therefore\ y=f(x)$$

となり，これは①に他ならない――「あたりまえ」のことである．

「グラフの平行移動」は「数Ⅰ」から「微積分」に至るまで，「図形と座標」を扱う場合には「必ず」といってよいほど出てくる油断のならないハナシである．そのつもりでしっかりとマスターしておかなければならない．

具体的な例で説明しよう．

〈例1〉「関数 $y=x$ のグラフ」を $(-2,\ 3)$ だけ平行移動すると

$$x\to x+2,\ y\to y-3$$

とおいて

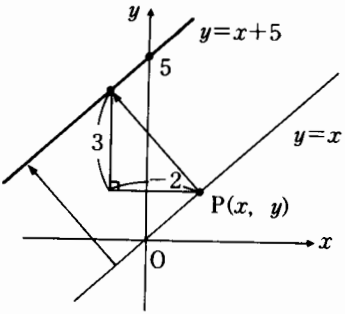
$$y-3=x+2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=x+5}$$

が得られるが，これを

$$y-5=x$$

と変形すれば「このグラフ」は「もとのグラフ」を (0, 5) だけ平行移動したものでもある．



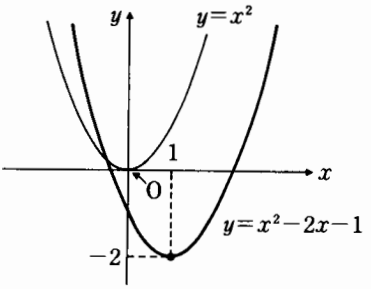
〈例 2〉「関数 $y=x^2$ のグラフ」を (1, −2) だけ平行移動すると

$$y+2=(x-1)^2\quad \therefore\quad \boldsymbol{y=x^2-2x-1}$$

が得られる――「図形の形」は当然変わらず，頂点が移動して

$$(0,\ 0)\longrightarrow(1,\ -2)$$

となっている．このことについては「2 次関数」のところで詳しく説明する．



≪2≫グラフの伸縮

「x-y 平面」上の点 P$(x,\ y)$ の「**x 座標を m 倍する**」ことを「**x 軸方向への伸縮**」という．y 軸方向についても同様である．

「グラフ」の伸縮

「関数 $\boldsymbol{y=f(x)}$ のグラフ」を

x 軸方向に m 倍，y 軸方向に n 倍

して得られる「グラフ」の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{y}{n}=f\left(\frac{x}{m}\right)}$$

である．

解　説　関数

$$\boldsymbol{y=f(x)}\quad\cdots\cdots①$$

で表される「グラフ」上の点 P$(x,\ y)$ の「**x 座標を m 倍 ($m\neq0$) する**」ことにより，点 Q$(X,\ Y)$ が得られたとすると

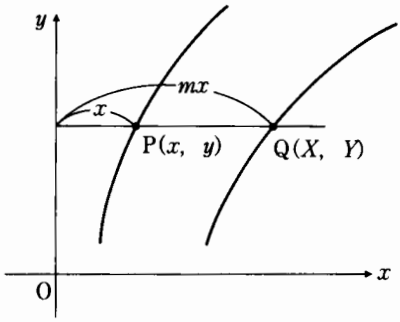
$$\begin{cases}X=mx\\Y=y\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}x=\dfrac{X}{m}\\y=Y\end{cases}$$

である．

この点 P$(x,\ y)$ は①で表される「グラフ」上の点であるから①に代入して $x,\ y$ を消去すると

$$Y=f\left(\frac{X}{m}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{Q}(X,\ Y)\text{ は}\\ \text{「}y=f\left(\frac{x}{m}\right)\text{ の}\\ \text{グラフ」上!!}\end{array}\right)$$



すなわち，求める方程式は

$$y=f\left(\frac{x}{m}\right) \quad \longleftarrow \text{①で } x \text{ を } \frac{x}{m} \text{ におきかえたもの!!} \quad \cdots\cdots②$$

である．

「y 座標を n 倍 $(n \neq 0)$ する」ときもハナシは同様で

$$\frac{y}{n}=f(x) \quad \longleftarrow \text{①で } y \text{ を } \frac{y}{n} \text{ におきかえたもの!!} \quad \cdots\cdots③$$

②と③を同時に行えば

$$\frac{y}{n}=f\left(\frac{x}{m}\right) \quad \longleftarrow \text{①で「}x \to \frac{x}{m},\ y \to \frac{y}{n}\text{」とおく!!}$$

が得られる．

らしんばん

軸に平行な直線に関する対称移動——上に述べた「伸縮」の原理を用いて導くことが出来る．

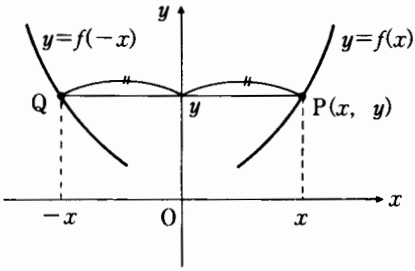
「$m=-1,\ n=1$」とすると

$$y=f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

に対して移動されたグラフの方程式として

$$y=f(-x) \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

が得られるが，これは$(*)$のグラフを「y 軸に関して対称移動」したグラフの方程式である．



特に$(*)$と$(**)$のグラフが重なるとき，すなわち，任意の実数 x について

$$f(-x)=f(x)$$

が成り立つとき，$(*)$で表される関数 $f(x)$ を「**偶関数**（ぐうかんすう）」という．たとえば

$$y=x^2,\ x^4,\ \cdots\cdots,\ \cos x,\ \cdots\cdots \longleftarrow \text{すべて } y \text{ 軸について対称!!}$$

などは「偶関数」である．

また，「直線 $x=\alpha$ に関する対称移動」については(＊)のグラフを次の手順で移動させればよい．すなわち

(i) x 軸の方向に「$-\alpha$」の平行移動

$\longrightarrow\ y=f(x+\alpha)$

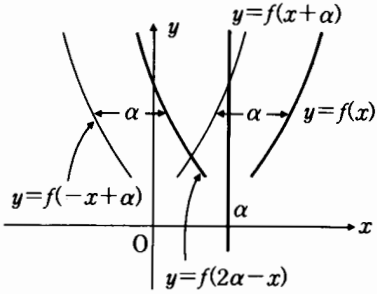
(ii) y 軸に関する対称移動

$\longrightarrow\ y=f(-x+\alpha)$

(iii) x 軸の方向に「α」の平行移動

$\longrightarrow\ y=f(-(x-\alpha)+\alpha)$

$=f(2\alpha-x)$



となる――これは覚えておいて使うというより，「上の(i)，(ii)，(iii)に従って導くことが出来る」ことをナットク出来れば十分である．

全く同様にして，(＊)のグラフを「x 軸に関して対称移動」して得られるグラフの方程式は

$-y=f(x)\qquad \therefore\ \ y=-f(x)$

であり，「直線 $y=\beta$ に関して対称移動」して得られるグラフの方程式は(＊)の「y」を「$2\beta-y$」でおきかえて

$2\beta-y=f(x)\qquad \therefore\ \ y=-f(x)+2\beta$

となる．

➔ 点対称移動について――「$m=n=-1$」とすると

$-y=f(-x)\qquad \therefore\ \ y=-f(-x)$ ……(＊＊＊)

が得られるが，これは(＊)のグラフを「原点に関して対称移動」したグラフの方程式である．

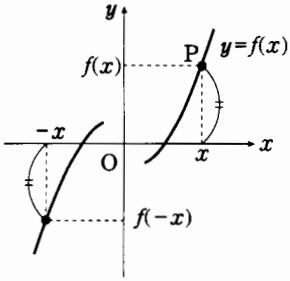
特に(＊)のグラフと(＊＊＊)のグラフが重なるとき，すなわち，任意の実数 x について

$-f(-x)=f(x)$

$\therefore\ \ f(-x)=-f(x)$

が成り立つとき，(＊)で表される関数を「奇関数（きかんすう）」という．たとえば

$y=x,\ x^3,\ \cdots\cdots,\ \sin x,\ \cdots\cdots$



などは「奇関数」であり，これらはすべて「原点に関して対称なグラフ」である．

なお，(＊)のグラフを「点 $A(\alpha,\ \beta)$ に関して対称」に移動するには次の手順で移動させればよい．

(i) $(-\alpha,\ -\beta)$ の平行移動

$\longrightarrow\ y+\beta=f(x+\alpha)$

(ii)　これを原点について対称移動

$\longrightarrow\ -y+\beta=f(-x+\alpha)$

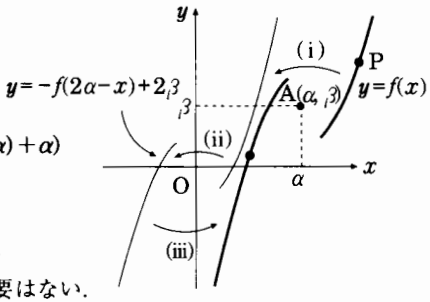
(iii)　さらに$(\alpha,\ \beta)$の平行移動

$\longrightarrow\ -(y-\beta)+\beta=f(-(x-\alpha)+\alpha)$

$\therefore\quad 2\beta-y=f(2\alpha-x)$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=-f(2\alpha-x)+2\beta}$

となるが，これも「(i)，(ii)，(iii)の手順」を了解出来れば特に覚えておく必要はない．



(2)　いろいろな関数とそのグラフ

(i)　1次関数とそのグラフ

1次関数

次のように表される関数を「**1次関数**」という．

$\boldsymbol{y=f(x)=ax+b,\ (a\neq 0)}$

解　説　「$\boldsymbol{x}$の1次式で与えられる関数」のことである．

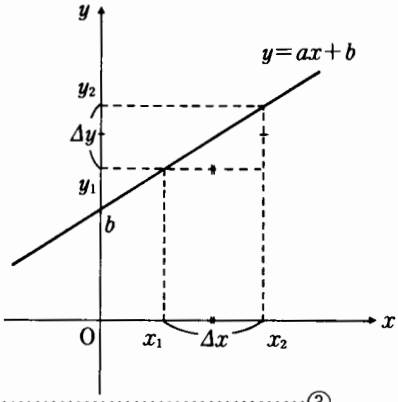
$y=f(x)=ax+b,\ a\neq 0$ ……①

とおくと①の「独立変数x」が「x_1からx_2まで変化する」とき，「従属変数y」は「$y_1=f(x_1)$から$y_2=f(x_2)$まで変化する」から，その「**変化の割合(平均の変化量)**」は

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a(\text{一定})$$

……②



であるから，x，yの変化量をそれぞれ

$\boldsymbol{x_2-x_1=\Delta x}$

$\boldsymbol{y_2-y_1=\Delta y}$

という記号を用いて表せば，②は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\qquad\therefore\quad \boldsymbol{\Delta y=a\cdot\Delta x}$$ ……③

となる――「$\overset{\text{デルタ}}{\Delta}$」は「差(*difference*)」の「*d*」にあたるギリシャ文字の大文字である．

すなわち③は

「$\Delta y=(y$ の変化量$)$」が「$\Delta x=(x$ の変化量$)$」に正比例するということであり，これが1次関数の「基本的性質」である．

たとえば

$$y=-2x+5$$

で，「$x_1=-1$，$x_2=2$」とすると

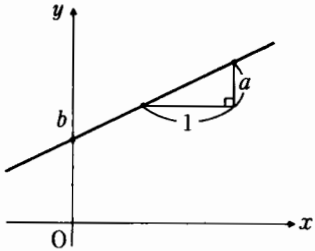
$$\Delta x=2-(-1)=3$$

$$\Delta y=\{(-2)\cdot 2+5\}-\{(-2)\cdot(-1)+5\}=-6$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-6}{3}=-2(\text{一定})\qquad \therefore\quad \Delta y=(-2)\cdot\Delta x$$

である．

らしんばん



本文①に示した1次関数

$$y=f(x)=ax+b,\quad a\neq 0$$

の「定義域」と「値域」は「R（実数全体）」であり，そのグラフ

$$\{(x,\ ax+b)\mid x\in R\}$$

は「x-y 平面」上の「直線」である．

このとき「a」をこの直線の「傾き」，「b」を「y 切片」という――これはすでに中学で学んだことがらである．

「傾きが a」ということは

「x が1だけ増える（$\Delta x=1$）」ならば「y が a だけ増える（$\Delta y=a$）」

ということであり，本文③で表すと

$$\underbrace{\Delta y}_{\substack{\|\\ a}}=a\cdot\underbrace{\Delta x}_{\substack{\|\\ 1}}$$

ということである．

この1次関数

$$y=f(x)=ax+b\quad\cdots\cdots(*)$$

を少し違った角度から眺めてみよう．そのために2つの1次関数

$$g:\quad x\longmapsto ax,\qquad h:\quad x\longmapsto x+b$$

を用意しておく．これらを合成すると

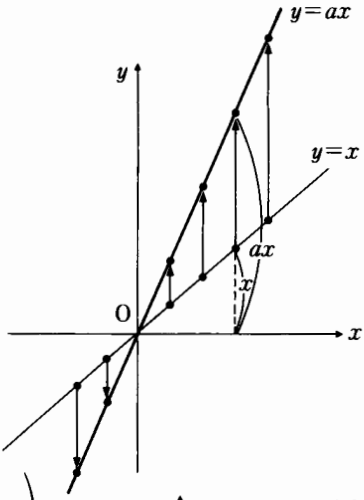
$$x\xmapsto{g}ax\xmapsto{h}ax+b\qquad\therefore\quad h\circ g:\quad x\longmapsto ax+b$$

すなわち「f」は「g と h との合成関数」である．

一方，このことを「グラフ」で考えてみる．

まず

$$y=g(x)=ax$$



については「$y=x$」を基準にして

$$\left(\frac{y}{a}\right)=x \longleftarrow \textbf{y 軸方向に a 倍!!}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{あるいは}\\ y=\dfrac{x}{\left(\dfrac{1}{a}\right)} \longleftarrow x\text{ 軸方向に }\dfrac{1}{a}\text{ 倍!!}\\ \text{と考えてもよい}\end{array}\right)$$

したものであり

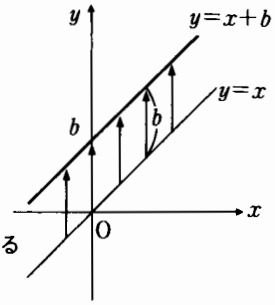
$$y=h(x)=x+b$$

についても，やはり「$y=x$」を基準として

$$y-b=x$$

$$\longleftarrow \textbf{y 軸方向に b の平行移動!!}$$

$$\left(\begin{array}{l}y=x-(-b)\\ \longleftarrow x\text{ 軸方向に }(-b)\text{ の平行移動!!}\\ \text{と考えてもよい}\end{array}\right)$$



したものである――「(＊)で表される
グラフ」はこれらの合成，すなわち
「$y=x$」のグラフを

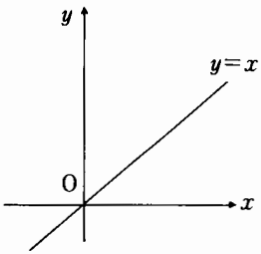
(i)　g によって「y 軸方向に a 倍に伸縮」する

(ii)　h によって「y 軸方向に b だけ平行移動」する

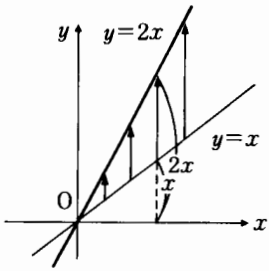
ことによって得られることがわかる．

$y=2x+1$　($a=2$，$b=1$ の場合)

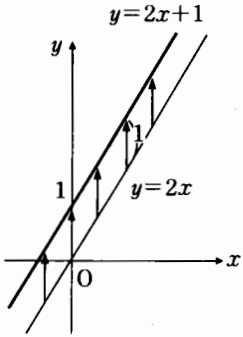
としてその「分解図」を描いておこう．



最初の状態
「$y=x$」のグラフ
となる．



y 軸方向に 2 倍
に伸縮



y 軸方向に 1 だけ
平行移動

例題 2

(1) グラフが次の条件を満たす1次関数を求めよ.

(i) 傾きが -2 で点$(1,\ 2)$を通る.

(ii) 2点$(-1,\ 0)$, $(3,\ 2)$を通る.

(2) 次のように表される関数のグラフを描け.

(i) $y=2|x|+|x-1|$

(ii) $y=|x+2|-|x|$

解 説 (1)(i) 1次関数「$y=ax+b$」で傾きは「$a=-2$」であるから

$$y=-2x+b$$

このグラフが点$(1,\ 2)$を通るから「$x=1,\ y=2$」を代入して

$$2=(-2)\cdot 1+b \qquad \therefore\ b=4 \qquad \therefore\ y=-2x+4$$

(ii) 「$y=ax+b$」に対して

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a \quad (\Delta x：x\text{の変化量},\ \Delta y：y\text{の変化量})$$

であった(p.239).

本問では「xが(-1)から3まで変化する」とき,「yは0から2まで変化する」のであるから

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0}{3-(-1)}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+b$$

このグラフが点$(-1,\ 0)$を通るから「$x=-1,\ y=0$」を代入して

$$0=\frac{1}{2}\cdot(-1)+b \qquad \therefore\ b=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

(2)(i) 「$|a|$」は

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0\text{のとき}) \\ -a & (a<0\text{のとき}) \end{cases} \quad (\text{ただし},\ a\text{は実数}) \longleftarrow (\text{p.30})$$

であったから

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases} \longleftarrow \text{「}x=0\text{」の前後で場合分け!!}$$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geqq 1) \\ -(x-1) & (x<1) \end{cases} \longleftarrow \text{「}x=1\text{」の前後で場合分け!!}$$

となる――「実数xの範囲」を「$x=0$」,「$x=1$」で分けて考える.

←――(「数直線上で考える」とよい)

次のように場合を分ければよい.

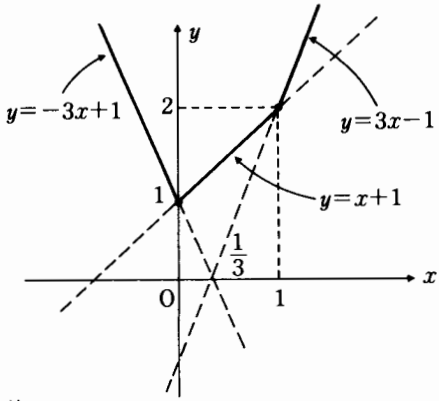
$$\begin{cases} x<0\ (\text{当然 } x<1) & \longrightarrow\ y=2(-x)-(x-1)=-3x+1 \\ 0\leqq x<1 & \longrightarrow\ y=2x-(x-1)=x+1 \\ x\geqq 1\ (\text{当然 } x\geqq 0) & \longrightarrow\ y=2x+(x-1)=3x-1 \end{cases}$$

x の「定義域」R を3つの区間に分けると，**各区間ごとに「x を y に対応させる規則」が違っている**——しかし，グラフは「ツナガッテ」いる——ことがわかる．

まとめて書くと．

$$y=\begin{cases} -3x+1 & (x<0) \\ x+1 & (0\leqq x<1) \\ 3x-1 & (x\geqq 1) \end{cases}$$

で，グラフは右図．



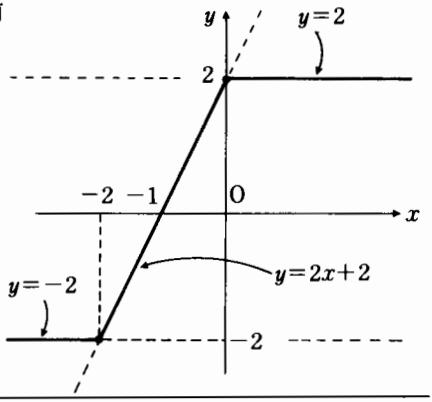
(ii)　これも(i)と同様に考える．

すなわち，「$x=-2$」，「$x=0$」の前後で場合を分ける．

$$|x+2|=\begin{cases} x+2 & (x\geqq -2) \\ -(x+2) & (x<-2) \end{cases}$$

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

$$\therefore\quad y=\begin{cases} -2 & (x<-2) \\ 2x+2 & (-2\leqq x<0) \\ 2 & (x\geqq 0) \end{cases}$$



らしんばん

(1)(i)では，「点(1, 2)を通るから……」で

点$(a,\ b)$が「関数 $y=f(x)$ のグラフ」上 $\Longleftrightarrow$ $b=f(a)$

を用いたが，このことはすでにp.234で説明した——(ii)はこのことだけを用いて解くことも出来る．求める直線の方程式を

$$y=ax+b$$

とおくと，このグラフは2点$(-1,\ 0)$，$(3,\ 2)$を通るからそれぞれ代入して

$$\left.\begin{array}{lll} (-1,\ 0) & \longrightarrow\ 0=a\cdot(-1)+b & \therefore\ a-b=0 \\ (3,\ 2) & \longrightarrow\ 2=a\cdot 3+b & \therefore\ 3a+b=2 \end{array}\right\}$$

これらを「a，b についての連立方程式」と見て解くと

$$a=b=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

となる.

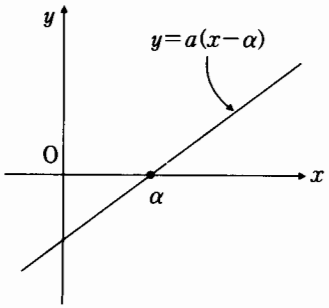
また,「$x=\alpha$ で x 軸を切る直線の方程式」は

$$y=a(x-\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$\longleftarrow$ $x=\alpha$ のとき $y=0$

と表されるから，問題文の「$(-1,\ 0)$ を通る」ことをこのように読めば求める直線はいきなり

$$y=a(x+1)$$



と書けて，あとは「$(3,\ 2)$ を通る」ことから代入して

$$2=a(3+1) \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}(x+1)$$

としてもよい——$(*)$の「α」を「x 切片」という.

(1)(i)は，このグラフ上の 2 点$(1,\ 2)$と$(x,\ y)$との間で

$$x-1=\Delta x,\ y-2=\Delta y$$

とおけば

$$\Delta y=a\cdot\Delta x$$

$\longleftarrow$ p.239の③

で,「$a=-2$(傾き)」であるから

$$y-2=(-2)(x-1) \qquad \therefore\ y=-2x+4$$

としてもよい——「公式」としてまとめておこう.

「点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾き m の直線の方程式」は

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

である.

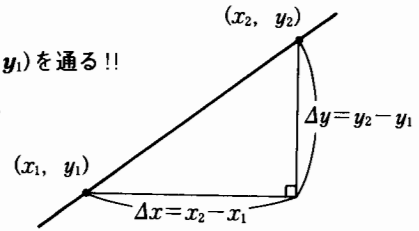
また(ii)については「$x_1 \neq x_2$」のとき,「2 点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線の傾き」は

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(=\frac{-(y_1-y_2)}{-(x_1-x_2)}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

であり，このことから「2 点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線の方程式」は

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$\longleftarrow$ $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$(x_1,\ y_1)$を通る!!



となる——これも「公式」として用いてよい．なお，$(**)$に示したように

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

としてもよいし,「通る点」を$(x_2,\ y_2)$にとってもよいが,「m」の分母と分子については

x	x_1	$\longrightarrow$	x_2
y	y_1	$\longrightarrow$	y_2

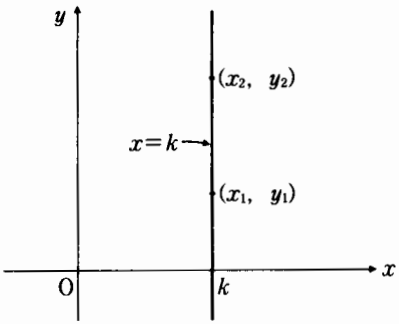
，あるいは

x	x_2	$\longrightarrow$	x_1
y	y_2	$\longrightarrow$	y_1

のように「**キチンと対応させて引き算する**」ことが大切で，これを

$$\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2} \text{ とか } \frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$$

のように計算してはいけない．



なお「$x_1=x_2$」のときは(＊＊)(傾き)の分母が「0(ゼロ)」となるので上に述べたような扱いは出来ない．

たとえば

$$x_1=x_2=k$$

のとき，「対応関係」は「$x \neq k$」では定義されず，「$x=k$」のとき「y は任意」であるから「**$x \in \boldsymbol{R}$ から $y \in \boldsymbol{R}$ への関数**」ではない——「$y=$(x の1次式)」では表せない．この場合，2点$(k,\ y_1)$，$(k,\ y_2)$(ただし，$y_1 \neq y_2$)**を通る直線の方程式**は

$$x=k \quad \longleftarrow \text{「}y=mx+n\text{(p.238の①)」の形では表せない!!}$$

である——「$x_1=x_2$，$y_1=y_2$」のとき，当然のことながら直線は決まらない．

したがって平面上のすべての直線をこの形でとらえるには

$$y=mx+n,\ x=k$$

の2通りの表し方でとらえなければならない．これを1本の式

$$ax+by+c=0$$

で表す方法については「方程式・不等式と図形(p.301以下)」で詳しく説明する．

➔ (2)では(i)，(ii)とも「3つの場合分け」を考えた．このとき「**等号(＝)**」は**どこに入れたらよいか**——「$|a|$の場合分け」にもどって説明しよう．それは

$$|a|=\begin{cases} a\ (a \geqq 0) \\ -a\ (a<0) \end{cases},\quad \begin{cases} a\ (a \geqq 0) \\ -a\ (a \leqq 0) \end{cases},\quad \begin{cases} a\ (a>0) \\ -a\ (a \leqq 0) \end{cases}$$

のどれを書いても間違いではないが，実際は「はじめの2つの表現」が多く用いられるようである．要は「**$a=0$ の場合の考察が欠落していない**」**ことの表現**であると考えればよい．

また，(i)，(ii)とも「**3つの区間**」**における「関数」は違っているが，グラフが「しっかりつながっている」**ことに注目したい——範囲を「数Ⅰ」に限定する限り，特別な場合を除いて「グラフはつながっているもの」と考えてよい．

これは「**境界での関数値が等しい**」ことを意味しており，有力な「検算の方法」でもあり得る——知っておくとよい．

(ii) 2次関数とそのグラフ

2次関数

次のように表される関数を「**2次関数**」という.

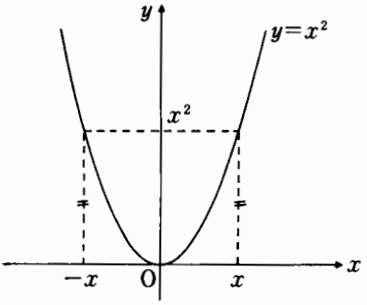
$$y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$$

解　説　次の手順で解説する.

(i) 「$y=x^2$」について——

$$y=f(x)=x^2$$

は,「最も簡単な形の2次関数」で,この「グラフ」が「**放物線**」となることは,すでに中学で学んだことがらである.



この関数の最も基本的な性質の1つは

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

ということで,これは「x と $-x$ とにおける関数値が等しい」ことを意味している——「グラフ」の上でいうと「**y 軸($x=0$)に関して対称**」ということである.これを「写像」としてみれば

$$f:\quad x \longmapsto x^2$$

すなわち,「**平方する**」という操作で,「**2次関数の本質的な性質**」はすべてこの操作に帰着させることが出来る.

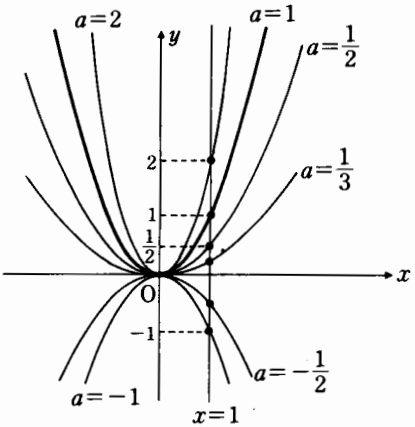
(ii) 「$y=ax^2\ (a\neq 0)$」について——

これは

$$\left(\frac{y}{a}\right)=x^2$$

の形に書きかえると「**$y=x^2$ のグラフ**」を「**y 軸方向に a 倍に伸縮したもの**」であることがわかる(p.236以下).特に「$a>0$」のときは

$$y=(\sqrt{a}x)^2 \qquad \therefore\quad y=\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2$$



と見ることによって「x 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍に伸縮したもの」と考えてもよい.

図は,いろいろな a の値についての「このグラフの形」を示したものであるが,「**$a>0$**」のときは上に開き(「下に凸(とつ)」という),「**$a<0$**」のときは下

に開いている(「上に凸」という)．また，「$|a|$が小さいほど開き具合が大きくなり，$|a|$が大きいほど開き具合が小さくなっている」こともわかる．また，たとえば「$x=1$のときのyの値を拾う」などしてみると大体のグラフの形の見当がつく．

(iii) 「$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$」について——

先に述べた(i)，(ii)とは少し様子が違っている．「この関数の表すグラフ」がどんな形をしているかを調べるには「平方完成(p.112)」という「式変形」を利用する．

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0) \quad \cdots\cdots ①$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで

$$-\frac{b}{2a}=\alpha,\quad -\frac{b^2-4ac}{4a}=\beta$$

とおくと②は

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta \iff y-\beta=a(x-\alpha)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

と書けるから．「このグラフ」は(ii)で述べた「$y=ax^2$のグラフ」を「x軸方向にα，y軸方向にβだけ平行移動したもの」であることがわかる(p.234以下)，

したがってこれは当然(ii)で述べた「$y=ax^2$のグラフ」と合同で，①の右辺の係数では「aのみ」が「グラフの形状」に関係し，他の係数「b，c」は「形状」には無関係で，「その位置のみに関係する係数」であることがわかる．

このことを「関数の合成」から説明すると

$$g:\ x\longmapsto x-\alpha,\quad h:\ x\longmapsto x^2$$

$$p:\ x\longmapsto ax,\quad q:\ x\longmapsto x+\beta$$

の合成関数「$q\circ p\circ h\circ g$」として得られることがわかる——qは

$$y=(p\circ h\circ g)(x)=a(x-\alpha)^2$$

を③の左の形，すなわち

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta$$

にうつす「操作」である．

らしんばん

このように2次関数

$$y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta\ (a\neq 0)\quad\cdots\cdots(*)$$

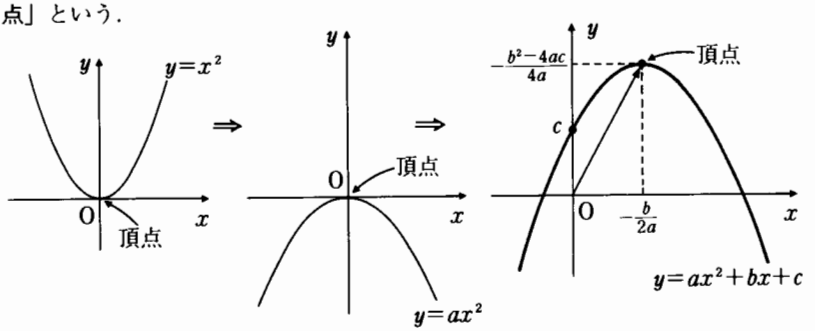
のグラフは本文(i)で説明した「$y=x^2$ のグラフ」を「y 軸方向に a 倍に伸縮」し，ベクトル$(\alpha,\ \beta)$だけ平行移動したものであるから(i)における**「グラフの y 軸($x=0$)に関する対称性」は，「y 軸($x=0$)」を x 軸方向に α だけ平行移動した直線**

$$x-\alpha=0 \iff x=\alpha=-\frac{b}{2a}\quad\cdots\cdots(**)$$

に関する「対称性」として保存される．この「直線(**)」を「放物線(*)」の**「対称軸」**という．また，このとき「$y=x^2$ のグラフ」上の原点は

$$(\alpha,\ \beta)=\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

にうつる(y 軸方向の伸縮では原点は動かない)．この点を「放物線(*)」の**「頂点」**という．



図は「$a<0$」の場合である．「$a>0$」のときについても確かめておくとよい．

2次関数の「最大・最小」について——

「平方完成」された形の2次関数

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta$$

において

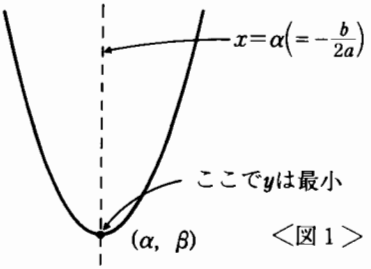
$$(x-\alpha)^2\geqq 0\ (x=\alpha\text{ のとき等号成立!!})$$

であるから

(i) **「$a>0$」のとき**——<図1>

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta\geqq\beta$$

で，**「$x=\alpha$」のとき y は最小値 β** をとる．このとき $|x|$ を限りなく大きくしていくと「y の値」も限りなく大きくなるから**「y の最大値」は存在しない．**



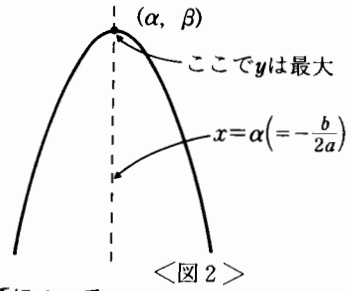
<図1>

(ii) 「$a<0$」のとき――＜図2＞

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta\leqq\beta$$

で，「$x=\alpha$」のとき y は最大値 β をとる．このとき $|x|$ を限りなく大きくしていくと「y の値」は限りなく小さくなるので「y の最小値」は存在しない．

これらのことは「グラフの概形」を考えれば「ほとんど明らか」である．



＜図2＞

「2次関数」と「2次方程式」の関係について――

2次方程式(p.110以下)

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)\quad\cdots\cdots(***)$$

の左辺を「$f(x)$」とおいて，2次関数

$$y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)\quad\cdots\cdots(****)$$

を考える．

いま(****)のグラフが x 軸と点$(\alpha,\ 0)$で「出会う」とすると

$$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c=0 \longleftarrow \text{「}x=\alpha\text{」における関数値!!}$$

すなわち，「$x=\alpha$」は「2次方程式(***)」の実数解である．

逆に，「2次方程式(***)」が「実数解 α」をもつときは

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0\qquad\therefore\ f(\alpha)=0$$

これより「2次関数(****)」上の点

$$(\alpha,\ f(\alpha))=(\alpha,\ 0)$$

は「x 軸上」にある．

このハナシは次のようにまとめられる．

「$x=\alpha$」が「2次方程式(***)」の実数解

$\Longleftrightarrow$「2次関数(****)のグラフ」は x 軸と点$(\alpha,\ 0)$で出会う

したがって「2次関数(****)」で表されるグラフが x 軸と出会うかどうかは「2次方程式(***)」が実数解をもつかどうかで判定され，それは「2次方程式(***)」の

判別式：　$D=b^2-4ac$ ←――「判別式」については p.114以下参照

の符号によって知ることが出来る．まとめておこう．

判別式の符号と2次関数，2次方程式

$D>0$	$\Longleftrightarrow$	(***)は異なる2実数解		
	$\Longleftrightarrow$	(****)のグラフは x 軸と異なる2点で出会う		
$D=0$	$\Longleftrightarrow$	実数の重解	$\Longleftrightarrow$	グラフは x 軸と1点で接する
$D<0$	$\Longleftrightarrow$	2つの虚数解	$\Longleftrightarrow$	グラフは x 軸と出会わない(共有点ナシ)

このように，「２次方程式の解の判別条件」から「グラフが x 軸と出会う回数」を知ることが出来るが，このことは「２次関数のグラフ」の概形

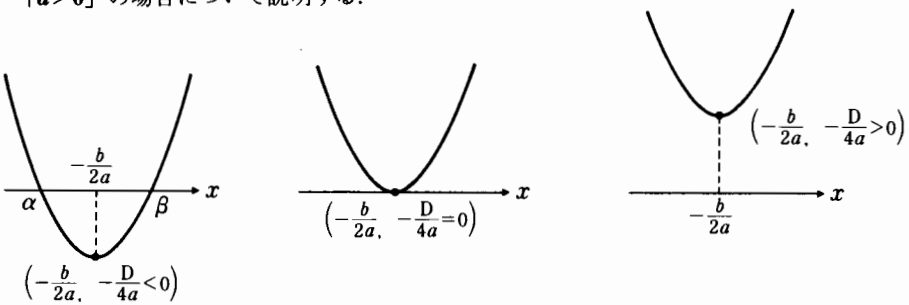
「$a>0$」ならば「下に凸」，「$a<0$」ならば「上に凸」

を考えると，「グラフ」の「頂点」

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{D}{4a}\right),\ \text{ただし，}D=b^2-4ac$$

と「x 軸」との「上下関係」からも「図形的に」了解することが出来る．

「$a>0$」の場合について説明する．



＜図１＞　　＜図２＞　　＜図３＞

〈図１〉：　$D>0 \iff$ ２点$(\alpha,\ 0)\neq(\beta,\ 0)$で交わる

〈図２〉：　$D=0 \iff$ １点$\left(-\frac{b}{2a},\ 0\right)$で接する

〈図３〉：　$D<0 \iff$ x 軸と出会わない(共有点ナシ)

となる．

また，「$a<0$」のときは

$$D\gtreqless 0 \iff -\frac{D}{4a}\gtreqless 0 \longleftarrow \left(\text{「}D>0,\ D=0,\ D<0\text{」について，図を描いてみるとよい}\right)$$

から上と同じ結果を得る．

なお，２次方程式に限らず，x の一元方程式「$f(x)=0$」の左辺に対し，「$y=f(x)$」という関数を考えると，全く同様にして

「$x=\alpha$」が方程式「$f(x)=0$」の実数解

$\iff$ 関数「$y=f(x)$のグラフ」は x 軸と点$(\alpha,\ 0)$で出会う

がそのまま成り立ち，「$\Longrightarrow$」はグラフを描くときの１つの情報として，「$\Longleftarrow$」はグラフの概形から「方程式の実数解(あるいはその範囲)」を調べるときなどに用いられる．

このように，**「方程式 $f(x)=0$」を考えることと，「関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の位置関係を調べる」こととはきわめて密接な関係にあることは知っておかなければならない．**

「２次関数」と「２次不等式」の関係について――

２次不等式

$$ax^2+bx+c>0\ (a\neq 0)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (***)'$$

に対して，2次方程式のときと同様に2次関数

$$y=f(x)=ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (****)'$$

を考えると，「2次不等式(***)′を解く」ということは「2次関数(****)′の関数値 y が正となる x の範囲を求める」ということであり，それは「**2次関数(****)′のグラフが x 軸より上側にあるような x の値全体の集合を求める**」ということに帰着される．

「$a>0$」の場合についてまとめておく――「$a<0$」の場合については各自で考えよ．

(i) 「$D>0$」のとき

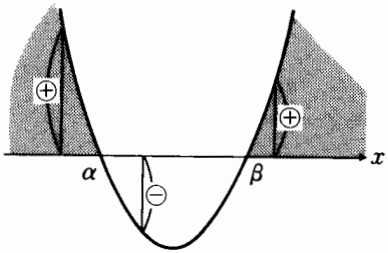
2次方程式(***)の2つの実数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，不等式(***)′の解集合は

$$\{x\in R \mid x<\alpha,\ \text{または}\ x>\beta\}$$

である――右図．この解を簡略に

$$x<\alpha,\ \text{または}\ x>\beta$$

とも書く．



「$ax^2+bx+c<0$」の解は，「$\alpha<x<\beta$」で，もとの不等式(***)′に等号がつくときは，解の不等式にも等号がつく．

(ii) 「$D=0$」のとき

グラフは x 軸に接し，接点の座標は

$$\left(-\frac{b}{2a},\ 0\right)$$

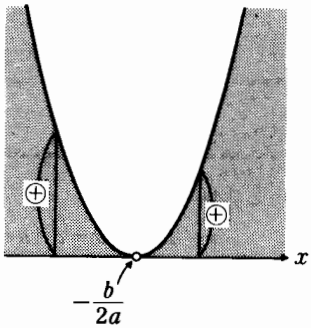
であるから，不等式(***)′の解集合は

$$\left\{x\in R \mid x\neq -\frac{b}{2a}\right\}$$

あるいは

解は「$-\dfrac{b}{2a}$ 以外の全実数」

とも書く．



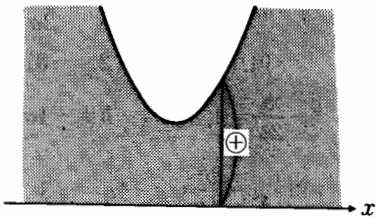
$$\left(\begin{array}{lll} \text{「}ax^2+bx+c<0\text{」の解} & \longrightarrow & \phi\ (\text{解なし}) \\ \text{「}ax^2+bx+c\geqq 0\text{」の解} & \longrightarrow & \text{全実数} \\ \text{「}ax^2+bx+c\leqq 0\text{」の解} & \longrightarrow & \text{「}x=-\dfrac{b}{2a}\text{」のみ} \end{array}\right)$$

(iii) 「$D<0$」のとき

グラフは x 軸と共有点をもたず，つねに x 軸の上側にあるから，不等式(***)′の解は

$$\{x \mid x\in R\}\ (\text{全実数})$$

である．



（「$ax^2+bx+c\geqq 0$」でも同様
「$ax^2+bx+c\leqq 0$」の解 ⟶ ϕ（解なし））

——このように**「関数のグラフ」を描くと「不等式の解の範囲」は一目瞭然である**．大いに利用することにしたい．

なお，「2次不等式(p.158以下)」では「波形（なみがた）」を用いて「解の求め方」を説明したが，それは**「グラフとx軸との位置関係」を簡略に示したものに他ならない**．

それは「3次以上の不等式」についても同様である．

たとえばp.162の例で言うと，不等式

$$(x+2)(x-1)(x-3)\geqq 0$$

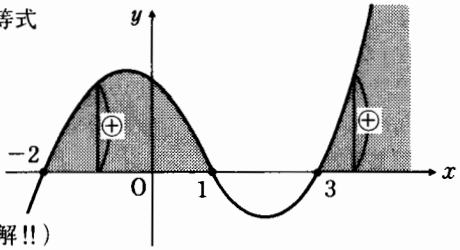
を解くには3次関数

$$y=(x+2)(x-1)(x-3)$$

を考えるのだが

$$x=-2,\ 1,\ 3$$

←——（3次方程式の解!!）



で「関数値yの値」は「0」となり，

この点で「グラフがx軸を切る」ことがわかる．すなわちこの不等式の解は

$$-2\leqq x\leqq 1,\ \text{または}\ x\geqq 3$$

である．p.163に示した「波形（なみがた）」と比較して確認しておいてもらいたい．

「3次以上の関数」の「グラフ全体の概形」は「基礎解析」で学ぶことになる

——『諸橋の基礎解析講義(p.205以下)』を参照!!

例題 3

2次関数

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$$

のグラフの頂点の座標は(2, −3)であるという．

(1) b, c を a で表せ．

(2) x の定義域を $-1\leqq x\leqq 3$ とするとき，y の最大値，最小値を a で表せ．

解　説　(1) 与えられた2次関数のグラフの頂点を求める．

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

頂点の座標は(2, −3)であるから

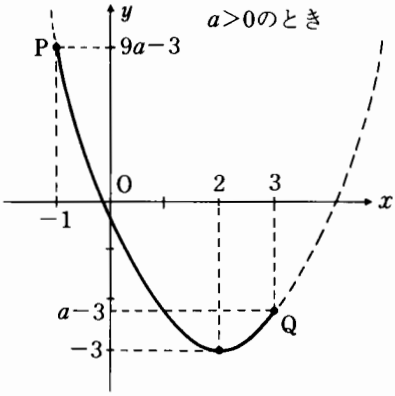
$$-\frac{b}{2a}=2,\qquad \therefore\ \boldsymbol{b=-4a}$$

$$\therefore\ c-\frac{b^2}{4a}=c-4a=-3\qquad \therefore\ \boldsymbol{c=4a-3}$$

(2)　(1)で求めた b, c に対して2次関数は

$$y=a(x-2)^2-3\ (=f(x)\ とおく)$$

である.



(i)　**「$a>0$」のとき**

グラフは「下に凸」で右図のようになる. **定義域が「$-1\leqq x\leqq 3$」**であるから**「放物線の太線の部分」**で考えればよい―― x の値が「-1から2まで」増加するとき, それにともなって y の値は「$f(-1)=9a-3$」から減少しはじめ, **「$x=-2$ (頂点)」**で**「最小値 $f(2)=-3$」**をとる.

さらに x の値を「2から3まで」増加させると, y の値は「$f(2)=-3$ から $f(3)=a-3$ まで」増加する. したがってこの範囲で x を変化させるときの y の最大値は

最大値：$9a-3$ ($>a-3$ ←―― $a>0$)

($x=-1$のとき)

である.

(グラフは「$x=2$」に関して対称で, 「$x=3$」の方が「$x=-1$」より対称軸に近い. このことから「$f(-1)>f(3)$」としてもよい.)

(ii)　**「$a<0$」のとき**

このときは

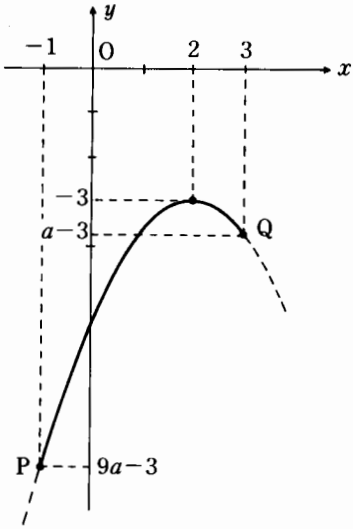
$$-1\leqq x\leqq 2,\ 2\leqq x\leqq 3$$

での増減がそれぞれ「$a>0$」のときの反対になり, したがって

最大値：　-3 ($x=2$ のとき)

最小値：　$9a-3$ ($x=-1$ のとき)

となる.



ちなみに, 「最大値」, 「最小値」を求める問題では, それぞれの値を示すとともに, そのときの「x の値」も示しておく方がよい――**「たしかにそのときがある」ことの確認(？)**の意味である.

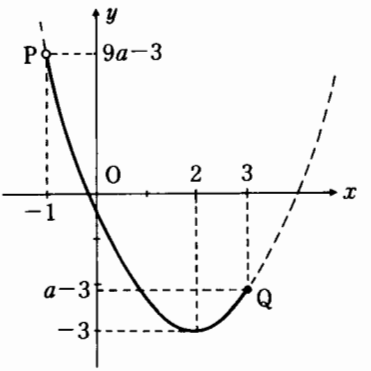
らしんばん

「定義域」を「$-1<x\leqq 3$」とするとどうなるか――「$a>0$」のときについて説明しよう．

この場合「**$x=-1$**」は除かれているから，それに対応する **y の値($9a-3$)** は除外して考えなければならない．つまり，x の値を大きい方から(グラフでは右側から)「**限りなく -1 に近づける**」と y の値は「**限りなく $9a-3$ に近づく**」が，「**$9a-3$ そのもの**」になることはない．また，「$a>0$」であるから

$$9a-3>a-3$$

で，x の値を「-1」に近づけていけば，y の値は「$a-3$」より必ず大きくなる――「限りなく $9a-3$ に近づく」のである．



したがってこの場合，「**最大値**」は存在しない――「$a<0$」のときは「最小値」が存在しない．このように「**定義域の端の値**」を問題にするときは特に注意しなければならない．

例題 4

(1) $x^2+y^2=4$ のとき，x^2-y^2+4x の最大値，最小値を求めよ．

(2) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=2$ のとき，x^2+y^2-xy の最大値，最小値を求めよ．

(3) $x>0$，$y>0$，$xy=8$ のとき，$2x+y$ の最小値を求めよ．

解　説 (1) $x^2+y^2=4$

$\therefore\ y^2=4-x^2\geqq 0$ ……①

$\therefore\ x^2-4=(x+2)(x-2)\leqq 0$

$\therefore\ -2\leqq x\leqq 2$

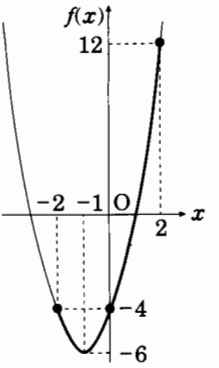
このとき

$x^2-y^2+4x=x^2-(4-x^2)+4x$

$=2x^2+4x-4=2(x+1)^2-6$

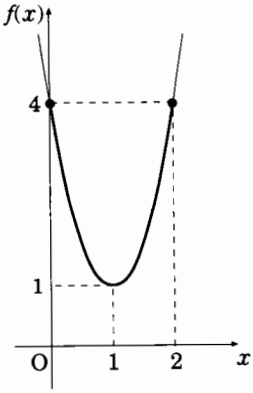
($=f(x)$ とおく)

右のグラフより $x=-1$ のとき最小値，$x=2$ のとき最大値をとることがわかる．



最大値：　$f(2)=2\cdot 3^2-6=\mathbf{12}$ $(x=2,\ y=0)$

最小値：　$f(-1)=\mathbf{-6}$ $(x=-1,\ y=\pm\sqrt{3})$



(2)　$y=2-x\geqq 0$　　$\therefore$　$0\leqq x\leqq 2$

$\therefore$　$x^2+y^2-xy=x^2+(2-x)^2-x(2-x)$

$=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$

これより

最大値：　$f(0)=f(2)=4$

($x=0$ のとき $y=2$，$x=2$ のとき $y=0$)

最小値：　$f(1)=1$　**($x=y=1$)**

(3)　与えられた条件「$xy=8$」をうまく利用する．

$(2x+y)^2=(2x)^2+4xy+y^2$　(←――「$2x+y>0$」だから2乗して考える)

$=(2x-y)^2+8xy=(2x-y)^2+64$　(←――$xy=8$)

$(2x-y)^2\geqq 0$ であるからこの式が最小となるのは

$2x-y=0,\ xy=8$　――→　$x=2,\ y=4$

これより

最小値：　$\sqrt{64}=8$　**(このとき $x=2$，$y=4$)**

らしんばん

(1)について　――→　問題文に与えられた「**条件：$x^2+y^2=4$**」は意外に大切な意味をもっている．それは

$$x^2+y^2=4\qquad\therefore\quad y^2=4-x^2\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(*)$$

であるが，これをそのまま与えられた x と y の式に代入しただけではハナシはすまない．実はこの **y は実数であって，必ず「$y^2\geqq 0$」**であるからである．したがって「本文①（あるいは$(*)$）」で「条件：$y^2\geqq 0$」を用いて

$$4-x^2\geqq 0\qquad\therefore\quad x^2-4\leqq 0$$

として「x の範囲を制限した」理由は

y が実数として存在する(生き返る)ための実数 x についての条件

であり，ウッカリこれを忘れてそのまま計算したのでは「実数 y が存在しないときの関数値」を考えることになってしまい「意味がない」からである．

(2)についても同様で，条件は

$$x+y=2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

であるが，これを与えられた関数に

$$y=2-x$$

として代入するとき，この y が「$y\geqq 0$」として存在するための条件が

$$2-x\geqq 0\qquad\therefore\quad x\leqq 2$$

であり，もともとの x の条件「$x\geqq 0$」とあわせて x の条件を「$0\leqq x\leqq 2$」とし

て考えるわけである．

➡ (3)の変形はなかなか難しい．むしろ「**相加・相乗平均の定理**(p.174)」を用いて

$$\frac{2x+y}{2} \geqq \sqrt{(2x)\cdot y}\ (x>0,\ y>0) \longleftarrow \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}\ (a \geqq 0,\ b \geqq 0)$$

$$=\sqrt{2\cdot xy}=4 \longleftarrow xy=8$$

$$\therefore\ 2x+y \geqq 2\cdot 4=8\ (\text{最小値})$$

等号の成立は

$$2x=y,\ xy=8 \longrightarrow x=2,\ y=4$$

とやる方がスッキリといく．

また，「**条件：$xy=8$，$x>0$，$y>0$**」を満たす x，y に対して

$$2x+y=k \quad \therefore\ y=k-2x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

とおくと

$$xy=x(k-2x)=8 \quad \therefore\ 2x^2-kx+8=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

で，x が実数（「2次方程式」(***)が実数解をもつ）である条件から

$$D=k^2-4\cdot 2\cdot 8 \geqq 0 \quad \therefore\ k^2 \geqq 64 \quad \therefore\ k \geqq 8\ (\text{ただし，}k>0)$$

から，「**8が最小値らしい**」ことはともかくわかる．このときは

$$(***):\ 2x^2-8x+8=0 \quad \therefore\ x^2-4x+4=0$$

$$\therefore\ (x-2)^2=0 \quad \therefore\ x=2 \quad \therefore\ y=8-2x=4 \quad (\longleftarrow (**))$$

を計算してはじめて，「$x=2$，$y=4$ のときに最小値：8」が確認されるわけである．

(iii) 1次分数関数とそのグラフ

1次分数関数

次のように表される関数を「1次分数関数」という．

$$y=f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}\ (a \neq 0,\ ad-bc \neq 0)$$

解　説　この関数の分子を分母で割って変形してみよう．

$$y=\frac{cx+d}{ax+b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$=\frac{c}{a}+\frac{\frac{ad-bc}{a}}{ax+b}$$

$$=\frac{c}{a}+\frac{ad-bc}{a^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{b}{a}}$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{c}{a} \\ \hline ax+b & cx+d \\ & cx+\frac{bc}{a} \\ \hline & d-\frac{bc}{a}=\frac{ad-bc}{a} \end{array}$$

ここで

$$-\frac{b}{a}=\alpha,\ \frac{c}{a}=\beta,\ \frac{ad-bc}{a^2}=k\ (\neq 0)$$

とおくと①は

$$y=\beta+\frac{k}{x-\alpha} \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{y-\beta=\frac{k}{x-\alpha}}\ (k\neq 0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

の形で表される．この関数のグラフの概形を描くには，最も簡単な形をした「1次分数関数」である

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{x}} \longleftarrow \text{「反比例」の関数!!} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

のグラフを出発点として，これに

(i)　**y 軸方向への伸縮**(p.236以下) —— $y=\frac{k}{x}\left(\frac{y}{k}=\frac{1}{x}\right)$ と変形!!

(ii)　**$(\alpha,\ \beta)$の平行移動**(p.234以下)

を加えることにより得ることが出来る．

まず，③のグラフは〈図1〉に示すような「双曲線」である．すなわち，x の絶対値が大きくなるにつれて曲線は x 軸に接近し，x が「0」に近づくにつれて曲線は y 軸に接近しながらその絶対値が大きくなっていく．このとき「x 軸($y=0$)」，「y 軸($x=0$)」をこの曲線の**「漸近線(ぜんきんせん)」**という．したがって一般の「1次分数式」が与えられるときは，これを②の形まで変形してみるとこのグラフの大体の形を知ることが出来る．このとき

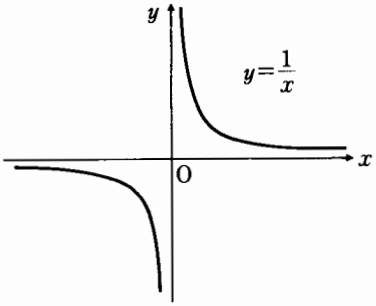
$$x=\alpha,\ y=\beta$$

が「漸近線」である．〈図2〉にそのグラフの概形を示しておく．ただし

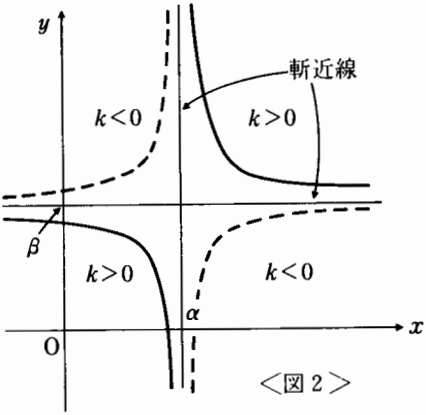
「$k>0$」のとき——実線

「$k<0$」のとき——破線

である．



〈図1〉



〈図2〉

らしんばん

本文で示した「条件：$a\neq 0$，$ad-bc\neq 0$」について説明しておこう．

$$y=\frac{cx+d}{ax+b}=\beta+\frac{k}{x-\alpha}$$

で，「$a=0$」とすると

$$y=\frac{c}{b}x+\frac{d}{b} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{「}b\neq 0\text{」ならば「1次関数」か「定数関数}\\(c=0)\text{」で，「}b=0\text{」のときは定義できない．}\end{array}\right)$$

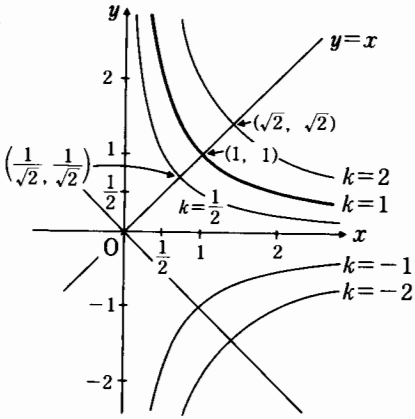
また，「$a\neq 0$」としても「$ad-bc=0$」のときは

$$k=\frac{ad-bc}{a^2}=0 \longrightarrow y=\beta=\frac{c}{a}\ (\text{定数関数})$$

である．このような場合を除くために，「1次分数関数」というときは

$$\boldsymbol{a\neq 0,\ ad-bc\neq 0}$$

という条件を最初に示しておくわけである．



本文(i)で示した「**y 軸方向への伸縮**」について——

$$y=\frac{k}{x}\quad (k：\text{定数})$$

の k の値に具体的な数値を入れてみよう．たとえば

$$k=-2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$$

に対してグラフは右図のようになる．（ただし，図は「$x>0$」のときのみ示した．）

例題 5

1次分数関数

$$y=\frac{2x-5}{x-3}(=f(x)\ \text{とおく})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

について次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の値域を $\{y\mid y\leqq 0,\ y\geqq 4\}$ とするとき，その定義域を求めよ．

(2) (1)で $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とするとき $y=f^{-1}(x)$ のグラフを描け．

解　説　(1)「$y\leqq 0$，または $y\geqq 4$ を満たす x の範囲」を求めればよい．

$$y\leqq 0 \longrightarrow \frac{2x-5}{x-3}\leqq 0 \longleftarrow \text{分数不等式(p.166以下)}\ \cdots\cdots②$$

$$\therefore\quad (2x-5)(x-3)\leqq 0,\ x\neq 3 \qquad \therefore\quad \frac{5}{2}\leqq x<3$$

$$y\geqq 4 \longrightarrow \frac{2x-5}{x-3}\geqq 4 \longleftarrow \text{分数不等式}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$$\therefore\quad \frac{2x-5}{x-3}-4=\frac{2x-5-4(x-3)}{x-3}=\frac{-(2x-7)}{x-3}\geqq 0$$

$$\therefore\quad (x-3)(2x-7)\leqq 0,\ x\neq 3 \qquad \therefore\quad 3<x\leqq\frac{7}{2}$$

ゆえに求める x の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{5}{2}\leqq x<3,\ 3<x\leqq\frac{7}{2}}$$

(2) **「逆関数の求め方」**は p.227 で詳しく説明した．

まず，①を**「x について解く」**と

$$y(x-3)=2x-5 \qquad \therefore\quad x(y-2)=3y-5 \qquad \therefore\quad x=\frac{3y-5}{y-2}$$

次に**「x と y とを入れかえる」**と

$$y=\frac{3x-5}{x-2} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{f^{-1}(x)=\frac{3x-5}{x-2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

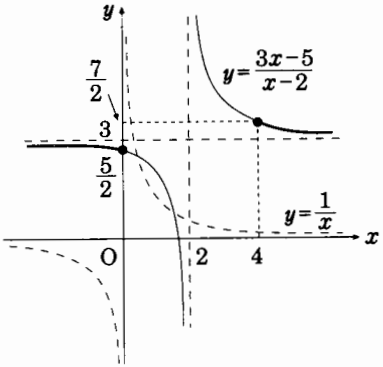
このグラフを描くにはまず**「漸近線」**を調べる．そのために④の分子を分母で割りおとす．すなわち

$$y=\frac{3x-6+1}{x-2}=3+\frac{1}{x-2} \quad \cdots④'$$

この変形により**「①の逆関数④のグラフ」**は

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{x}} \longleftarrow \text{p.257}$$

のグラフを**「x 方向へ 2，y 方向へ 3 だけ平行移動したもの」**であり，**「漸近線の方程式」**は「$x=2$」，「$y=3$」である．これより求めるグラフは〈図1〉の実線の太い部分である．



＜図1＞

らしんばん

(1)は「分数関数①」で，「与えられた y の値の範囲に対する x の値の範囲」を求めているのであるが，結局は**「分数不等式②，③をキチンと解けるかどうか」の問題**である――**「ウッカリ分母を払う間違いの例」が非常に多いので特に注意してもらいたい．**「分数不等式」については p.166以下 を参照されたい．

「関数：$y=f(x)$」の「逆関数：$f^{-1}(x)$」を求める手続きは

(i)　**$y=f(x)$ を x について解く!!**

(ii)　**x と y とを入れかえる**

であった（p.227以下）――(ii)**に注目してもらいたい．**

「x と y とを入れかえる」ということは「x-y 平面」上のグラフで言うと「x 軸と y 軸をとりかえる（グラフはそのまま）」ということであり，x 軸と y 軸をそのままにとれば「もとの曲線を $y=x$ に関して対称に移動する」ということである．したがって

もとの関数の定義域 ⟷ 逆関数の値域

もとの関数の値域 ⟷ 逆関数の定義域

の関係は，グラフを描くことによってよりビジュアルに確認することが出来る．

参考までに問題文①として与えられた関数のグラフを描いてみよう．

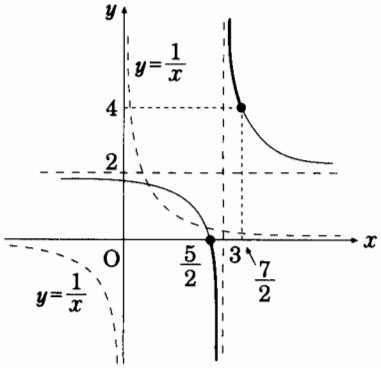
$$y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2x-6+1}{x-3}$$

$$=2+\frac{1}{x-3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

であるから「漸近線」は

$$x=3,\ y=2$$

で右の〈図2〉が得られる．



＜図2＞

もちろん〈図1〉と〈図2〉は「**直線：$y=x$**」に関して対称であり，「**定義域と値域の関係（図の太線部分）**」もキチンと対応していることがわかる――方眼紙にていねいに描いて確認しておくとよい．

なお，本文④′と（$*$）に示した計算は慣れるまではマジメに「割り算」をして

$$\begin{array}{r} 3 \\ x-2\overline{)\ 3x-5} \\ \underline{3x-6} \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ x-3\overline{)\ 2x-5} \\ \underline{2x-6} \\ 1 \end{array}$$

としてもよい．

(iv) $\sqrt{(x\text{の1次式})}$ の形の無理関数

定義域が

$$R_+=\{x\in R \mid x\geqq 0\}$$

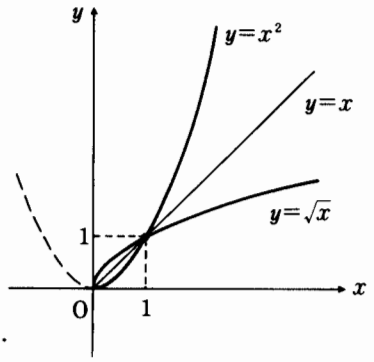
である2次関数

$$y=f(x)=x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

の値域は，やはり R_+ である．すなわち関数

$$f:\quad R_+ \longrightarrow R_+$$

は「上への1対1写像(p.216)」であるから「逆関数」をもつ．それを求めてみよう．



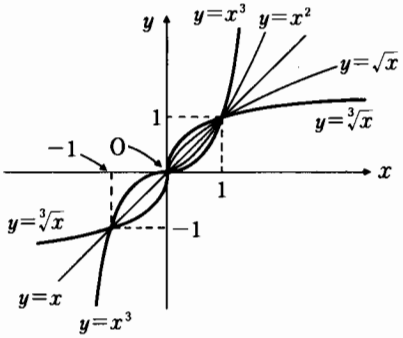
①を「$x(\geqq 0)$」について解くと

$$x=\sqrt{y}\,(\geqq 0)$$

次に x と y とを入れかえて

$$y=\sqrt{x} \qquad \therefore \quad y=f^{-1}(x)=\sqrt{x} \quad \cdots\cdots ②$$

すなわち，**最も簡単な形の無理関数②は，2次関数①の逆関数として導かれる．したがってこの関数のグラフは①のグラフと「$y=x$ に関して対称」である**——逆関数の求め方，そのグラフについては p.227以下，257以下参照!!



注　ついでに説明しておくと

$$y=\sqrt[3]{x}$$

（定義域，値域はともに実数全体）

は，3次関数

$$y=x^3$$

の逆関数として導かれる．上に述べた①，②のグラフとの「上・下関係」を確認しておくとよい．

例題 6

関数

$$y=2\sqrt{1-x}+1\,(=f(x)) \quad \cdots\cdots ①$$

について

(1)　定義域と値域を示せ．

(2)　グラフを描け．

解　説　(1)　y が実数でなければならないから

$$1-x\geqq 0 \qquad \therefore \quad x\leqq 1$$

すなわち定義域は

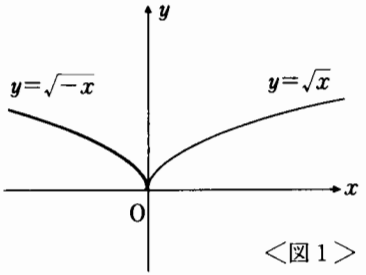
$$\boldsymbol{X=\{x\in R \mid x\leqq 1\}}$$

このとき

$$y-1=2\sqrt{1-x}\geqq 0 \qquad \therefore \quad y\geqq 1$$

であるから値域は

$$\boldsymbol{Y=\{y\in R \mid y\geqq 1\}}$$



＜図1＞

(2)　与えられた無理関数①のグラフを描くには，これをまず

$$\boldsymbol{y-1=2\sqrt{-(x-1)}} \quad \cdots\cdots ②$$

と変形し，無理関数

$y=\sqrt{x}$ ……③

のグラフを基準として次の手順で考えるとよい.

(i) ③を y 軸に関して対称移動する——

「対称移動」については p.234以下を参照!!

関数は

$y=\sqrt{-x}$ ……④

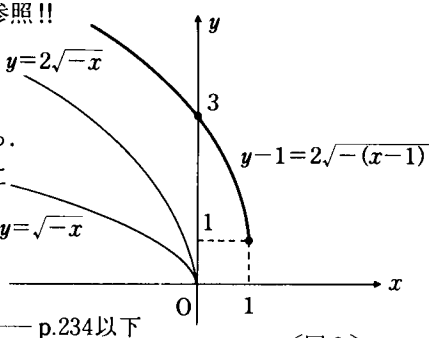
となり，そのグラフは〈図1〉である.

(ii) ④のグラフを y 軸方向に2倍に伸縮する—— p.236以下

$\frac{y}{2}=\sqrt{-x}$ $\therefore$ $y=2\sqrt{-x}$

(iii) さらに(1, 1)の平行移動をする—— p.234以下

以上から②のグラフが得られる.



<図2>

(1)で求めた定義域，値域を〈図2〉で確認しておくとよい.

らしんばん

「定義域」のとり方について——

たとえば，関数

$y=2\sqrt{1-x}+1$

というとき，その「定義域，終域(p.216)」はともに「実数の範囲」で考え，しかも「定義域」については「出来るだけ広い範囲でとる」のが一般的である.

そこで本問でも，「y が実数」という制限のもとに「定義域(x の範囲)」を出来るだけ広くとって「$x\leqq 1$」としたわけである.

この関数を少し違った角度から眺めてみよう.

(1)で求めた「定義域：$x\leqq 1$」と「値域：$y\geqq 1$」に対して

$y-1=2\sqrt{1-x}$

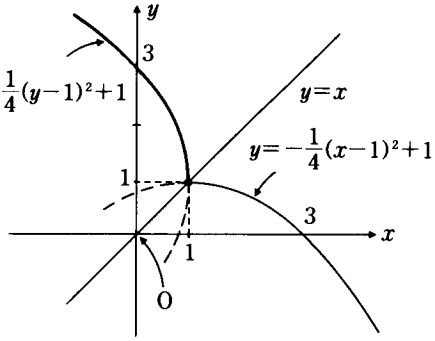
の「両辺は負でない」から2乗しても同値関係はくずれない(p.144).

したがって両辺を2乗すると

$(y-1)^2=4(1-x)$

$\therefore$ $1-x=\frac{1}{4}(y-1)^2$

$\therefore$ $x=-\frac{1}{4}(y-1)^2+1$ ……(＊)



となり，この放物線のグラフを「$y\geqq 1$」で描けば，それが求める関数のグラフとなる. なお(＊)で x と y とを入れかえると本問の関数の「逆関数」が得られ

る．

すなわち

$$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1\,(=f^{-1}(x)) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

であり，(＊)と(＊＊)のグラフは「$y=x$」のグラフに関して対称である．

(V)　関数の「媒介変数(パラメーター)表示」

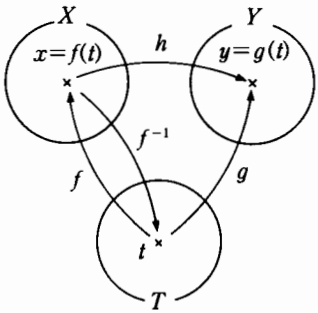
x，y がともに t の関数で

$$x=f(t),\ y=g(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であるとする．このとき，x，y，t がそれぞれ実数 R の(部分)集合 X，Y，T(区別するため，同じ R だが記号を変えた)の元であるとすると

$$f:\ T \longrightarrow X\ ,\quad g:\ T \longrightarrow Y$$

である．特に f が，その逆関数 f^{-1} をもつときは



$$X \xrightarrow{f^{-1}} T \xrightarrow{g} Y$$

となるから

$$h=g\circ f^{-1}$$

とおけば，①によって「X から Y への関数 h」が定まることになる．

このとき「$t\in T$」を「媒介変数(パラメーター)」という――「変数 t」が「X から Y への関数(写像) h」を媒介している．

このように，「関数 h」を「f，g」で表す表し方を「媒介変数表示」といい，場合によっては都合のよい表し方となるのでぜひ理解しておきたい．

具体的な例で説明する．たとえば

$$\begin{cases} x=f(t)=t+1 \\ y=g(t)=2t+1 \end{cases}$$

を考えてみよう――変数 x と y を媒介する変数 t を消去して，「x と y の直接の対応関係($h=g\circ f^{-1}$)」を求めてみると，第1式から

$$t=x-1\ (t=f^{-1}(x)) \qquad \therefore\ \ y=2(x-1)+1=2x-1\ (y=g\circ f^{-1}(x))$$

となる．

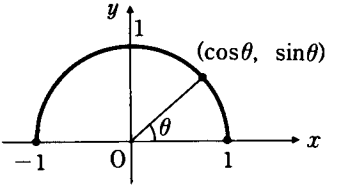
もう一つ例をあげておく．

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 180^\circ)$$

この例では「θ」が「媒介変数」である．「$0 \leqq \theta \leqq 180°$」では「$\sin\theta \geqq 0$」であるから

$$y=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$$

となり，これは図のような「半円」である．



この例では

$$x=f(\theta)=\cos\theta$$

の逆関数を求めていないが，キチンとやれば

$$T=\{\theta \mid 0 \leqq \theta \leqq 180°\} \xrightarrow{f} X=\{x \in R \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$$

は「関数(写像)」として「1対1対応」であり「$\theta=f^{-1}(x)$」と「逆関数」が定まる．しかしこのとき，これを「$y=\sin\theta$」に代入しても「$y=\sin(f^{-1}(x))$」となって何だかよくわからないが

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

とうまく変形しておくと，「f^{-1}」は「$x=\cos\theta$ の逆関数」だったから

$$y=\sqrt{1-\{\cos(f^{-1}(x))\}^2}=\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

となり

$$X=\{x \in R \mid -1 \leqq x \leqq 1\} \xrightarrow{h} Y=\{y \in R \mid 0 \leqq y \leqq 1\}$$

として「関数(写像) h」は決まる．

この考え方を逆にして，「無理関数」

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

を考えるかわりに

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 180°)$$

とおくことによって「無理関数の問題」を「三角関数の問題」として扱うことも出来る．

注 「三角関数」についてのくわしい解説は本書の「三角比(p.401以下)」を経て『諸橋の基礎解析講義(p.51以下)』を参照されたい．

なお，この形の「パラメーターに」関する具体的な問題としては第4章**発展問題4**(p.377以下)などに詳しくとりあげた．

第3節
問題解法の研究

発展問題 1―2次関数の最大・最小(範囲つき)

放物線

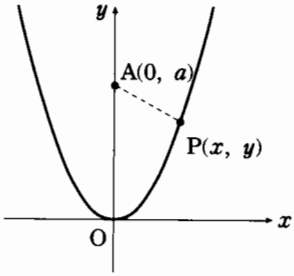
$$y=x^2$$

上の点で，y 軸上の点 A$(0,\ a)$から最短距離にあるものを求め，その最小値を示せ．

解　説　放物線上の点を P$(x,\ y)$とし，AP$=d$ とすれば

$$d^2=(x-0)^2+(y-a)^2 \longleftarrow \text{2点間の距離の公式}$$

$$=x^2+(y-a)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



P$(x,\ y)$はこの放物線上の点であるから

$$x^2=y\geqq 0$$

これを①に入れると

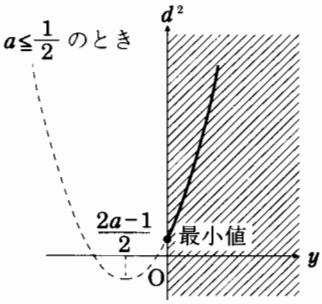
$$d^2=y+(y-a)^2$$

$$=y^2-(2a-1)y+a^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$=\left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2-\left(\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2$$

$$=\left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2+\frac{4a-1}{4}$$

そこで「$y\geqq 0$」の条件のもとで d^2 が最小となるときを調べる．



(i)　$\dfrac{2a-1}{2}\leqq 0$　のとき　$a\leqq\dfrac{1}{2}$

d^2は「$y=0$」で最小となる．

このとき「$x=0$」で

最小値：$d^2=a^2$

$\therefore\quad d=\sqrt{a^2}=|a|$，P$(0,\ 0)$

(ii) $\dfrac{2a-1}{2}>0$ のとき $a>\dfrac{1}{2}$

d^2は「$y=\dfrac{2a-1}{2}$」で最小となる.

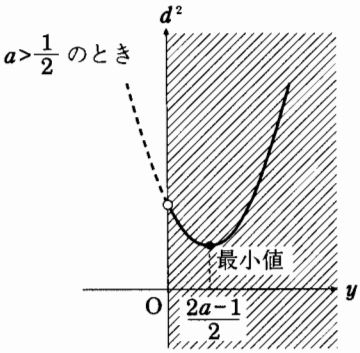
このとき

$$x^2=y=\frac{2a-1}{2} \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$$

すなわち

最小値：$d^2=\dfrac{4a-1}{4}$

$$\therefore \quad d=\sqrt{\frac{4a-1}{4}}=\frac{\sqrt{4a-1}}{2}$$



以上から

$a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，P(0, 0) で d の最小値は $|a|$

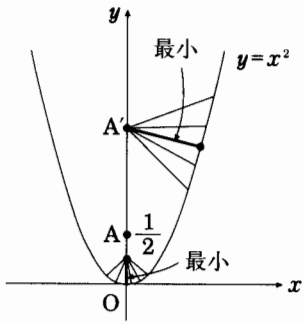
$a>\dfrac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{P}\left(\pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}},\ \dfrac{2a-1}{2}\right)$ で d の最小値は $\sqrt{\dfrac{4a-1}{2}}$

らしんばん

要は「**d が最小となる点 P の位置**」を**放物線上にさがせ**という問題で，問いかけの内容は簡明だが「目見当」だけではスッキリとしない——本文を読んで「**目で見えないものが数学の力で見えた**」という「**手応え**」があれば十分である.

なお，本文②で

$$d^2=y^2-(2a-1)y+a^2$$
$$=x^4-(2a-1)x^2+a^2$$
$$(\longleftarrow\ y=x^2)$$



（a と $\frac{1}{2}$ の大小でハナシが違う）

とおいて

4 次関数 ⟶ 微分 ⟶ 増減表（基礎解析）

とやれなくもないが，ここでは「2 次関数」として扱うことにしたい.

右図のように，「**A を中心とする半径 d の円**」と**放物線が点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ で接する状況を考えると**，このときの AP $(=d_0)$が求める最小値である.

このとき **AP と接線 l とが垂直**であることに注目しよう．l の傾き m は

$$y=x^2 \qquad \therefore \quad y'=2x \qquad \therefore \quad m=2x_0$$

次に AP の傾き m' は，とりあえず「$x_0\neq0$」として

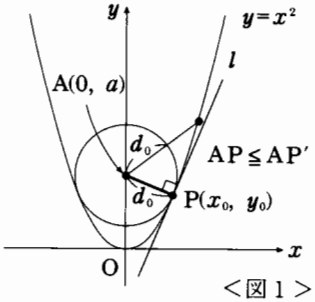
$$m'=\frac{y_0-a}{x_0}=\frac{x_0{}^2-a}{x_0} \longleftarrow (y_0=x_0{}^2)$$

垂直条件は「$\boldsymbol{mm'=-1}$(p.309以下)」だから

$$(2x_0)\cdot\left(\frac{x_0{}^2-a}{x_0}\right)=-1$$

$$\therefore\quad x_0{}^2=\frac{2a-1}{2}\qquad \therefore\quad x_0=\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$$

となり，ともかく本文に述べた結果と一致する．しかし，これは上の図のような場合のハナシであって，この状況を保ちながら点A(0, a)を下げていくと点Pはこの放物線上を原点Oに向って移動し，ついにはOに一致する――〈図2〉



＜図1＞

このとき，「$x_0=0$」でもAPとlとの垂直条件は成り立って

$$x_0=0 \longrightarrow \frac{2a-1}{2}=0$$

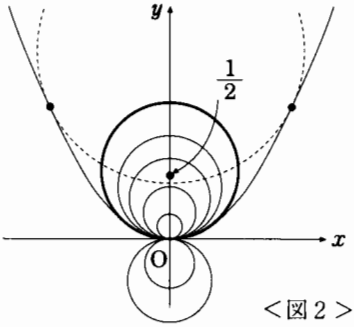
$$\therefore\quad a=\frac{1}{2}$$

で，これがOAが最小となる「はじまり」で，以下AがOより下に移動してもこの状態が続く――〈図2〉

すなわち

$$x_0=0,\ y_0=0\qquad \therefore\quad P(0,\ 0)$$

で，最小値は当然$|a|$である．



＜図2＞

説明はざっと以上のようになるが，この「切り口」から説得力のあるトウアンとしてまとめるのはなかなかメンドウである．

発展問題2―2次方程式の解の大小

係数a，bが整数である2次関数

$$f(x)=x^2+ax+b$$

において，$f(x)=0$の解をα，βとし，$\alpha>1$，$-1<\beta<1$であるとする．次の各問いに答えよ．

(1)　a，bの満たすべき条件を不等式で示せ．

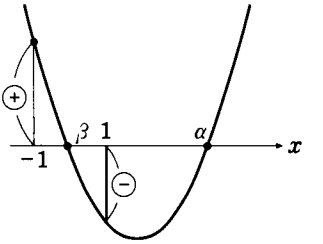
(2)　aを一定とし，a，bが(1)で求めた関係を満たすようにbが変化するとき，αを最小とするbの値をaを用いて表せ．

(3)　a，bが(1)で求めた関係を満たすとき，αを最小にするa，bの値を求めよ．また，αの最小値はいくらか．

解　説　(1)　$y=x^2+ax+b\quad(=f(x))$　……①

のグラフを描くと，実数解α，βはこのグラフとx軸との交点のx座標であるから，α，β，-1，1の大小関係は図のようになる．すなわち，求める条件は

$$f(-1)=1-a+b>0$$
$$f(1)=1+a+b<0$$



a，bが整数であることを考えてまとめると

$$-a+b\geqq 0 \quad \therefore \quad b\geqq a$$
$$2+a+b\leqq 0 \quad \therefore \quad b\leqq -a-2$$

から

$$a\leqq b\leqq -a-2 \quad \cdots\cdots ①$$

(2) (1)の条件のもとに2次方程式$f(x)=0$を解いてαを求めると

$$x^2+ax+b=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \longleftarrow \text{解の公式（p.112）}$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad (\longleftarrow \quad \beta<1<\alpha) \quad \cdots\cdots ②$$

ここでaが一定であることに注意すると，**αが最小となるのは②の$\sqrt{a^2-4b}$が最小となるとき，すなわち「bが最大となるとき」**である．
ゆえに求めるbの値は①から

$$\boldsymbol{b=-a-2} \quad \cdots\cdots ③$$

(3) ③のbを代入するとαは

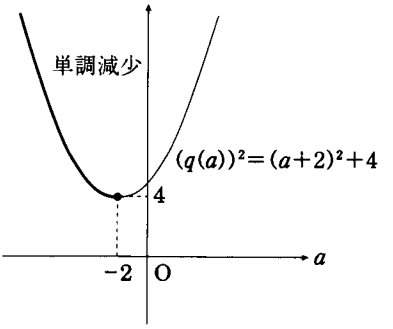
$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-4(-a-2)}}{2}=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a+8}}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

ここでaを変化させるわけだが(1)の不等式①から

$$a\leqq -a-2$$
$$\therefore \quad 2a\leqq -2 \qquad \therefore \quad a\leqq -1$$

で，④の分子に注目して

$$p(a)=-a$$
$$q(a)=\sqrt{a^2+4a+8}=\sqrt{(a+2)^2+4}$$



とおくときの**$p(a)$，$q(a)$はいずれも$a\leqq -2$で単調減少**（aの増加にともなって減少）であり，しかもaは整数であるからαの最小は「$a=-2$，-1」のいずれかのときに起こる．

$$a=-2 \longrightarrow \alpha=\frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2+4\cdot(-2)+8}}{2}=2$$

$$a=-1 \longrightarrow \alpha=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2+4\cdot(-1)+8}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ゆえに求める最小値は

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\longleftarrow \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}<2\right)$$

らしんばん

「2次方程式の解の正負」については「判別式」,「2次方程式の解と係数の関係」を用いてすでに述べた（p.121）が,「2次関数のグラフと x 軸との交わり」を調べると「正負」によらず,他の数値との大小関係もかなりスッキリと説明される――実際,「2次方程式」に限らず,他の方程式,不等式などの扱いも「グラフ」を用いるとなかなか具合がよい．2次関数のいろいろな性質とあわせてキッチリと理解しておくとよい．

右の図は2次関数

$$y=ax^2+bx+c \quad (a>0) \quad \cdots(*)$$

を $f(x)$ とおいて「2次方程式 $f(x)=0$ の解の大小関係」についてまとめたものである．このとき(i),(ii)では

実数解条件：　$D\geqq 0$

をことわっていないが，その理由は $(*)$ が

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

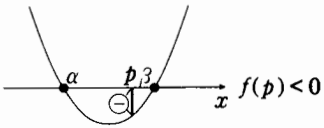
（$\longleftarrow$　平方完成（p.112参照!!））

最小値：　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

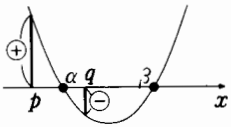
と変形され，たとえば(i)で「$f(p)<0$」ならば,「最小値は $f(p)$ より小（または等しい）」だから

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}\leqq f(p)<0 \quad (a>0)$$

(i)　2つの解が p の両側



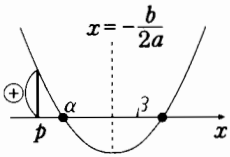
(ii)　1つの解のみ p と q の間



$f(p)\cdot f(q)<0$

（図は $f(p)>0$，$f(q)<0$）

(iii)　2つの解がともに p より大



$$\begin{cases} D\geqq 0 \\ -\dfrac{b}{2a}>p \\ f(p)>0 \end{cases}$$

$\therefore\quad D=b^2-4ac\geqq 0$

となり，実数解条件が自動的に成立してしまうからである．

(iii)，(iv)は「実数解条件：　$D\geqq 0$」を忘れたり，「対称軸の条件」を忘れたりする場合が多いので

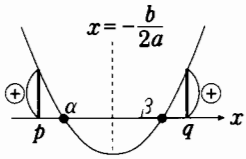
実数解条件

対称軸の条件

$f(p)$，$f(q)$の条件

の3つをセットにして考える習慣をつけておくとよい．

(iv)　2つの解がともにpとqの間



$$\begin{cases} D\geqq 0 \\ p<\dfrac{b}{-2a}>q \\ f(p)>0,\ \text{かつ}\ f(q)>0 \end{cases}$$

いずれも「**2次関数のグラフの形状**」から得られる性質である．

なお，p.121で述べた「**2次方程式の解の正負**」もグラフを用いて説明される．

たとえば「実数解α，βがともに正($\alpha>0$，$\beta>0$)」は(iii)で「$p=0$」として考えればよい．たとえば

実数解条件：　$D\geqq 0$，軸の条件：　$-\dfrac{b}{2a}>0$

の他に

$f(0)$の条件：　$f(0)>0$　($a<0$のときは$f(0)<0$となる)

を示せばよい――条自で確かめてみるとよい．

グラフによる説明は非常に明解で，この先いろいろなことに応用されるきわめて有力な方法である．

たとえば

xの2次方程式

$$x^2+2ax+2a^2-1=0$$

は異なる2つの実数解α，βをもつものとする．

(1)　α，βがともに-2より大きいときaの範囲を求めよ．

(2)　α，βがともに0と2との間にあるときaの範囲を求めよ．

まず，**実教解条件**をキチンと示す．

$$\frac{D}{4}=a^2-(2a^2-1)>0\qquad \therefore\quad a^2<1\qquad -1<a<1\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)について　⟶

上に示した実数解条件を満たすaの値に対して

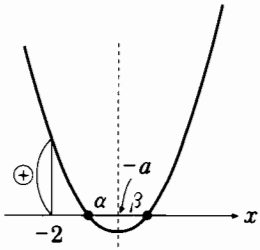
$$f(x)=x^2+2ax+2a^2-1=(x+a)^2+a^2-1$$

対称軸の条件：　$-a>-2$

$\therefore\quad a<2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$

$f(-2)$の条件：

$$f(-2)=(-2)^2+2a\cdot(-2)+2a^2-1$$
$$=2a^2-4a+3$$



$=2(a-1)^2+1>0$　（←── a に関係なく成り立つ!!）‥（＊＊＊）

（＊＊＊）は自動的に成り立つから（＊）と（＊＊）が同時に成り立つ a の範囲は

$-1<a<1$

(2)について　──→

実数解条件（＊）のもとに

対称軸の条件：

$0\leqq -a\leqq 2$　　$\therefore$　$-2\leqq a\leqq 0$

$f(0)$，$f(2)$の条件：

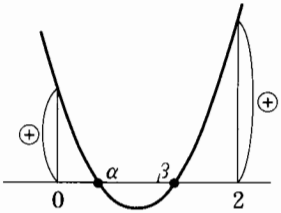
$f(0)=2a^2-1>0$

$\therefore$　$a^2>\dfrac{1}{2}$　　$\therefore$　$|a|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f(2)=4+4a+2a^2-1$

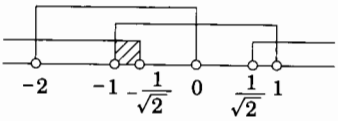
$=2a^2+4a+3=2(a+1)^2+1>0$

←──（つねに成立!!）



これらを同時に満たす a の条件は

$-1<a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



である．

➡　本問(3)は

$x^2+ax+b=0$，$b=-a-2$　──→　$x^2+ax-a-2=0$

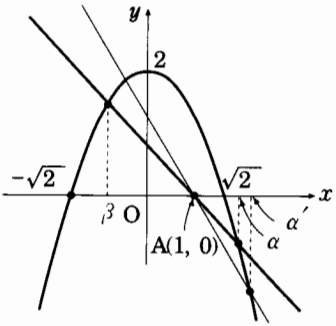
この方程式に含まれるパラメーター a が「1次」であることに注目して次のように変形する．

$a(x-1)=2-x^2$

すなわち，αは2つのグラフ

$$\begin{cases} y=a(x-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(＊＊＊＊) \\ y=2-x^2 \end{cases}$$

の交点の x 座標のうち大きい方のことである．このとき（＊＊＊＊）は点 A(1, 0) を通る傾き a の直線で，a の範囲は本文で示したように



$a\leqq -1$

であるから，「$a=-1$」のときに α は最小となる．すなわち α は

$(-1)(x-1)=2-x^2$　　$\therefore$　$x^2-x-1=0$

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　(>1)

である──このように2つのグラフに分けて考えると考え易い場合もある．

発展問題 3—ガウス記号で表された関数

2つの関数

$$y=[x]-\sqrt{x-[x]},\ y=ax-1$$

を $x\geqq 0$ において考える．ただし，$[x]$ は x を越えない最大の整数を表す記号である．

(1) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの $0\leqq x<4$ の部分を描け．

(2) $x\geqq 0$ において，2つのグラフの交点が1個であるような a の値の範囲を求めよ．

(3) $x\geqq 0$ において，2つの関数のグラフの交点が n 個（$n\geqq 2$）であるような a の値の範囲を求めよ．

解　説　(1)　$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ ……①

を調べるには $[x]$ の意味がキチンと理解されていなければならない．

$[x]=k$（k は整数）のとき　$k\leqq x<k+1$

であるから，$0\leqq x<4$ で①を考えるには次のように分けて考える．

$0\leqq x<1$ のとき：　$[x]=0$

①：　$y=-\sqrt{x}$

$1\leqq x<2$ のとき：　$[x]=1$

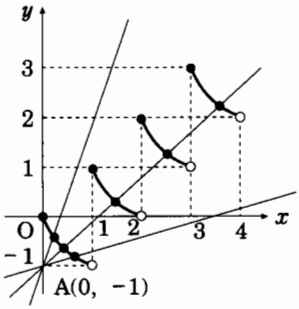
①：　$y=1-\sqrt{x-1}$

$2\leqq x<3$ のとき：　$[x]=2$

①：　$y=2-\sqrt{x-2}$

$3\leqq x<4$ のとき：　$[x]=3$

①：　$y=3-\sqrt{x-3}$



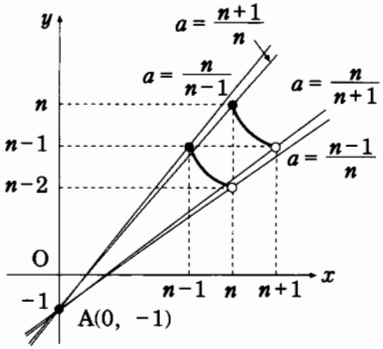
である——右図のようになる．

(2)　$y=ax-1$

は，定点 A(0, −1) を通り「傾き：a」の直線である．

ゆえにグラフより，条件を満たす a の値の範囲は

$$0<a\leqq\frac{1}{2},\ a>2$$



(3)　(2)をヒントにして考える．

右図より

$$\frac{n-1}{n}<a\leqq\frac{n}{n+1},\quad \frac{n+1}{n}<a\leqq\frac{n}{n-1}$$

らしんばん

ガウス記号$[x]$について

問題文中に示したように

$[x]$ ←―― **xを越えない最大の整数**

である．整数であるからには

$[x]=k$（kは整数）

とおくことが出来て，このようなxは

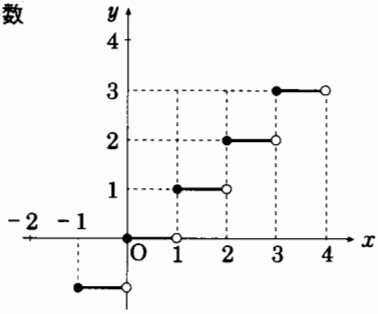
$k \leqq x < k+1$

の範囲の数である．kを$[x]$で書きかえると

$[x] \leqq x < [x]+1$ ……(＊)

$\therefore\ x-1 < [x] \leqq x$

でもある．



＜図1＞

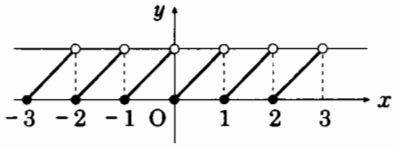
具体的に数値を入れて示すと

$[0.2]=0,\ [0.7]=0,\ [1.3]=1,\ [2.7]=2,\ \cdots\cdots$

のようになる．

$y=[x]$

のグラフは上に示すように，「**x=(整数)**」である点で「**不連続（切れている）**」であることが特徴的でもある――〈図1〉



＜図2＞

本問の$\sqrt{}$の中の関数

$y=x-[x]$

は，「**$[x]$がxの整数部分**」を表しているから，「**yはxの整数分を除いた数値**」のことで，そのグラフは〈図2〉のようになる．

また，(＊)に示した表現でもわかるように，「**xの小数部分をα**」とおくと

$x=[x]+\alpha,\ 0 \leqq \alpha < 1$

と表される．このおき方も時には有効である．

たとえば

次の等式を証明せよ．

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

これは，「**$x+\frac{1}{2}$の整数部分**」，「**$2x$の整数部分**」をどのようにしてとり出すかがポイントである．

$x=[x]+\alpha,\ 0 \leqq \alpha < 1$

とおくことが出来るから

$$x+\frac{1}{2}=([x]+\alpha)+\frac{1}{2}=[x]+\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) \longleftarrow 「\alpha+\frac{1}{2}」が1を越えるかどうか!!$$

$$2x=2([x]+\alpha)=2[x]+2\alpha \longleftarrow 「2\alpha」が1を越えるかどうか!!$$

(i) $0\leqq\alpha<\frac{1}{2}$ のとき：

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[[x]+\underbrace{\alpha+\frac{1}{2}}_{\text{小数部分}}\right]=[x] \longleftarrow \frac{1}{2}\leqq\alpha+\frac{1}{2}<1$$

$$[2x]=[2[x]+\underbrace{2\alpha}_{\text{小数部分}}]=2[x] \longleftarrow 0\leqq 2\alpha<1$$

$$\therefore\ (\text{左辺})=[x]+[x]=2[x]=(\text{右辺}) \longleftarrow \text{成り立つ!!}$$

(ii) $\frac{1}{2}\leqq\alpha<1$ のとき： $1\leqq\alpha+\frac{1}{2}<2,\quad 1\leqq 2\alpha<2$

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[[x]+\alpha+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\left[[x]+1+\underbrace{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}_{\text{小数部分}}\right]=[x]+1 \longleftarrow 0\leqq\alpha-\frac{1}{2}<1$$

$$[2x]=[2([x]+\alpha)]=[2[x]+2\alpha]$$

$$=[2[x]+1+\underbrace{(2\alpha-1)}_{\text{小数部分}}]=2[x]+1 \longleftarrow 0\leqq 2\alpha-1<1$$

$$\therefore\ (\text{左辺})=[x]+([x]+1)=2[x]+1=(\text{右辺}) \longleftarrow \text{成り立つ!!}$$

(i), (ii)いずれの場合も等式が成り立つことがわかる.

もう1つ例をあげておく

たとえば

x の範囲を $0\leqq x\leqq 2$ とするとき

(1) $y=-[-x]$ のグラフを描け.

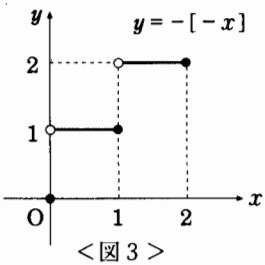
(2) $\left[x+\frac{x^2}{4}\right]=-[-x]$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

(1) $\longrightarrow$ $y=-[-x]$ $\quad\therefore\ -y=[-x]$

と変形すると，これは

$y=[x]$ ……(**)

で，x, y をそれぞれ $-x$, $-y$ におきかえたものであるから，まず(*)のグラフ〈図1〉を描き「原点Oに関して対称移動」すればよい（p.238）——〈図3〉



<図3>

(2) 与えられた等式の左辺に注目して

$$y=\left[x+\frac{x^2}{4}\right]\quad(0\leqq x\leqq 2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\underline{***})$$

のグラフを描く．それにはまず

$$y=x+\frac{x^2}{4}=\frac{1}{4}(x+2)^2-1\quad(0\leqq x\leqq 2)$$

のグラフを描き．その関数値が整数となる x の範囲を，それぞれの数値について調べることが考え方の基本である．

与えられた等式の右辺の整数値 y は〈図3〉より

$y=0,\ 1,\ 2$

であるが，「$y=0$ のときは $x=0$」が簡単にわかるから，「$y=1,\ 2$」のときを調べることになる．

$$x+\frac{x^2}{4}=1\qquad\therefore\quad x^2+4x-4=0$$

$$\therefore\quad x=-2+2\sqrt{3}$$

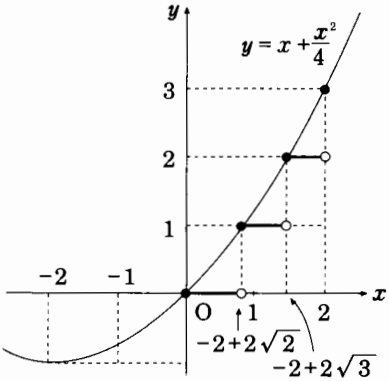
$$(\longleftarrow\quad 0\leqq x\leqq 2)$$

また

$$x+\frac{x^2}{4}=2\qquad\therefore\quad x^2+4x-8=0$$

$$\therefore\quad x=-2+2\sqrt{3}$$

$$(\longleftarrow\quad 0\leqq x\leqq 2)$$



＜図4＞

これより(***)のグラフは〈図4〉の太線の部分で，**問題の等式を成立させる x の値の範囲は，〈図3〉と〈図4〉のグラフが重なるような x の範囲**である．すなわち

$$x=0,\ -2+2\sqrt{2}\leqq x\leqq 1,\ -2+2\sqrt{3}\leqq x<2$$

発展問題4―関数の合成，グラフと方程式

$0\leqq x\leqq 1$ で定義された関数

$$f(x)=|2x-1|$$

について次の問いに答えよ．

(1)　$y=f(f(x))$ のグラフを描け．

(2)　$f(f(f(x)))=x$　となる x の値の個数を求めよ．

解　説　(1)　まず，「$y=f(x)$」のグラフをシッカリ描こう．

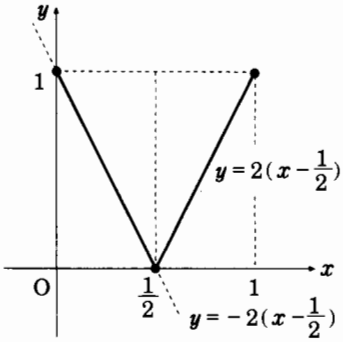
$$y=|2x-1|$$

$$=2\left|x-\frac{1}{2}\right|\ (=f(x))\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

であるから，x を $\frac{1}{2}$ との大小で分けて考える．すなわち

$$y=\begin{cases}-2\left(x-\frac{1}{2}\right) \longleftarrow 0\leqq x<\frac{1}{2}\\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right) \longleftarrow \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

であるが結果的には「$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$」のグラフを描き，$x$ 軸より下の部分を x 軸に関して対称に折り返したものとなる――〈図1〉．

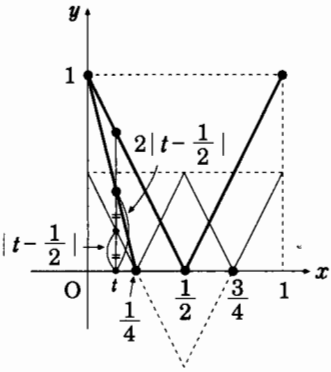


<図1>

次に，本問のグラフを描くのであるが，「$f(x)=t$」とおくと

$$y=f(f(x)) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
$$=f(t)=2\left|t-\frac{1}{2}\right|$$

であるが，**この t は「①の x に対する y の値」**である．すなわち，この関数値は，「①で得られる関数値から $\frac{1}{2}$ を引き，絶対値をとって2倍したもの」である〈図2〉――**「②のグラフは①のグラフを $\frac{1}{2}$ だけ下に下げ，$y\leqq 0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返し，その上で y 軸方向に2倍に伸縮したもの」として求められる．**

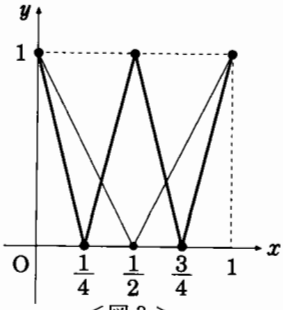


<図2>

(2) (1)でグラフを描いた原理をそのまま用いると

$$y=f(f(f(x))) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

のグラフは**「②のグラフを下に $\frac{1}{2}$ だけ下げ，$y\leqq 0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返し，y 方向に2倍に伸縮する」ことによって得られる**――〈図3〉



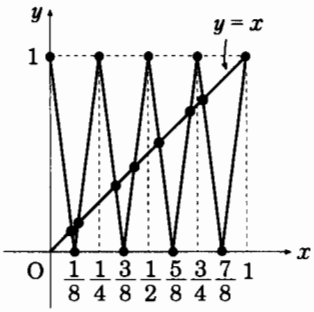
<図3>

したがって与られた方程式の解の個数は③のグラフと直線

$y=x$

との交点の個数と一致するから〈図4〉より求める解の個数は「8個」である．

（2つのグラフの交点の x，y 座標は，これらを連立したときの方程式の解になる――p.316を参照!!）



〈図4〉

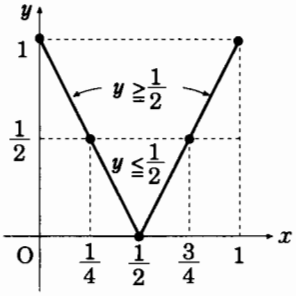
らしんばん

(1)のグラフをマジメ（？）に描くのは相当メンドウであるが，**本文に述べた方法が思いつかなければガンガンやる．**それでも本文①のグラフを描いておくといくらかスッキリと「場合分け」が出来る．

$$y=2\left|x-\frac{1}{2}\right| \quad (=f(x)) \quad \cdots(*)$$

$$f(f(x))=2\left|y-\frac{1}{2}\right| \quad \cdots\cdots(**)$$

ここで，y と $\frac{1}{2}$ の大小で場合を分ける．



〈図5〉

(i)　$0\leqq y<\frac{1}{2}$ のとき：右図より

$\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$ ――→ $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\leqq x<\frac{3}{4}$ と分ける．

であるが

$$f(f(x))=2\left|\overset{\ominus}{\overbrace{y-\frac{1}{2}}}\right|=-2\left(y-\frac{1}{2}\right) \longleftarrow y-\frac{1}{2}<0$$

$$=-2y+1=-2\cdot 2\left|x-\frac{1}{2}\right|+1=-4\left|x-\frac{1}{2}\right|+1$$

$$\therefore\ f(f(x))=\begin{cases} -4\left|\overset{\ominus}{\overbrace{x-\frac{1}{2}}}\right|+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=4x-1 & \left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right) \\ -4\left|\overset{\oplus}{\overbrace{x-\frac{1}{2}}}\right|+1=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=-4x+3 & \left(\frac{1}{2}\leqq x<\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

(ii)　$\frac{1}{2}\leqq y\leqq 1$ のとき：(i)と同様に〈図5〉をながめて

$0\leqq x\leqq\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}\leqq x\leqq 1$

であるが

$$f(f(x))=2\left|\overset{\oplus}{\overbrace{y-\frac{1}{2}}}\right|=2\left(y-\frac{1}{2}\right)=2y-1 \longleftarrow \frac{1}{2}\leqq y\leqq 1$$

$$=2\cdot 2\left|x-\frac{1}{2}\right|-1=4\left|x-\frac{1}{2}\right|-1$$

$$\therefore\quad f(f(x))=\begin{cases} 4\overbrace{\left|x-\frac{1}{2}\right|}^{\ominus}-1=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)-1=-4x+1 & \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{4}\right) \\ 4\overbrace{\left|x-\frac{1}{2}\right|}^{\oplus}-1=\ \ 4\left(x-\frac{1}{2}\right)-1=\ \ 4x-3 & \left(\frac{3}{4}\leqq x\leqq 1\right) \end{cases}$$

となり，一応「$f(f(x))$」の具体的な形をとらえることが出来る．もちろん(＊)で「x と $\frac{1}{2}$ との大小で場合を分けて(＊＊)に代入……」のように1つ1つコツコツとやってもよい．しかし(2)の「$f(f(f(x)))$」となるとこの方法ではほとんど絶望的である．

発展問題 5—関数の合成，最大・最小，グラフと方程式

2つの関数

$$f(x)=x^2-2px+q,\ \ g(x)=-x^2+6x-7$$

に対して，f と g の合成関数 $g\circ f$ を h とする．

このとき，関数 $h(x)$ の最大値が1であるための必要十分条件を p，q で表すと［(ア)］であり，最大値が2であるための必要十分条件を p，q で表すと［(イ)］である．

特に，$p=1$，$q=3$ のとき，方程式 $h(x)=-2$ の実数解は［(ウ)］であり，方程式 $h(x)=a$ の相異なる実数解の個数が4であるための必要十分条件を a で表すと［(エ)］である．

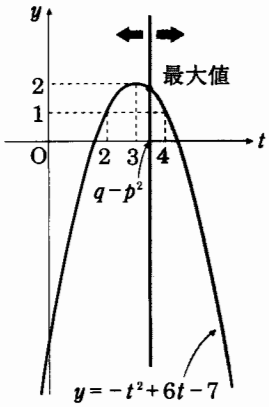
解　説　$f(x)$，$g(x)$ は

$$f(x)=x^2-2px+q$$
$$=(x-p)^2+q-p^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$
$$g(x)=-x^2+6x-7$$
$$=-(x-3)^2+2$$

一方，関数 $h(x)$ を y，$f(x)$ を t とおくと

$$y=h(x)=(g\circ f)(x)$$
$$=g(f(x))=g(t)\quad (ただし，t=f(x))$$

すなわち，y は t の関数であるから y の最大値を調べるには，t のとり得る範囲を定義域として $g(t)$ の値域を調べればよい．すなわち，①から $f(x)$ は「$x=p$」



＜図1＞

のとき「最小値：　$q-p^2$」をとるから

$$t \geqq q-p^2$$

で $g(t)$ の最大値を考えることになる――〈図1〉

したがって**定義域の下端である「$q-p^2$」をどこにおくかを考えればよい.**

最大値：　1――「$q-p^2=4$」が必要十分

最大値：　2――「$q-p^2 \leqq 3$」が必要十分

次に「$p=1$, $q=3$」を与えるとき実数解を求める方程式は

$$h(x)=g(t)=-2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

このときの t は

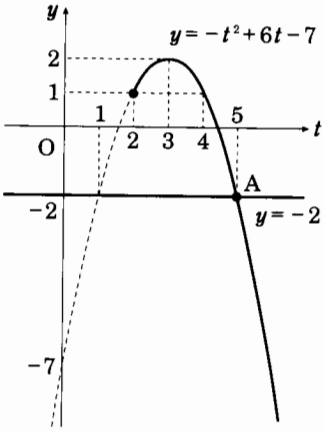
$$t=x^2-2x+3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$=(x-1)^2+2 \geqq 2$$

で，実数解を求める手順は次のようにする．すなわち

(i)　**まず，方程式②の実数解 t を求める**――このとき「$t \geqq 2$」である.

(ii)　**次に，(i)で求めた t の値を方程式③に入れて実数解 x を求める.**



＜図2＞

であるが，これらは適宜グラフを利用するとビジュアルで具合がよい.

②：　$-t^2+6t-7=-2$

$\therefore\ t^2-6t+5=0 \qquad \therefore\ (t-1)(t-5)=0 \qquad \therefore\ t=5 \quad (\longleftarrow t \geqq 2)$

これはグラフでいうと

$$y=-t^2+6t-7,\ y=-2$$

の交点の t 座標の値を求めているのだが，「$t \geqq 2$」の条件により〈図2〉の点Aについてのみ求めたわけである.

(ii)は③に「$t=5$」を代入すると

$x^2-2x+3=5$

$\therefore\ x^2-2x-2=0$

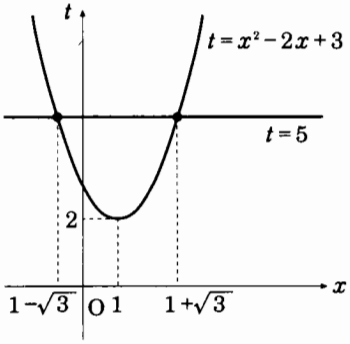
$\therefore\ x=1 \pm \sqrt{3}$

となり**実数解が「2個だけ」得られる.**

そこで最後の設問の

$$h(x)=g(f(x))=a \quad \cdots\cdots ④$$

$\longleftarrow$ **x の方程式!!**



＜図3＞

の実数解が「4個」あるための必要十分条件であるが，それは上に述べた「解を求める過程」をヒントに考える．

すなわち，「②の解」から「③の解」が得られる構造が

$$t=5>2\ (\text{②の解の1個}) \longrightarrow x=1\pm\sqrt{3}\ (\text{実数解が2個})$$

であることにある．つまり「xの方程式④」の実数解が「4個」であるためには，「xの方程式③」のtの値に「2より大きい2つのtの値t_1，t_2」が与えられなければならない．したがって②にあたるtについての方程式

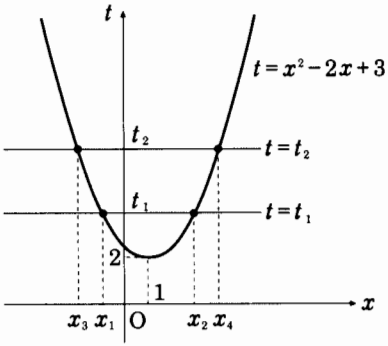
$$g(t)=a \quad (-t^2+6t-7=a)$$

が「$t>2$（等号はつかない）」に異なる2個の実数解t_1，t_2をもつことが求める必要十分条件である．すなわち，このt_1，t_2を③に用いて

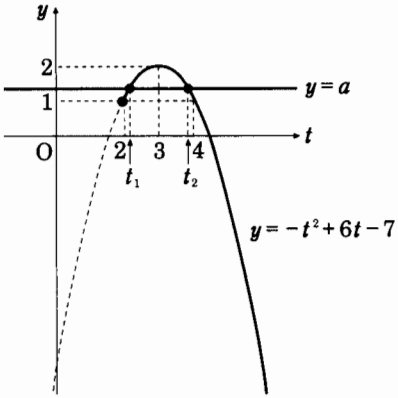
$$x^2-2x+3=t_1 \longrightarrow x=x_1,\ x_2$$

$$x^2-2x+3=t_2 \longrightarrow x=x_3,\ x_4$$

として異なる4つの実数解が求められる．〈図4〉，〈図5〉はこの関数をグラフに示したものである．



＜図4＞



＜図5＞

このことから求めるaの範囲は「$1<a<2$」であることがわかる．

このときウッカリ「$1\leqq a<2$」としてはいけない．それは「$a=1$」とすると「$t_1=2$，$t_2=4$（〈図4〉）」となるが，「$t_1=2$」に対するxの値は

$$x^2-2x+3=2$$

$$\therefore\ x^2-2x+1=(x-1)^2=0 \qquad \therefore\ x=1\ (\text{重解})$$

となり，この場合の実数解は1個（「1個」と数える）で，合計で3個の実数解となるからである――〈図3〉で確かめてみるとよい．

空欄を埋める正解は次の通りである．

(ア) $\boldsymbol{q-p^2=4}$，　(イ) $\boldsymbol{q-p^2\leqq 3}$，　(ウ) $\boldsymbol{1\pm\sqrt{3}}$，　(エ) $\boldsymbol{1<a<2}$

らしんばん

2次関数 $f(x)$ と，やはり2次関数 $g(x)$ の「合成関数」を「方程式」とからめた問題で，慣れるまでなかなか扱いにくいタイプの問題である．しかし，$g(x)$ の部分が

$\sin x$，$\cos x$，a^x，$\log_a x$ ←―― 三角関数，指数，対数関数!!

などに置き換えたタイプの問題は頻出問題と考えてよいほど必ずどこかで出題されており，その意味からは基本問題ではある．それらの場合は

$t=f(x)$ ←―― 本文③にあたる方程式!!

は「三角方程式」，「指数・対数方程式」となり，これらの方程式から解が求まる構造をキチンと了解していないとほとんど対応出来ないことになる．基礎解析でキッチリとやっておかなければならない――『諸橋の基礎解析講義（p.44, 97)』を参照されたい．本書では第5章**発展問題1**（p.437以下）に「三角比」との関連問題として例をあげた．

また，$f(x)$ と $g(x)$ をスナオ(？)に合成して

$$h(x)=g(f(x))$$
$$=-(x^2-2px+q)^2+6(x^2-2px+q)-7$$

とし，これを展開して「微分法」，「増減表」というのはいただけない．それはこの問題がそのような方法の解答を期待して作られた問題ではないからである．

ここではこの問題を素材として**「関数の合成」**をぜひマスターしてもらいたい．

(イ)の答を**「$q-p^2=3$」とやる間違いが多い**．このときは確かに「最大値：2」となり条件を満たすが，「最大値が2」となる場合はこのときだけでなく他にもあるわけで（たとえば〈図1〉で直線「$x=q-p^2$」を3より左に動かしてみよ!!），**「十分条件」の考察しかしていないことになる**――したがって空欄(イ)は「$q-p^2\leqq 3$」でなければならない．

少し練習して慣れておきたい．例をあげておく．

たとえば

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=|x^2-3x|-x+2 \quad \cdots\cdots(*)$$

として次の問いに答えよ．

(1)　$2\leqq x\leqq 4$ とするとき $f(f(x))$ の最大値，最小値を求めよ．

(2)　x の方程式 $f(f(x))=-1$ を解け．

(1) ――→ まず，「$y=f(x)$」のグラフを描こう．

「$x^2-3x=x(x-3)\geqq 0$」のとき：　$x\leqq 0$，$x\geqq 3$

$$y=(x^2-3x)-x+2$$
$$=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$$

「$x^2-3x<0$」のとき：　$0<x<3$

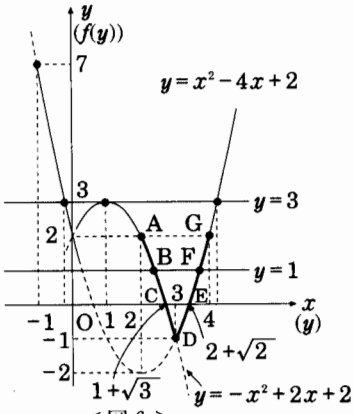
$$y=-(x^2-3x)-x+2$$
$$=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$$

以上の考察から(＊)のグラフは右図のようになる．

そこで，「$2\leqq x\leqq 4$」に対する「関数値：　$f(x)$」の変化を表に表すと

x	2	⟶	3	⟶	4
$f(x)$	2	⟶	-1	⟶	2
		(減少)		(増加)	

$$\Longrightarrow\quad -1\leqq f(x)\leqq 2$$



＜図6＞

「$f(x)$」は「$f(x)=y$」であるから

$$f(f(x))=f(y),\quad -1\leqq y\leqq 2$$

そこで〈図6〉「x 軸を y 軸」，「y 軸を $f(y)$ 軸」と読みかえて，「y の変化：$-1\leqq y\leqq 2$」に対する「関数値：　$f(y)$ の変化」を調べると

y	-1	⟶	0	⟶	1	⟶	2
$f(y)$	7	⟶	2	⟶	3	⟶	2
		(減少)		(増加)		(減少)	

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases}\text{最大値：}\ 7\\ \text{最小値：}\ 2\end{cases}$$

となり，最大値，最小値を得ることが出来る．

このとき〈図6〉に示したグラフを「x-y 軸」，次に「y-$f(y)$軸」として用いると効果的である．

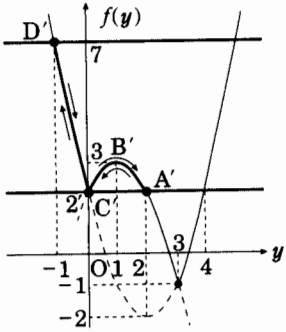
さらに最大値，最小値を与える x の値を求めるには，たとえば「最大値：7」については〈図7〉の「y-$f(y)$ 座標軸」で

$$f(y)=7\ \longrightarrow\ y=-1$$

次にこの結果を〈図6〉に用いると

$$y=-1\ \longrightarrow\ x=3$$

が得られる．



＜図7＞

「最小値：　2」についても同様で

$$f(y)=2\ \longrightarrow\ y=0,\ 2$$

$$y=0\ \longrightarrow\ \begin{cases}-x^2+2x+2=0 & \therefore\ x=1+\sqrt{3}\\ x^2-4x+2=0 & \therefore\ x=2+\sqrt{2}\end{cases}\quad (2\leqq x\leqq 4)$$

$$y=2\ \longrightarrow\ x=2,\ 4$$

である．

ちなみに，「x が2から4まで連続的に変化する」とき，それに対応する「関数

値 $f(f(x))$ の変化」を調べておこう．

なるべく，くわしいデーターを得るために〈図7〉の $B'(f(f(x))=3)$ に対応する x の値を求めておくと

$$y=1 \longrightarrow \left(\begin{array}{lll} -x^2+2x+2=1 & \therefore & x=1+\sqrt{2} \\ x^2-4x+2=1 & \therefore & x=2+\sqrt{3} \end{array}\right) \quad (2 \leqq x \leqq 4)$$

であるから，「**x の増加に対する $f(f(x))$ の増減**」を表にすると

x	2	⟶	$1+\sqrt{2}$	⟶	$1+\sqrt{3}$	⟶	3	⟶	$2+\sqrt{2}$	⟶	$2+\sqrt{3}$	⟶	4
〈図6〉	A	⟶	B	⟶	C	⟶	D	⟶	E	⟶	F	⟶	G
$f(x)$	2	⟶	1	⟶	0	⟶	-1	⟶	0	⟶	1	⟶	2
		(減少)		(減少)		(減少)		(増加)		(増加)		(増加)	
〈図7〉	A′	⟶	B′	⟶	C′	⟶	D′	⟶	C′	⟶	B′	⟶	A′
$f(f(x))$	2	⟶	3	⟶	2	⟶	7	⟶	2	⟶	3	⟶	2
		(増加)		(減少)		(増加)		(減少)		(増加)		(減少)	

となる――とり得る値の範囲をキチンとおさえることはもちろん大切であるが，このように「**合成にともなう関数値の変化の対応関係**」に注目する視点も忘れてはならない．

(2) ⟶　もう説明するまでもない．

「$f(x)=y$」とおくと与えられた方程式は〈図7〉で

$$f(y)=-1 \longrightarrow y=3$$

これを〈図6〉に用いると

$$y=3 \longrightarrow \left(\begin{array}{lll} x=1 & \longleftarrow & -x^2+2x+2=3 \quad \therefore \quad (x-1)^2=0 \\ x^2-4x+2=3 & \therefore & x^2-4x-1=0 \quad \therefore \quad x=2\pm\sqrt{5} \end{array}\right)$$

すなわち，求める x の値は

$$\boldsymbol{x=1,\ 2\pm\sqrt{5}}$$

となる．

発展問題6―関数の合成，逆関数

関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \geqq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}, \qquad g(x)=x+a$$

このとき $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を x の式で表すと［(ア)］である．また，合成関数 $(f^{-1} \circ g \circ f)(x)$ を x の式で表すと，$a=2$ のとき［(イ)］で，$a=-2$ のとき［(ウ)］である．

解　説　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求める手順は

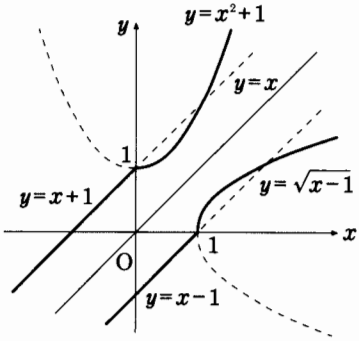
(i) **$f(x)$ を y とおいて x について解く**

(ii) **x と y とをとりかえる**

であった(p.227). 本問では $f(x)$ が「$x \geqq 0$」と「$x<0$」とで違う形で与えられているが考え方は同様である.

$$y=\begin{cases} x^2+1 & (x \geqq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

これをまず x について解く.



(i) $x \geqq 0$ のとき:

$y=x^2+1 \geqq 1 \qquad \therefore \quad x^2=y-1 \geqq 0$

$\therefore \quad x=\sqrt{y-1} \geqq 0 \quad (y \geqq 1)$

(ii) $x<0$ のとき:

$y=x+1<1$

$\therefore \quad x=y-1<0 \quad (y<1)$

これより

$$x=\begin{cases} \sqrt{y-1} & (y \geqq 1) \\ y-1 & (y<1) \end{cases}$$

次に x と y を入れかえて

$$y=\begin{cases} \sqrt{x-1} & (x \geqq 1) \\ x-1 & (x<1) \end{cases} \qquad \therefore \quad f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1} & (x \geqq 1) \\ x-1 & (x<1) \end{cases} \quad \cdots ②$$

(2) 次に「$a=2$」のとき: $g(x)=x+2$

このとき

$$(f^{-1} \circ g \circ f)(x)=f^{-1}((g \circ f)(x))=f^{-1}(g(f(x))) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

であるから, ③の

$$g(f(x))=\begin{cases} (x^2+1)+2=x^2+3 (\geqq 3) & (x \geqq 0) \\ (x+1)+2=x+3 (<3) & (x<0) \end{cases}$$

が「②の x」に相当すると考えればよい. すなわち, **「これと1との大小」でハナシが違って来る**——具体的に言えば$\sqrt{}$ (ルート) がついたりつかなかったりする. ③を②の表現にならって表すと

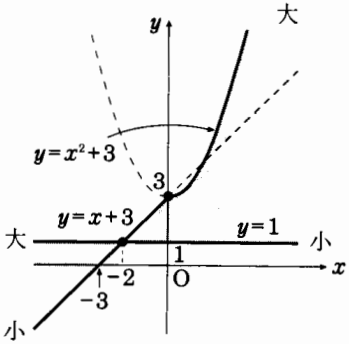
$$f^{-1}(g(f(x)))=\begin{cases} \sqrt{g(f(x))-1} & (g(f(x)) \geqq 1) \\ g(f(x))-1 & (g(f(x))<1) \end{cases}$$

である. $g(f(x))$ と 1 との大小関係の変わり目は

$g(f(x))=x+3=1 \qquad \therefore \quad x=-2$

であるから

$$f^{-1}(g(f(x)))$$
$$=\begin{cases}\sqrt{x^2+3-1}=\sqrt{x^2+2} & (x\geqq 0)\\ \sqrt{x+3-1}=\sqrt{x+2} & (-2\leqq x<0)\\ x+3-1=x+2 & (x<-2)\end{cases}$$

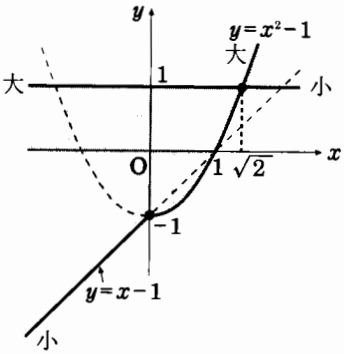


「$a=-2$」のとき：同様にして

$$g(f(x))=\begin{cases}(x^2+1)-2=x^2-1 & (x\geqq 0)\\ (x\ \ +1)-2=x\ \ -1 & (x<0)\end{cases}$$

そこで「$g(f(x))$ と 1 との大小」は

$$g(f(x))=x^2-1=1$$
$$\therefore\quad x^2=2$$
$$\therefore\quad x=\sqrt{2}\quad (x\geqq 0)$$



の前後で変わるから

$$f^{-1}(g(f(x)))$$
$$=\begin{cases}\sqrt{x^2-2} & (x\geqq\sqrt{2})\\ x^2-2 & (0<x\leqq\sqrt{2})\\ x-2 & (x<0)\end{cases}$$

以上のことから空欄は

(ア)　$x\geqq 1$ のとき：　$\sqrt{x-1}$，$x<1$ のとき：　$x-1$

(イ)　$x\geqq 0$ のとき：　$\sqrt{x^2+2}$，$-2\leqq x<0$ のとき：　$\sqrt{x+2}$，
$x<-2$ のとき：　$x+2$

(ウ)　$x\geqq\sqrt{2}$ のとき：　$\sqrt{x^2-2}$，$0<x\leqq\sqrt{2}$ のとき：　x^2-2，
$x<0$ のとき：　$x-2$

らしんばん

(1)について――「逆関数とそのグラフ」については p.223以下，259で詳しく述べたが，本問のように**定義域によって「枝わかれ」する関数は，それぞれの定義域で「逆関数」を求めることになる．**そのとき，**「逆関数」と「もとの関数」とでは「定義域」，「値域」がキレイに入れかわっていることには注意しておきたい．**加えてグラフは**「$y=x$ のグラフ」に関して対称になり，**これは「逆関数」を求める際の大きな目安になる――よく考えてみれば「あたりまえ」のことである．

(2)は f^{-1}，g，f の 3 つの関数の合成で**「結合則（p.222)」を上手に使うところがポイント**である．特に**「$(g\circ f)(x)$」を先に求めておいて**

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & (x\geqq 1)\\ x-1 & (x<1)\end{cases}\longleftarrow\quad x\text{ を }(g\circ f)(x)\text{ で置き換える!!}$$

ことから「$(g\circ f)(x)$と1との大小が問題となる」ことを見ぬくことがこの問題の主なテーマになっている．

ちなみに「関数の合成」では，「**交換則**」は成立しない（p.221）．

「関数の合成」に関して，「もう1つの切り口」を見ておきたい．

たとえば

$x\neq 0$，$x\neq \pm 1$ のとき，関数 f_1，f_2，f_3，f_3 を

$$f_1(x)=x\ ,\quad f_2(x)=-\frac{1}{x}\ ,\quad f_3(x)=\frac{1+x}{1-x}\ ,\quad f_4(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

とする．

(1) $f_2\circ f_3=f_4$ であることを示せ．

(2) 右の表は(1)の結果を記入したものである．この表の空白を埋めよ．

(3) f_3 の逆関数 f_3^{-1} を求めよ．

(4) $(f_2\circ f_3)^{-1}=f_3^{-1}\circ f_2^{-1}$ を確かめよ．

(5) $(f_2\circ f_3)\circ(f_x\circ f_4^{-1})=f_1$ であるとき x の値を求めよ．

f \ g	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1				
f_2			f_4	
f_3				
f_4				

(1) ⟶ これはマジメ（？）に計算する．

$$(f_2\circ f_3)(x)=f_2(f_3(x))$$
$$=-\frac{1}{f_3(x)}=-\frac{1-x}{1+x}=\frac{x-1}{x+1}=f_4(x)$$

f \ g	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_1	f_2

(2) ⟶ (1)の計算からこの表が，タテに並んだ関数を f，横に並んだ関数を g とする「**$f\circ g$ の合成表**」であることがわかる．そこで，それぞれの $f\circ g$ を計算すると表の空白は右のように埋まる――「リーグ戦表（？）」のように考える．

(3) ⟶ f と g との関係で

$f\circ g=f_1$ ⟶ f と g は互いに逆関数!!

である．表をながめてこの関係をさがせばよい．

図で△印をつけた f_1 に注目すると

$$f_3^{-1}=f_4 \longleftarrow f_3\circ f_4=f_1\ ,\quad f_4\circ f_3=f_1$$

である．

(4) ⟶ これは1つ1つ計算するかわりに**表から読みとればよい**．

$$(f_2\circ f_3)^{-1}=f_4^{-1}=f_3\ ,\quad f_3^{-1}\circ f_2^{-1}=f_4\circ f_2=f_3$$

$$\therefore\ (f_2\circ f_3)^{-1}=f_3^{-1}\circ f_2^{-1}(=f_3) \longleftarrow (f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\quad \text{(p.224, 225)}$$

(5) $(f_2\circ f_3)\circ(f_x\circ f_4^{-1})=f_1$ ……（＊）

$\therefore\ f_4\circ(f_x\circ f_4^{-1})=f_1 \longleftarrow$ 表から $f_2\circ f_3=f_4$

左から「$f_4^{-1}=f_3$」をかける（あえて「かける」という言葉を用いよう）と

$$\underbrace{f_4^{-1}\circ f_4}_{\substack{\| \\ f_1}}\circ(f_x\circ f_4^{-1})=\underbrace{f_4^{-1}\circ f_1}_{\substack{\| \\ f_3}} \qquad \therefore\ f_x\circ f_4^{-1}=f_3$$

次に右からf_4をかけると

$$f_x\circ\underbrace{f_4^{-1}\circ f_4}_{\substack{\| \\ f_1}}=\underbrace{f_3\circ f_4}_{\substack{\| \\ f_1}} \qquad \therefore\ f_x=f_1 \qquad \therefore\ x=1$$

となる．このように「関数の合成」は「数の積（かけざん）に対応する演算」とみることも出来る――f_1を数のかけざんの1にあたると考えればよい．

発展問題7―関数方程式

任意の実数x，yに対してつねに

$$f(x+y)=f(x)f(y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ実数値関数$f(x)$がある．ただし，$f(x)$は恒等的には0でないものとする．このとき次のことを説明せよ．

(1)　$f(0)=1$　　(2)　$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

(3)　任意の実数xに対して$f(x)>0$

(4)　$f^{-1}=g$とするとき，$g(xy)=g(x)+g(y)$

解　説　(1)　①は任意の実数に対して成り立つから「$x=0$」とおくと

$$f(y)=f(0)\cdot f(y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$f(x)$は恒等的には0でないから，「$f(x)\neq 0$」となるxが存在し，そのxの値をkとおけば「$f(k)\neq 0$」である．

②は任意の実数yについて成り立つから「$y=k$」とおけば

$$f(k)=f(0)f(k) \qquad \therefore\ f(0)=1 \longleftarrow f(k)\neq 0$$

(2)　①で「$y=-x$」とおくと

$$f(0)=f(x)f(-x) \qquad \therefore\ f(x)f(-x)=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\therefore\ f(-x)=\frac{1}{f(x)}$$

(3)　①でx，yを$\dfrac{x}{2}$とおくと

$$f(x)=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2\geqq 0 \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{「}f(x)=0\text{となるときがな}\\ \text{い」ことを示せばよい．}\end{array}\right)$$

③より「$f(x)\neq 0$」であるから「$f(x)>0$」である．

(4) $f(X)=x,\ f(Y)=y$ ……④

とおくと「逆関数の定義（p.224）」より

$X=g(x),\ Y=g(y)$ ……⑤

そこで①で，「$x=X,\ y=Y$」とおくと

$f(X+Y)=f(X)f(Y)$

これに④を入れて

$f(X+Y)=xy \quad \therefore\ X+Y=g(xy)$ ←―― **逆関数の定義!!**

さらに⑤を入れると

$g(x)+g(y)=g(xy) \quad \therefore\ g(xy)=g(x)+g(y)$

らしんばん

本問①

①： $\boldsymbol{f(x+y)=f(x)f(y)}$ ……(＊)

のように，**「未知の関数の満たすべき条件式」**を与えるとき，それを**「関数方程式」**といい，その条件式を満たす関数を求めることを「関数方程式を解く」というのだが，ここではそこまで深入りはしない．しかし**設問は**(1)，(2)，(3)，(4)と**「核心に触れることなく」その関数の基本的性質をえぐり出している**といえなくもない．たとえば最初に「$f(1)=a>0$」と決めておくと

①で $x=y=1$ ――→ $f(2)=f(1)\cdot f(1)=a\cdot a=a^2$

①で $x=2,\ y=1$ ――→ $f(3)=f(2)\cdot f(1)=a^2\cdot a=a^3$

①で $x=3,\ y=1$ ――→ $f(4)=f(3)\cdot f(1)=a^3\cdot a=a^4$

以下，これをくり返すと

$\boldsymbol{f(n)=a^n}$ （$\boldsymbol{n}$ は自然数）

が得られる．ここに調べた数値は「$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$……」のような「離散量（トビトビの値）」ではあるが，（＊）を満たしている関数は**「指数関数」**（**『諸橋の基礎解析講義』**p. 3）であると考えるのはむしろ自然である．すなわち（＊）から得られる関数は「指数関数」

$f(x)=a^x$

であり，(4)で示した

$\boldsymbol{g(xy)=g(x)+g(y)}$ ←―― この形での出題例もある．

という性質をもつ関数 $g(=f^{-1})$ が**「対数関数」**（**『諸橋の基礎解析講義』**p.15）であることはあたりまえのことではあるが，ここでは**「数Ｉらしく」**その性質についてだけのハナシにとどめることにする――**「そんなものかなあ」と思えばそれで十分**である．