第 4 章

方程式・不等式と図形

ここでは
「図形」を計算する.
……
「ベクトル的展開」を踏まえて
読んでもらいたい.

〈「座標幾何」から「ベクトル」へ〉

その昔，「数Ⅰ幾何(初等幾何のこと)」という難しい科目があった頃，はじめて**「座標幾何」**を習ったときの印象は

これで，どんな難しい幾何の問題も必ず解ける

という**「安心感(あるいは解放感)」**であったことを思い出す――今にして思えば実はそれほど「有効」であったかどうかは疑わしいものであるが，それにしても

難しい図形の問題が「計算」で解ける

ということに，**「画期的な展開」**を期待したとしてもそれは無理からぬことのように思われる．ましてルネッサンス前後の人々にとってどんなに大きな力になり得たかはほとんど想像を越えるものがあったにちがいない．

とはいえ，ここで扱う図形のほとんどは

「直線」と「円」の基本的な性質と「それらの間の相互の関係」

に限られるが，**第3章で解説した「関数のグラフ」との「相互乗り入れ」の分野**でもあり，何よりも

平面上の点を実数の組（ペアー）に対応させて考える

という根本の思想は，この先の**「ベクトル（代数・幾何)」**への展開，あるいは**「複素平面(p.45でほんの『入り口』の部分だけを述べたが現行の高校数学では基本的には扱わない)」**への展開などを孕(はら)んだきわめて重要な意味をもつ内容であると考えなくてはならない．

したがって**本書ではらしんばん**で，なるべく**「ベクトル的な展開」**を試みたが，これはまだベクトルを習っていない諸君には少しキツイかもしれないので，その場合は最初は読みとばしておいて(『諸橋の代数・幾何講義』を先に読んで)，そのあとで確認してもかまわない．

それにもかかわらずあえてこのような「ベクトルを用いた解説」を加えた理由は

(i) **ベクトルを用いる方が簡明にいく場合が多い**

(ii) **現行の高校数学では，ベクトルは一応「代数・幾何」で扱うことになっているが，「代数・幾何」ではほとんど「空間座標」を扱い，この章に出て来るような「平面図形」をベクトルでキチンと扱う機会が欠落している**

ことを考えたからである．

第1節
点と直線

ここで扱う内容は「初等幾何」に対して**「座標幾何」**といわれるものである．

「座標」を用いて「図形を式の形に表す」ことにより図形の性質を調べることをはじめて明確な形で提唱したのは**「デカルト(1596～1650，フランス)」**である．以来，18世紀には「2次曲線論」を中心とするいわゆる「解析幾何学」が大いに研究された．今ではほとんど省みられなくなってはしまったが，その後の幾何学の発展に大きく影響していることは見のがせない．

一方，このような考え方は「ケプラー(1571～1630，ドイツ)の法則」をはじめとする「天体の運動の解明」を可能とし，**「ニュートン(1642～1727，イギリス)」**，**「ライプニッツ(1646～1716，ドイツ)」**をその創始者とする「微積分学」の重要な土台ともなったわけである．

平面や空間の点を**「実数の組(ペアー)と見る」考え方**は，実はこのように古い歴史をもち，今では数学全般に深く浸透してしまっている．そのような意味でわれわれも「平面図形」，「空間図形」，「ベクトル」などを通して，このような考え方に慣れることはきわめて重要であり，また自然でもあるわけである．

1　座標軸と「点」の表現

(1)　数直線上の点の座標

数直線上の点Pに対応する実数を点Pの**「座標」**といい，点Pの座標がxであるとき，これを「P(x)」と書くことにする――「数直線」はすでにp.30で説明した．

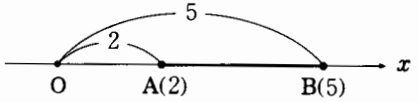
ここに述べる「数直線」上のハナシは次の「x-y平面」上のハナシへの展開を踏まえたものとして読んでもらいたい．

(ⅰ)　2点間の距離

たとえば2点A(2)，B(5)をとると，A，Bはいずれも原点Oの右側にあって，それぞれ原点Oからの距離が2，5の点であるから，2点A，B間の距離は

$$AB=5-2=3$$

である．



一般に「**数直線上の2点A(a)，B(b)間の距離**」は「絶対値の記号」を用いて

$$AB=|b-a| \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

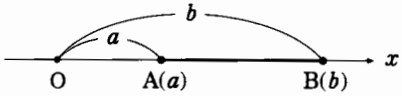
で表される．このとき，2点A，Bと原点Oとの位置関係は「a，bの符号」で違って来るが，いずれの場合も「距離AB」は①で計算される――右図は，「AがBより左側($a<b$)」の場合を示したものであるが「AがBの右側($a>b$)」のときも①を計算すればよい．それは①が「絶対値」で表されていることにより，常に

(距離)≧0

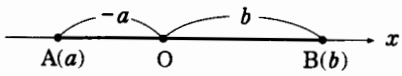
(等号はAとBが一致するとき)

と表現されるからである．

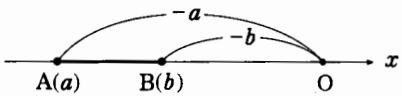
$0<a<b$のとき



$a<0<b$のとき



$a<b<0$のとき



(ⅱ)　分点の座標

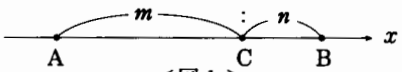
はじめに「**内分点**」，「**外分点**」のイメージをハッキリさせておかなければならない．

線分AB上に点Cがあって

$$AC:CB=m:n$$

$(m>0,\ n>0)$

であるとき，点Cは「**線分ABを$m:n$に内分する**」という．



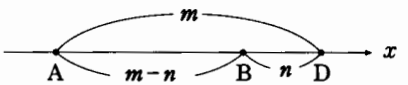
<図1>

また，線分ABの延長線上に点Dがあって

$$AD:DB=m:n \quad (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

であるとき，点Dは「**線分ABを$m:n$に外分する**」という．

このとき



<図2>

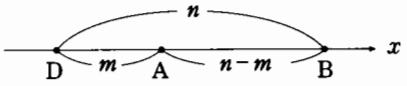
$m>n$ (>0)

ならば，点Dは線分ABのB側の延長上にあり(p.292〈図2〉)，言い方をかえると「点Bが線分ADを$(m-n):n$に内分している」ことに他ならない．

同様に

$n>m$ (>0)

のときは，点Dは線分ABのA側の延長上にあり，「点Aが線分DBを$m:(n-m)$に内分している」ことになる．



<図3>

ここで「線分の比の表示の仕方」について説明しておこう．たとえば

点Cが線分ABを$m:n$に内分する ⟵〈図1〉

というときは

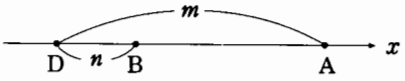
まず点Aから点Cを測り，次に点Cから点Bを測るとその比が$m:n$

ということで，これは「外分の場合(〈図2〉，〈図3〉)」も同様である．

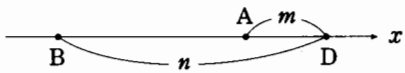
つまり線分ABが，点Bが点Aより左側に与えられたとしても「線分ABを$m:n$に内分(あるいは外分)する点C」は「上の約束」に従って定まるわけである．

内分のとき

外分$(m>n>0)$のとき



外分$(n>m>0)$のとき

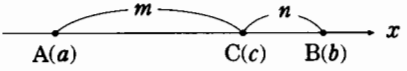


さて，このハナシを数直線上の点で説明しよう．2点A，Bを$A(a)$，$B(b)$ $(a<b)$と定め，「線分ABを$m:n$に内分する点を$C(c)$」とすると「$a<c<b$」であるから

$AC=|c-a|=c-a$ (>0)

$CB=|b-c|=b-c$ (>0)

$AC:CB=m:n$



で，実際にこの比を計算すると

$(c-a):(b-c)=m:n$

$\therefore\quad m(b-c)=n(c-a)\qquad \therefore\quad c=\dfrac{na+mb}{m+n}$ ……①

$\left(\text{特に「}m=n\text{（C が AB の中点）」のとき} \longrightarrow c=\dfrac{a+b}{2}\right)$

の形で「**点 C の座標**」が求められる.

「$a>b$」のときは 2 点 A, B の位置が逆になるが,「$a>c>b$」で

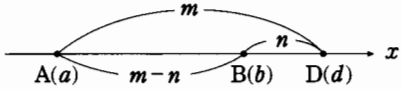
$$\left.\begin{aligned} &AC=|c-a|=a-c \\ &CB=|b-c|=c-b \\ &AC:CB=m:n \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \begin{aligned} AC:CB&=(a-c):(c-b) \\ &=(c-a):(b-c) \\ &=m:n \end{aligned}$$

で, ①と同じ式が得られる.

「線分 AB を $m:n$ に外分する点 D(d)」の座標も同様にして計算される.

「$m>n$ (>0)」の場合は

$$AD=|d-a|=d-a \quad (>0)$$
$$DB=|b-d|=d-b \quad (>0)$$
$$AD:DB=m:n$$
$$\therefore \quad (d-a):(d-b)=m:n$$
$$\therefore \quad m(d-b)=n(d-a)$$
$$\therefore \quad d=\frac{-na+mb}{m-n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{①で } n \text{ を } -n \text{ におきか}\\ \text{えたものになっている!!}\end{array}\right)$$



また「$n>m$ (>0)」の場合は

$$d=\frac{na-mb}{-m+n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{①で } m \text{ を } -m \text{ におきか}\\ \text{えたものになっている!!}\end{array}\right)$$

である——これらについては無理に覚えることはないが, 実際に計算をして確かめておくとよい.

なお, これらの「公式」は 2 点 A, B の位置が逆になっていてもそのまま成立する.

注❶ いずれにしてもこれらの「公式」は覚えにくい. ①では「C の座標」を与える分数式の分子で「**m と n とがたすきがけ**」になっていることに注意するとよい. また②, ③の「符号の覚え方」については本文中に示した.

注❷ 「**外分の公式②, ③**」は「**内分の公式①**」**を用いて導くことが出来る.** たとえば「$m>n$ (>0)」の場合で言うと,「点 B は線分 AD を $(m-n):n$」に内分している——「公式①」をそのまま利用する. すなわち

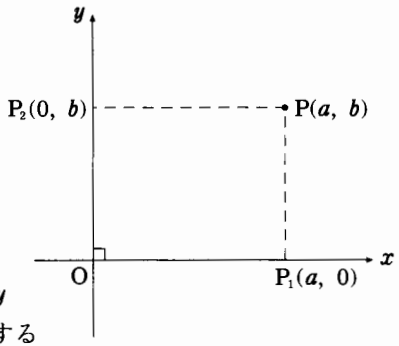
$$b=\frac{na+(m-n)d}{(m-n)+n} \quad \therefore \quad mb=na+(m-n)d$$

$$\therefore \quad d=\frac{-na+mb}{m-n} \longleftarrow \text{これは「公式②」に他ならない!!}$$

「公式③」についても同様に考えればよい——「外分の公式」は特に覚えなくてもよいが「内分の公式」から誘導出来るようにしておきたい.

(2)　平面上の点の座標

平面上に「直交する2直線」を図のようにおき，「左右の方向の直線を x」，「上下の方向の直線を y」とよぶことにする．



いま x，y の交点を O とし，x，y はともに O を原点とする「数直線」であるとする．

この平面上の任意の1点 P から x，y に引いた垂線の足をそれぞれ P_1，P_2 とすると，この点 P に対して P_1 と P_2 との組$(P_1,\ P_2)$はただ1組だけ対応している．

逆に x，y 上の点 P_1，P_2 における垂線を考えると，この2つの垂線はただ1点(これを P とおく)で交わることも明らかである．

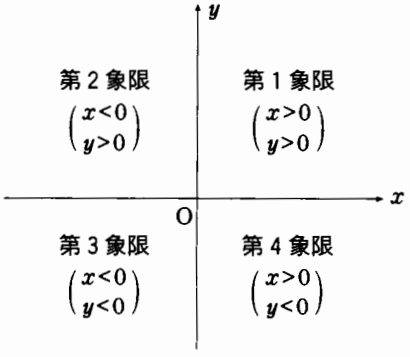
したがって点 P と$(P_1,\ P_2)$とは「1対1」に対応している．

さらに，「x は数直線」であるから点 P_1 には「その座標 a」が「1対1」に対応し，全く同様に「数直線 y」上の点 P_2 にも「その座標 b」が「1対1」に対応している．したがって**平面上の点 P に対して**

$(a,\ b)$ ⟵ 2つの実数 a，b の組(ペアー)

がただ1通り(1対1)に対応していることがわかる——平面上の点 P が「2つの実数の組$(a,\ b)$」で表された．

このとき，上に述べた「2つの数直線 x，y」をそれぞれ**「x 軸」，「y 軸」**とよび，このような平面を**「座標平面」**という．O は**「(座標の)原点」**である．また，$(a,\ b)$を**「点 P の座標」**，a を**「点 P の x 座標」**，b を**「点 P の y 座標」**という．



( ) 内はその象限に属する点の x，y 座標の符号を示したものである．

「座標平面」は「両座標軸(x 軸，y 軸)」によって4つの部分に分けられる．それらの部分を，図に示すように**「第1象限(しょうげん)」，「第2象限」，「第3象限」，「第4象限」**という．ただし座標軸上の点はどの象限にも属さないものとする．

以下，このような「座標平面」を利用して，図形のいろいろな性質を調べ

ていくことにする.

(i) 2点間の距離の公式

「x, y 座標」の入った平面を「**x-y 平面**」という.

2点間の距離の公式

「x-y 平面」上の2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離 AB は次の式で与えられる.

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$(=\sqrt{(x\text{ 座標の差})^2+(y\text{ 座標の差})^2})$$

解　説　図で, 2点 A, B から x 軸に下した垂線の足を A′, B′, y 軸に下した垂線の足を A″, B″ とし, 垂線 AA″ と BB′ との交点を C とすると

$$A'B'=|x_2-x_1|,\quad A''B''=|y_2-y_1|$$

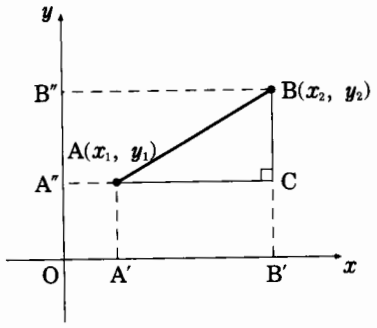
で, △ABC は

$$\angle C=90^\circ$$

の直角三角形であるから「**ピタゴラスの定理**」を用いると

$$AB^2=AC^2+BC^2$$
$$=A'B'^2+A''B''^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$\therefore\quad \mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$(=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2})$$

である.



らしんばん

➔ これは「**数直線上の2点間の距離**」のハナシ(p.292)を「x-y 平面」上のハナシに拡張したものと考えればよい.

➔ この公式により, **原点から点 $P(a, b)$ までの距離**は次の式で与えられる.

$$OP=\sqrt{a^2+b^2}$$

例題 1

△ABC において, BC の中点を M とするとき

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

が成り立つことを証明せよ.　　(パップスの中線定理)

解　説　本問のように**座標軸が与えられていないときは，座標軸を適当に設定して考える**．このとき座標軸のとり方によっては，あとの計算がメンドウになってしまったりするので注意しなければならない．

一般性を重視して，3点A，B，Cを

$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$，$C(c_1,\ c_2)$

などとしてもよいが，「**どこか都合のよい点に原点を定め，与られた条件がなるべく簡単に表せるように座標軸をとる**」方が便利である――そのように少し工夫をする．本問で言えば「BCが“主役”」であることに注意して

(i)　**1つの頂点Bを原点とし，BC方向にx軸をとる**

(ii)　**辺BCの中点Mを原点とし，BC方向にx軸をとる**

などのとり方が考えられるが，ここでは(ii)でやってみることにしよう．

そうすると3点A，B，Cの座標はそれぞれ

$A(a,\ b)$，$B(-c,\ 0)$，$C(c,\ 0)$

とおくことが出来るから

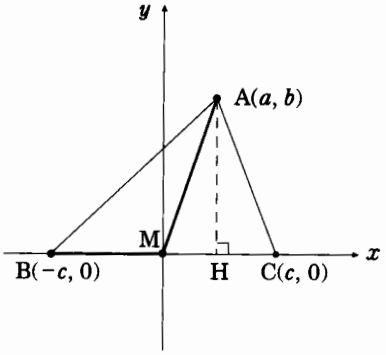
$$AB^2+AC^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$2(AM^2+BM^2)=2\{(a^2+b^2)+c^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$

となり，これより

$$\mathbf{AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)}$$

が成り立つ．



らしんばん

本問の「**初等幾何**」としての扱いは，点AからBCに垂線AHを下すと

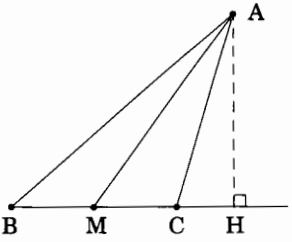
$$AB^2=AH^2+BH^2=AH^2+(BM+MH)^2$$

$$AC^2=AH^2+CH^2=AH^2+(MH-CM)^2$$

ここで，「BM＝CM」に注意してこの2式の辺々を加えると

$$AB^2+AC^2=2AH^2+2BM^2+2MH^2=2\{(AH^2+MH^2)+BM^2\}=2(AM^2+BM^2)$$

$AH^2+MH^2=AM^2$



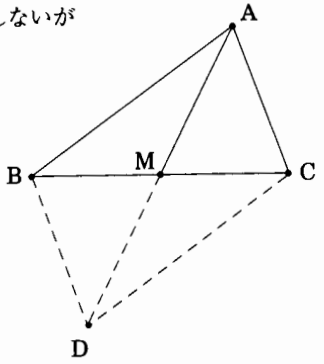
（Hがこのような位置でもかまわない）

となる．

BC の中点を M としたのだからこの「定理の式」は B と C に関して「対称性」があるのではないか．上の形ではハッキリしないが

$$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$$
$$=2AM^2+BM^2+CM^2$$

と書き直してみるとよい．



右図のように，△ABC を点 M のまわりに180°回転した △DCB を補い，□（平行四辺形）ABDC を考えると

$$AM=DM$$
$$\therefore\quad AB^2+AC^2=AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$$

が得られる．両辺に 2 をかけると

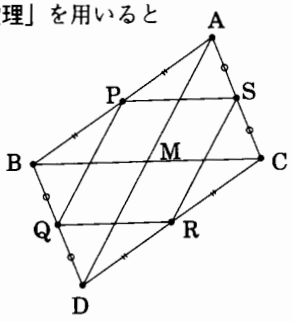
平行四辺形の各辺の 2 乗の和＝ 2 ×（ 4 本の半対角線の 2 乗の和）

が確かめられる．

また，上の AM，BM，CM，DM を適当に平行移動すると，右図のような □PQRS を作ることが出来る．これに「**中点連結定理**」を用いると

$$AM \parallel PQ$$
$$BM \parallel QR$$
$$CM \parallel SP$$
$$DM \parallel RS$$

（このことから □PQRS が □ABDC に内接することがわかる．）



これより

□ABDC の各辺の 2 乗の和
＝ 2 ×（□PQRS の各辺の 2 乗の和）

であることもわかる．

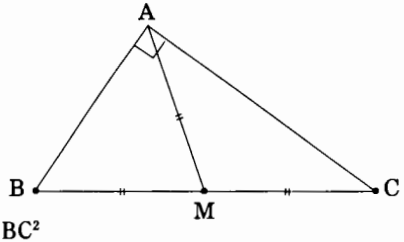
ただし，△APS と △BPQ は一般には「∠A≠∠B」から合同とはいえない．

また，□ABDC と □PQRS は一般には相似ではない――いろいろな場合の図を描いて確かめてみるとよい．

△ABC が「**∠A＝90°**」の**直角三角形**のとき，斜辺 BC の中点Mは「△ABC の外心」である．すなわち

$$AM=BM=CM$$

であるから，この「定理の式」の右辺は



$$2(AM^2+BM^2)=4BM^2=(2BM)^2=BC^2$$
$$\therefore\quad AB^2+AC^2=BC^2 \longleftarrow\!\!\!\!- AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

で，これは「**ピタゴラスの定理**」そのものである．

(ii)　分点の公式

これも「**数直線**」上の「**分点の座標**(p.292)」を「**x-y 平面**」上のハナシに拡張したものと考えればよい．

「内分点」を与える公式

「x-y 平面」上の2点を $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ とするとき，線分 AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点 C の座標は

$$C\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n}\right)$$

である．

解　説　点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$，$C(x,\ y)$ から x 軸に垂線 AA′，BB′，CC′ を下すと

$$AA' /\!/ CC' /\!/ BB'$$

$$\therefore\ AC:CB=A'C':C'B'=m:n \longleftarrow \text{平行線と比例の関係!!}$$

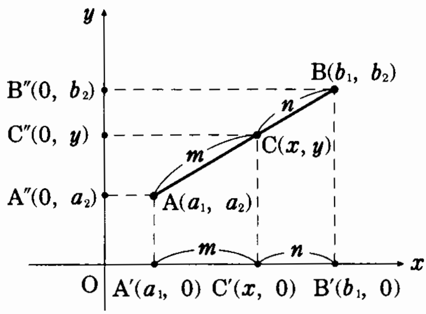
すなわち，点 C′ は線分 A′B′ を「$m:n$」に内分する点である．

このことから「x 軸」上で「**数直線**」上の「**分点の座標**(p.292)」がそのまま利用出来る―― $A'(a_1,\ 0)$，$B'(b_1,\ 0)$，$C'(x,\ 0)$ であるから

$$x=\frac{na_1+mb_1}{m+n}$$

同様に「y 軸」上で考えると $A''(0,\ a_2)$，$B''(0,\ b_2)$，$C''(0,\ y)$ であるから

$$y=\frac{na_2+mb_2}{m+n}$$



である．このことから $C(x,\ y)$ の x，y にこれらを入れて

$$C\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

となる．

らしんばん

➡ 「外分」のときもハナシは同様である．「外分点」を D とすると

$$m>n\ (>0)\text{のとき} \longrightarrow D\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n}\right)$$

$$n>m\ (>0)\text{のとき} \longrightarrow D\left(\frac{na_1-mb_1}{-m+n},\ \frac{na_2-mb_2}{-m+n}\right)$$

として求められる．要するに「x 座標」，「y 座標」に分けて，それぞれを計算すればよい――特に覚えておく必要はない．

「ベクトル」を学んでいれば「**線分 AB を $m:n$ ($m>0$, $n>0$) に内分する点 C**」の「位置ベクトル」は

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n} \longleftarrow \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB} \text{ は点 A, B の位置ベクトル!!}$$

で与えられることがわかる．本文中の①は，これを成分表示したものである．

「外分の場合」も全く同様に上に述べた D と同じ結果が得られる——このハナシは「代数・幾何」で詳しく述べることにする．『諸橋の代数・幾何講義(p.33以下)』を参照!!

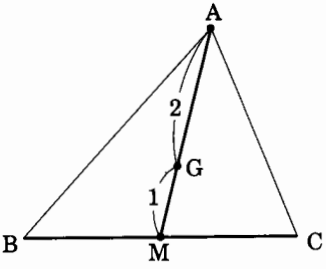
例題 2

△ABC の 3 頂点の座標を $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$, $C(c_1,\ c_2)$ とするとき，△ABC の重心 G の座標が

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

で与えられることを示せ．

解　説　三角形の 3 本の中線は 1 点 G で交わる．この交点 G を「**三角形の重心**」という．さらにこの G は 3 本の中線を「2：1」に内分する点で，たとえば右図で説明すると



$$\mathbf{AG:GM=2:1}$$

である——この「初等幾何」の知識はわかっているものとしてハナシを進めることにする．

BC の中点 M の座標を $M(m_1,\ m_2)$ とすると

$$m_1=\frac{b_1+c_1}{2},\ m_2=\frac{b_2+c_2}{2} \longleftarrow \text{M は BC の中点!!}$$

さらに重心 G の座標を $G(x,\ y)$ とすると

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a_1+2m_1}{2+1}=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\\ y&=\frac{a_2+2m_2}{2+1}=\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

である．

らしんばん

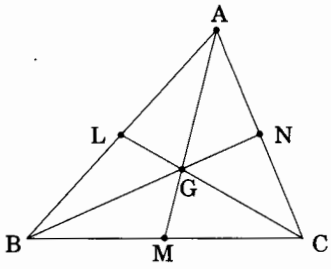
本問で求めた「**G(重心)の座標**」は，きわめてスッキリとした形をしている——「公式」として覚えておくとよい．

本文では「初等幾何における重心についての知識」を用いて

△ABC の辺 BC の中点を M
AM を 2：1 に内分する点を G

$\longrightarrow$ $G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

として求めたが，実は「これらの知識」は上の計算から自動的に得られることがらである．つまり



辺 CA の中点を N として線分 BN を 2：1 に内分する点 G′
辺 AB の中点を L として線分 CL を 2：1 に内分する点 G″

の座標がいずれも

$\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ ←「対称性」から当然!!

であり，G，G′，G″ が一致することがわかる．すなわち

AM，BN，CL は 1 点 G で交わり G は各中線を 2：1 に内分する

として「図形的な意味」が確認される．

2　座標軸と「直線」の表現

(1)　直線の方程式

「直線」を決定するものは「通過する 1 点」と「方向」である．以下，「直線」についてはこのことに注意して読み進めるとよい．

次のようにまとめておく．

直線の方程式

「x-y 平面」上の直線は次の方程式で表される．

(Ⅰ) $\begin{cases} y=mx+n \longleftarrow y \text{ 軸に平行でないときの表現} \cdots\cdots① \\ x=k \longleftarrow y \text{ 軸に平行なときの表現} \cdots\cdots② \end{cases}$

(Ⅱ) $ax+by+c=0$　(a，b，c は定数．ただし $a^2+b^2 \neq 0$)

(Ⅲ) $\begin{cases} x=x_0+tm_1 \\ y=y_0+tm_2 \end{cases}$　(「直線のパラメーター表示」という．x_0，y_0，m_1，m_2 は定数，$m_1^2+m_2^2 \neq 0$)

解　説　「x-y 平面」上の直線を表すには，大きく分けて上に述べた 3 つの形があり，どの形でも表すことが出来る．順に説明していこう．

(Ⅰ)について：これは中学で学んだ「直線の表現」である．本書でも「1次関数のグラフ」としてすでに説明した(p.239以下)．

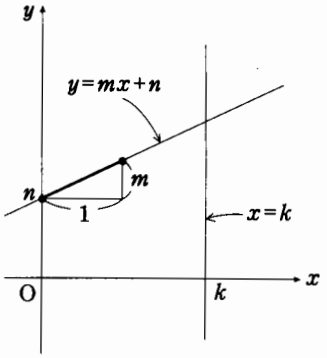
方程式

$y=mx+n$ ←―― 本文①

のグラフ(図形)は

$\begin{cases}\text{点}(0,\ n)\text{を通る}\\ \text{傾き：}m \longleftarrow \text{方向!!}\end{cases}$

の「直線」である．「n」をこの直線の「**y切片**」という．



ここで注意しておかなければならないことがある．それは

y軸に平行な直線は①の形では表せない

ということで，この場合，直線がx軸上の点$(k,\ 0)$を通るならば

$x=k$ ←―― 本文②

のように，①とは別の形で表さなければならない――「$k\neq 0$」のときは「y切片n」が存在せず，「$k=0$」のときは定まらないからである．また，このときはトウゼン「傾き」も決まらない．これを安易に「$m=\infty$」などとしてはならない．このようにして

「x-y平面上の直線」は①または②の形ですべて表される

ことがわかる．

(Ⅱ)について：(Ⅰ)の①，②はそれぞれ

①：$-mx+y-n=0$　　②：$x+0\cdot y-k=0$

としていずれも

$ax+by+c=0$ **(a, bは「$a=b=0$」を除く($a^2+b^2\neq 0$)定数)** …③

の形で表すことが出来る．逆に③は「$b\neq 0$」のときは両辺をbで割って

$\frac{a}{b}x+y+\frac{c}{b}=0$　　$\therefore\quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ←―― (Ⅰ)の①の形!!

「$b=0$」のときは「$a\neq 0$」であるから両辺をaで割って

$x+0\cdot y+\frac{c}{a}=0$　　$\therefore\quad x=-\frac{c}{a}$ ←―― (Ⅰ)の②の形!!

と同値変形され，結局(Ⅰ)の2つのタイプを(Ⅱ)の形にまとめて表すことが出来る．(Ⅱ)の形の方程式を「(2元)1次方程式」とよび，**「x-y平面上の直線」は「(2元)1次方程式のグラフ」としてとらえられる．**

なお，③で表される直線が「点A$(x_1,\ y_1)$」を通るならば

グラフ上の点はその方程式を満たす

からこれを③に代入して

$ax_1+by_1+c=0$ ←――― $(x_1,\ y_1)$ は③を満たす

$\therefore\quad c=-(ax_1+by_1)$

これを③に入れると

$ax+by-(ax_1+by_1)=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)=0}$ ……④

となり，点 $A(x_1,\ y_1)$ を通る直線の「(Ⅱ)の形の表現」が得られる．

(Ⅲ)について：これを直線の「パラメーター(媒介変数)表示」という．

$$\begin{cases} x=x_0+tm_1 \\ y=y_0+tm_2 \end{cases} \left(\begin{array}{l} x_0,\ y_0,\ m_1,\ m_2\text{は定数で「}m_1 \\ =m_2=0\text{」を除く}(m_1^2+m_2^2\neq 0) \end{array}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

このとき「t は実数全体を動く変数」で，x と y とを結びつける「パラメーター(媒介変数)」である．このとき，⑤から t を消去して「x と y との関係」を直接に表すことも出来る．すなわち

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}\ (=t) \longleftarrow \left(\begin{array}{l} \text{⑤の } x_0,\ y_0 \text{ を左辺に移項して} \\ \text{それぞれ } m_1,\ m_2 \text{ で割った!!} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} m_1=0 \text{ のときは } m_2\neq 0 \longrightarrow x=x_0,\ y \text{ は任意の実数!!} \\ m_2=0 \text{ のときは } m_1\neq 0 \longrightarrow y=y_0,\ x \text{ は任意の実数!!} \end{array}\right)$$

分母を払って整理すると

$$\boldsymbol{m_2(x-x_0)-m_1(y-y_0)=0}$$

(←――― ⑤で「$x\times m_2-y\times m_1$」を計算しても得られる)

のように，(Ⅱ)の④で見た形の「x と y の1次方程式」となり，点 $(x_0,\ y_0)$ を通る直線であることがわかる．

逆に，この式と(Ⅱ)の④をにらみあわせると

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=x_1+tb \\ y=y_1-ta \end{cases},\ \text{または} \begin{cases} x=x_1-tb \\ y=y_1+ta \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

のように，(Ⅱ)の形で与えられる直線が(Ⅲ)の形に「パラメーター表示」されることもわかる．

らしんばん

➔ (Ⅰ)，(Ⅲ)の「ベクトル的な理解」について――

$y=mx+n$ (←――(Ⅰ)の①) ……(＊)

の「傾き m」をベクトルで表せば，「直線(＊)」の「方向ベクトル」は

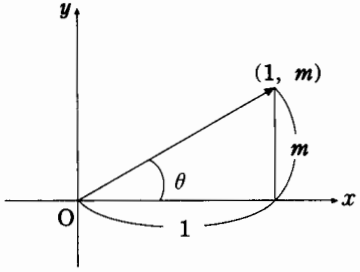
$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}\ (=\vec{m})$$

である．これを図のようにとり，これと「x 軸の正方向」とのなす角を「θ (シーターと読め)」とすれば

$$m=\tan\theta$$

である．この角 θ を「直線(＊)の方向角」という．このとき「$\theta=90°$」では「$\tan\theta$」が定義されないので

(＊)の形では「y 軸に平行な直線」を表すことが出来ない．



そこで

$$x=k \quad (\longleftarrow\text{(Ⅰ)の②}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

で「y 軸に平行な直線」を補うことになるわけである．

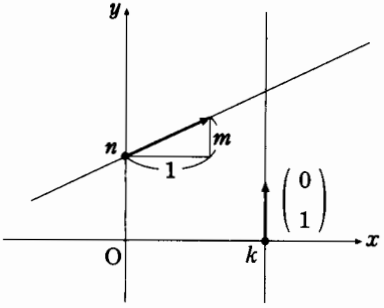
なお，(＊)，(＊＊)を「ベクトル方程式」を用いて表すと

$$(*) \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{通過点：}\quad (0,\ n)\\ \text{方向ベクトル：}\quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}\end{array}\right)$$

$$(**) \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{通過点：}\quad (k,\ 0)\\ \text{方向ベクトル：}\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{array}\right)$$



となる——『諸橋の代数・幾何講義(p.213)』参照!!

一方(Ⅲ)については

$$\begin{cases} x=x_0+tm_1 \\ y=y_0+tm_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

であり，これは「ベクトル方程式そのもの」である．すなわち

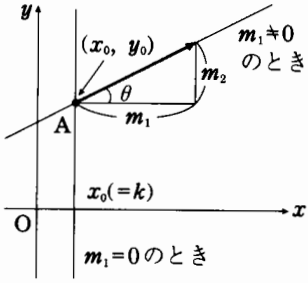
通過点：　$A(x_0,\ y_0)$

方向ベクトル：　$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$

で，「$m_1 \neq 0$」ならば

$$\tan\theta=\frac{m_2}{m_1}=m \longleftarrow \text{傾き!!}$$

「$x=0$」とすると



$t=-\dfrac{x_0}{m_1}$ ⟵ (y 軸との交点を与える t の値!!)

$\therefore\quad y=y_0+\left(-\dfrac{x_0}{m_1}\right)m_2=\dfrac{m_1y_0-m_2x_0}{m_1}=n$ ⟵ y 切片!!

で，簡単に「(Ⅰ)の①(あるいは(＊))の形」への変形が了解される．

「$m_1=0$」のときは「$m_2\neq0$」であるから

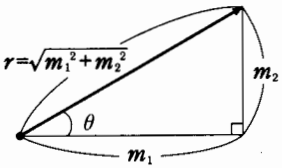
$x=x_0=k$ ($y=y_0+tm_2$ ⟵ 任意の実数!!) ⟵ (Ⅰ)の②の形!!

となり，これはあらためて説明するまでもない．

また(＊＊＊)で

$\sqrt{m_1^2+m_2^2}=r$

とおくと



$m_1=r\cos\theta$，$m_2=r\sin\theta$

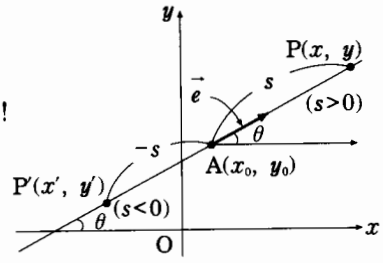
と表され，これを(＊＊＊)に入れると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+tr\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

であるが，ここであらためて「$tr=s$」とおくと

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

⟵ $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\vec{e}$ は単位ベクトル!!

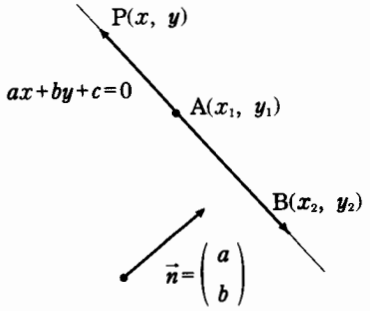


で，やはり(Ⅲ)の形の「パラメーター表示」となる．このとき直線上の点をP(x, y)として2点A，P間の距離を求めると

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(s\cos\theta)^2+(s\sin\theta)^2}$$
$$=|s|\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=|s|$$

すなわち「パラメーター s」の絶対値 $|s|$ は「線分APの長さ」を与えていることがわかる――図のPは「$s>0$」のときを，P′は「$s<0$」のときを示している――このような表現が好都合な場合もある．

以下，詳しくは『諸橋の代数・幾何講義(p.40)』を参照されたい．



➔ (Ⅱ)のベクトル的な理解について――

$ax+by+c=0$ ……(＊＊＊＊)

の係数 a，b を成分とするベクトル

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ($=\vec{n}$ とおく)

は，(＊＊＊＊)の表す直線に垂直なベクトルで，「直線(＊＊＊＊)」の「**法線ベクトル**」という．このことは

(ベクトルが垂直)⟺(内積)＝0

を用いると簡単に確認することが出来る．

「直線(＊＊＊＊)」上に2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ をとると

$$\left.\begin{array}{l} ax_1+by_1+c=0 \quad \therefore \quad ax_1+by_1=-c \\ ax_2+by_2+c=0 \quad \therefore \quad ax_2+by_2=-c \end{array}\right\rangle \longleftarrow \begin{pmatrix}\text{直線上の点は}\\ \text{代入して成立!!}\end{pmatrix}$$

であるから「$\vec{n}$ と $\overrightarrow{AB}$ との内積」を計算すると

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{pmatrix}=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)$$

$$=(ax_2+by_2)-(ax_1+by_1)=(-c)-(-c)=0$$

すなわち，**$\vec{n}$ と $\overrightarrow{AB}$ は垂直**である．

このことがわかっていると，点 $A(x_1,\ y_1)$ を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線の方程式は，その直線上の点を $P(x,\ y)$ として

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Longleftrightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

であることが「ただちに」わかる．このハナシも

通る点：$A(x_1,\ y_1)$，垂直方向のベクトル：$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\text{方向ベクトルは}\begin{pmatrix}b\\ -a\end{pmatrix},\ \text{または}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}\text{で，この直線の}\\ \text{「パラメーター表示」は本文⑥を参照!!}\end{pmatrix}$$

を与えることにより，「通過点」と「方向」で直線を表しているわけである．

このように，**ある直線の垂直方向のベクトル(法線ベクトル)がわかると，2直線の「垂直条件」，「平行条件」などをきわめてスッキリした形でとらえることが出来る**．このことはあとで詳しく説明する(p.309)．

例題 3

次の直線の方程式を求めよ．

(1) 点(2, 3)を通り，傾きが−4の直線

(2) 2点 A(3, −1)，B(−2, 4)を通る直線

(3) x 軸と P(2, 0)，y 軸と Q(0, 3)で交わる直線

解　説　(1)「**傾き**」が「**−4**」と与えられているからこれは「(Ⅰ)の①**のタイプ**」として求めるとよい．すなわち求める直線の方程式は

$y=-4x+n$ ←――「$m=-4$」をそのまま用いる（代入する）!!

とおくことが出来る．

次に，この直線が点(2, 3)を通るから「$x=2$, $y=3$」を代入して

$3=(-4)\cdot 2+n$ ←── グラフ上の点は代入して成立!!

$\therefore\ n=3+8=11$ 　 $\therefore\ y=-4x+11$

(2)　**直線 AB が y 軸に平行でないからこれも「(Ⅰ)の①のタイプ」で求める**──求める直線の方程式を

$$y=mx+n$$

とおくと，これは2点A, Bを通るから

A(3, −1)を代入 ──→ $-1=3m+n$
B(−2, 4)を代入 ──→ $4=-2m+n$ 　←── 連立方程式!!

$\therefore\ m=-1,\ n=2$ 　 $\therefore\ y=-x+2$

（(Ⅱ)にしたがって，求める直線の方程式を「$ax+by+c=0$」とおいて求めてもよい──各自でやってみること!!）

(3)　直線PQが y 軸に平行でないことは(2)と同様だから「(Ⅰ)①のタイプ」として求めてもよいが，ここでは「(Ⅱ)のタイプ」の扱い方の例として説明しよう．求める直線の方程式を

$$ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，これは2点P(2, 0), Q(0, 3)を通るから

P(2, 0)を代入 ──→ $2a+c=0$ 　 $\therefore\ a=-\dfrac{c}{2}$

Q(0, 3)を代入 ──→ $3b+c=0$ 　 $\therefore\ b=-\dfrac{c}{3}$

これらを①に入れると

$$\left(-\frac{c}{2}\right)x+\left(-\frac{c}{3}\right)y+c=0$$

ここで「$c=0$」とおくと「$a=b=0$」となり，①が直線を表さないから「$c\neq 0$」として両辺を割ると

$$-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+1=0 \quad \therefore\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

らしんばん

➡ 本問の(1), (2)は「公式」として一般的な形でまとめておくとよい──本書では「1次関数のグラフ(p.244)」としてすでに説明した．

点 $A(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m ──→ $y-y_1=m(x-x_1)$ ………(＊)

2点 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ を通る ──→ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ …(＊＊)

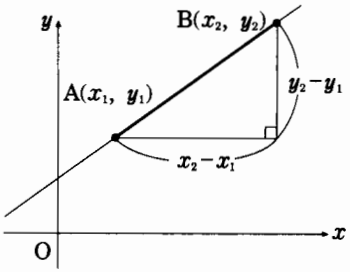
（「$x_1=x_2$」のときは「(Ⅰ), ②」から $x=k$ $(=x_1=x_2)$）

特に(**)の

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)$$

は，**「直線 AB の傾き」**で，「(*)の m」のことである．

また(**)では「通過点」に $A(x_1,\ y_1)$ をとっているが，$B(x_2,\ y_2)$ をとっても同じ結果となる——本問(2)で確かめてみるとよい．



このように，**「通過する 2 点」を与えても直線は決定**する．むしろ，この方が直線の本来の決まり方であるかもしれない——2 点 A，B を与えることで，**「通過する 1 点 A(あるいは B)」と「方向 $\overrightarrow{AB}$」が定まった**と見ることも出来る．

(3)について——(3)は分母を払わずに②の形で止めておいた．

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \longleftarrow \text{右辺が「1」であることに注目!!} \quad \cdots\cdots(***)$$

もちろん分母を払って

$$3x+2y=6 \qquad (\text{あるいは} 3x+2y-6=0)$$

の形で答を示してもよいが，(***)の形で止めたところに注目してもらいたい．

一般には「$p\neq 0,\ q\neq 0$」として

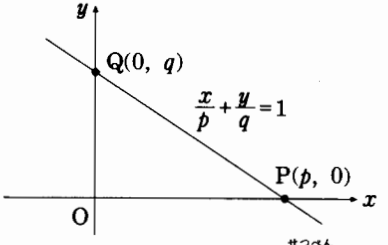
$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(****)$$

であるが，この形にしておくと

$$y=0 \longrightarrow x=p$$

$$x=0 \longrightarrow y=q$$

のように「x 軸との交点$(p,\ 0)$」と「y 軸との交点$(0,\ q)$」とが「式を見ただけで」すぐにわかる——「**x 切片が p，y 切片が q の切片形**」と言い，なかなか便利な表現である．これも「公式」として用いてよい．



このことから「(Ⅱ)のタイプ」の表現

$$ax+by+c=0 \longleftarrow (Ⅱ)$$

についても「0 でない x，y 切片」をもつのは，まず「$c\neq 0$」で，このとき「$a\neq 0,\ b\neq 0$」ならば(Ⅱ)は

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1 \longrightarrow x \text{ 切片}：-\frac{c}{a},\ y \text{ 切片}：-\frac{c}{b}$$

となり，これ以外の場合については「$c\neq 0$」のもとに

「$a=0,\ b\neq 0$」のとき：

$$y=-\frac{c}{b}\ (x \text{ 軸に平行な直線}) \longrightarrow x \text{ 切片}：\text{ナシ},\ y \text{ 切片}：-\frac{c}{b}$$

「$a \neq 0$，$b=0$」のとき：

$$x=-\frac{c}{a}\ (y\text{軸に平行な直線}) \longrightarrow x\text{切片}：-\frac{c}{a},\ y\text{切片}：\text{ナシ}$$

である．特に「$c=0$」のとき，(Ⅱ)は

$$ax+by=0$$

で，「$a \neq 0$，または$b \neq 0$」であるから

「$b \neq 0$」のとき「$a \neq 0$」ならば

$$y=-\frac{a}{b}x \left(\begin{array}{l}\text{原点を通る「正}\\ \text{比例」のグラフ}\end{array}\right) \longrightarrow x\text{切片}：0,\ y\text{切片}：0$$

このとき「$a=0$」ならば

$$y=0\ (x\text{軸そのもの!!}) \longrightarrow x\text{切片}：\text{ナシ},\ y\text{切片}：0$$

「$b=0$」のとき「$a \neq 0$」だから

$$x=0\ (y\text{軸そのもの!!}) \longrightarrow x\text{切片}：0,\ y\text{切片}：\text{ナシ}$$

である．

(2)　2直線の「平行条件」，「垂直条件」

2直線の位置関係で，特にハッキリしているのは**「平行」**と**「垂直」**の場合である．

平行条件，垂直条件

2直線の「平行条件」，「垂直条件」は

(1) $\begin{cases} y=mx+n \\ y=m'x+n' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{平行条件}：m=m' \\ \text{垂直条件}：mm'=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{平行条件}：ab'-a'b=0 \\ \text{垂直条件}：aa'+bb'=0 \end{cases}$

である．

解　説　(1)　これは「(Ⅰ)の①(p.302)」に示した「直線の表現」であるが，これには「(Ⅰ)の②(p.302)」のように「y軸に平行なもの」はすでに除かれてしまっている．しかし，直線

$$x=k \longleftarrow (\text{Ⅰ})②\text{のタイプ}\ (k,\ n\text{は任意})$$

に対して

$$\text{平行なもの}：\ x=k',\quad \text{垂直なもの}：\ y=n$$

は明らかだから，ここでは「(Ⅰ)①のタイプ」についてのみ解説することにする．

「平行条件」，「垂直条件」は「2直線の方向」に関する問題であるからそれぞれの「傾きm，m'」に注目すると

平行条件：$m=m'$

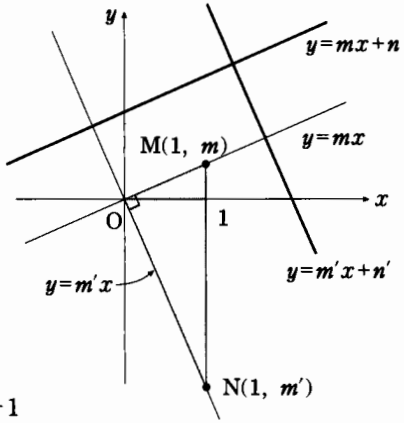
はすぐにわかる．特に「2直線が一致する条件」は「y切片についての条件 $n=n'$」がこれに加わることになる．

「垂直条件」については，これらの2直線を「原点を通るように平行移動」した上で「傾き m，m'」の関係を考えるとよい．

すなわち，2直線

$y=mx$，$y=m'x$

の「垂直条件」として考える．



$M(1,\ m)$，$N(1,\ m')$

に対して $\triangle OMN$ が「$\angle MON=90°$の直角三角形」であるから「ピタゴラスの定理」より

$MN^2=OM^2+ON^2$

これに平面上の「2点間の距離の公式(p.296)」を用いると

$(m-m')^2=(1^2+m^2)+(1^2+m'^2)$

$\therefore\quad -2mm'=2\qquad \therefore\quad mm'=-1$

すなわち

垂直条件：$mm'=-1$

であることがわかる．

(2)　2直線を「(1)の形」に書き直し，「(1)の結果」を利用する．

$ax+by+c=0$ ……①　　$a'x+b'y+c'=0$ ……②

(i)「平行条件」について――

①が「y軸に平行でない」ならば「$b\neq 0$」で，このとき①に平行な②も「y軸に平行でない」から「$b'\neq 0$」である．すなわち

$$①\longrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\quad\left(-\frac{a}{b}=m\text{とおく}\right)\quad\cdots\cdots①'$$

$$②\longrightarrow y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}\quad\left(-\frac{a'}{b'}=m'\text{とおく}\right)\quad\cdots\cdots②'$$

ここで「①′，②′の傾き m，m'」に注目すると

$$m=m'\Longleftrightarrow -\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}\qquad\therefore\quad ab'-a'b=0\quad\cdots\cdots③$$

①が「y軸に平行」なときは「$b=0$ $(a\neq 0)$」で，このとき①に平行な②も「y軸に平行」で，「$b'=0$ $(a'\neq 0)$」である――これは③に含まれる．まとめると

平行条件：$ab'-a'b=0$

となる．

なお，2直線が一致するときは

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\left(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \Longleftrightarrow ab'-a'b=0\right)$$

（「$a'=0$」のときは「$a=0$」，「$b'=0$」のときは「$b=0$」，「$c'=0$」のときは「$c=0$」と約束しておく!!これは $a=a'k$，$b=b'k$，$c=c'k$（与式$=k$）のことである．）

の形で覚えておくとよい．具体的な例で示しておこう．

①：$2x+3y+4=0$　　②：$4x+6y+8=0$

とすると

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\left(=\frac{1}{2}\right)$$ ←――― ②は①の両辺を2倍したもの!!

という程の意味である．

(ii) **「垂直条件」について――**

まず，①，②がともに「両軸（x 軸，y 軸）」に平行でないときを考える（←――たとえば①が「x 軸に平行」のときは，これと垂直な②は「y 軸と平行」になり「$m=0$，m' は意味なし」などが起こる）．

このとき，a，b，a'，b' はいずれも0でなく，したがって m，m' はともに意味をもち

$$mm'=-1 \Longleftrightarrow \left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$$

$$\therefore\quad aa'+bb'=0 \quad\cdots\cdots④$$

①が「y 軸に平行」なときは「$b=0$（このとき $a\neq 0$）」で，①と垂直である②は「x 軸に平行」，したがって「$a'=0$（$b'\neq 0$）」となり，これらは④を満たす．

また，①が「x 軸に平行」なときは「$a=0$（$b\neq 0$）」で，①と垂直な②は「y 軸に平行」，したがって「$b'=0$（$a'\neq 0$）」となり，やはり④を満たす――いずれの場合も「垂直条件」として④に含まれる．

すなわち，これらをまとめて

垂直条件：$aa'+bb'=0$

である．

らしんばん

「2直線のなす角」について――

「直線の傾き m」は，直線が「x 軸の正方向となす角」を θ とするとき**「$\tan\theta$」**で与えられることはすでに述べた(p.304)――$m=\tan\theta$．

そこで2直線

$y=mx+n,\ y=m'x+n'$

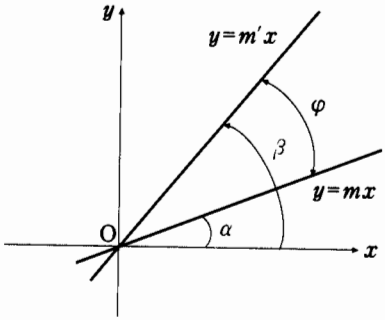
を，原点を通るように平行移動して

$l_1 : y=mx,\ l_2 : y=m'x$

で考える——右図．このとき

$m=\tan\alpha,\ m'=\tan\beta$

とすると「**直線 l_1 から直線 l_2 を測る角**」は$(\beta-\alpha)$であるから『諸橋の基礎解析講義(p.70)』の「**tan の加法定理**」を用いると



$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{m'-m}{1+mm'} \longleftarrow \begin{pmatrix}\beta-\alpha\text{ は }l_1\text{ から }l_2\\ \text{へ測る角とする}\end{pmatrix}$$

である．単に「**2 直線のなす角 φ(ファイと読め!!)**」というときは，「$0°\leqq\varphi\leqq90°$」で考えるから，次の計算をすれば φ は求められる．すなわち

$$\tan\varphi=|\tan(\beta-\alpha)|=\frac{|m'-m|}{1+mm'} \quad \cdots\cdots(*)$$

ここでは「垂直条件」を求めるのだが，いま(*)で

$1+mm'=0 \quad \therefore \quad mm'=-1$

とすると $\tan\varphi$ が定義されない．このような φ は90°である．

すなわち，「**垂直条件**」は「$mm'=-1$」である．「$\tan\varphi$ が定義されない条件」を求めるのは少しキモチワルイが，一応のナットクは出来るだろう．

また，2直線 l_1，l_2 の「**方向ベクトル**」を $\vec{m}$，$\vec{m'}$ として「**ベクトルの内積**」を利用してもよい．$\vec{m}$，$\vec{m'}$ のなす角を θ とすると

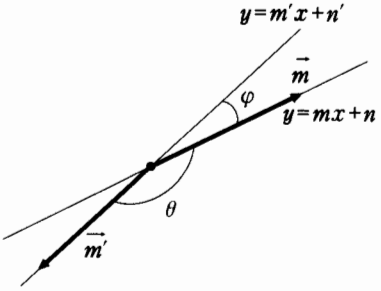
$$\vec{m}\cdot\vec{m'}=|\vec{m}||\vec{m'}|\cos\theta,\ \vec{m}=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix},\ \vec{m'}=\begin{pmatrix}1\\ m'\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{m'}}{|\vec{m}||\vec{m'}|}=\frac{1+mm'}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+m'^2}} \longleftarrow \begin{pmatrix}\theta\text{ は「方向ベクト}\\ \text{ル」のなす角!!}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \cos\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{m'}|}{|\vec{m}||\vec{m'}|} \longleftarrow \begin{pmatrix}\varphi\text{ は「2 直線」}\\ \text{のなす角!!}\end{pmatrix}\cdots(**)$$

$$=\frac{|1+mm'|}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+m'^2}}$$

ここで「$\cos\varphi=|\cos\theta|$」のように「絶対値」をつけて表す理由は，「方向ベクトルのなす角」は「90°を越えるときもあり得る」のに対して，「直線には方向性がない」ため「$0°\leqq\varphi\leqq90°$」で考えるからである．



いずれにせよ「2直線のなす角 φ」は上の「$\cos\varphi$」で求められ，特に「**2直線が垂直**」のときは

$$\cos\varphi=0 \quad \therefore \quad 1+mm'=0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{mm'=-1}$$

と「垂直条件」が導かれる．ただし，「この場合の2直線」からは「y 軸に平行なものは除かれている」から注意しなければならない．

➔ (2)については「**法線ベクトル**」が利用出来る．

$$ax+by+c=0 \longrightarrow \text{法線ベクトル}：\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$a'x+b'y+c'=0 \longrightarrow \text{法線ベクトル}：\vec{n'}=\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$$

であった．このことから

「**平行条件**」⟶「**法線ベクトル**」が平行!!

$$\therefore \quad \vec{n}/\!/\vec{n'} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{ab'-a'b=0}$$

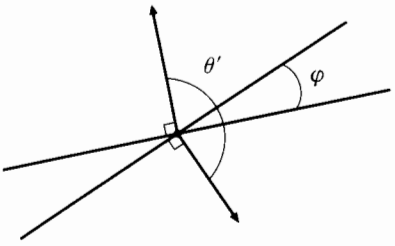
$\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$，または$k\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$から$k$を消去!!$\right)$

「**垂直条件**」⟶「**法線ベクトル**」が垂直!! ⟶(**内積**)$=0$

$$\therefore \quad \vec{n}\cdot\vec{n'}=\boldsymbol{aa'+bb'=0}$$

このように「ベクトル」で考えると「傾き」で考えるのと違って「分母$\neq 0$」にこだわらなくてよいので，なかなか便利である．

また，「2直線のなす角」については，「法線ベクトルのなす角をθ'」とすると



$$\vec{n}\cdot\vec{n'}=|\vec{n}||\vec{n'}|\cos\theta'$$

$$\therefore \quad \cos\theta'=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}||\vec{n'}|}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\cos\varphi=|\cos\theta'|}$$

$$=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n'}|}{|\vec{n}||\vec{n'}|}=\frac{|\boldsymbol{aa'+bb'}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}\sqrt{\boldsymbol{a'^2+b'^2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\boldsymbol{***})$$

である．この場合も「法線ベクトルのなす角 θ'」と「2直線のなす角 φ」とは違うので注意しなければならない．

なお，この場合も2直線の「方向ベクトル」を

$$\vec{m}=\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}, \text{ あるいは}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}, \quad \vec{m'}=\begin{pmatrix}b'\\-a'\end{pmatrix}, \text{ あるいは}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$$

として(**)に入れて「方向ベクトルのなす角 θ」から φ を求めても

$$\cos\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{m'}|}{|\vec{m}||\vec{m'}|}=\frac{|aa'+bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

のようにトウゼン同じ結果となる.

(*)～(****)のどれを用いても「2直線の位置関係」を「平行, 垂直」以外の場合についてもいくらか具体的に知ることが出来る. (**)～(****)は「代数·幾何的な方法」である.

例題 4

(1) 次の直線の方程式を求めよ.

(i) 点$(-2, 6)$を通り, 直線$2x+3y-1=0$に平行な直線

(ii) 点$(-3, -2)$を通り, 直線$5x-2y-1=0$に垂直な直線

(2) 2直線

$$ax+2y=a \quad \cdots\cdots①, \qquad x+(a+1)y=a+3 \quad \cdots\cdots②$$

が平行となるときのaの値は$a=$[(ア)]で, 特に$a=$[(イ)]のとき2直線は一致する. また, これらが垂直となるときのaの値は$a=$[(ウ)]で, このときの交点の座標は[(エ)]である.

解 説 (1) 先に述べたように, 直線「$ax+by+c=0$」に対して

平行な直線：$ax+by+c'=0$ ←―― (a, bはそのまま!!)

垂直な直線：$bx-ay+c''=0$ ←―― (a, bをとりかえ, どちらかの符号をかえる!!)

と表されるから, 定数c', c''を求めればよい.

(i) 求める直線の方程式は

$$2x+3y+c=0$$ ←―― いきなりこのようにおいてよい!!

とおくことが出来る. これが点$(-2, 6)$を通るから「$x=-2$, $y=6$」を代入すると

$$2(-2)+3\cdot 6+c=0 \quad \therefore \quad c=-14$$

$$\therefore \quad \mathbf{2x+3y-14=0}$$

(ii) 求める直線の方程式を

$$2x+5y+c=0$$ ←―― これも説明ぬきで用いてよい!!

とおいて, 通過する点$(-3, -2)$の座標を代入すると

$$2\cdot(-3)+5\cdot(-2)+c=0 \quad \therefore \quad c=16$$

$$\therefore \quad \mathbf{2x+5y+16=0}$$

(2) 「**平行条件の公式**(p.309)」をそのまま用いると

$a(a+1)-2\cdot 1=0$　←――　$\boldsymbol{ab'-a'b=0}$

$\therefore\quad a^2+a-2=0$

$\therefore\quad (a+2)(a-1)=0\quad \therefore\quad \boldsymbol{a=-2,\ 1}$　……(ア)

「$a=-2$」のとき2直線は

①：$-2x+2y=-2\quad \therefore\quad x-y=1$
②：$x-y=1$　――→ 一致する!!

「$a=1$」のとき

①：$x+2y=1$
②：$x+2y=4$　――→ (解なし)　平行であるが一致しない!!

ゆえに，2直線が一致する a の値は

$\boldsymbol{a=-2}$　……(イ)

次に「**垂直条件の公式**(p.309)」を用いると

$a\cdot 1+2\cdot(a+1)=0$　←――　$\boldsymbol{aa'+bb'=0}$

$\therefore\quad 3a+2=0\quad \therefore\quad \boldsymbol{a=-\frac{2}{3}}$　……(ウ)

このとき2直線の方程式は

①：$-\frac{2}{3}x+2y=-\frac{2}{3}\quad \therefore\quad x-3y=1$　……①′

②：$x+\frac{1}{3}y=\frac{7}{3}\quad \therefore\quad 3x+y=7$　……②′

①′，②′を「連立方程式」として解いて

$x=\frac{11}{5},\ y=\frac{2}{5}$　――→ 交点は$\left(\frac{11}{5},\ \frac{2}{5}\right)$　……(エ)

らしんばん

(1)は，慣れたらいきなり

(i)：$2(x+2)+3(y-6)=0$　←――　$(-2,\ 6)$を通る
(ii)：$2(x+3)+5(y+2)=0$　←――　$(-3,\ -2)$を通る

とやってもよい．

直線「$\boldsymbol{l:ax+by+c=0}$」に対して

平行な直線：　$\boldsymbol{ax+by+c'=0}$,
垂直な直線：　$\boldsymbol{bx-ay+c''=0}$

であるが，この c'，c'' はどんな実数値でもよい．「直線 l」が与えられるとそれに「平行，あるいは垂直」ということで「方向」は定まるが「通過点」が指定されないと「直線が1つに定まらない」からである．本問(1)のように「通過する1点$(x_0,\ y_0)$」が与えられると

「**平行**」**の場合**――「$ax+by+c'=0$」に$(x_0,\ y_0)$を代入して

$ax_0+by_0+c'=0 \quad \therefore \quad c'=-(ax_0+by_0)$

これをもとの式に代入すると

$ax+by-(ax_0+by_0)=0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$

「垂直」の場合――「$bx-ay+c''=0$」に$(x_0,\ y_0)$を代入して

$bx_0-ay_0+c''=0 \quad \therefore \quad c''=-(bx_0-ay_0)$

これをもとの式に代入して

$bx-ay-(bx_0-ay_0)=0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{b(x-x_0)-a(y-y_0)=0}$

として，c'，c''が決定し，それぞれの「直線の方程式」が決定するわけである――これらは「公式」として用いてよい．

(2)は「**連立方程式**(p.146)」で扱った問題である――「平行条件」，「垂直条件」については先に述べた「公式」の通りであるから「問題ナシ」として，ここでは「**連立方程式の解の存在**」と「**直線の位置関係**」について考えてみることにしよう．

連立方程式

$$\begin{cases} ax+2y=a & \cdots\cdots(*) \\ x+(a+1)y=a+3 & \cdots\cdots(**) \end{cases}$$

を「aで場合を分けて」解くと

$a\neq -2,\ a\neq 1 \longrightarrow x=\dfrac{a-3}{a-1},\ y=\dfrac{a}{a-1} \quad \cdots\cdots(***)$

$a=-2 \longrightarrow (*),\ (**)$とも「$x-y=1$」$\longleftarrow$ 不定(決まらない)

$a=1 \longrightarrow \begin{cases} (*) & : x+2y=1 \\ (**) & : x+2y=4 \end{cases}$ $\longleftarrow$ 不能(解なし)

であった．

一般にx，yの1次方程式

$ax+by+c=0$ ←――「同値」のものはすべて同じと考える!!

と「x-y平面上の直線」とは「1対1」に対応している．したがって「$a\neq -2$，$a\neq 1$」のもとに$(*)$と$(**)$を「同時に満たしている連立方程式$(*)$，$(**)$の解$(***)$」は「2直線の交点の座標」を表している．

すなわち

$(***)$：交点$\left(\dfrac{a-3}{a-1},\ \dfrac{a}{a-1}\right)$ $\longleftarrow$ $\left(a=-\dfrac{2}{3}\text{のときは2直線が直交する場合の交点}\right)$

であり，「$a=-2$，または$a=1$」のときは，本文にも示したように

$a=-2 \longrightarrow$ 2直線が一致し，「共有点」は無数にある

$a=1 \longrightarrow$ 2直線が平行で「交点」はない

ことと対応している．

このように「方程式(不等式についても同様)」と「図形」の間の関係とが深くかかわっていることがわかる――きわめて重要な視点である．

例題 5

(1)　k を任意の実数とするとき

$$(k-3)x-(k+2)y+5(k+1)=0$$

で表される直線は，常に定点を通ることを示せ．

(2)　2直線

$$x-y+6=0,\quad 2x-3y-1=0$$

の交点と，点$(-5,\ -2)$を通る直線の方程式を求めよ．

解　説　(1)　与えられた方程式を k について整理すると

$$(-3x-2y+5)+k(x-y+5)=0 \quad \cdots\cdots①$$

この形から，2直線

$$\begin{cases} -3x-2y+5=0 & \cdots\cdots② \\ x-y+5=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，①で表される直線は**「k の値にかかわらず点 P を通る」**ことがわかる．

「連立方程式②，③」を解いて x，y を求めると

$$x=-1,\ y=4 \longrightarrow \textbf{常に点}(-1,\ 4)\textbf{を通る．}$$

(2)　「2直線の交点」を実際に求めてもよいが，ここでは「(1)の考え方」を利用したい――2直線の交点を通る直線の方程式は「(1)の①の形」で表されるから同様に考えて

$$(x-y+6)+k(2x-3y-1)=0 \quad \cdots\cdots④$$

この直線は**「k の値を1つ定めるごとに，これらの2直線の交点を通る直線を1つ定める」**から，これが点$(-5,\ -2)$を通るような k の値を求めるには「$x=-5$，$y=-2$」を④に代入して

$$(-5+2+6)+k(-10+6-1)=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{3}{5}$$

この k の値を④に入れて

$$(x-y+6)+\frac{3}{5}(2x-3y-1)=0 \qquad \therefore \quad \mathbf{11x-14y+27=0}$$

この場合，④には「直線：$2x-3y-1=0$」は含まれていないので，これが点$(-5,\ -2)$を通らないことを，何らかの形で説明しておかなければならない――代入して不成立!!

らしんばん

(1)では，「k を任意の実数……」に注目して「k について整理する」と，与えられた方程式を，「k についての恒等式」と見ることが出来る．すなわち

$$\left(\begin{array}{l}\text{点 P}(x,\ y)\text{が，任意の実数 } k \text{ に対して}\\ (-3x-2y+5)+k(x-y+5)=0 \text{ を満たす}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases}-3x-2y+5=0\\ x-y+5=0\end{cases}$$

と見ることがポイントである．

➔ (2)については，実は

$$\begin{cases}x-y+6=0\\ 2x-3y-1=0\end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases}x=-19\\ y=-13\end{cases}$$

と，先に2直線の交点$(-19,\ -13)$を求めておいて，2点

$$\mathrm{A}(-5,\ -2),\ \mathrm{B}(-19,\ -13)$$

を通る直線の方程式を求める(「公式」はp.307)方が、本問に関しては簡単でハヤイが，**「本文に述べた方法」は，この先いろいろと便利な展開も多いのでぜひここでマスターしておきたい**——ハナシを一般化しておく．

2直線

$$f(x,\ y)=ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$$g(x,\ y)=a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots\cdots(**)$$

が「交わる」とき

$$\lambda f(x,\ y)+\mu g(x,\ y)=0 \ (\lambda=\mu=0 \text{ を除く}) \quad \cdots\cdots(***)$$

は，実数λ，μを定めるたびごとに

$$(x,\ y \text{ の1次式})=0$$

の形となり，「直線の方程式」を定める．

そこで(＊)，(＊＊)の交点を$(x_0,\ y_0)$とすると，これは(＊)，(＊＊)を満たすから

$$f(x_0,\ y_0)=0,\ g(x_0,\ y_0)=0$$

だから，「任意の実数λ，μ」に対して$(x_0,\ y_0)$は(＊＊＊)を満たす．したがって(＊＊＊)で実数λ，μをいろいろな値に変えていくと(＊)，(＊＊)**の交点を通る直線の「ファミリー」**が出来て，実はこれらが(＊)，(＊＊)の交点を通るすべての直線である．すなわち，(＊＊＊)は$(x_0,\ y_0)$という点で(＊)と(＊＊)との交点を通る全直線を「たばねてにぎっている」わけであり，このことから(＊＊＊)は(＊)と(＊＊)**の交点を通る「直線束」を表す**という．

実際に使うときのために，もう少し説明しておくと，(＊＊＊)にはλとμの2文字が入っているので扱いにくい．そこで「$\lambda \neq 0$」として(＊＊＊)の両辺をλで割ると

$$f(x,\ y)+\frac{\mu}{\lambda}g(x,\ y)=0 \quad \longrightarrow \quad f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0 \quad \left(k=\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

の形で扱うことが出来る．

しかし，この式のkの値にどんな数値を入れても

$$g(x,\ y)=0 \longleftarrow (***) \text{で「}\lambda=0\text{」の場合}(k \text{のついている方!!})$$

を表すことが出来ないことには注意しなければならない．すなわち

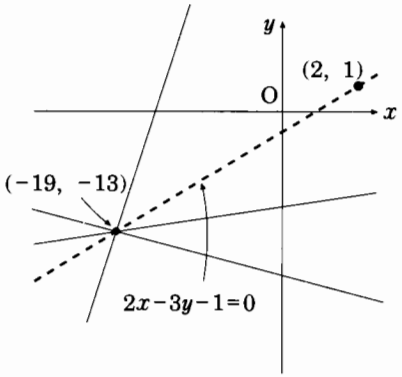
$(***) \Longleftrightarrow f(x, y)+kg(x, y)=0$，または $g(x, y)=0$

のように，(***)は「2本の式」で**表されることになる**．

具体的に説明しよう．本問で言えば，④は「k の値」をいろいろに変えるごとに，点$(-19, -13)$を通るいろいろな直線を表すが，「k がついている」方の

$$2x-3y-1=0$$

だけは表さない――「本文④の式」を書いたとき，この直線だけはすでに「自動的に」除かれてしまっているのである．



たとえば本問(2)で，点$(-5, -2)$のかわりに点$(2, 1)$が与えられたとしよう．本文に示したと同様に「$x=2$，$y=1$」を

$(x-y+6)+k(2x-3y-1)=0$ ←――― 本文④の式!!

に代入すると

$(2-1+6)+k(4-3-1)=0$　　∴　$7+k\cdot 0=0$

となり，これを満たす k の値は存在しない――k の係数が「0(ゼロ)」となったことからもわかるように，**点$(2, 1)$は「直線：$2x-3y-1=0$」上にあり，「本問④の x，y の1次式」ではこの直線(だけ)が表されないためにこのようなことが起こるのである**．

この考え方から説明すれば，直線の方程式

$y=mx+n$ ←――― (Ⅰ)，①(p.302)

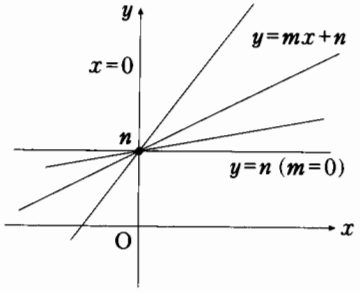
は

$$(y-n)-mx=0$$

と変形すれば，これは2直線

$$y-n=0,\ x=0$$

の交点$(0, n)$を通る「**直線束**」を表していることがわかる――n を「y 切片」と言った(p.302)．この場合も「m」のついている方の直線「$x=0$(y 軸)」はトウゼン除かれている．



p.307に示した「公式」についても同様に

$y-y_1=m(x-x_1)$　　∴　$(y-y_1)-m(x-x_1)=0$

から

点(x_1, y_1)を通る，「$x=x_1$ 以外の直線束」!!

である．

(＊＊＊)は「点$(x_0,\ y_0)$を通るすべての直線」を表すか？

$$\lambda f(x,\ y)+\mu g(x,\ y)=0 \longleftarrow (＊＊＊)$$

の形で表される直線はすべて

$$f(x,\ y)=ax+by+c=0 \longleftarrow (＊)$$

$$g(x,\ y)=a'x+b'y+c'=0 \longleftarrow (＊＊)$$

の交点$(x_0,\ y_0)$を通ることはすでに説明した(p.318)．しかし逆に**$\mathbf{P}(x_0,\ y_0)$を通る直線が「すべて(＊＊＊)の形に表される」**ことについてまだ触れていない．

そのことについては一応キチンとした形の了解がほしい——簡単に説明しておこう．

(＊)，(＊＊)が点$(x_0,\ y_0)$を通ることからc，c'は

$$c=-(ax_0+by_0),\quad c'=-(a'x_0+b'y_0)$$

と表される．そこでこれらを(＊)，(＊＊)に入れて整理すると

$$(＊)\quad :\boldsymbol{f(x,\ y)=a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}\quad \cdots\cdots (＊)'$$

$$(＊＊)\ :\boldsymbol{g(x,\ y)=a'(x-x_0)+b'(y-y_0)=0}\quad \cdots\cdots (＊＊)'$$

である．

一方，点$(x_0,\ y_0)$を通る任意の直線は

$$\boldsymbol{p(x-x_0)+q(y-y_0)=0}\quad \cdots\cdots (＊＊＊＊)$$

と表され，それぞれの「法線ベクトル」は

$$(＊)' \longrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\vec{n},\quad (＊＊)' \longrightarrow \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=\vec{n'},\quad (＊＊＊＊) \longrightarrow \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\vec{p}$$

であるが，「2直線(＊)，(＊＊)が1点で交わる」ことから**「$\vec{n}$と$\vec{n'}$は1次独立(『諸橋の代数・幾何講義(p.15以下)』)」**である．したがって「任意のベクトル$\vec{p}$ $(\neq\vec{0})$」に対して

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} \longleftarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

(s，tは実数，$s=t=0$を除く)

と書くことが出来る．すなわち，s，tは連立方程式

$$\begin{cases}as+a't=p\\bs+b't=q\end{cases} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\vec{n},\ \vec{n'}\text{の「1次独立」から「}ab'-a'b\neq 0\text{」}\\ \text{——「連立方程式(p.147)」参照!!}\end{array}\right)$$

の解として存在し，このようなs，tに対してp，qを(＊＊＊＊)に入れると

$$(as+a't)(x-x_0)+(bs+b't)(y-y_0)=0$$

$$\therefore\quad s\{a(x-x_0)+b(y-y_0)\}+t\{a'(x-x_0)+b'(y-y_0)\}=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{sf(x,\ y)+tg(x,\ y)=0} \longleftarrow (＊)',\ (＊＊)'$$

で，このs，tがそれぞれ(＊＊＊)のλ，μの値に他ならない．すなわち

$\mathbf{P}(x_0,\ y_0)$を通るすべての直線が(＊＊＊)の形に表される

ことがわかった——安心して(＊＊＊)を使うことが出来る．

(3)　点と直線との距離の公式

次に述べる「公式」はきわめてよく用いられる．ぜひともマスターしておきたい．

点と直線との距離の公式

点 $A(x_0,\ y_0)$ から直線

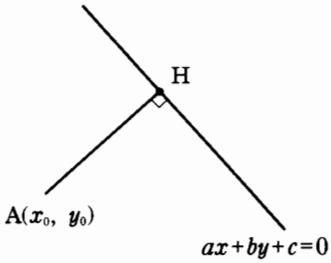
$$l:\ ax+by+c=0$$

への垂線 AH の長さ d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\left(x_0=y_0=0\ (\text{原点})\ \text{のときは}\ \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である．

解　説　いろいろな導き方があるが，**まず垂線の足 H の座標を求め，マジメに AH の長さを計算**してみよう．



$$l:\ ax+by=-c\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

に対し，$A(x_0,\ y_0)$ を通り，直線 l に垂直な直線 AH の方程式は

$$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$

$$\therefore\quad bx-ay=bx_0-ay_0\quad\cdots\cdots②$$

である．H は①，②の交点であるから求める座標は①，②の連立方程式の解として与えられる．そこで「①×a+②×b」を計算すると

$$(a^2+b^2)x=b^2x_0-aby_0-ac\qquad\therefore\quad x=\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}$$

このとき「$a=b=0$」ではないから「$a^2+b^2\neq0$」である．

同様に「①×b−②×a」から y を求めると

$$y=\frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}$$

ゆえに求める H の座標は

$$\mathrm{H}\left(\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2},\ \frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

である．そこでこれを用いて AH^2 を計算すると

$$\begin{aligned}AH^2&=\left(\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}-y_0\right)^2\\&=\left\{\frac{-a}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c)\right\}^2+\left\{\frac{-b}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c)\right\}^2\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c)^2$$

$$\therefore\quad \mathrm{AH}=\sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}=\frac{|\,ax_0+by_0+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(=d)$$

(「$ax_0+by_0+c<0$」のときもあるので「**絶対値**」をワスレルナ!!
$\sqrt{(ax_0+by_0+c)^2}=|\,ax_0+by_0+c\,|$)

特に，点Aが原点Oに一致するときは「$x_0=y_0=0$」であるから

$$\mathrm{OH}=\frac{|\,c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \mathrm{H}:\left(\frac{-ac}{a^2+b^2},\ \frac{-bc}{a^2+b^2}\right)$$

となる．これもよく用いられる「公式」である．

らしんばん

この「公式」で，特に l 上の点として $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ をとると

$ax_0+by_0+c=0$ ⟶ $\mathrm{AH}=0$

で，これは「あたりまえ」のハナシである．

ベクトルを用いてみよう．

$l:ax+by+c=0$ ……(＊)

直線AHのベクトル方程式(p.304)は

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ⟵ $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ は通過点，$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ は l の法線ベクトル

すなわち，この直線上の点Xは

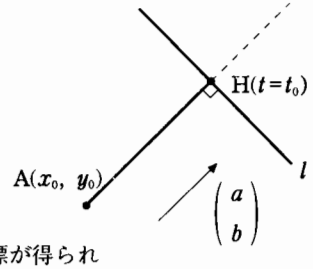
$\mathrm{X}(x_0+at,\ y_0+bt)$

さらに点Xが直線 l 上にあるときは

(＊)に代入して

$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c=0$

$\therefore\quad t=\dfrac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$ $(=t_0$ とおく)



この t_0 をXの t の値として代入すればHの座標が得られ

$\mathrm{H}(x_0+at_0,\ y_0+bt_0)$ ⟵ 代入すれば本文の結果と一致する!!

である．またAHの長さについてはAとHの座標から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(at_0)^2+(bt_0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,|\,t_0\,|=\frac{|\,ax_0+by_0+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となり，ずっと簡単にいく．

「**Hesse(ヘッセ)の標準形**」について——

原点Oからの距離が「p (>0)」である直線 g の方程式は次のように表される．

$g:x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\ (>0)$ ……(＊＊)

この式の意味を考えてみよう．〈図1〉

で $P(x,\ y)$ を「直線 g」上の点とし

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\vec{e}\longleftarrow\left(\begin{array}{l}\text{法線方向の単}\\ \text{位ベクトル}\end{array}\right)$$

$(|\vec{e}|^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1)$

とすると(**)は次のように表される.

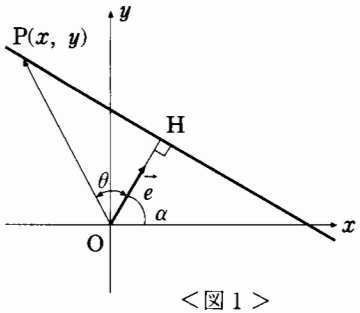
すなわち

$$\vec{e}\cdot\overrightarrow{OP}=p$$

この左辺は

$$\vec{e}\cdot\overrightarrow{OP}=\underbrace{|\vec{e}|}_{\text{II}\ 1}|\overrightarrow{OP}|\cos\theta=|\overrightarrow{OP}|\cos\theta=OH\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

で，これは**「原点 O から直線 g への距離」**に他ならない.



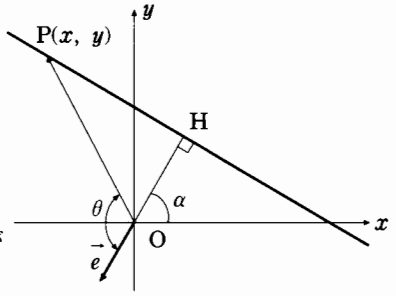
＜図1＞

ところが「$\vec{e}$」が逆向きの場合もあり得るので，そのときについても考えておかなければならない——〈図2〉

このとき θ の範囲は

$$90^\circ<\theta\leqq 180^\circ\longrightarrow\cos\theta<0$$

であるから「(***)の OH の符号は負」となり，g を(**)の形で表すには，あらかじめ「p の符号」を調整しておく必要がある．そこで「$p>0$」の条件をとり除き，直線 g を



＜図2＞

$$g:x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\ (\neq 0)$$

と表せば，**「原点 O からの距離が $|p|$ である直線」**がすべてこの形で表されることになる．このように定めておけば**「H の座標」**も

$$\overrightarrow{OH}=(\vec{e}\cdot\overrightarrow{OP})\vec{e}=p\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\longrightarrow H(p\cos\alpha,\ p\sin\alpha)$$

として簡単に求められる——(***)の **OH** を**「OP の $\vec{e}$ 方向への正射影」**，$\overrightarrow{OH}$ を**「$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{e}$ 上への正射影ベクトル」**という(『諸橋の代数·幾何講義(p.46)』参照!!).

以上のことを了解した上で，(*)で表される一般の直線の方程式

$$l:ax+by+c=0\longrightarrow ax+by=-c\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(****)$$

について考えてみることにする.

「$a=b=0$ でない」から両辺を「$\sqrt{a^2+b^2}$」で割ると

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ここで

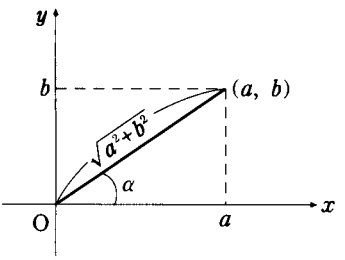
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

に注意すると「適当な角 α」を選ぶことにより

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$$

とおくことが出来るから「l の方程式」は

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



で，「この式の α」が「(**)の α」で，「右辺の $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$」が「(**)の p」に他ならない．したがって「**原点 O から直線 l への距離 $|p|$**」と「**垂線の足 H の座標**」は

$$|p|=\left|\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\overrightarrow{OH}=p\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-ac\\ -bc\end{pmatrix}$$

となり，本文で示した結果と同じになる．

➡ 「**Hesse の標準形**」から「本文の公式」へ――

$l: ax+by+c=0$ ←――(*)

に，この直線外の点 $A(x_0,\ y_0)$ からの垂線 AK を考える．

直線 l を $(-x_0,\ -y_0)$ だけ平行移動した直線を l' とすると，「**A と l との位置関係**」は「**O と l' との位置関係**」におきかえて考えることが出来る．

l' を求めるには(*)で

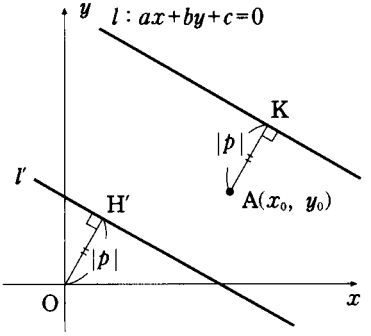
$x\longrightarrow x+x_0,\quad y\longrightarrow y+y_0$

とおきかえればよいから(p.234以下)

$l': a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$

$\therefore\quad ax+by+(ax_0+by_0+c)=0$

この式の「ax_0+by_0+c」がそのまま「(****)の c」にあたることに気がつくと



$$p=\frac{-(ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\therefore\quad |p|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ (=OH'=AK)$$

とおき換えることによって，「**点 A と l との距離を与える公式(本文)**」となる．

一方，「**垂線の足 K の座標**」については

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH'}$$

←――(「$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OH'}$」であるから$\overrightarrow{OA}$に$\overrightarrow{OH'}$をそのまま「つぎ足した」と考えればよい!!)

$$=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}\left(=\overrightarrow{OA}+p\vec{e}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\left(\frac{-(ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

となる．成分をそれぞれ計算すれば「本文③のHの座標」となる――「本文③」を見ただけでは「相当に複雑な式」という印象しかないが，実はそれなりの意味をもっているわけで，そのことが「少しだけ」わかれば，まずは「目的達成」と考えてよい．

例題 6

3直線

$2x+y+1=0$ ……①，$x-y-4=0$……②，$x-7y+8=0$……③

で囲まれる三角形について，次の問いに答えよ．

(1)　三角形の各頂点の座標を求めよ．

(2)　三角形の面積を求めよ．

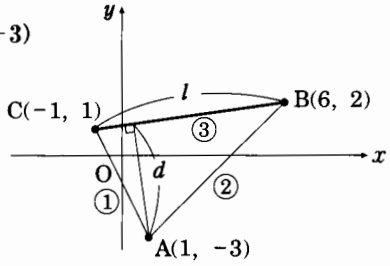
解　説　(1)　①と②の交点Aは①と②を「連立方程式」として解いて

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x-y-4=0\end{cases}\longrightarrow \mathbf{A(1,\ -3)}$$

②と③，③と①の交点B，Cについても同様にして

②，③ ⟶ **B(6, 2)**

③，① ⟶ **C(−1, 1)**



(2)　点Aから直線③までの距離 d は

$$d=\frac{|1-7\cdot(-3)+8|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\frac{30}{\sqrt{50}}=3\sqrt{2}\longleftarrow\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ (\text{p.321})$$

また，2点B，C間の距離 l は

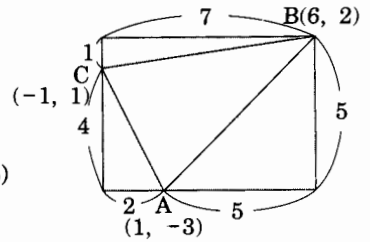
$$l=\sqrt{(6+1)^2+(2-1)^2}=5\sqrt{2}\longleftarrow\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ (\text{p.296})$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}ld=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=15$$

らしんばん

➡ 「三角形の面積」を求めるには，基本的には「本文に述べた方法」がよい．

しかし，本問に関して言えば右図のように3つの直角三角形を補って長方形を作り，全体から加えた三角形の面積を引いても簡単にいく．



$$\triangle ABC=7\times5-\frac{1}{2}(7\times1+4\times2+5\times5)$$

という具合である．一般には「公式」としてまとめておくと便利がよいので紹介しておくことにする．

三角形の面積

$O(0,\ 0)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を3頂点とする $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

である．

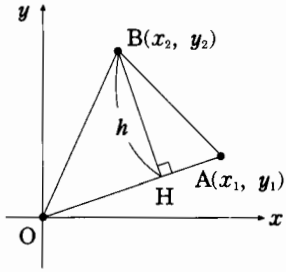
直線 OA の方程式は

$$y_1x-x_1y=0 \quad \left(\longleftarrow\ y=\frac{y_1}{x_1}x\right)$$

$B(x_2,\ y_2)$ と直線 OA との距離 BH は

$$BH=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{y_1^2+(-x_1)^2}} \longleftarrow \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$



$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot BH$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

である．しかし，これを本問に用いるには，「3頂点のどれもが原点になっていない」ために少し工夫しなければならない．たとえば A(1, −3)，B(6, 2)，C(−1, 1) をそれぞれこの公式の O，A，B と見ると

$$\begin{cases}x_1=6-1=5\\ y_1=2-(-3)=5\end{cases},\quad \begin{cases}x_2=-1-1=-2\\ y_2=1-(-3)=4\end{cases}\left(\longleftarrow \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right)$$

である．そこで上の公式を用いると

$$S=\frac{1}{2}|5\cdot4-(-2)\cdot5|=\frac{30}{2}=15$$

となり，本文の結果と一致する——なかなか便利のよい公式である．ベクトルを用いると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

で1パツでいくが，これは「三角比(p.430以下)」を経由して『**諸橋の代数·幾何講義**(p.50)』を参照してもらいたい．

第2節
軌跡と領域

前節では，「x-y 平面上の直線」が「x，y の1次方程式」で表されることを確認した．一般に**「x-y 平面上の軌跡(図形)」は「x，y の方程式」で表され，「x-y 平面上の領域」は「x，y の不等式」で表される．**

逆に「方程式，不等式の諸問題」が「x-y 平面上の図形の問題」としてビジュアルにとらえられる場合も少なくない．ここでは，それらの相互の関係をにらみながら**「座標幾何」の考え方の基本**を学ぶことにする．

扱う図形としては

(i)　**円**

(ii)　**円と直線との関係**

(iii)　**2つの円の関係**

(iv)　**これらの図形を境界線とする領域の問題**

など，素材としては素朴なものに限られるが，これらのハナシは**「関数とそのグラフ**(p.231以下)」とも深く関係し，「代数·幾何」の「**2次曲線**」，「**空間図形**」などの「準備(？)」としても大きな意味をもつ分野である．そのつもりで読み進めてもらいたい．

1　軌跡と方程式

(1)　「軌跡の定義」と「軌跡の方程式」について

最初に「軌跡とは何か」を説明しておかなければならない．たとえば

平面上で2点 A, B から等距離にある点の集合(実は垂直2等分線!!)

などは

ある点についての条件(あるいは性質)←――「N」と書くことにする

を述べていると考えることが出来る.

このように「条件 N」があるとき,「**条件 N を満たす点の全体(あるいは点全体の集合)**」を「**条件 N を満たす軌跡**」という.

一般に,「**軌跡**」は「**ある図形**」として与えられる. そこで, この「軌跡」を求めるにはどうすればよいかについて説明しよう.

それには次の2つの方法がある.

(i) 「**条件**」を満たすいくつかの点をとってみて,「どのような図形になるか」を予想する——「**予想**」が正しいことを「**初等幾何**」で証明する.

(ii) 「**条件**」を「**式(方程式)**」で表す.

しかし,「(i)の方法」では「求める図形が何であるか(垂直2等分線, 円など)」を「初等幾何」の知識として十分に知っていなければならず,「(ii)の方法」では「方程式の表す図形が何であるか」を知っていなければならないのでどちらの方法もなかなか大変である. ここでは主に「(ii)の方法」がテーマとなるが,「座標軸」をうまく設定することが出来れば,「**図形問題**」のある部分が「**計算処理**」で間に合うのでなかなか有効であることも事実である.

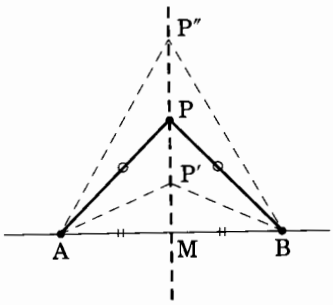
以下「(i)**の方法**」と「(ii)**の方法**」の違いを「**垂直2等分線の条件**」を例として解説しておくことにする.

(i) ——→「**2点 A, B から等距離にある点の1つを P**」とし, 線分 AB の中点を M とすると

$$\left.\begin{array}{l} AP=BP \\ AM=BM \\ PM \text{ は共通} \end{array}\right\} \longleftarrow \text{合同条件!!}$$

$\therefore\quad \triangle AMP \equiv \triangle BMP$

$\therefore\quad \angle AMP=\angle BMP=90^\circ$

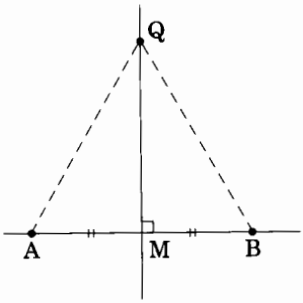


すなわち,「**点 P は線分 AB の垂直2等分線上の点**」である. ……(ア)

逆に,「**線分 AB の垂直2等分線上の任意の点を Q**」とすると

$$\left.\begin{array}{l} AM=BM \\ \angle AMQ=\angle BMQ=90^\circ \\ QM \text{ は共通} \end{array}\right\} \longleftarrow \text{合同条件!!}$$

$\therefore\quad \triangle AQM \equiv \triangle BQM \qquad \therefore\quad AQ=BQ$



すなわち，「点Qは2点A，Bから等距離にある点」である．……(イ)

(ア)，(イ)より**「求める軌跡」は「線分ABの垂直2等分線」**である．

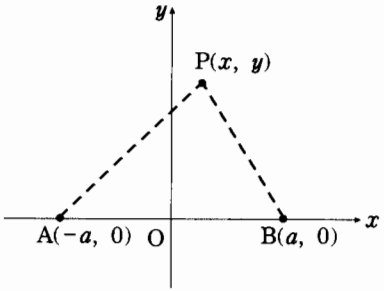
――(ア)で「垂直2等分線」であることを予想し，(イ)で**「垂直2等分線」上の任意の点が「条件を満たすことを吟味」**したわけである．

(ii) ――→ まず「x-y 座標」をうまく定めることがポイントとなる．

線分ABを x 軸，ABの中点を原点Oとし，図のように「x-y 座標」を定めると，2点A，Bの座標は

$$A(-a,\ 0),\ B(a,\ 0)$$

とおくことが出来る．



条件に適する点を $P(x,\ y)$ とおくと

条件：$AP=BP$　　$\therefore$　$AP^2=BP^2$

「2点間の距離の公式(p.296)」を用いてこれを成分で表すと

$$(x+a)^2+y^2=(x-a)^2+y^2 \qquad \therefore \quad 4ax=0$$

$$\therefore \quad x=0 \quad (a\neq 0) \longleftarrow y\text{軸そのもの!!}$$

この計算の過程はすべて「同値性(p.140以下)」が保存されるので

$$AP=BP \Longleftrightarrow x=0$$

したがって「条件を満たす点Pの軌跡」は「x，y 座標が方程式 $x=0$ を満たす点の集合」である．すなわち，**「方程式 $x=0$ のグラフ」である「線分ABの垂直2等分線(y 軸)」が「求める軌跡」**である．

このように，「条件 N」を「x-y 座標」を用いることにより「点の x，y 座標の関係式」として書き表した「方程式」を**「条件 N を満たす軌跡の方程式」**という．すなわち

$$\text{点Pが条件}N\text{を満たす} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{点Pの}x,\ y\text{座標が}\\ f(x,\ y)=0\text{を満たす}\end{array}\right)$$

このとき**「方程式 $f(x,\ y)=0$」が「軌跡の方程式」**である．

以下，このような考え方のもとに「いろいろな図形(主に円，直線，放物線)とその相互の関係」を調べて行くことにする．

注　すでに学んだ**「関数のグラフ」あるいは「方程式 $ax+by+c=0$ の表す直線」**などもトウゼン**「軌跡である」**と考えることが出来る．すなわち「関数 $y=2x^2-1$ のグラフ(放物線)」は，「x-y 平面上で x，y 座標が方程式 $y=2x^2-1$ を満たす点の軌跡(集合)」であり，「方程式 $ax+by+c=0$ の表すグラフ(直線)」は，「x-y 平面上で x，y 座標が方程式 $ax+by+c=0$ を満たす点の軌跡(集合)」である．

(2) 円の方程式，他

(i) 円の方程式

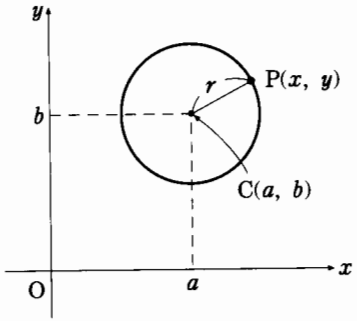
定点 C$(a,\ b)$からの距離が r(一定)であるような点 P$(x,\ y)$の軌跡を「点 Cを中心とする半径 rの円」という——あるいは中心 C を用いて簡単に「半径 rの円 C」ともいう．これを「方程式」で表してみよう．

$$CP=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

両辺は正であるから両辺を 2 乗して

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots①$$

であり，これを**「円の方程式」**という．



特に，原点 O を中心とする半径 r の円の方程式は

$$x^2+y^2=r^2$$

である．

また，①を展開すると

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

すなわち

$$\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+C=0} \quad \cdots\cdots②$$

の形になる．これも「円の方程式」であるが，②の形の方程式がいつも円を表すというわけではない．その理由を確認するために，②で x, y についての「平方完成(p.112)」を実行して，①の形に変形し直してみよう——②は次のように変形される．

$$\left\{x^2+2\cdot\left(\frac{A}{2}\right)x+\left(\frac{A}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{A}{2}\right)^2$$
$$+\left\{y^2+2\cdot\left(\frac{B}{2}\right)y+\left(\frac{B}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{B}{2}\right)^2+C=0$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C$$

このことから次の場合によってハナシが違って来る．すなわち

$\dfrac{A^2+B^2}{4}>C$ ⟶ 中心$\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$，半径$\sqrt{\dfrac{A^2+B^2}{4}-C}$ の円

$\dfrac{A^2+B^2}{4}=C$ ⟶ 点$\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$（中心$\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$，半径 0 の円となり，図形的意味ナシ）

$\dfrac{A^2+B^2}{4}<C$ ⟶ P$(x,\ y)$は存在しない（条件を満たす実数 x, y はナシ）

である．特に「円であるとき」は，この式変形によってその「**中心の座標**」と「**半径**」が求められることに注目しておきたい．

注　上の説明では，「方程式①で表される点の軌跡」を「円」と定義したが，場合によっては，「この曲線で囲まれた平面の一部($(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq r^2$(p.356))」を「円」というときもある．この立場からは「①で表される曲線」を「円周」という．「円の面積」などというときはこの立場に立っている．つまり，「円」という言葉には「2通りの意味」があって，多くの場合，ほとんど無意識に使い分けられていると考えればよい．

例題 7

(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ．

(i)　点$(-3,\ 4)$が中心で，原点を通る．

(ii)　2点$(-1,\ 1)$，$(3,\ 4)$が直径の両端である．

(iii)　3点$(7,\ -1)$，$(2,\ 4)$，$(-2,\ 2)$を通る．

(2)　次の式の表す円の中心と半径を求めよ．

(i)　$x^2+y^2-6x+4y+9=0$

(ii)　$3x^2+3y^2+2x-8y=0$

解　説　(1)　(i)　点$(-3,\ 4)$と原点との距離は

$$\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

で，これが半径であるから求める円の方程式は

$$(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$$

(ii)　A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 4)$とすると円の中心は線分ABの中点Mである．

$$x=\frac{-1+3}{2}=1,\quad y=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}\qquad \therefore\quad \mathrm{M}\left(1,\ \frac{5}{2}\right) \longleftarrow \text{中心}$$

半径rは

$$r=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=\frac{5}{2}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2\qquad \therefore\quad x^2+y^2-2x-5y+1=0$$

(iii)　求める円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

とおくと，これは与えられた3点を通るから，それぞれを代入すると

$(7,\ -1)$を代入 $\longrightarrow$ $7^2+(-1)^2+a\cdot 7+b\cdot(-1)+c=0$

$\therefore\quad 7a-b+c=-50$ ……①

$(2,\ 4)$を代入 $\longrightarrow$ $2^2+4^2+a\cdot 2+b\cdot 4+c=0$

$\therefore\quad 2a+4b+c=-20$ ……②

$(-2,\ 2)$を代入 ⟶ $(-2)^2+2^2+a\cdot(-2)+b\cdot 2+c=0$

$\therefore\quad -2a+2b+c=-8$ ……③

②−① ⟶ $5a-5b=-30$ $\quad\therefore\quad a-b=-6$

②−③ ⟶ $4a+2b=-12$ $\quad\therefore\quad 2a+b=-6$

これより

$a=-4,\ b=2$ $\quad\therefore\quad c=-20$（$a$, b の値を③に入れる!!）

これより求める円の方程式は

$\boldsymbol{x^2+y^2-4x+2y-20=0}$（⟶ $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$）

(2) (i) p.330の例にならって「平方完成」すると

$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$

（「公式」として覚えるのでなく，自分で式変形が出来るように!!）

であるから

中心：(3, −2)，半径：2

(ii) 両辺を3で割ると（⟵ x^2, y^2 の係数を1にそろえる）

$$x^2+y^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}y=0 \longrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{17}{9}$$

これより

$$\text{中心：}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right),\ \text{半径：}\sqrt{\frac{17}{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

らしんばん

(1)(i)は中心が$(-3,\ 4)$であるから半径をrとすると求める円の方程式は

$(x+3)^2+(y-4)^2=r^2$

である．これが原点を通るから

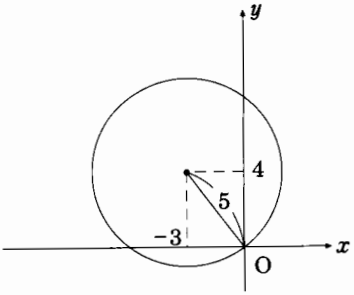
$x=y=0$

を代入して

$r^2=3^2+(-4)^2=25=5^2$

$\therefore\quad (x+3)^2+(y-4)^2=5^2$

としてもよいが，「図を描いてみるとrがすぐに求まる」ので本文のようにしたわけである．



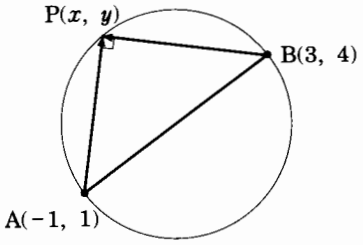
(1)の(ii)は「**ベクトルの内積**」を用いて次のように考えてもよい．

円周上の点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とすると，**線分ABが直径**ならば

$\angle\mathrm{APB}=90°$（円周角）

であるから

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ ……(＊)



ここで $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$$

これを(＊)に入れて計算すると

$(x+1)(x-3)+(y-1)(y-4)=0$

$\therefore\quad x^2+y^2-2x-5y+1=0$

が得られる――これは「円の直径の両端」がわかっていればいつでも使える方法で，空間座標で「球の方程式」を誘導するときも同様である(『諸橋の代数・幾何講義(p.102, 103)』参照).

一般に，「2点 $\mathbf{A}(a_1, a_2)$, $\mathbf{B}(b_1, b_2)$ を直径とする円の方程式」は，上の方法と全く同様にして

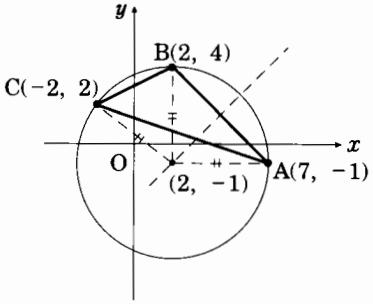
$$(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)=0$$

となるが，「公式」として振りまわすほどのものではない――むしろ「(＊)をうまく用いることが出来るようになる」ことの方が大切である.

(1)(iii)では「円が通過する3点」が与えられている．すなわち3点を

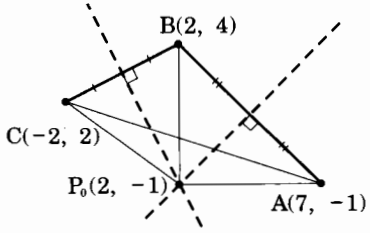
A(7, −1), B(2, 4), C(−2, 2)

とするとき，求める円は「△ABCの外接円」であり，「円」は決定する.



まず，「外心」を求めてみよう．「外心」は3点A, B, Cからの距離が等しい点，すなわち，3辺AB, BC, CAの「垂直2等分線」の交点である.

AB, BCの「垂直2等分線」を l_1, l_2 とすればCAの「垂直2等分線」も明らかに l_1, l_2 の交点を通るから，まず l_1, l_2 の方程式を求め，それを解けば「外心」の座標を得ることが出来る.



l_1：条件に適する点をP(x, y)とすると

AP=BP　$\therefore$　$AP^2=BP^2$

$\therefore\quad (x-7)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-4)^2 \longrightarrow x-y-3=0$

l_2：同様にして

BP=CP　$\therefore$　$BP^2=CP^2$

$\therefore\quad (x-2)^2+(y-4)^2=(x+2)^2+(y-2)^2 \longrightarrow 2x+y-3=0$

この2式を解いて x, y を求めると

$x=2$, $y=-1$　　$\therefore$　$\mathbf{P_0(2,\ -1)}$ ←―― 外心!!

このとき

$P_0A=\sqrt{(7-2)^2+(-1+1)^2}=5$ $(=P_0B=P_0C)$ ←―― 半径!!

ゆえに円の方程式は

$(x-2)^2+(y+1)^2=5^2 \longrightarrow \boldsymbol{x^2+y^2-4x+2y-20=0}$

となり，本文に述べた結果と一致することがわかる．

なお，l_1 が AB の中点(M とおく)を通り，AB に垂直であることから

AB の傾き：$\dfrac{4-(-1)}{2-7}=\dfrac{5}{-5}=-1 \longrightarrow l_1$ の傾き：1 (p.240)

$\dfrac{7+2}{2}=\dfrac{9}{2}$, $\dfrac{-1+4}{2}=\dfrac{3}{2} \longrightarrow M\left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

から

$y-\dfrac{3}{2}=1\cdot\left(x-\dfrac{9}{2}\right)$　　$\therefore$　$x-y-3=0$

として l_1 を求めるのも1つの方法であるが

(i) **「分数計算」の可能性がある**

(ii) **AB，または l_1 が「y 軸に平行」となるときの表現が問題となる**

ことの理由から，**「上に述べた方法(AP＝BP)」でやる方が安全**であることは知っておくとよい．

また，「△ABC の外心」を求めるのに，まず「円の方程式」を求め(本文)，「平方完成」して「中心(外心)」を探すのも1つの方法である．

例題 8

長さ3の線分 AB がある．このとき

AP：BP＝2：1

であるように動く点 P の軌跡を求めよ．

解　説　図のように座標軸を定めると，2定点 A，B と動点 P の座標は

A(3, 0)，B(0, 0)，P(x, y)

である．このとき「条件」は次のように表される．すなわち

AP：BP＝2：1　　$\therefore$　AP＝2BP $(\geqq 0)$

両辺は負でないから2乗しても同値である．

$\therefore$　$AP^2=4BP^2$

これを**「座標の成分」で表すと**

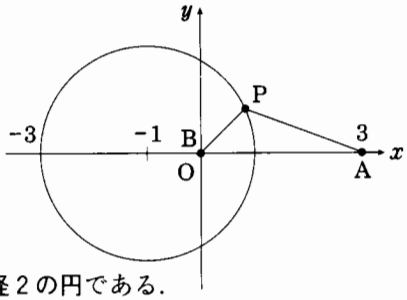
$(x-3)^2+(y-0)^2=4\{(x-0)^2+(y-0)^2\}$

$\therefore\quad x^2-6x+9+y^2=4x^2+4y^2$

$\therefore\quad 3x^2+3y^2+6x-9=0$

$\therefore\quad x^2+y^2+2x-3=0$

$\therefore\quad (x+1)^2+y^2=2^2$



これより求める軌跡は「円」で

中心：(−1, 0)，半径：2

すなわち，求める軌跡は**線分 AB** を 4：1 に外分する点を中心とする半径 2 の円である．

らしんばん

本問のような場合は「適当に座標軸を設定して考える」のがポイント!!

本問では上のように定めたが

AP：BP＝2：1 ⟵ P は「AB を 2：1 に内分する点 O」を通る

ことに注目してこの点を「原点 O」にとってもよい．このときは

A(2, 0)，B(−1, 0)

であるから

$AP^2=4BP^2$

$\therefore\quad (x-2)^2+(y-0)^2$

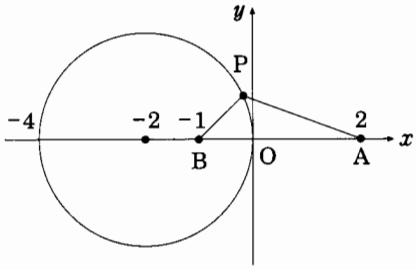
$=4\{(x+1)^2+(y-0)^2\}$

$\therefore\quad x^2-4x+4+y^2$

$=4(x^2+2x+1+y^2)$

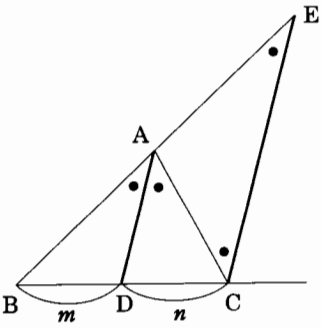
$\therefore\quad 3x^2+3y^2+12x=0\qquad \therefore\quad x^2+y^2+4x=0$

$\therefore\quad (x+2)^2+y^2=2^2$



となり「原点を通る円」となる——いろいろと考えてみるとよい．

本問は「初等幾何」でも求められる．以下，いろいろな「図形的性質」のまとめとして読んでもらえばよい．まず，「角の 2 等分線に関する基本的な性質」から説明しよう．たとえば図のような「△ABC」において，∠A の 2 等分線と BC との交点を D とすると



点 D は線分 BC を「AB：AC(∠A をはさむ 2 辺の比)」に内分する

ということである．

これにはいろいろな証明の方法があり，「ベクトル」を用いたりするときもある(『諸橋の代数·幾何講義(p.58)』を参照)が，ここでは「初等幾何」を用いて証

明しておく――これが最も簡単!!

図で,「点 C を通る AD の平行線」を引いて「直線 AB」との交点を E とすると

$\left.\begin{array}{l}\angle BAD=\angle AEC\ (\text{同位角})\\ \angle CAD=\angle ACE\ (\text{錯角})\end{array}\right\}$ ∴ $\angle AEC=\angle ACE$

(⟵ AD は ∠A を 2 等分!!)

すなわち, △ACE は「AC＝AE」の 2 等辺三角形である.

∴ BD : DC＝BA : AE ⟵ AD∥EC

＝BA : AC ⟵ AC＝AE

さて, **このハナシを本問に用いると**

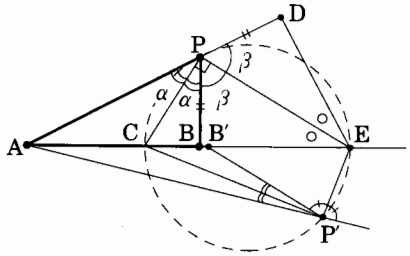
AP : BP＝2 : 1 ∴ AP＝2BP

であるが, このとき線分 AP の延長線上に「BP＝DP」に点 D をとっておく.

そして, ∠APB およびその外角である ∠DPB の 2 等分線が, 直線 AB と交わる点をそれぞれ C, E とすれば

AC : BC＝AP : BP＝2 : 1

(PC は∠APB を 2 等分!!)



同様に

AE : BE＝AE : DE

＝AP : DP

(△EBP≡△EDP より EP は ∠AED を 2 等分!!)

ここで「DP＝BP」であるから

AE : BE＝AP : BP＝2 : 1

すなわち, **C と E はそれぞれ与えられた線分 AB を「2 : 1」に「内分」および「外分」する点**であるから定点である.

このとき

$\angle CPE=\alpha+\beta=90^\circ$ ⟵ $2\alpha+2\beta=180^\circ$

で,**「点 P は線分 CE を直径とする円周上の点」**であることがわかる.

逆に(円周上の点がすべて条件を満たしているかどうかわからない), このような円周上(線分AB を「2 : 1」に「内分」および「外分」する点をそれぞれ C, E とし, この 2 点を直径とする円)の**「任意の 1 点を P′」**として

$\angle AP'C=\angle CP'B'$ ⟵ P′C が ∠AP′B′ を 2 等分!!

となるように直線 AB 上に点 B′ をとれば「$\angle CP'E=90^\circ$」であるから P′E は ∠AP′B′ の外角の 2 等分線である.

∴ AP′ : B′P′＝AC : B′C＝AE : B′E ⟵ P′ は CE を直径とする円周上!!

∴ AC·B′E＝B′C·AE ⟵ **(内項の積)＝(外項の積)**

∴ **AC : AE＝B′C : B′E** ⟵ **「比の形」に直す**!! ……(＊)

一方

AC : BC＝AE : BE

∴　AC·BE＝BC·AE ←――（内項の積）＝（外項の積）

∴　**AC：AE＝BC：BE** ←――「比の形」に直す!!　……(＊＊)

(＊)，(＊＊)から

B′C：B′E＝BC：BE

すなわち，**B** と **B′** とは一致する――**P′** は「条件(**AP＝2BP**)」を満たす．

したがって，**求める軌跡は「線分 CE を直径とする円周」**である．

しかし「初等幾何」ではこのように「逆」を図形的にキチンと説明しなければならない(p.328，329)ので相当メンドウである．「座標幾何」の威力を評価したい．デカルト先生(？)に感謝!!．

なお，「2：1」に限らず，「2定点からの距離の比が一定な点の軌跡」は「円(1：1のときは垂直2等分線)」となる．これを「アポロニウスの円」という――「空間座標」では「球面(1：1のときは平面)」となる(『諸橋の代数・幾何講義(p.103，104)』を参照!!)．

(ⅱ)　円と直線との位置関係

円 C と直線 l が

$$C：(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \quad \cdots\cdots①$$

$$l：ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots②$$

として与えられるとき，「これらの共有点はあるか」，「あるとしたらいくつあるか」を調べるにはどうすればよいかを考えてみよう．

まず，②を x または y について解いて①に代入すると，y または x の「2次方程式」が得られる．C と l との「共有点の座標」は「連立方程式①，②の実数解」として求められるから，この「2次方程式」が

異なる2実数解($D>0$) $\Longleftrightarrow$ C と l とは異なる2点で交わる

重解($D=0$) $\Longleftrightarrow$ C と l とは接する(1点のみ共有)

実数解がない($D<0$) $\Longleftrightarrow$ C と l とは共有点をもたない

である――「2次方程式」の「判別式(＝D)の符号」を調べればよい．

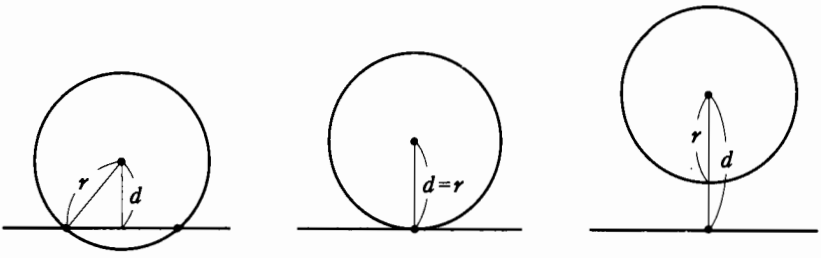
しかし，これは計算がメンドウな場合が多いので，次のように「図形的に」考えるとよい．すなわち，**「直線と円の位置関係」は，「円の中心から直線までの距離(＝d)」と「円の半径(＝r)」との大小関係で決定する．**まとめると

(i)　**「$d<r$」のとき：異なる2点で交わる．**

(ii)　**「$d=r$」のとき：接する(1点のみ共有)．**

(iii)　**「$d>r$」のとき：共有点をもたない．**

この関係を図に示すと次のようになる．



$d<r$　　$d=r$　　$d>r$

このとき，「r の値」は①からすぐにわかり，「d の値」は

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ←（円の中心の座標は①から C$(p,\ q)$，「公式」は p.321参照!!）

として計算される．

特に，「接する場合」は「**接線の方程式**」が求められる．

接線の方程式

円 C を

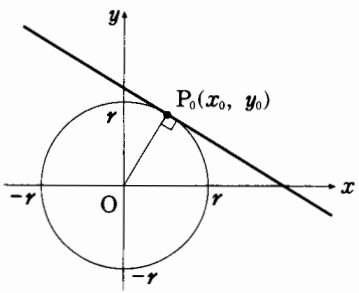
$$C:x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots①$$

とするとき，C 上の点 $P_0(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2 \quad \cdots\cdots②$$

で表される．

解　説　接点 $P_0(x_0,\ y_0)$ が円 C 上の4点 $(\pm r,\ 0)$，$(0,\ \pm r)$ のときは，「接線の方程式」は明らかに②の形となるので，この場合を除いて考える．すなわち，「$x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$」とすると「$\overrightarrow{OP_0}$ の傾き $(=m)$」は



$$m=\frac{y_0}{x_0}$$

で，接線は $\overrightarrow{OP_0}$ と直交するから「その傾き $(=m')$」は

$$m'=-\frac{x_0}{y_0}$$ （←― $mm'=-1$ p.309以下）

である．また，$P_0(x_0,\ y_0)$ は円周上の点であるから①を満たす．

$$\therefore\quad x_0^2+y_0^2=r^2 \quad \cdots\cdots③$$

そこで，「点 $P_0(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式」は

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$ ←― $y-y_0=m'(x-x_0)$（p.307）

$\therefore\quad y_0y-y_0^2=-x_0x+x_0^2 \qquad \therefore\quad x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2=r^2$ ←③

ゆえに，求める「接線の方程式」は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

である．

らしんばん

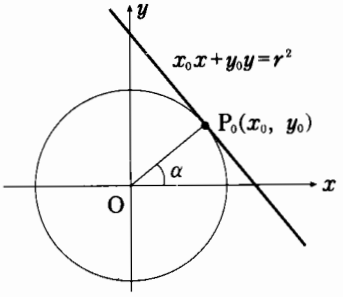
本問の結果を「図形的に」確かめてみよう――「公式」に示した②は

$$x_0x+y_0y=r^2 \quad \cdots\cdots(*)$$

であった―― $P_0(x_0,\ y_0)$ を円 C 上の点とすると，これは(＊)を満たす．

この「直線(＊)」が「接線」であることを示すには**「原点Oから直線(＊)までの距離がr」**であることを言えばよい．

それには(＊)を**「Hesseの標準形」**(p.322以下)に変形すると簡単にいく．



(＊)の両辺を

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{r^2}=r$$

で割ると

$$\frac{x_0}{r}x+\frac{y_0}{r}y=r \longrightarrow x\cos\alpha+y\sin\alpha=r\ (=\mathrm{OH})$$

$\left(\frac{x_0}{r}=\cos\alpha,\ \frac{y_0}{r}=\sin\alpha,\ \mathrm{H}\text{はOから「直線(＊)」への垂線の足!!}\right)$

となり，「直線(＊)」が「円 C の接線」であることが確認される．

このとき「垂線の足Hの座標」は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \qquad \therefore\quad \mathrm{H}(x_0,\ y_0)$$

で，HとP₀とが一致し，$P_0(x_0,\ y_0)$が「接点」であることもわかる．このことは

$$\begin{cases}P_0(x_0,\ y_0)\text{は「円 }C\text{」上，かつ「直線(＊)」上}\\ \text{「円 }C\text{」と「直線(＊)」が接する}\end{cases}$$

からほとんど「あたりまえ」のことである．

また，「接する」ことは，(＊)を

$$x_0x+y_0y-r^2=0$$

と変形し，「距離の公式(p.321)」を用いて

$$\frac{|-r^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{r^2}{r}=r\ (=\mathrm{OH}) \longleftarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

から説明することも出来る.

「傾き：m」が与えられる場合の接線の方程式を求める——

円：$x^2+y^2=r^2$，直線：$y=mx+n$

の「**共有点**」**の問題**として考えてみるとよい．これらを連立すると

$$x^2+(mx+n)^2=r^2 \quad \therefore \quad (1+m^2)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$$

そこで

接する $\Longleftrightarrow$ **1点のみ共有** $\Longleftrightarrow$ **重解（判別式：D=0）**

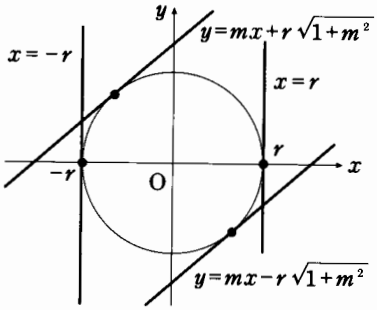
であるから

$$\frac{D}{4}=(mn)^2-(1+m^2)(n^2-r^2)=0$$

$$\therefore \quad r^2(1+m^2)-n^2=0$$

$$\therefore \quad n^2=r^2(1+m^2)$$

$$\therefore \quad n=\pm r\sqrt{1+m^2}$$



（原点から
直線：$mx-y+n=0$
への距離を求めると
$\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=r\ (>0)$
$\therefore\ |n|=r\sqrt{1+m^2}$
となり，同様の結論が得られる．）

すなわち，「傾き：m」が与えられるときの接線の方程式は

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

である．

さらに，接点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とこれをこの公式の形に変形するには

$x_0^2+y_0^2=r^2$ ←—— $(x_0,\ y_0)$ は $x^2+y^2=r^2$ 上!!

また，$(x_0,\ y_0)$ は**接線上**の点であるから，得られた接線の方程式に代入すると

$$y_0=mx_0\pm r\sqrt{1+m^2} \quad \therefore \quad y_0-mx_0=\pm r\sqrt{1+m^2}$$

2乗して

$$(y_0-mx_0)^2=r^2(1+m^2)$$

展開して m について整理すると

$$(r^2-x_0^2)m^2+2x_0y_0m+r^2-y_0^2=0$$

ここで

$r^2-x_0^2=y_0^2$，$r^2-y_0^2=x_0^2$ ←—— $x_0^2+y_0^2=r^2$

$$\therefore \quad y_0^2m^2+2x_0y_0m+x_0^2=0 \quad (y_0\neq 0)$$

$$\therefore \quad (y_0m+x_0)^2=0 \quad \therefore \quad y_0m+x_0=0$$

$$\therefore \quad m=-\frac{x_0}{y_0} \quad (y_0\neq 0)$$ ←—— **接線の傾き!!**

ゆえに，**接点**$(x_0,\ y_0)$**を与えるときの接線の方程式は**

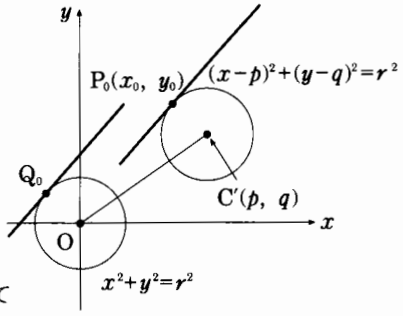
$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0) \qquad \therefore \quad x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2=r^2$$

すなわち，**接線の方程式は「$x_0x+y_0y=r^2$」**で本文に述べたと同様の結果が得られる．このとき，最初の直線「$y=mx+n$」には，すでに「y 軸に平行な直線($x=k$ のタイプ)」は除かれてしまっているが，**この場合の接線の方程式は「$x=\pm r$」**で，これが**求めた「接線の方程式」に含まれていることは本文に述べた通り**である．

➡ **「円 C」の中心が「原点以外」のときはどうすればよいか．**たとえば

$$C' : (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \quad \cdots\cdots (**)$$

として，この「円 C'」上の点 $P_0(x_0,\ y_0)$ における**「接線の方程式」**を考える——位置関係に注目して**「平行移動」**を利用するとよい．



右図の点 $P_0(x_0,\ y_0)$ を $(-p,\ -q)$ だけ「平行移動」して得られる点 $Q_0(x_0-p,\ y_0-q)$ は，本文①の「円 C 上の点 P_0」である——右図!!

この点 Q_0 における「円 C の接線の方程式」は，本文の結果をそのまま用いて

$$(x_0-p)x+(y_0-q)y=r^2$$

として得ることが出来る．

さらに，この接線に $(p,\ q)$ の「平行移動」をしたものが求める方程式である．

すなわち

$$(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)=r^2$$

が「点 P_0 における円 C' の接線の方程式」である．

この式はさらに変形されて

$$(x_0-p)\{(x-x_0)+(x_0-p)\}+(y_0-q)\{(y-y_0)+(y_0-q)\}=r^2$$

$$\therefore \quad (x_0-p)(x-x_0)+(x_0-p)^2+(y_0-q)(y-y_0)+(y_0-q)^2=r^2$$

ここで点 $P_0(x_0,\ y_0)$ が $(**)$ 上の点であることから

$$(x_0-p)^2+(y_0-q)^2=r^2$$

を代入して

$$(x_0-p)(x-x_0)+(y_0-q)(y-y_0)=0 \quad \cdots\cdots (***)$$

とも表される．いずれもメンドウな式なので「公式」として覚える必要はないが，自分で誘導出来るようにしておきたいものである．

➡ **「ベクトルの内積」を用いるとずっと簡単にいく．**

右図で「接点を P_0」，「接線上の任意の点を T」とすると

$$C'P_0 \perp P_0T$$

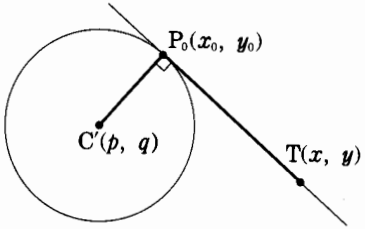
であるから「内積」を計算すると

$$\overrightarrow{C'P_0}\cdot\overrightarrow{P_0T}=\begin{pmatrix}x_0-p\\y_0-q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=0$$

$\therefore\quad (x_0-p)(x-x_0)+(y_0-q)(y-y_0)=0$

これは(***)に他ならない.

また,「円の中心C'」が原点Oであるときは「$p=q=0$」とおいて



$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0$$

$\therefore\quad x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2=r^2 \longrightarrow x_0x+y_0y=r^2$

となり,当然のことながら(*)と一致する.

例題 9

円 C

$$C:x^2+y^2=5^2$$

と,点A$(-1,\ 7)$を通る傾き m の直線 g がある.

(1) 直線 g が円 C に接するように m の値を定めよ.

(2) 円 C と直線 g とが異なる2点P, Qで交わるときの m の値の範囲を求め,そのとき, C が g から切りとる線分の長さを求めよ.

(3) (2)のときAP·AQを計算せよ.

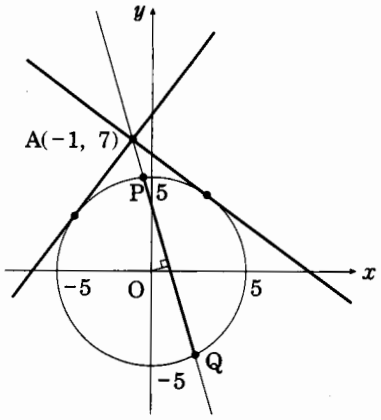
解 説 $C:x^2+y^2=5^2$ ……①

$g:y-7=m(x+1)\quad\therefore\quad mx-y+m+7=0$ ……②

(1) g と C とが接する条件は,「原点から g までの距離」が「C の半径$(=5)$」に等しいことであるから

$$\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

$\therefore\quad |m+7|=5\sqrt{m^2+1}$



両辺は負でないから2乗しても「同値関係」は保存される.

$\therefore\quad (m+7)^2=5^2(m^2+1)$

$\therefore\quad 24m^2-14m-24=0$

$\therefore\quad 12m^2-7m-12=0$

$\therefore\quad (4m+3)(3m-4)=0\quad\therefore\quad m=-\frac{3}{4},\ \frac{4}{3}$

(2)　異なる2点で交わる条件は

$$\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}<5 \qquad \therefore \quad |m+7|<5\sqrt{m^2+1}$$

両辺が負でないから2乗しても「同値関係」は保存される.

$$\therefore \quad (m+7)^2<5^2(m^2+1)$$

$$\therefore \quad (4m+3)(3m-4)>0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{m<-\frac{3}{4},\ m>\frac{4}{3}}$$

また，gがCと2点P，Qで交わるとき，線分PQの中点をMとすると

$OM \perp PQ$

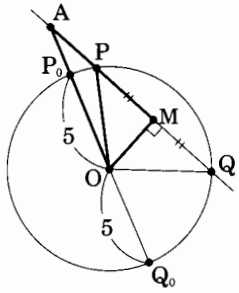
であるから

$$PM^2=OP^2-OM^2$$

$$=5^2-\left(\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=\frac{2(3m-4)(4m+3)}{m^2+1}$$

$$\therefore \quad PM=\sqrt{\frac{2(3m-4)(4m+3)}{m^2+1}}$$

$$\therefore \quad PQ=2PM=\frac{2\sqrt{2(3m-4)(4m+3)}}{\sqrt{m^2+1}}$$



(3)　「**PM＝QM**」に注意すると図で.

$$AP\cdot AQ=(\mathbf{AM-PM})(\mathbf{AM+PM}) \quad \cdots\cdots③$$

$$=AM^2-PM^2$$

$$=(OA^2-OM^2)-(OP^2-OM^2) \quad \longleftarrow \quad \begin{pmatrix}\mathbf{AM^2+OM^2=OA^2}\\ \mathbf{PM^2+OM^2=OP^2}\end{pmatrix}$$

$$=OA^2-OP^2$$

$$=\{(-1)^2+7^2\}-5^2=\mathbf{25} \quad \longleftarrow \quad \mathbf{OP=5}\ (=\text{円の半径})$$

「AP·AQ＝25(一定)」に注目!!これを「**方べきの定理**(p.345)」といい，この設問はこの定理の確認である．詳しくは**らしんばん**で説明するが，これを用いると

$$\mathbf{AP\cdot AQ=AP_0\cdot AQ_0} \quad \longleftarrow \quad P_0,\ Q_0 \text{は直線OAと円との交点!!}$$

$$=(OA-5)(OA+5) \quad \longleftarrow \quad 5 \text{は円の半径!!}$$

$$=OA^2-5^2$$

$$=\{(-1)^2+7^2\}-5^2=25$$

となる．いずれにしても，実際にAP，AQを計算しないで「AP·AQ」の値を求めることが出来るところがおもしろい.

らしんばん

(1)について――

接点の座標を$T(x_0,\ y_0)$とすると「**接線の方程式**」はp.338で説明したように

$$\boldsymbol{x_0x+y_0y=25} \quad \longleftarrow \quad x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots(*)$$

で与えられる.

また, Tは「円C」上の点であるから

$$x_0^2+y_0^2=25 \quad \cdots\cdots (**)$$

このとき(*)は点A$(-1,\ 7)$を通るから代入して

$$-x_0+7y_0=25 \quad \cdots\cdots (***)$$

(**), (***)を解けばx_0, y_0が求まり, これらを(*)に入れると「接線の方程式」が求まる. すなわち

(***)：$x_0=7y_0-25$

これを(**)に入れて

$$(7y_0-25)^2+y_0^2=25 \quad \therefore \quad 50y_0^2-2\cdot7\cdot25y_0+25^2-25=0$$

$$\therefore \quad y_0^2-7y_0+12=(y_0-3)(y_0-4)=0$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y_0=3 \longrightarrow x_0=-4 \\ y_0=4 \longrightarrow x_0=3 \end{cases} \quad \therefore \quad (x_0,\ y_0)=(-4,\ 3),\ (3,\ 4)$$

これらを(*)に入れると「接線」は2本あり, それらの「方程式」は

$$-4x+3y=25,\ 3x+4y=25$$

で, したがって求める傾きは

$$m=\frac{4}{3},\ -\frac{3}{4}$$

となる.

➔ (2)について――「交点P, Qの座標」を求める方向でマジメ(？)に扱ってみよう.

$$C：x^2+y^2=25, \quad g：y=mx+m+7 \ (\text{本文②})$$

を「連立」して「$D>0$」の条件を求めればよい. すなわち

$$x^2+(mx+m+7)^2=25$$

$$\therefore \quad (1+m^2)x^2+2m(m+7)x+(m+7)^2-25=0 \quad \cdots\cdots (****)$$

から, 求める条件は

$$\frac{D}{4}=\{m(m+7)\}^2-(1+m^2)\{(m+7)^2-25\}>0$$

$$\therefore \quad \cancel{m^2(m+7)^2}-(m+7)^2+25-\cancel{m^2(m+7)^2}+25m^2>0$$

$$\therefore \quad 24m^2-14m-24>0$$

$$\therefore \quad 12m^2-7m-12=(3m-4)(4m+3)>0$$

$$\therefore \quad m<-\frac{3}{4},\ m>\frac{4}{3}$$

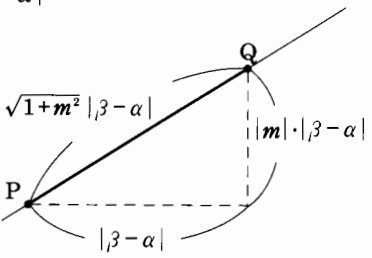
となる.「(2)の後半」については,「2次方程式(****)」の2つの実数解をα, βとすると2つの交点P, Qの座標は

$$\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha+m+7),\ \mathrm{Q}(\beta,\ m\beta+m+7)$$

であるから

$$PQ=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{m(\beta-\alpha)\}^2}=\sqrt{1+m^2}\,|\beta-\alpha|$$

（←―― これは覚えておくとよい）



ここで，「2次方程式の解と係数の関係」を用いると（＊＊＊＊）より

$$\alpha+\beta=-\frac{2m(m+7)}{1+m^2},\quad \alpha\beta=\frac{(m+7)^2-25}{1+m^2}$$

これを用いると

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\left\{-\frac{2m(m+7)}{1+m^2}\right\}^2-4\left\{\frac{(m+7)^2-25}{1+m^2}\right\}$$

$$=\frac{4m^2(m+7)^2-4\{(m+7)^2-25\}(1+m^2)}{(1+m^2)^2}$$

$$=\frac{8(12m^2-7m-12)}{(1+m^2)^2}$$

$$\therefore\quad |\beta-\alpha|=\frac{2\sqrt{2(3m-4)(4m+3)}}{1+m^2}\quad (1+m^2>0)$$

これを代入すれば

$$PQ=\frac{2\sqrt{2(3m-4)(4m+3)}}{\sqrt{1+m^2}}$$ ←―― 本文の結果と同じ!!

となる――少し大がかりだが，この計算に耐えなければならないときもある．**本文に示した方法は「円」だけについて有効な方法であり，「放物線」などになるとこれでいくしかないからである．**

なお，「2次方程式(p.112)」では

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)\iff x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\ (D\text{は判別式!!})$$

であった．これを用いて「$|\beta-\alpha|$」を計算すると

$$|\beta-\alpha|=\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

となり，この結果を使えば上のメンドウな計算のある部分は救われる．

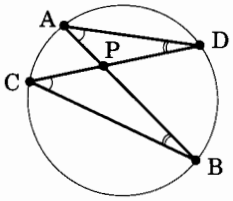
(3)について――「方べきの定理」は初等幾何の中でも「特によく用いられる定理」である――キチンと説明しておく．

方べきの定理

定点Pを通る任意の2直線が円Oと交わる2点をそれぞれAとB，CとDとすれば

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

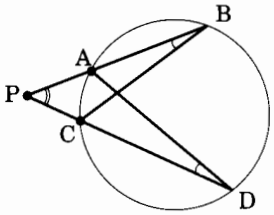
が成り立つ．



これは，点Pが円 O の内部にあっても外部にあっても成り立つ定理であり，**証明のポイントは「△PAD∽△PCB」を利用することにある**——「**円周角の定理**(p.422)」を利用すれば「対応する3つの角が等しく，あらためて説明するまでもない．そこで「対応する辺の比」をとると

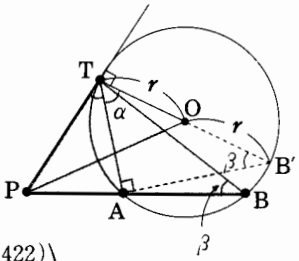
$$\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB} \longrightarrow \mathbf{PA\cdot PB=PC\cdot PD}$$

となる．



さらにこの定理は次に示すように「形を変えて」表される．

〈1〉 点Pが右図のように円 O の外部にあるとき



$$\mathbf{PA\cdot PB=PT^2=PO^2-r^2}\ (=\text{一定})$$

が成り立つ(ただし，Tは接点とする)．

これは次のように証明する．

$\angle PTA=\angle PBT$ ←— **接弦定理!!**

$\left(\begin{array}{l}\angle PBT=\angle AB'T=\beta \longleftarrow \text{円周角 (p.422)}\\ \left.\begin{array}{l}\beta+\alpha=90^\circ\\ \angle PTA+\alpha=90^\circ\end{array}\right\rangle \therefore\ \angle PTA=\beta=\angle PBT\end{array}\right)$

$\therefore$ $\triangle PTA\backsim\triangle PBT$

$\therefore$ $\dfrac{PT}{PB}=\dfrac{PA}{PT} \longrightarrow PA\cdot PB=PT^2$

ここで $\triangle OPT$ は直角三角形であるから

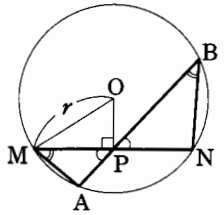
$PT^2=PO^2-OT^2=PO^2-r^2$ (r は円の半径)

$\therefore$ $PA\cdot PB=PT^2$

$=PO^2-r^2$ (=一定)

である．

〈2〉 点Pが右図のように円 O の内部にあるとき



点Pを通り，OPに垂直な弦をMNとすると

$$\mathbf{PA\cdot PB=PM\cdot PN}$$

$$=\mathbf{PM^2}=r^2-\mathbf{PO^2}\ (=\text{一定})$$

が成り立つ．

これは次のようにして証明する．

$\angle PMA=\angle PBN$ ←— **円周角!!**

$\angle APM=\angle NPB$ ←— **対頂角!!**

$\therefore$　$\triangle \mathbf{PMA} \backsim \triangle \mathbf{PBN}$

$$\frac{PM}{PB}=\frac{PA}{PN}$$

$\therefore$　$PA \cdot PB = PM \cdot PN = PM^2$　$\longleftarrow$　$PN=PM$

ここで直角三角形 OPM に注目すると

$PM^2 = OM^2 - PO^2 = r^2 - PO^2$（$r$ は円の半径）

$\therefore$　$PA \cdot PB = PM^2 = r^2 - PO^2$（＝一定）

以上〈1〉〈2〉でわかることは

$$\mathbf{PA \cdot PB}=\begin{cases} \mathbf{PO^2-r^2\ (>0)} & \longleftarrow \text{点 P が円 } \boldsymbol{O} \text{ の外部!!} \\ \mathbf{r^2-PO^2\ (>0)} & \longleftarrow \text{点 P が円 } \boldsymbol{O} \text{ の内部!!} \end{cases}$$

ということであり，この「**一定値：$k=PO^2-r^2$**」のことを「**円 O に関する点 P の方べき**」と言うわけである．

ハナシを本問にもどすことにしよう．

(3)で「点 A を通る直径」に注目すれば

$AP \cdot AQ = AP_0 \cdot AQ_0 = \cdots\cdots = 25$　$\longleftarrow$　本文に示した

はすぐにわかる．そこでこの結果を利用すれば(2)を解決することも出来る．

すなわち，本文③に示した計算から

$$\begin{aligned} AP \cdot AQ &= (AM-PM)(AM+PM) \\ &= AM^2 - \mathbf{PM^2} \\ &= (OA^2 - OM^2) - \mathbf{PM^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad \mathbf{PM^2} &= OA^2 - OM^2 - AP \cdot AQ \\ &= \{(-1)^2+7^2\} - 25 - OM^2 \\ &= 25 - \left(\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 \\ &= \cdots\cdots = \frac{2(3m-4)(4m+3)}{m^2+1} \end{aligned}$$

（以下，本文と同じ!!）

となるのは「あたりまえ」のことである．

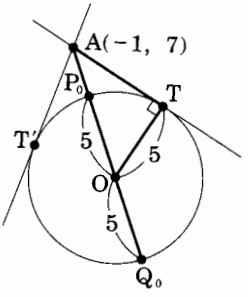
ちなみに，「**接線の長さ（右図の AT, AT'）**」などもマジメに計算すれば

$$\begin{aligned} AT^2 &= OA^2 - OT^2 \\ &= \{(-1)^2+7^2\} - 5^2 = 25 \end{aligned}$$

であるが，ここに述べた公式を用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{AT^2} &= \mathbf{AP_0 \cdot AQ_0} \\ &= (\sqrt{50}-5)(\sqrt{50}+5) \\ &= 50 - 5^2 = 25 \end{aligned}$$

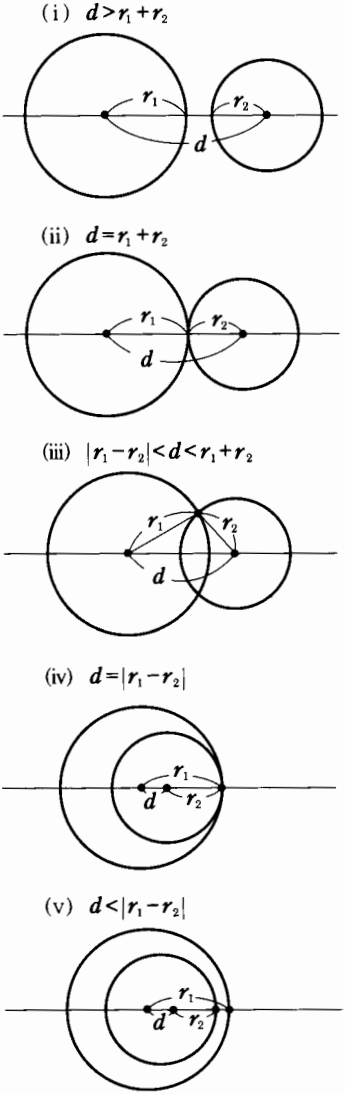
で，当然のことながら一致することがわかる．



いずれにしても「すぐに使える」ようになっておきたい公式の一つである．

(iii)　2つの円の位置関係

「2つの円の位置関係」は，「中心間の距離(＝d)」と「2つの半径(＝r_1, r_2)」との関係で調べる――図のように「5つの場合」が考えられる(図は「$r_1>r_2$」として描いてあるが，「$r_1<r_2$」のときは図に示したr_1とr_2とをとりかえて考えればよい)．



これらの位置関係で

2円が「接する」とき

$d=r_1+r_2$　←― (ii)(外接)

$d=|r_1-r_2|$　←― (iv)(内接)

2円が「異なる2点で交わる」とき

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$　←― (iii)

は特に重要であるから，「条件」と図とをつきあわせてキチンと理解しておきたい．

このような「図形的なアプローチ」をせずに，「2円の式」を「連立方程式」としてとらえた場合，基本的には

$$\begin{cases} \text{2組の実数解} \iff \text{2点で交わる} \\ \text{重解} \iff \text{接する} \end{cases}$$

ということになるのだが，実際には相当メンドウな計算をしなければならず，しかも，「接する」とき「判別式：$D=0$」だけでは「内接」か「外接」かわからない――「図形的な扱い」を評価したい．

以下，そのような考え方にもとづいてハナシを進めることにする．

注　(iii)の条件

$|r_1-r_2|<d<|r_1+r_2|$

はd, r_1, r_2が三角形の3辺となり得るための条件でもある．このハナシはp.426, 427で「三角形の成立条件」として詳しく説明する．

例題 10

2つの円 C_1, C_2 がある.

$C_1 : x^2+y^2-2x-3=0$,　$C_2 : x^2+y^2-4x+2y+3=0$

(1)　C_1, C_2 が異なる2点で交わることを示せ.

(2)　C_1, C_2 の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ.

(3)　C_1, C_2 の2つの交点と原点Oを通る円の方程式を求めよ.

解　説　まず, C_1, C_2 の方程式をそれぞれ「標準形」に直して「中心」と「半径」を求めておく.

$C_1 : (x-1)^2+y^2=2^2$ ⟶ 中心 $C_1(1,\ 0)$, 半径 2 ……①

$C_2 : (x-2)^2+(y+1)^2=2$ ⟶ 中心 $C_2(2,\ -1)$, 半径 $\sqrt{2}$ …②

「中心間の距離(＝d)」を求めると

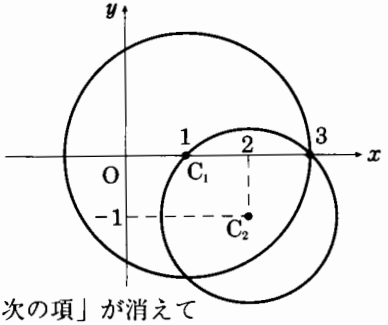
$$d=\sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$$

そこで「$r_1=2$, $r_2=\sqrt{2}$」として

$$2-\sqrt{2}<\sqrt{2}<2+\sqrt{2}$$

$$\longleftarrow\ |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$$

が成り立つから2つの円 C_1, C_2 は異なる2点で交わる.



(2)　**C_1, C_2 の方程式の辺々を引く**と「2次の項」が消えて

$$2x-2y-6=0 \quad \therefore\ x-y-3=0$$

(3)　C_1, C_2 の「2交点」を通る**「円群」**は

$$\begin{cases} (x^2+y^2-2x-3)+k(x^2+y^2-4x+2y+3)=0 & \cdots\cdots③ \\ \text{または,}\ x^2+y^2-4x+2y+3=0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

で表されるが, ④は「$x=y=0$」を満たさないから除いて考える.

③に「$x=y=0$」を入れると

$$-3+3k=0 \quad \therefore\ k=1$$

このとき③は

$$(x^2+y^2-2x-3)+1\cdot(x^2+y^2-4x+2y+3)=0$$

$$2x^2+2y^2-6x+2y=0 \quad \therefore\ x^2+y^2-3x+y=0$$

が求める円の方程式である.

らしんばん

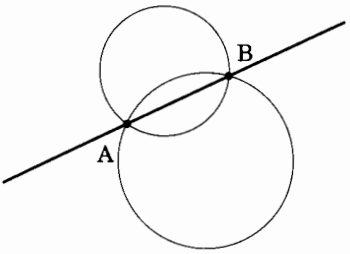
「共通弦(きょうつうげん)の方程式」,「円群(えんぐん)」について——

(2)では「①, ②の交点を通る……」と言いながら「実際には交点を求めていない」ことに注目してもらいたい. 2つの円

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots\cdots(**)$$

があって，**これらが「2点A，Bで交わっている」ものとする**——本問では(1)でそれを確認している．



このとき「(*)−(**)」で得られる「1次方程式」，すなわち

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0 \quad \cdots\cdots(***)$$

は，「直線ABの方程式」である——線分ABは「2つの円の共通の弦」になっているので，この方程式を2円の**「共通弦の方程式」**という．

たとえば，「2円の交点A」をA$(x_1,\ y_1)$とすると，これは(*)，(**)の両方を満たすから

$$\left.\begin{aligned} &x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0 \\ &x_1^2+y_1^2+a'x_1+b'y_1+c'=0 \end{aligned}\right\} \longleftarrow \text{A}(x_1,\ y_1)\text{は(*)，(**)を満たす!!}$$

辺々引くと

$$(a-a')x_1+(b-b')y_1+(c-c')=0 \longleftarrow \text{A}(x_1,\ y_1)\text{は(***)を満たす!!}$$

すなわち，**A$(x_1,\ y_1)$は「直線(***)上の点」**である．

このハナシは**「点Bについても同様」**であるから

(***)⟶ 直線ABの方程式!!

すなわち，これは**「共通弦ABの方程式」**である——「直線束(p.318)」で述べた考え方と全く同様である．

このことは次のように「一般化」される．すなわち

$$f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots(****)$$

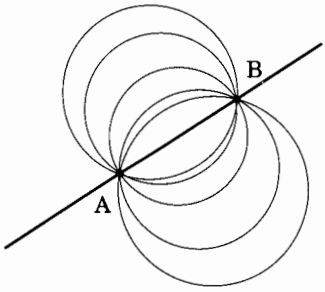
が**「交わる」**とき，その**「交点を通る直線(または曲線)の方程式」**は

$$\boldsymbol{\lambda f(x,\ y)+\mu g(x,\ y)=0}$$

あるいは

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0} \\ \boldsymbol{\text{または，}\ g(x,\ y)=0} \end{cases}$$

で表される(p.318)．



上に述べた「共通弦の方程式」は，(****)で表される2つの方程式で，x^2，y^2の係数がともに1であるときに，「$\lambda=1$，$\mu=-1$」，あるいは「$k=-1$」とおいたものに他ならない．さらに「λ，μ，あるいはk」にいろいろな値を与えると，図のように**「交点A，Bを通る曲線群(この場合は円群)」**が得られる．この考え方は「空間座標」における「平面」，「球面」などにおいても同様である．

ここまでは「2円が交わるとき」という条件のもとでのハナシであった．**「交わらないとき」はどうなるのか**．そのことについて少し考えてみよう．

スッキリ説明するために

$$S=x^2+y^2+ax+by+c$$

とおくと，「$S=0$」は「円の方程式」である．たとえば2つの円

$$S_1=0,\quad S_2=0$$

が交わらないとき，**この2つの円と交わる第3の円**

$$\boldsymbol{S_3=0}$$

を考えると

$$S_1-S_3=0,\quad S_2-S_3=0$$

←ともに x，y の1次方程式!!

はそれぞれ「第3の円 $S_3=0$」と2円との「共通弦の方程式」である．この「2つの共通弦」が点Pで交わるならば

$$(S_1-S_3)-(S_2-S_3)=0$$

$$\therefore\quad S_1-S_2=0 \longleftarrow x,\ y\text{の1次方程式!!}$$

を満たすことになる――このような「第3の円 $S_3=0$」をいろいろに変えていくと点Pは「ある直線を描く」ことがわかる．これを**「根軸（こんじく）」**という．

さらに，この3つの円に**「方べきの定理(p.345)」**を用いると

$$PT^2=PQ\cdot PR \quad\longleftarrow「S_1=0」$$

$$PQ\cdot PR=PQ'\cdot PR' \quad\longleftarrow「S_3=0」$$

$$PQ'\cdot PR'=PT'^2 \quad\longleftarrow「S_2=0」$$

$$\therefore\quad PT^2=PT'^2 \quad\therefore\quad PT=PT'$$

すなわち，「点Pの軌跡」は，**「2円 $S_1=0$，$S_2=0$ への接線の長さが等しい点の集合」**であることがわかる．

具体的には次のように計算する．

図のように点 $P(X,\ Y)$ から円 C

$$C:(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

に接線PTを引くと

$$PT=\sqrt{PC^2-CT^2}$$

$$=\sqrt{(X-p)^2+(Y-q)^2-r^2}$$

であることがわかる．

そこで，円 C'

$$C':(x-p')^2+(y-q')^2=(r')^2$$

に接線PT′を引くと全く同様にして

$$PT'=\sqrt{(X-p')^2+(Y-q')^2-(r')^2}$$

であるから，これに

条件：PT＝PT′

を与えると P$(X,\ Y)$ に対して

$$\sqrt{(X-p)^2+(Y-q)^2-r^2}=\sqrt{(X-p')^2+(Y-q')^2-(r')^2}$$

$$\therefore\quad (X-p)^2+(Y-q)^2-r^2=(X-p')^2+(Y-q')^2-(r')^2$$

となり，これは

(左辺)＝0 ←―― 円 C

(右辺)＝0 ←―― 円 C'

に他ならず，この X，Y を x，y におきかえて整理して得られる「x，y の1次方程式」は先に述べた「$S_1-S_2=0$(あるいは(＊＊＊))」に他ならない．

---

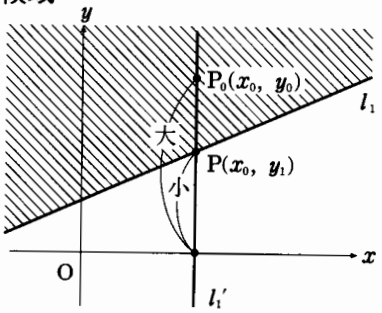
2 不等式と領域

「x-y 平面」上で，「**x，y についての不等式**」を満たす「**x，y を座標とする点の集合**」を，その不等式の表す「**領域**」という．

(1) 不等式と領域

(i) 直線の上側(あるいは下側)の領域

「**x-y 平面**」上の「**直線**」は「**x，y の1次方程式**」で表された(p.301)．そして，この「**直線**」は「**x-y 平面**」を「**2つの部分**」に分けている．このことは何を意味するか．



具体的な例で説明しよう．

たとえば，直線 l_1

$$l_1:\ y=mx+n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

←――「(Ⅰ)①(p.301)」のタイプ

の「**上側の部分**」の任意の点を $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ とすると，P_0 を通って y 軸に平行な直線 l_1' と l_1 との交点 P は

$\mathrm{P}(x_0,\ y_1)$ ←―― P_0 と P は x 座標が等しく，ともに x_0!!

で表されるが，この点は l_1 上の点であるので

$y_1=mx_0+n$ ←――「$x=x_0$，$y=y_1$」は「方程式①」を満たす!!

このとき

点 P_0 は「直線 l_1 の上側」$\Longleftrightarrow$ P_0 は P より上側 $\Longleftrightarrow$ $y_0 > y_1$

であるから

$y_0 > y_1 = mx_0 + n$　　$\therefore$　$y_0 > mx_0 + n$

←――― 点 $P_0(x_0,\ y_0)$ の満たす条件!!

すなわち，「直線 l_1 の上側」の点はすべて不等式

$y > mx + n$

を満たし，逆にこの不等式を満たす点は，すべて「直線 l_1 の上側」にあることがわかる．集合の記号を用いて表せば

直線 l_1 の上側の点の集合 $= \{(x,\ y) \mid y > mx + n\}$

であり，このような「点の集合」を**不等式の表す「領域」**という．

「直線 l_1 の下側」の点についてもハナシは同様で，まとめると

直線 l_1 の上側の領域 $= \{(x,\ y) \mid y > mx + n\}$　(――→ $mx - y + n < 0$)

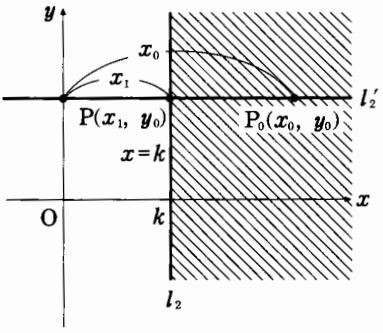
直線 l_1 の下側の領域 $= \{(x,\ y) \mid y < mx + n\}$　(――→ $mx - y + n > 0$)

直線 l_1 $= \{(x,\ y) \mid y = mx + n\}$　(――→ $mx - y + n = 0$)

となる．なお，「境界線である l_1」を，たとえば「l_1 の上側の領域」に含めて考えるときは

$\{(x,\ y) \mid y \geqq mx + n\}$

のように，不等式に「等号」を加えて表し，「領域を示す問題」などでは，「境界を入れる(あるいは除く)」などの説明をつけて，態度(？)をよりハッキリと明示するときもある．



次に

$l_2 : x = k$

←――「(Ⅰ)の②(p.301)」のタイプ

についても簡単に説明しておこう．

この場合は「l_2 より右側(あるいは左側)の領域」で考える．たとえば**「右側の領域」の任意の点を $P_0(x_0,\ y_0)$** とし，P_0 を通り x 軸と平行な直線 l_2' と l_2 との交点を

$P(x_1,\ y_0)$ ←――― P_0 と P は y 座標が等しく，ともに y_0 !!

とすれば l_1 のときと全く同様にして

$x_0 > x_1 = k$　　$\therefore$　$x_0 > k$ ←――― 点 $P_0(x_0,\ y_0)$ が満たす条件!!

すなわち，「直線 l_2 の右側の領域」の点はすべて不等式

$x>k$

を満たし，逆にこの不等式を満たす点は，すべて「直線 l_2 の右側の領域」の点である．まとめると

直線 l_2 の右側の領域$=\{(x,\ y)\mid x>k\}$ $(\longrightarrow x-k>0)$

直線 l_2 の左側の領域$=\{(x,\ y)\mid x<k\}$ $(\longrightarrow x-k<0)$

直線 l_2 $=\{(x,\ y)\mid x=k\}$ $(\longrightarrow x-k=0)$

である——これで「直線で2つに分けられる x-y 平面上の領域」について「起こり得るすべての場合」をケントウしたことになる．

(ii) 正領域と負領域

「1次不等式の表す領域」については，原則として(i)で述べた「上側(あるいは下側)」で考えるのが圧倒的に(？)よいが，「その他の場合への発展」をも考えると「不等式と領域の一般の形」について，キチンとした形で説明しておかなければならない．それには(i)で述べたハナシがシッカリと理解されていることが前提である．まずは整理してみよう．

(i) 「x-y 平面」上の「直線 l」は，「方程式(等式)」で表される

(ii) 「直線 l」は「x-y 平面」を2つの「領域」に分ける

(iii) 2つの「領域」を表す「不等式」は「不等号が逆向き」である

となるが，これは「直線 l の方程式」を

$l: ax+by+c=0$ ($a=b=0$を除く) ←—— 「(Ⅱ)(p.301)」のタイプ

で与えたとしても全く同様に成り立つ関係である——(i)で，「起こり得るすべての場合」をケントウしてある．すなわち

$\{(x,\ y)\mid ax+by+c=0\}$ ←—— 「直線 l」そのもの!!

$\{(x,\ y)\mid ax+by+c>0\}$ ←—— l で分けられた一方の領域!!

$\{(x,\ y)\mid ax+by+c<0\}$ ←—— l で分けられた他方の領域!!

であり，ここで，「左辺の1次式 $ax+by+c$」を一般の形で

$f(x,\ y)=ax+by+c$

と表すことにすると

$\{(x,\ y)\mid f(x,\ y)>0\}$ ←—— $f(x,\ y)$の「正領域」という

$\{(x,\ y)\mid f(x,\ y)<0\}$ ←—— $f(x,\ y)$の「負領域」という

である．たとえば

$f(x,\ y)=x-2y+3$

とすると，$f(x,\ y)$の「正領域」は

$f(x,\ y)>0$ $\quad\therefore\quad x-2y+3>0$ ……②

$\therefore\quad y<\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

で，これは直線

$x-2y+3=0$　……③

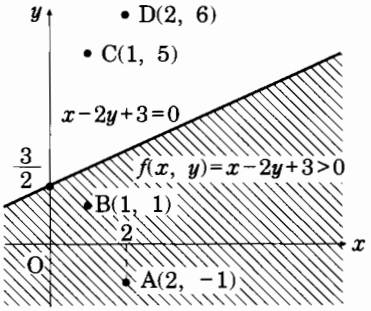
の「**下側の領域**」である．また②の両辺に「-1」をかけて得られる不等式

$-x+2y-3<0$

は「不等式②」と同値であるが，この左辺を $g(x,\ y)$ とおくと

$g(x,\ y)=-x+2y-3<0$

となり，この領域は，**$g(x,\ y)$の「負領域」**であることがわかる．



このように，**「正領域，負領域」は「直線③の上側，下側の領域」と対応してはいないので間違えないように注意しなければならない．**

「正領域か(？)」，「負領域か(？)」を調べる方法は，**「直線で分けられた2つの領域」では「同じ領域の点が同符号」**であることに注目して「適当な点(たとえば原点など)」を代入して符号を調べるとよい．

上の例で言えば

$f(0,\ 0)=0-2\cdot0+3=3>0$

←――原点$(0,\ 0)$を含む方の領域が$f(x,\ y)$の正領域!!

（トウゼン含まない方の領域が負領域!!）

$g(0,\ 0)=-0+2\cdot0-3=-3<0$

←――原点$(0,\ 0)$を含む方の領域が$g(x,\ y)$の負領域!!

（含まない方の領域が正領域!!）

であることが簡単にわかる．

他にもいくつか点をとって「符号」を調べておこう――図を参照!!

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{A}(2,\ -1)\longrightarrow & \begin{cases} f(2,\ -1)=2-2\cdot(-1)+3=7>0 \\ g(2,\ -1)=-2+2\cdot(-1)-3=-7<0 \end{cases} \\ \mathrm{B}(1,\ 1)\longrightarrow & \begin{cases} f(1,\ 1)=1-2\cdot1+3=2>0 \\ g(1,\ 1)=-1+2\cdot1-3=-2<0 \end{cases} \end{array}\right\}\ \text{直線③の下側!!}$$

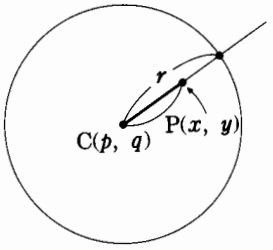
$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{C}(1,\ 5)\longrightarrow & \begin{cases} f(1,\ 5)=1-2\cdot5+3=-6<0 \\ g(1,\ 5)=-1+2\cdot5-3=6>0 \end{cases} \\ \mathrm{D}(2,\ 6)\longrightarrow & \begin{cases} f(2,\ 6)=2-2\cdot6+3=-7<0 \\ g(2,\ 6)=-2+2\cdot6-3=7>0 \end{cases} \end{array}\right\}\ \text{直線③の上側!!}$$

のように，各点に対する「$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$」の符号の状況がわかる．

以上，「直線」を対象にハナシを進めて来たが，「他の曲線」についても考え方は同様である．

(iii)　円の内側(あるいは外側)の領域

「円」も「x-y 平面」を2つの領域(内側と外側)に分ける図形である．



不等式

$$(x-p)^2+(y-q)^2<r^2 \quad \cdots\cdots④$$

は，点 $P(x,\ y)$ と $C(p,\ q)$ との距離が「r より小さい」ことを表している．

すなわち「不等式④」は

$$CP^2<r^2 \quad \therefore \quad CP<r$$

である．このことから領域

$$\{(x,\ y)\mid (x-p)^2+(y-q)^2<r^2\}$$

は，円 C

$$C:\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \quad \cdots\cdots⑤$$

の「内部」を表すことがわかる．同様にして領域

$$\{(x,\ y)\mid (x-p)^2+(y-q)^2>r^2\}$$

は，「円 C の外部」を表している．また

$$f(x,\ y)=(x-p)^2+(y-q)^2-r^2 \quad \longleftarrow ⑤の\ r^2\ を左辺に移項!!$$

とおくとき

$$f(p,\ q)=(p-p)^2+(q-q)^2-r^2=-r^2<0$$

$$\longleftarrow 円\ C\ の中心\ C(p,\ q)\ を代入!!$$

であるから

円 C の内部――$f(x,\ y)$ の負領域!!

円 C の外部――$f(x,\ y)$ の正領域!!

であることがわかる．

以上，他の「閉曲線(へいきょくせん)」についても共通して言えることがらである．

例題 11

次の不等式を満たす点$(x,\ y)$の存在範囲を図示せよ．

(1)　$2x+3y\leqq 6,\ y<x$

(2)　$x^2+y^2<25,\ 3x+4y\geqq 0$

(3)　$(2x+3y-6)(y-x)>0$

(4)　$(x^2+y^2-25)(3x+4y)\leqq 0$

解　説　(1)　本問のように不等式が並べて書いてあるときは「かつ」の意味である．すなわち本問は「$2x+3y\leqq 6$」であり，かつ「$y<x$」である領域を求めることになる．

$$2x+3y\leqq 6 \quad \therefore \quad \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq 1 \longleftarrow \text{両辺を「6」で割った!!}$$

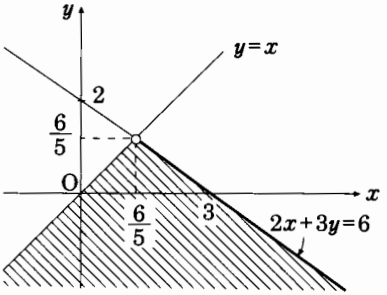
であるから，この領域は2点

$(3,\ 0)$，$(0,\ 2)$

を通る直線

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(切辺形(せつぺんけい) ⟶ p.308)



の「**上側でない部分(等号に注意)**」で，不等式「$y<x$」の表す領域は，直線「$y=x$」の「下側の部分」である．なお，2直線(境界線)の交点は

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ y=x \end{cases} \longrightarrow \left(\frac{6}{5},\ \frac{6}{5}\right)$$

である．

これらのことから**求める領域は「図の斜線部分」**である．ただし**「境界線」は「直線①」の「$x>\frac{6}{5}$」の部分のみを含むものとする**(太線は含み，○印の点は除く)．

(2)　$x^2+y^2<25$ ⟶ 原点を中心とする半径5の円の内部

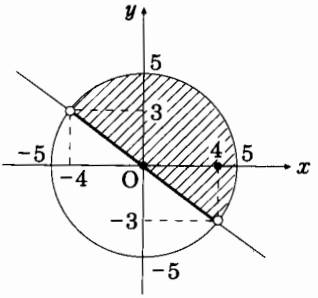
$3x+4y\geqq 0$ ⟶ 直線「$3x+4y=0$」の**「下側でない部分」**

境界線の交点は「連立方程式」を解いて

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 3x+4y=0 \end{cases} \longrightarrow (4,\ -3),\ (-4,\ 3)$$

である．

これより求める領域は**「図の斜線部分」**である．ただし，**「境界線」は「太線部分」のみを含み，「○印の点」を除く．**



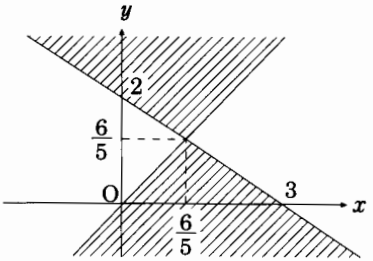
(3)　$(2x+3y-6)(y-x)>0$

が成り立つのは次の2つの場合である．

(i)　$2x+3y-6>0$，$y-x>0$

(ii)　$2x+3y-6<0$，$y-x<0$

求める領域は，この「(i)と(ii)のどちらか((i)または(ii))が成り立てばよい」のだから，(i)と(ii)の領域をそれぞれ求めてその「**和集合**(p.5)」をとればよい．



「境界線」の直線は(1)で求めた直線と同じだからこれに注目すると

(i) ⟶「**2直線の上側**」の領域
(ii) ⟶「**2直線の下側**」の領域
} ，ただし「**境界線**」を除く

となる．

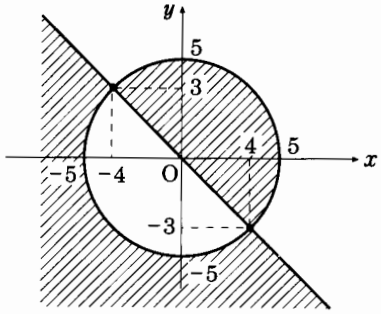
(4) 考え方は(3)と同様である．

すなわち

(i) $x^2+y^2-25\leqq 0$，$3x+4y\geqq 0$

(ii) $x^2+y^2-25\geqq 0$，$3x+4y\leqq 0$

で，「(i)または(ii)」を図示すればよい．ただし，「**境界線**」はすべて含まれる——(2)で求めた「境界線である直線と円」に注目して各自で考えてみるとよい．



らしんばん

(1)の「**上側でない部分**」という表現に異和感があるかも知れないが，これは，「**下側の部分と境界線**」ということである．同様に(2)の「**下側でない部分**」も，「**上側の部分と境界線**」をまとめて表したものである．

(3)，(4)は「x と y の式」が「**積の形**」になっている．

$AB>0 \iff (A>0,\ B>0)$または$(A<0,\ B<0)$

$AB\leqq 0 \iff (A\geqq 0,\ B\leqq 0)$または$(A\leqq 0,\ B\geqq 0)$

などは「**不等式**(p.156)」ですでに説明したことがらである——本文の「(i)または(ii)」は，この約束にしたがった「場合分け」である．

(3)，(4)の「境界線」は，「x-y 平面」を「4つの部分」に分けている．

たとえば(3)で説明しよう．不等式の左辺を $f(x,\ y)$ とおくと

$$f(x,\ y)=(2x+3y-6)(y-x) \quad \cdots\cdots(*)$$

で，4つの領域 A，B，C，D の各点は，それぞれの領域ごとに $f(x,\ y)$ の符号を決定し，しかも

「**境界線**」を1つ越えるごとに $f(x,\ y)$ の符号が変わる

ことは知っておいてもよい——各領域から適当な点を1つずつとって(*)に代

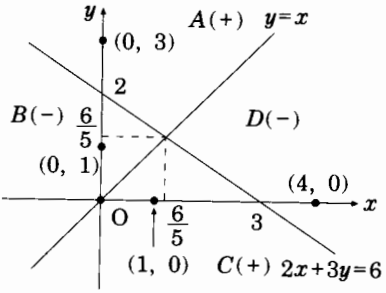
入してみれば簡単に確かめることが出来る.

$A: f(0,\ 3)=3\cdot 3=9>0$

$B: f(0,\ 1)=(-3)\cdot 1=-3<0$

$C: f(1,\ 0)=(-4)\cdot(-1)=4>0$

$D: f(4,\ 0)=2\cdot(-4)=-8<0$



であるが，結局「**隣りの領域同士は異符号**」であるから，「**1つの領域の符号がわかればあとは自動的にわかってしまう**」ことになる——(3)は「**(＊)の正領域**」を求めている問題である.

(4)についても「**境界線が含まれる**」ことに注意すれば，「考え方」は全く同様である.

例題 12

次の不等式を満たす点$(x,\ y)$の存在範囲を図示せよ.

(1) $|x|+|y|<1$

(2) $x^2+y^2-5x-1\leqq 5|x-3|$

(3) $y\leqq 3-x^2,\ y\geqq\dfrac{2}{x}$

解　説　(1)「**絶対値**」のついた例である．これは

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases},\quad |y|=\begin{cases} y & (y\geqq 0)\\ -y & (y<0)\end{cases}$$

←— p.30

であるから「**2×2=4通りの場合分け**」を考えなければならない.

(i)　「$x\geqq 0,\ y\geqq 0$」のとき：

$|x|=x,\ |y|=y$

$\longrightarrow x+y<1$　　$\therefore\ y<-x+1$

(ii)　「$x\geqq 0,\ y<0$」のとき：

$|x|=x,\ |y|=-y$

$\longrightarrow x-y<1$　　$\therefore\ y>x-1$

(iii)　「$x<0,\ y\geqq 0$」のとき：

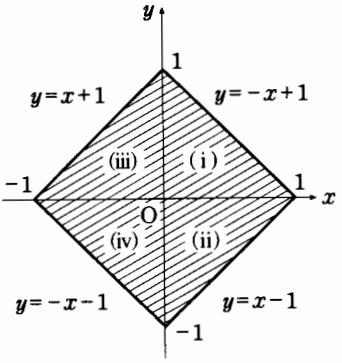
$|x|=-x,\ |y|=y$

$\longrightarrow -x+y<1$　　$\therefore\ y<x+1$

(iv)　「$x<0,\ y<0$」のとき：

$|x|=-x,\ |y|=-y$

$\longrightarrow -x-y<1$　　$\therefore\ y>-x-1$



から図に示す領域(正方形の内部)が得られる．ただし「境界線」は除くものとする．なお，「図形の対称性」に注目するともう少しスッキリと扱うことも出来るが，そのことはらしんばんで説明する．

(2) $x^2+y^2-5x-1 \leqq 5|x-3|$ ……①

(i) 「$x \geqq 3$」のとき：

$|x-3|=x-3$

① ⟶ $x^2+y^2-5x-1 \leqq 5(x-3)$

$\therefore \quad x^2-10x+y^2+14 \leqq 0$

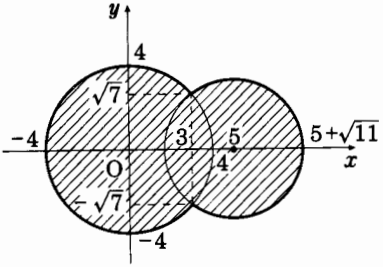
$\therefore \quad (x-5)^2+y^2 \leqq 11$

(ii) 「$x<3$」のとき：

$|x-3|=-(x-3)$

① ⟶ $x^2+y^2-5x-1 \leqq -5(x-3)$

$\therefore \quad x^2+y^2 \leqq 16(=4^2)$



これら「(i)または(ii)」を満たす領域を図示すればよい――上図!!

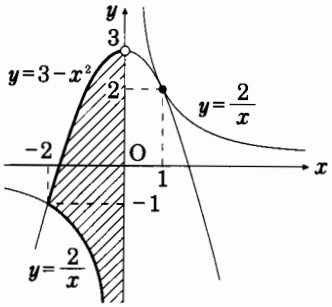
ただし，「境界線」は含むものとする．また，その交点の座標は

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x+14=0 \\ x^2+y^2-16=0 \end{cases} \longrightarrow (3,\ \sqrt{7}),\ (3,\ -\sqrt{7})$$

である．

(3) 「境界線」が「放物線(2次関数のグラフp.246)」と「1次分数関数のグラフ(p.256)」になる例である．

これらについても「直線の上側(あるいは下側)の領域(p.352)」で説明した方法をそのままとり入れて「素朴に(？)」考えてよい．すなわち，まず「境界線」に注目して，その「上側(あるいは下側)の領域」を考える．



$y \leqq 3-x^2$ ⟶ 放物線「$y=3-x^2$」の「上側でない領域」

$y \geqq \dfrac{2}{x}$ ⟶ 「$y=\dfrac{2}{x}$」のグラフの「下側でない領域」

となる．しかし，本問の場合は「グラフの大体の形」の見当はつくがその「接触の状況」がハッキリしない．そのような場合は「交点」をキッチリ求めてみるとよい．連立方程式

$$\begin{cases} y=3-x^2 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases} \longrightarrow 3-x^2=\frac{2}{x} \quad \therefore \quad x^3-3x+2=0$$

「3次方程式」になったが「**因数定理**(p.56)」と「**組立除法**(p.54)」を用いて「**因数分解**」すると

$$(x-1)^2(x+2)=0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x=1 \text{（重解）} \\ y=2 \end{cases}, \ \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

が得られる.

すなわち

点(1, 2)で接し，点(−2, −1)で交わる

ことがわかる.

このことから求める領域は図の「斜線部分」と点(1, 2)である. ただし，**境界線は「y 軸上の点を除き，他の境界線は含む」**ものとする.

らしんばん

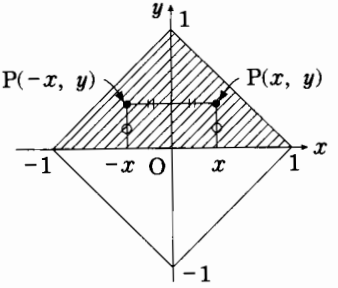
(1)の不等式の「特徴」をもう少し眺めてみよう.

$$|x|+|y|<1 \quad \cdots\cdots (*)$$

「絶対値」の性質に注目すると

$$|x|=|-x| \quad \cdots\cdots (**)$$

である. すなわち，点 $P(x, y)$ が(*)を満たしていれば，これを y 軸に関して「対称移動」した点 $P'(-x, y)$ も(*)を満たしている. また P が(*)を満たさなければ P′ も(*)を満たさない—— **問題の領域は「y 軸に関して対称」であり，全く同様にして「x 軸に関して対称」でもある.**



このことから本文の

(i)：$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y<1$

のみに注目し，まず，**この領域を図示し，これを「y 軸に関して折り返し」，さらにこれらをあわせたものを「x 軸に関して折り返す」と求める領域となる.**

これでハナシはかなり簡単になった.

まず，**「境界線」**の方程式

$$|x|+|y|=1 \quad \cdots\cdots (***)$$

に注目すると，これも上に述べた「絶対値の性質(**)」から全く同様にして**「正方形の周の部分」**を表しており，しかもこれは「x-y 平面」を，その「内部の領域」と「外部の領域」に2分している——このとき，**最も簡単に表される**

点として原点 $O(0,\ 0)$ をとり，(＊)に代入すると成立することが確かめられる．

このことから

求める領域 ⟶ 2分された領域のうち原点 $O(0,\ 0)$ を含む領域

であることがわかる．これは

$$f(x,\ y)=|x|+|y|-1 \longrightarrow f(0,\ 0)=-1<0 \quad \cdots\cdots\cdots (\ast\ast\ast\ast)$$

で，求める領域が「$f(x,\ y)$の負領域」であることを意味しているものだが，(＊＊＊＊)の形で説明するまでもなく，**適当な点を(＊)に直接代入し，「成り立つか」，「成り立たないか」を調べることにより「求める領域を判断する」ことも「知恵」の1つとして知っておくとよい**——(＊＊＊)の表す「正方形」を「円」や「楕(だ)円」などのような「閉じた曲線」と同様な形で扱うことも，また「重要な視点」の1つである．

➔ (3)は，**「円や直線以外の図形と領域の関係」についても少しだけ触れておきたかったためにとりあげた問題である**——「$y\leqq 3-x^2$」については「問題ナシ」としよう．

しかし

$$y\geqq\frac{2}{x} \longleftarrow \text{「}xy\geqq 2\text{」と混同するな!!}$$

については少し説明しておかなければならない．実例をあげよう．

たとえば

次の不等式を満たす点$(x,\ y)$の存在範囲を図示せよ．

(i) $y\geqq\dfrac{1}{x}$ ，　(ii) $xy\geqq 1$

(i) ⟶ これは問題ナシ．

そのまま図示すれば〈図1〉となる(ただし，y 軸を除く境界を含む)．

(ii) ⟶ これを「x で両辺を割る」ことにより

$$xy\geqq 1 \longrightarrow y\geqq\frac{1}{x}$$

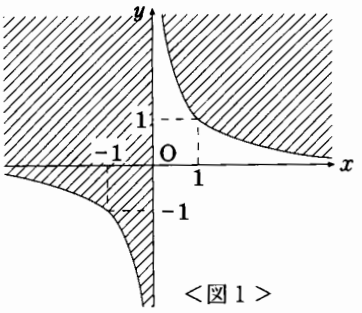
とやるとハナシが違って来る——それは**「$x<0$ のときは不等号の向きが変わる」**からで，キチンとやると次のようになる．

$$x>0 \longrightarrow y\geqq\frac{1}{x}$$

$$x=0 \longrightarrow 0\geqq 1\text{(不成立)}$$

$$x<0 \longrightarrow y\leqq\frac{1}{x}$$

したがって求める領域は〈図2〉である．また，この場合の「境界線」は



<図1>

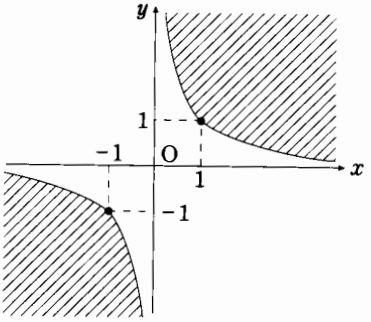
$xy=1$

で，これは「x-y 平面」を3分し，たとえば原点 O(0, 0)を与えられた不等式に代入すると

$0 \geqq 1$

（←― 原点 O を含む領域の点はすべて条件を満たさない）

となって成立しない．したがって求める領域は「原点 O を含まない方の領域」となる――〈図2〉．



＜図2＞

(2)　領域と最大・最小

領域が定まると，その領域内の点(x, y)に対して「**x, y の関数**（2変数の関数）**$f(x, y)$**」の「**とり得る値の範囲**」を調べることが出来る．

実例で説明する．

例題 13

(1)　不等式

$$x \geqq 0,\ 0 \leqq y \leqq 3,\ x+y \leqq 4,\ 2x+y \leqq 7$$

を満たす領域 S を図示せよ．

(2)　領域 S における「$3x+2y$」の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ．

(3)　領域 S における「$9x^2+16y^2$」の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ．

解　説　(1)　求める「領域 S」は**図の斜線部分**である．ただし**境界線は含む**ものとする．

(2)　$3x+2y=k$ ……①

とおくと

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2} \quad \cdots\cdots②$$

で，「**領域 S と直線①とが共有点をもつときの k の最大値**」を求めればよい．それは「**領域 S の点(x, y)に対する②の y 切片 $\frac{k}{2}$ の値が最大となるときの k の値**」に他ならない．

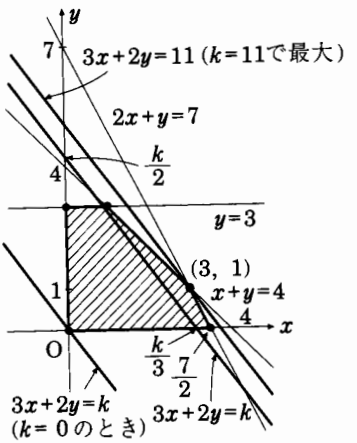
$x+y=4 \longrightarrow y=-x+4$ ……③

$2x+y=7 \longrightarrow y=-2x+7$ ……④

であるから，これらの「傾きの大小関係」は

$$-2<-\frac{3}{2}<-1$$

←(②の傾きが③，④の傾きの間の値であることをキチンと示すこと)



このことから「直線②(実は①)と領域 S とが共有点をもつ限界」は，この直線が領域 S の点(3, 1)と原点(0, 0)を通るときである．そして「k(直線②の y 切片は $\frac{k}{2}$)」が最大となるのは，この(3, 1)を通るときであるから，求める最大値は「$x=3$, $y=1$」を①(あるいは②)に入れて

$$k=3\cdot3+2\cdot1=11 \quad (x=3,\ y=1)$$

である(また原点 O(0, 0)を通るとき，k は最小となる)．

(3) $m=9x^2+16y^2$

これは少し工夫をすると簡単にいく．

すなわち

$$9x^2=(3x)^2,\quad 16y^2=(4y)^2$$

であるから

$$3x=X,\quad 4y=Y$$

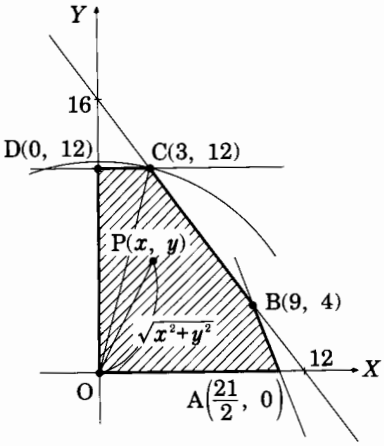
とおくと

$$m=X^2+Y^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

で，このとき

$$x=\frac{X}{3},\quad y=\frac{Y}{4}$$

から(1)で与えられた不等式は「X-Y 平面」の領域 S' として



$$x\geqq 0 \longrightarrow \frac{X}{3}\geqq 0 \qquad \therefore\quad X\geqq 0$$

$$0\leqq y\leqq 3 \longrightarrow 0\leqq \frac{Y}{4}\leqq 3 \qquad \therefore\quad 0\leqq Y\leqq 12$$

$$x+y\leqq 4 \longrightarrow \frac{X}{3}+\frac{Y}{4}\leqq 4 \qquad \therefore\quad 4X+3Y\leqq 48$$

$$2x+y\leqq 7 \longrightarrow 2\cdot\frac{X}{3}+\frac{Y}{4}\leqq 7 \quad \therefore \quad 8X+3Y\leqq 84$$

のように表され，⑤は「**この領域内の点 P(X, Y)と原点 O(0, 0)との距離の2乗**」に他ならない――「領域 S' と円⑤とが共有点をもつ限界」と考えてもよい．

「OC＞OD」は簡単にわかるから

$$OA^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2=\frac{441}{4},\ OB^2=9^2+4^2=97,\ OC^2=3^2+12^2=153$$

を計算して求める m **の最大値**は

$m=153$ ←― 点Pが点Cに一致するとき!!

このとき「$X=3$, $Y=12$」であるから x, y の値は

$$X=3=3x,\ Y=12=4y \quad \therefore \quad x=\frac{X}{3}=1,\ y=\frac{Y}{4}=3$$

である．

らしんばん

(2)では，領域S内の点(x, y)の x, y で表された関数

$f(x, y)=3x+2y$

の最大値を調べるのに，これを k とおき

①：$3x+2y=k$ ……(＊)

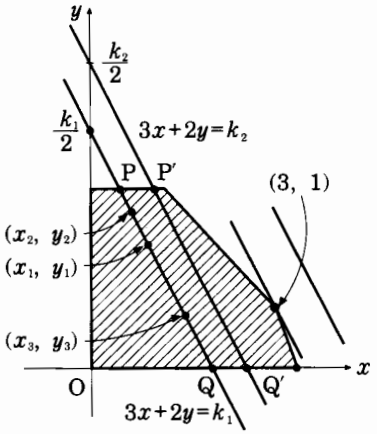
さらにこれを変形した

②：$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$

の「y **切片** $\frac{k}{2}$ **のとり得る範囲**」として調べたことに「多少の異和感」はないか．

少しだけ説明しておきたい．

たとえば右図のように「領域 S」を「直線(＊)」が通過する場合を考えてみよう．このとき，(＊)の k の値が「$k=k_1$」であるならば，「領域 S と直線との共有点」は「線分PQ」で，この線分上のすべての点は



$3x+2y=k_1$ ……(＊＊)

を満たすから

$3x_1+2y_1=k_1$, $3x_2+2y_2=k_1$ ……(以下同様)……

であり，この「k_1 (＝一定)という数値」は「直線(＊＊)の y 切片」に「$\frac{k_1}{2}$」と

してあらわれることがわかる.

次に(**)と異なる k の値，たとえば「$k=k_2$ $(>k_1)$」をとり，共有点が「線分 P′Q′」である場合についてもハナシは全く同様で，「線分 P′Q′」上の点はすべて

$$3x+2y=k_2 \quad \cdots\cdots (***)$$

を満たし，この場合の「k_2 (＝一定)」も「直線(***)の y 切片」に「$\dfrac{k_2}{2}$」としてあらわれる——「y 切片」は増加し，「y 軸との交点」は上にズレル!!

このようにして「直線(*)の k の値」を増加させていく(図で言うと直線を上に平行移動していく)と，ついには「(*)を満たす領域 S 内の点が存在しない」状況が起こる．本問ではその「限界の k の値」を「k の最大値」として求めたわけである.

(3)について——「$3x=X$, $4y=Y$」のおきかえに気がつかないときはどうすればよいか.

そのときは，仕方がないから1つ1つ「手作業(？)」でやる．すなわち

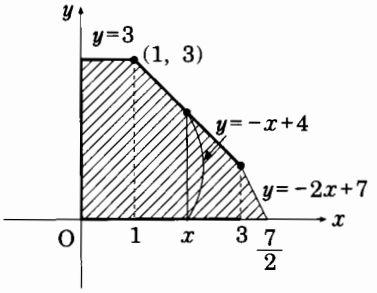
(i) 2変数の1つを固定して最大値を求める——固定した変数で求まる

(ii) さらに(i)で固定した変数を変化させて最大値を求める

ことになる——最小値の場合も同様に考える．この方法で本問を扱ってみよう.

$$m=9x^2+16y^2$$

であった——領域は右図の通り!!



まず，「x を固定」して考え，このときの最大値を「$m(x)$」とする.

(i) $0\leqq x\leqq 1$ のとき：ある x の値に対する y のとり得る値の範囲は

$$0\leqq y\leqq 3$$

であるから，「y の最大値は 3」である.

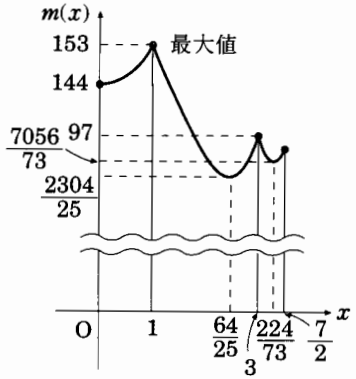
$$m(x)=9x^2+16\cdot 3^2=9x^2+144$$

(ii) $1\leqq x\leqq 3$ のとき：ある x の値に対する y のとり得る値の範囲は

$$0\leqq y\leqq -x+4$$

であるから，「y の最大値は $-x+4$」である.

$$\therefore\quad m(x)=9x^2+16\cdot(-x+4)^2$$
$$=25x^2-128x+256$$
$$=25\left(x-\frac{64}{25}\right)^2+\frac{2304}{25}$$



(iii) $3\leqq x\leqq \dfrac{7}{2}$ のとき：

同様にして

$0 \leqq y \leqq -2x+7$

であるから「yの最大値は $-2x+7$」である．

$$\therefore \quad m(x)=9x^2+16\cdot(-2x+7)^2$$
$$=73x^2-448x+784$$
$$=73\left(x-\frac{224}{73}\right)^2+\frac{7056}{73}$$

この(i)，(ii)，(iii)で $m(x)$ が最大となるのは，「$x=1$」のときで，このとき

$y=3$ ←― （図から判断してもよいし，(i)で「$x=1$」とするか，あるいは(ii)の「$-x+4$」で「$x=1$」とする．）

したがって「$m(x)$ の最大値は153」となる――「うまい方法」が見つからないときでも**「時間をかければ出来る」**ことは知っておくとよい．**「2変数関数の最大・最小」を調べるときの「きわめて基本的な考え方の1つ」**である．

本問(2)も当然この方法でやることが出来る．これはそれほどメンドウではないから各自でやってみるとよい．

第3節
問題解法の研究

発展問題 1—図形と最大・最小

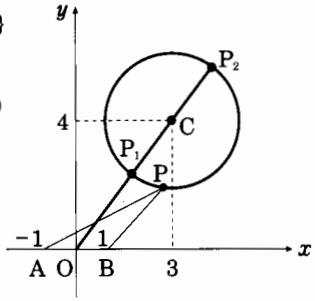
平面上の2点 A(−1, 0), B(1, 0) がある．円

C：　$(x-3)^2+(y-4)^2=4$　……①

上に点 P をとって，AP^2+BP^2 の最小値とそのときの P の座標を求めよ．

解　説　「円①」上の点を $P(x, y)$ とすると「2点間の距離の公式 (p.296)」を用いて

$$AP^2+BP^2=\{(x+1)^2+y^2\}+\{(x-1)^2+y^2\}$$
$$=2x^2+2y^2+2$$
$$=2(x^2+y^2)+2 \quad (=d^2 \text{ とおく})$$



ここで

$$x^2+y^2=OP^2$$

であるから d^2 が最小になるのは点 P が円 C と直線 OC との交点 P_1(右図)と一致するときである．

ゆえに求める最小値は OC から「円 C の半径：　2」を引いて

$$\sqrt{3^2+4^2}-2=5-2=3 \ (=OP_1)$$

このときの P の座標 P_1 は「円①」と OC との交点であるから

$$OC: y=\frac{4}{3}x$$

これと①とを連立して

$$(x-3)^2+\left(\frac{4}{3}x-4\right)^2=4 \quad \therefore \quad \frac{25}{9}(x-3)^2=4$$

$$\therefore \quad x-3=\pm\frac{6}{5} \quad \therefore \quad x=3\pm\frac{6}{5}$$

P_1 を与える x の値は「$0<x<3$(グラフから)」であるから

$$x=3-\frac{6}{5}=\frac{9}{5},\ y=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{12}{5} \quad \therefore \quad P_1\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

らしんばん

➡ 「AP^2+BP^2」を計算すると「x^2+y^2」で表されるところがおもしろい．結局「**OP^2 の最大・最小**」に帰着させられる．もちろん最大となるのは点Pが本文の図の P_2 と一致するときで

最大値：　OC＋(半径)＝5＋2＝7

また，そのときの点P（実は P_2）の座標は

$$x=3+\frac{6}{5}=\frac{21}{5},\ y=\frac{4}{3}\cdot\frac{21}{5}=\frac{28}{5} \longrightarrow P_2\left(\frac{21}{5},\ \frac{28}{5}\right)$$

である．

➡ **P_1，P_2 の座標を簡単に求める**——ベクトルを習っていれば $\overrightarrow{OC}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}$ は

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OC}-2\vec{e}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-2\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} \longrightarrow P_1\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OC}+2\vec{e}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+2\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix} \longrightarrow P_2\left(\frac{21}{5},\ \frac{28}{5}\right)$$

となる．「空間座標」で扱うときも考え方は同様である——『**諸橋の代数・幾何講義**(p.119, 120)』を参照!!

発展問題 2—直線の通過領域

座標平面上の定点 A(2, 1) を点 P(t, 0) とを結ぶ線分 AP の垂直2等分線を l とする．点Pが x 軸上を動くとき，直線 l の通らない領域を図示せよ．

解　説　「**垂直2等分線**」については p.333で詳しく述べた．

A(2, 1)，P(t, 0)

であるから，l 上の任意の点を Q(x, y) とすれば

$AQ=PQ$　　$\therefore\ AQ^2=PQ^2$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=(x-t)^2+(y-0)^2$

これらを展開，整理して x, y の関係式を求めると

l：　$2y=(2t-4)x+5-t^2$　……①

$\therefore\ y=(t-2)x+\dfrac{5-t^2}{2}$　……①′

これが「点 $Q_1(x_1, y_1)$ を通る」とすれば①は「$x=x_1$, $y=y_1$ を満たす」

から①に代入して

$2y_1=(2t-4)x_1+5-t^2$ ←― 点$(x_1,\ y_1)$を通る（代入）!!

$\therefore\quad t^2-2x_1t+4x_1+2y_1-5=0$ ←― tの方程式!! ……②

すなわち，「lが点Q_1を通る」ということは「方程式②の等号が成り立つ(実数解をもつ)」ということに他ならない。

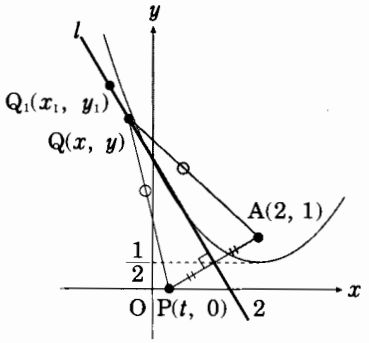
したがって「通らない条件」は「②が実数解をもたない」ことで

$$\frac{D}{4}=x_1^2-(4x_1+2y_1-5)<0$$

$$\therefore\quad 4x_1+2y_1-5>x_1^2$$

$$\therefore\quad 2y_1>x_1^2-4x_1+5$$

$$\therefore\quad y_1>\frac{1}{2}(x_1-2)^2+\frac{1}{2}$$



求める領域は，点$(x,\ y)$の存在領域として表すと

$$\left\{(x,\ y)\mid y>\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}\right\}$$

で，図示すると右図のようになる．ただし境界線は除くものとする．

らしんばん

本問の設問を少し変えて

lがつねに接する放物線の方程式を求めよ

ときたらどうするか．方法としては

l：　$2y=(2t-4)x+5-t^2$ ……(＊)

をtについて整理して

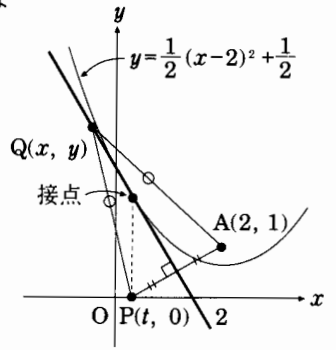
$t^2-2xt+4x+2y-5=0$ ……(＊＊)

ここで「判別式=0」とおくと

$$\frac{D}{4}=x^2-(4x+2y-5)=0$$

$$\therefore\quad 2y=x^2-4x+5 \quad \cdots\cdots(＊＊＊)$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(＊＊＊)'$$



とやればよいのだが，その「ワケ」は説明しないとわからない――カルク説明しておこう．

上の「判別式＝0とおくこと」の理由は(＊＊)の左辺をtの2次式と見て「平方完成」すると

$$(t-x)^2-x^2+4x+2y-5=0$$

(A)

で，「(**)の判別式を0とおく」ことはこの左辺の「(A)を0とおく」ことに他ならない．このことは

$$-x^2+4x+2y-5=0 \quad \longrightarrow \quad 2y=x^2-4x+5$$

であることから「(*)と(***)（または(***)′）とを連立して得られる2次方程式」が

$$(t-x)^2=0 \quad (\therefore \quad (x-t)^2=0) \quad \therefore \quad x=t \ (\longleftarrow \text{重解})$$

であることを意味している――図のように l は $\mathrm{P}(t,\ 0)$ の真上で(***)（または(***)′）に接することが了解される．すなわち，求める放物線の方程式は(***)（または(***)′）である．

なお，求める放物線の方程式を

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

とおいて(*)と連立し，「つねに接する」条件から

$$D=0 \quad \longleftarrow \quad t\text{についての恒等式!!}$$

として a，b，c の値を求めることも出来る．

「通過領域」のハナシはなかなかナットクし難いものがある――①（あるいは①′）の t の値にいろいろな数値を代入して目見当をつけてみたりするのだがそれではスッキリした形で求まらない．要は

$$\text{点 } \mathrm{Q}(x_1,\ y_1) \text{ を通る} \longrightarrow x=x_1,\ y=y_1 \text{ を代入} \longrightarrow t \text{ の方程式}$$

すなわち，

実数 t の存在条件を x_1，y_1 で表す

ことがそのポイントである．少しちがった形の例をあげておく．

たとえば

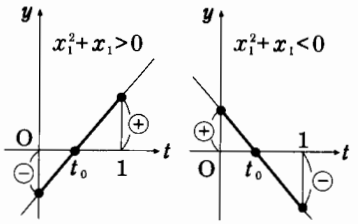
(1)　放物線　$y=t(x^2+x)+1$（ただし，$0<t<1$）の通過領域を示せ．
(2)　直線　$x\cos\theta+y\sin\theta=2$ の通過領域を示せ．

(1) ――― 与えられた放物線が点 $(x_1,\ y_1)$ を通るとすると「$x=x_1$，$y=y_1$」を代入して

$$y_1=t(x_1^2+x_1)+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

$$\therefore \quad (x_1^2+x_1)t+1-y_1=0 \quad \cdots (****)'$$

これは t についての1次方程式であるから，$0<t<1$ の範囲に実数解をもつ条件を求めればよい．



左辺を $f(t)$ とおくと

$$f(t)=(x_1^2+x_1)t+1-y_1$$

(i)　$x_1^2+x_1=x_1(x_1+1)\neq 0$ のとき，$x_1\neq 0,\ -1$

求める条件は

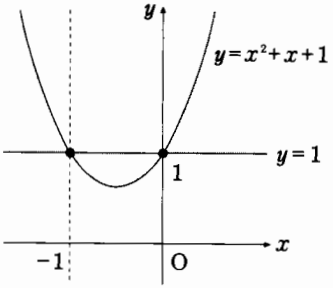
$$f(0)\cdot f(1)=(1-y_1)(x_1^2+x_1+1-y_1)<0 \longleftarrow f(0) \text{ と } f(1) \text{ が異符号!!}$$

$$\therefore \quad 1<y_1<x_1^2+x_1+1, \text{ または } \quad x_1^2+x_1+1<y_1<1$$

すなわち

$1<y<x^2+x+1$,

または　$x^2+x+1<y<1$



(ii)　**$x_1^2+x_1=0$のとき，$x_1=0$，-1**

「傾きが0」であるから$0<t<1$に実数解をもつ条件は「(＊＊＊＊)の表す直線」がt軸に重なるときで

$\boldsymbol{f(0)(=f(1))=1-y_1=0}$

$\therefore\quad y_1=1\qquad \therefore\quad (0,\ 1),\ (-1,\ 1)$

これらを図示すればよい――(0, 1), (−1, 1) 以外の境界線を除く.

なお，このとき(＊＊＊＊)から

$$t=\frac{y_1-1}{x_1^2+x_1}\quad\longleftarrow\quad \text{ただし，}x_1^2+x_1=0\text{ のときは }\ y_1=1\text{ とする}$$

として「条件：　$0<t<1$」に代入すると

$$0<\frac{y_1-1}{x_1^2+x_1}<1\quad\longrightarrow\quad\begin{cases}0<y_1-1>x_1^2+x_1 & (x_1^2+x_1>0\text{ のとき})\\ 0>y_1-1<x_1^2+x_1 & (x_1^2+x_1<0\text{ のとき})\end{cases}$$

として整理をすれば同じ結果が得られるが，分母の正負で場合を分けなくてはならず，ウッカリ「ミス」をおかす可能性が高い上に，(＊＊＊＊)に「t^2」などが混入したりして「tについて解けない形」で与えられたりするともはや手におえなくなってしまう.

やはり**「パラメーターtについての方程式」と見て「解の存在条件」としておさえる方がスッキリし，発展性もある**と考えられる.

(2) ――→ これも同様にθをパラメーターと見る.

与えられた直線が点$(x_1,\ y_1)$を通るとすると，「$x=x_1$，$y=y_1$」を代入して

$x_1\cos\theta+y_1\sin\theta=2$

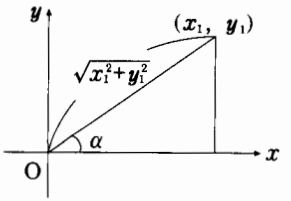
これを満たすθの存在する条件を求めればよい――三角方程式!!

そして，左辺を1つの三角関数に合成する――**「三角方程式」，「三角関数の合成」**については**『諸橋の基礎解析講義**(p.78, p.90)』を参照されたい.

すなわち，上の「三角方程式」を次のように変形する.

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cos\theta+\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\sin\theta\right)=2$$

ここで



$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\cos\alpha,\quad\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\sin\alpha$$

とおくことが出来るから

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}(\underbrace{\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta}_{\cos(\theta-\alpha)})=2\quad\longleftarrow\quad\text{加法定理!!}$$

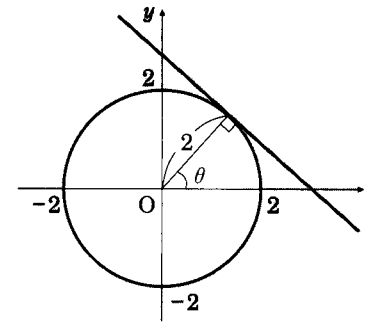
$$\therefore\quad \cos(\theta-\alpha)=\frac{2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

で，これを満たすθが存在する条件は

$$\frac{2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\leqq 1 \qquad \therefore\quad x_1^2+y_1^2\geqq 4$$

$$\therefore\quad x^2+y^2\geqq 4 \quad (=2^2)$$

で，原点中心，半径2の円の周または外部が求める領域である．



なお，この形の直線は「**Hesse の標準形**」としてすでに p.322以下で説明したが，「**原点 O からの距離が 2**」で，図のような領域が得られることは「あたりまえ」のことである．

発展問題 3―パラメーターと不等式

実数 a に対して集合 D_a を次のように表す．

$$\{(x,\ y)\mid y\leqq -x^2+3a,\ y\geqq x^2-ax+a\}$$

(1)　D_a が空集合とならない a の範囲を求めよ．

(2)　$1\leqq a\leqq 2$ を満たすすべての実数 a に対してつねに $(x,\ y)\in D_a$ となる点 $(x,\ y)$ の集合を図示せよ．

解　説　(1)　D_a の条件は

$y\leqq -x^2+3a$　（←――　放物線の上でない領域）……①

$y\geqq x^2-ax+a$　（←――　放物線の下でない領域）……②

であるから，「$D_a\neq\phi$」の条件はこれらの領域の境界線である2つの放物線

$$y=-x^2+3a,\quad y=x^2-ax+a$$

が共有点をもつことである．

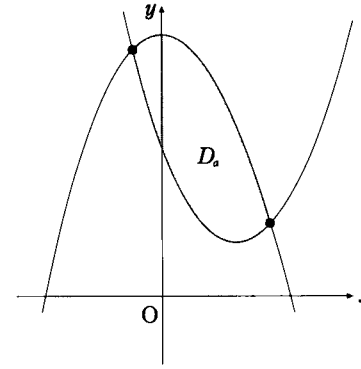
ゆえに2式を連立して

$$-x^2+3a=x^2-ax+a$$

$$\therefore\quad 2x^2-ax-2a=0$$

$$\therefore\quad D=a^2+16a=a(a+16)\geqq 0$$

$$\therefore\quad a\leqq -16,\quad a\geqq 0$$



(2)　$(x_1,\ y_1)\in D_a$ とするとこれは①，②を満たす，すなわち，

①：　$y_1\leqq -x_1^2+3a$　――→　$3a-(x_1^2+y_1)\geqq 0$　……①′

②：　$y_1\geqq x_1^2-ax_1+a$　――→　$(x_1-1)a-(x_1^2-y_1)\geqq 0$　…②′

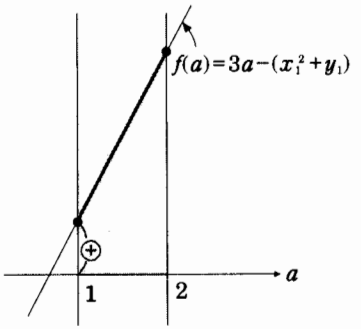
これらの不等式が「$1 \leqq a \leqq 2$」を満たすすべての実数 a について成り立つ条件を求める．すなわち，①′，②′の左辺は「a の1次式」であるから平面上では直線を表す．

それぞれ $f(a)$，$g(a)$ とおくと

$$f(a)=3a-(x_1^2+y_1)$$

$$g(a)=(x_1-1)a-(x_1^2-y_1)$$

である．



(i) 「$f(a) \geqq 0$」の条件 ⟶

「$1 \leqq a \leqq 2$」で $f(a)$ は単調増加である——直線の傾きは3（>0）

$\therefore$ $f(1)=3\cdot 1-(x_1^2+y_1) \geqq 0$

（当然 $f(2)>0$!!）

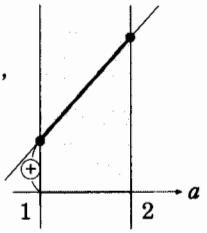
このとき $P(x_1,\ y_1)$ についての条件は

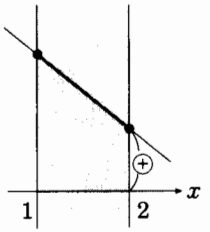
$$y_1 \leqq 3-x_1^2$$

(ii) $g(a) \geqq 0$の条件 ⟶

考え方は(i)と同様である．すなわち，

「$x_1>1$」のときは $g(a)$ は「$1 \leqq a \leqq 2$」で単調増加である——傾きは「$x_1-1>0$」





このとき求める条件は

$$g(1)=(x_1-1)\cdot 1-(x_1^2-y_1) \geqq 0$$

$\therefore$ $y_1 \geqq x_1^2-x_1+1$

「$x_1<1$」のときは $g(a)$ は単調減少——「$x_1-1<0$」

このとき求める条件は

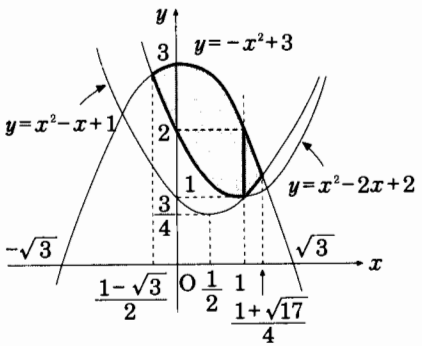
$$g(2)=(x_1-1)\cdot 2-(x_1^2-y_1) \geqq 0$$

$\therefore$ $y_1 \leqq x_1^2-2x_1+2$

「$x_1=1$」のときは

$$g(1)=g(2)=-(x_1^2-y_1) \geqq 0$$

$\therefore$ $y_1 \geqq x_1^2=1$



以上，点 $P(x,\ y)$ の条件としてまとめると

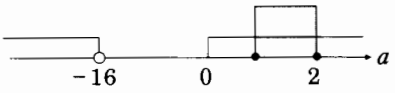
$x \geqq 1$ のとき：　$y \geqq x^2-x+1$，$x<1$ のとき：　$y \leqq x^2-2x+2$

となる．（ただし，境界線は含むものとする）

らしんばん

(1)は問題ナシとしよう．しかし(2)は難かしい．

(2)では a の条件「$1 \leqq a \leqq 2$」が(1)で求めた「$a \leqq -16$，$a \geqq 0$」に含まれるから，「$1 \leqq a \leqq 2$」のいろいろな a の値を代入していけば領域はいろいろと形を変えながら平面上を運動し，その達し得た部分に色を塗ることにより題意の領域が得られるが，素手ではそこまではつきあえない．



問題文をアタマから読むと，**与えられた a の範囲「$1 \leqq a \leqq 2$」が不等式**

$$3a-(x_1^2+y_1) \geqq 0 \quad \longleftarrow \quad ①'$$
$$(x_1-1)a-(x_1^2-y_1) \geqq 0 \quad \longleftarrow \quad ②'$$

a についての連立不等式!!

を「**a について解いた解**」の部分集合となる条件を求めればよいのだが，これも x_1，y_1 が確定している数値ではないのでうまくない．やはり本文に示したように

$$f(a)=3a-(x_1^2+y_1),\quad g(a)=(x_1-1)a-(x_1^2-y_1)$$

を「**a の(1次)関数**」と見ることで

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき　$f(a) \geqq 0$，$g(a) \geqq 0$

を「グラフを用いて」考える方法が最もスッキリした了解を与えることになる．

本文(2)の「$(x_1,\ y_1) \in D_a$ とすると……」に注目してもらいたい．これは D_a の中のある点$(x_1,\ y_1)$というほどの意味であるが，**点$(x,\ y)$をわざわざ$(x_1,\ y_1)$のように「サフィックス(添字)」をつけて表したことの理由は，これを条件の不等式，たとえば本文の①に代入して**

$$y_1 \leqq -x_1^2+3a \quad \longleftarrow \quad \text{これを} a \text{についての不等式とみる!!}$$

のように表したとき，x_1，y_1がいかにも定数に見えて，これが他の文字 a についての不等式であることを了解することの異和感を解消してくれることの効果を期待したものと考えてもらえばよい．その意味では前問の「**点 $Q(x_1,\ y_1)$ を通るとすれば……**」と考え方は同じで

前問　⟶　パラメーター t に関する方程式!!

本問　⟶　パラメーター a に関する不等式!!

である――あわせて理解しておくとよい．

たとえば

平面上の点$(x,\ y)$に関して次の2つの条件がある．

(A)　ある実数 a に対して $a(2-ax) \leqq y$　が成り立つ．

(B)　すべての実数 a に対して $a(2-ax) \leqq y$　が成り立つ．

条件(A)を満たすが条件(B)を満たさないような点$(x,\ y)$の存在する範囲を図示せよ．

条件(A)，(B)は「x，y に関する不等式」に見える．しかし，そのように考えて

グラフを描き a を変化させてグラフを動かしてもほとんど「実り」はない.

要は x, y についての条件がほしいわけであるから**条件に適する点を (x_1, y_1) とおいてみる**とよい. これを(A), (B)の不等式に代入すると

$$a(2-ax_1) \leqq y_1 \quad \therefore \quad x_1a^2-2a+y_1 \geqq 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

となり, 結局は「**a についての(2次)不等式**」の問題に帰着させられる.

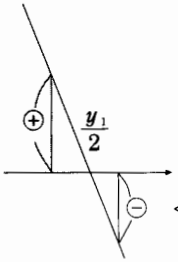
(A)について ⟶

$x_1=0$ のとき:

$(*)$: $-2a+y_1 \geqq 0$

$\therefore \quad a \leqq \dfrac{y_1}{2}$

で条件は満たされる——〈図1〉



<図1>

$x_1>0$ のとき: 明らかに成り立つ

(グラフは**下に凸の放物線**であるからどんなに下げても x 軸より上の部分が存在し, 条件が満たされる——〈図2〉)

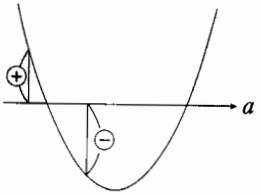
$x_1<0$ のとき:

$\dfrac{D}{4}=1-x_1y_1 \geqq 0 \quad \therefore \quad x_1y_1 \leqq 1$

⟶ 条件は満たされる

$\dfrac{D}{4}=1-x_1y_1<0 \quad \therefore \quad x_1y_1>1$

⟶ 条件は満たされない



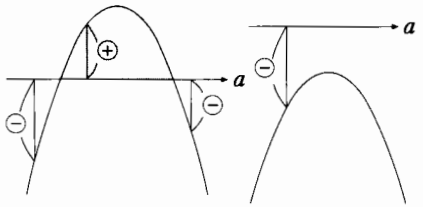
<図2>

(グラフは**上に凸の放物線**で, a 軸と共有点をもたないときは$(*)$を満たす実数 a の値は存在しない——〈図3〉)

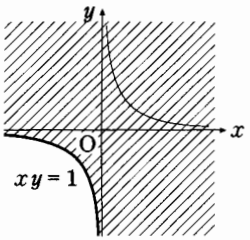
以上, 点(x, y) の条件として整理すると

$x \geqq 0$, または $x<0$, のときは $xy \leqq 1$

となり, 図示すると〈図4〉となる. (ただし, 境界線は含むものとする)



<図3>



<図4>

(B)について⟶ $(*)$が「**a の絶対不等式** (p.161)」であるための条件を求めている.

$x_1=0$ のとき: 成り立たない

($a>\dfrac{y_1}{2}$ である実数 a に対して成り立たない——〈図1〉)

$x_1>0$ のとき：〈図2〉の第2図のときのみ成り立つ．すなわち

$$\frac{D}{4}=1-x_1y_1\leqq 0 \quad \therefore \quad x_1y_1\geqq 1$$

$x_1<0$ のとき：　成り立たない

（⟶〈図3〉）

以上，点$(x,\ y)$の条件としてまとめると

$$\boldsymbol{x>0,\ xy\geqq 1}$$

となり，〈図5〉はこれを図示したものである．

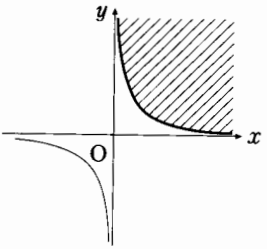
（ただし境界線は含むものとする）

したがって題意を満たす点$(x,\ y)$の存在領域は〈図6〉となる．

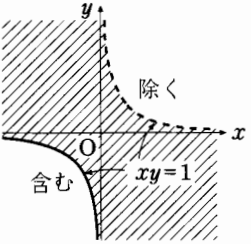
なお

$$xy\geqq 1,\ xy\leqq 1$$

の領域図示については，p.362に詳しく述べた．



＜図5＞



＜図6＞

発展問題4―分点の軌跡

O を原点とする座標平面上に2つの円

$$C:x^2+y^2=r^2,\ C':(x-a)^2+y^2=(r')^2$$

がある．ただし，$0<r'<r<a$ とする．

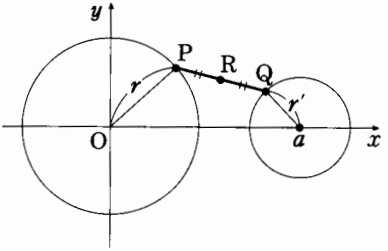
このとき，点 P が円 C 上を，点 Q が円 C' 上を動くとき，線分 PQ の中点 R がどのような図形上を動くかを示し，その面積を求めよ．

解　説　点 P，Q の座標を，$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$とおくと，これらはそれぞれ2円 C，C' 上にあるから

$$x_1^2+y_1^2=r^2 \cdots\cdots①$$

$$(x_2-a)^2+y_2^2=(r')^2 \cdots\cdots②$$

の関係を満たしながら動いている．しかし，2点 **P**，**Q** の動きを同時にとらえるのはメンドウだから，まず点 **P** を固定して考え，あとでこれを動かすことにする．このとき，x_2，y_2 は②を満たしながら変化するが，②で



$$x_2-a=t,\ y_2=u \longrightarrow x_2=t+a,\ y_2=u$$

とおくと（⟵　これが難しい!!）

②：$t^2+u^2=(r')^2$ ……②′

である．そこで線分 PQ の中点 R の座標を R$(X,\ Y)$とおくと

$$\begin{cases} X=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_1+t+a}{2} \\ Y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{y_1+u}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t=2X-(x_1+a) \\ u=2Y-y_1 \end{cases}$$

これを②′に入れて t，u を消去する―― X，Y の関係式が得られる．

$$\{2X-(x_1+a)\}^2+(2Y-y_1)^2=(r')^2 \longleftarrow ②'$$

$$\therefore\quad \left(X-\frac{x_1+a}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\left(\frac{r'}{2}\right)^2$$

すなわち，**点 R の描く図形は円で，その方程式は**

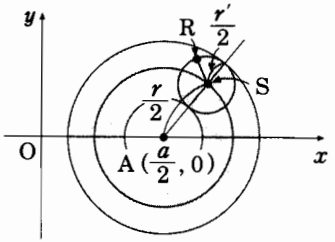
$$\left(x-\frac{x_1+a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\left(\frac{r'}{2}\right)^2$$

$$\longrightarrow \text{中心：}\ \mathrm{S}\left(\frac{x_1+a}{2},\ \frac{y_1}{2}\right),\ \text{半径：}\ \frac{r'}{2}$$

である――この円の中心 S の座標が x_1，y_1 で表されていることに注目して **P が動くときの「S の軌跡」を求めることを考える．**

中心の座標 S を $(X',\ Y')$とおくと

$$\begin{cases} X'=\dfrac{x_1+a}{2} \\ Y'=\dfrac{y_1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1=2X'-a \\ y_1=2Y' \end{cases}$$



ここで点 P$(x_1,\ y_1)$を動かすと，x_1，y_1 は①を満たしながら変化するから，これらを①に入れて x_1，y_1 を消去する―― X'，Y' の関係式が得られる．

$$(2X'-a)^2+(2Y')^2=r^2 \longleftarrow ①$$

$$\therefore\quad \left(X'-\frac{a}{2}\right)^2+\left(Y'\right)^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

すなわち，**点 S の描く図形は円で，その方程式は**

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2 \longrightarrow \text{中心：}\ \mathrm{A}\left(\frac{a}{2},\ 0\right),\ \text{半径：}\ \frac{r}{2}$$

である．

以上のことから**求める図形は 2 つの同心円（中心を共有する円）**

中心：$A\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$，半径：$\frac{r+r'}{2},\ \frac{r-r'}{2}$

の間にはさまれた部分で，その面積は次のように計算される．

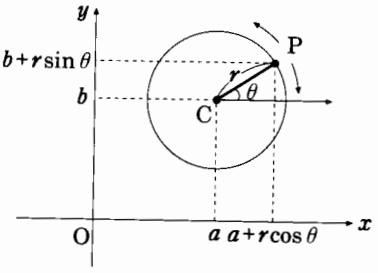
$$\pi\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{r-r'}{2}\right)^2=\pi rr'$$

らしんばん

「円周上の点」は「パラメーター表示（p.263）」するとあとの処理がうまくいく場合が多い．たとえば円

C：　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ …（＊）

（中心：$(a,\ b)$，半径：r）



上の点Pの座標は，半径CPとx軸の正方向とのなす角をθとして

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

で表される．ただし，このときの**角θの範囲は「$0°\leqq\theta<360°$」とし，（＊）で表される円周上の任意の点が（＊＊）の形で表されるものとする**——第5章の「三角比（p.407以下）」に示すように，現行の「数Ⅰ」で扱う「$\cos\theta$，$\sin\theta$のθの範囲」は「$0°\leqq\theta\leqq180°$」であるが，ここでは便宜上「$0°\leqq\theta<360°$」で扱うことにする．実際の入試問題も，出題範囲が特に「数Ⅰ」と限定されない場合はこのような扱いが普通である．**「角の範囲の拡張」については『諸橋の基礎解析講義』の「三角関数」を参照されたい．**

いずれにせよ「（＊）の表示」では「円C上の点」ということをしか示せないが「（＊＊）の表示」では「円周上のどの点か」という位置関係もハッキリするのでなかなか便利である．

円周上の点　⟶　パラメーター表示!!

は「円を扱う上での基本の考え方」の1つとして覚えておくとよい．

本問についても2点P，Qを「パラメーター表示」するとかなり見通しがよい．すなわち

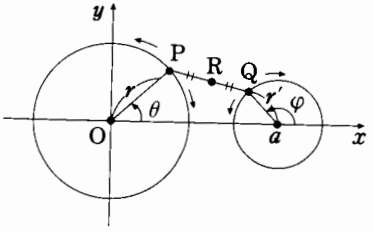
C：　$x^2+y^2=r^2$　⟶　$P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

C'：　$(x-a)^2+y^2=(r')^2$　⟶　$Q(a+r'\cos\varphi,\ r'\sin\varphi)$

ただし，このときのθとφは

$0°\leqq\theta<360°$，$0°\leqq\varphi<360°$

で考えるものとする．



2点P，Qの座標が具体的な形で表されたところで，線分PQの中点をR$(X,\ Y)$とすると

$$X=\frac{1}{2}\{r\cos\theta+(a+r'\cos\varphi)\}=\left(\frac{a}{2}+\frac{r}{2}\cos\theta\right)+\frac{r'}{2}\cos\varphi$$

$$Y=\frac{r\sin\theta+r'\sin\varphi}{2}=\frac{r}{2}\sin\theta+\frac{r'}{2}\sin\varphi$$

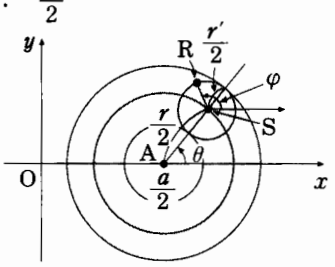
となるが，ここで θ を固定して φ を変化させる．すなわち，この2式を「φ をパラメーターとする円周上の点のパラメーター表示」と見れば，φ を消去して X，Y の関係式を求めるまでもなく点Rは

中心： $S\left(\frac{a}{2}+\frac{r}{2}\cos\theta,\ \frac{r}{2}\sin\theta\right)$，半径： $\frac{r'}{2}$

の円を描くことがわかる．さらに θ を「パラメーター」と見て変化させると，この円の中心Sが

中心： $A\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$，半径： $\frac{r}{2}$

の円を描くこともわかる——結局，本文に述べたと同じ結果が得られる．



本問のように，2点 **P，Q がともに動くときは先にどちらか一方を固定して考えるのが定石**である．本文では先に点Pを固定したが，点Qを先に固定しても当然同じ結果になるのだが，勝手が違うとなかなかそれと認め難い（やってみること!!）．

考え方の基本にもどってまとめてみよう．

たとえば

定点A(4, 5)と円 $x^2+y^2=4$ 上の点Pとを結ぶ線分APの中点の軌跡を求めよ．

点Pの座標を $P(x,\ y)$ とし，線分APの中点の座標を $Q(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{x+4}{2},\quad Y=\frac{y+5}{2}\quad\cdots\cdots(***)$$

ここで $P(x,\ y)$ は与えられた円周上の点であるから

$$x^2+y^2=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(****)$$

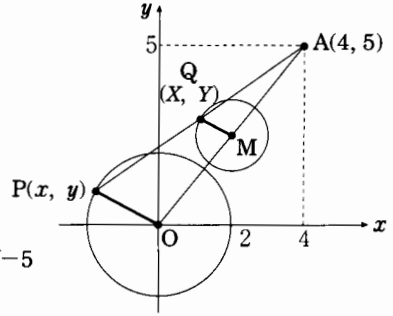
（←——これが条件!!）

そこで

$(***)\longrightarrow\quad x=2X-4,\ y=2Y-5$

として $(****)$ に入れると

$$(2X-4)^2+(2Y-5)^2=4\qquad\therefore\quad(X-2)^2+\left(Y-\frac{5}{2}\right)^2=1$$



すなわち，**求める軌跡は円で，その方程式は**

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1\quad\longrightarrow\quad\text{中心：}\ \left(2,\ \frac{5}{2}\right),\ \text{半径：}\ 1$$

である．

あるいは「初等幾何」として扱うと，OAの中点Mに対して

$$MQ\fallingdotseq\frac{1}{2}OP \quad (\longleftarrow\triangle AMQ\backsim\triangle AOP)$$

$\therefore$　MQ＝1（一定）$\longrightarrow$点Qは**M**を中心として半径1の円を描く!!

あるいは，円周上の点**P**を「パラメーター表示」するとP$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$であるから，APの中点Q$(X,\ Y)$は

$$\begin{cases} X=\dfrac{2\cos\theta+4}{2}=\cos\theta+2 \\ Y=\dfrac{2\sin\theta+5}{2}=\sin\theta+\dfrac{5}{2} \end{cases} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{中心：}\left(2,\ \dfrac{5}{2}\right),\ \text{半径：}1\\ \text{の円周上の点Qのパラ}\\ \text{メーター表示!!}\end{array}\right)$$

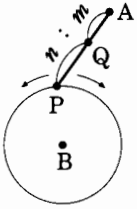
$$\therefore\quad (X-2)^2+\left(Y-\frac{5}{2}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \longleftarrow \theta\text{を消去!!}$$

ゆえに求める図形は円で，その方程式は

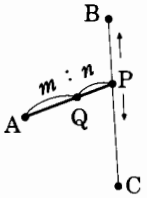
$$(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1$$

である．

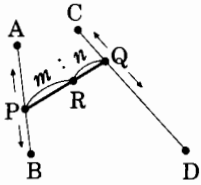
上の場合，「Qは線分APの中点」であったが，これが「$m:n$の内分点（あるいは外分点）」であっても考え方は全く同様である――これを出発点としていろいろなヴァリエーションが考えられる．



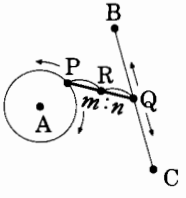
＜図1＞



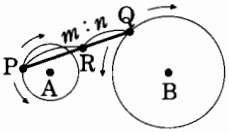
＜図2＞



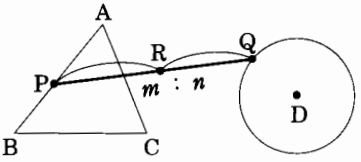
＜図3＞



＜図4＞



＜図5＞

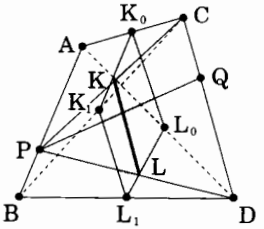


＜図6＞

本問は〈図5〉で「$m=n(\neq 0)$」としたときの例である．

以下，〈図3〉について簡単に説明しておく．

Pを固定するとRの軌跡はKLで，



P を動かすとこの KL が動く．求める軌跡はその動きうる範囲で図の平行四辺形の周および内部である．

発展問題 5—軌跡と除外点

k がすべての実数値をとって変わるとき，2 直線

$(k+1)x+(k-1)y+k+1=0$ ……①

$(k-1)x-(k+1)y+1-k=0$ ……②

について次の問いに答えよ

(1) ①，②が定点を通ることを示せ．

(2) ①，②の交点の描く図形の方程式を求め，図示せよ．

解　説　(1) ①を k について整理すると

$(x+y+1)k+(x-y+1)=0$ ……①′

k がすべての実数値をとって変わることから①′を **k の恒等式**とみて

$x+y+1=0$，$x-y+1=0$　　$\therefore$　$x=-1$，$y=0$

すなわち①は**定点 A$(-1,\ 0)$ を通る．**

②についても同様に

$(x-y-1)k-(x+y-1)=0$ ……②′

$\therefore$　$x-y-1=0$，$x+y-1=0$　　$\therefore$　$x=1$，$y=0$

すなわち②は**定点 B$(1,\ 0)$を通る．**

(2) ①，②の交点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，これは①，②を同時に満たすから

$(k+1)x_1+(k-1)y_1+k+1=0$

$(k-1)x_1-(k+1)y_1+1-k=0$

で，x_1 と y_1 との関係式はこの 2 式から k を消去することにより得られる．

したがって①，②の**交点の描く図形の方程式は①，②から k を消去することによって得ることが出来る．**

「$x+y+1\neq 0$」のとき①′から

$$k=-\frac{x-y+1}{x+y+1} \longleftarrow \text{パラメーター } k \text{ について解いた!!}$$

これを②′に代入すると

$$(x-y-1)\left(-\frac{x-y+1}{x+y+1}\right)-(x+y-1)=0$$

分母を払って整理すると

$x^2+y^2=1$　$(x+y+1\neq 0)$

が得られる．

「$x+y+1=0$」のときは①′で

$x+y+1=0$　　∴　$x-y+1=0$

で，この2式を満たす x，y は

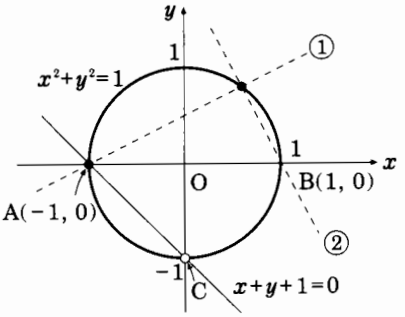
$x=-1$，$y=0$

すなわち，点Aの座標に他ならない．

このx，yの値を②′（あるいは②）に代入すると

$-2k+2=0$　　∴　$k=1$

となり，**確かに実数 k の値が存在する．**



これらのことから求める軌跡は

$x^2+y^2=1$（ただし$(0, -1)$を除く）

である――結局C$(0, -1)$を与える k の実数値は存在しない!!

らしんばん

(1)は①，②を k について整理し，k の恒等式と考えるのがポイント!!

たとえば①で説明すると

①′：　$(x+y+1)k+(x-y+1)=0$　……（＊）

が，2直線

$x+y+1=0$，$x-y+1=0$

の交点，すなわちA$(-1, 0)$を通る「**直線束**」を表すことはp.318で詳しく説明した．このとき k をどのような値にとっても直線

$x+y+1=0$　←――　（＊）で，「**(kのついている方)$=0$**」としたもの!!

を（＊）で表すことが出来ないことには注意しておかなくてはならない．

その上で①，②で表される直線を考えてみると，それぞれの法線ベクトルは

$$\vec{n_1}=\begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix},\quad \vec{n_2}=\begin{pmatrix} k-1 \\ -(k+1) \end{pmatrix}$$

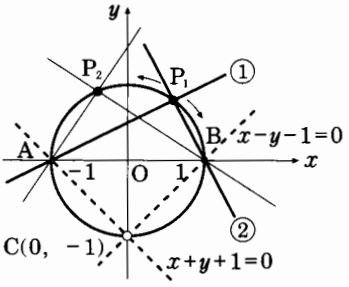
であるが，これらの内積を計算すると

$$\begin{aligned}\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}&=\begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k-1 \\ -(k+1) \end{pmatrix}\\ &=(k+1)\cdot(k-1)-(k-1)\cdot(k+1)\\ &=0\end{aligned}$$

となり，$\vec{n_1}$ と $\vec{n_2}$ とが垂直，したがって，2直線①，②が直交することがわかる．

すなわち，①，②の交点をPとすると

∠APB$=90°$　←――　円周角が90°!!



であるから，**点 P は線分 AB を直径とする円周上の点**で，k の値をいろいろと変えていくと点 P はこの円周上を動くことがわかる．ただし，このとき①は

$$x+y+1=0$$

にはなり得ず，同様にして②はこれと直交する直線

$$x-y-1=0 \quad \longleftarrow \quad \text{本文②′で「(}k\text{のついている方)}=0\text{」としたもの!!}$$

にはなり得ない．つまり点 C(0, −1) は，①，②の形では表せない(実際には存在しない)これらの 2 直線の交点(**まぼろしの交点**(？))であり，これが点 C(0, −1) を除外することの意味である．

➔ ①，②の交点を求めてみよう——①，②を連立方程式として解く!!

①： $(k+1)x+(k-1)y+k+1=0$

②： $(k-1)x-(k+1)y+1-k=0$

①×$(k+1)$+②×$(k-1)$より

$$2(1+k^2)x+4k=0 \qquad \therefore \quad x=-\frac{2k}{1+k^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

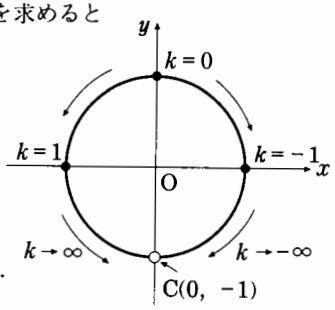
①×$(k-1)$−②×$(k+1)$より

$$2(1+k^2)y+2(k^2-1)=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{1-k^2}{1+k^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

これら 2 式から k を消去して x，y の関係式を求めると

$$x^2+y^2=\left(-\frac{2k}{1+k^2}\right)^2+\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2$$

$$=\frac{(1+k^2)^2}{(1+k^2)^2}=1$$



となり

$$x^2+y^2=1$$

としてともかくも x と y の関係式が求められる．

また，点 P がこの単位円の周上をどのように動くかを調べるには(**)，(***)の k に具体的な数値

$$k=0,\ \pm1,\ \cdots\cdots \quad \longleftarrow \quad \text{簡単な数値以外は省略しよう}$$

を代入するとともに(**)，(***)を

$$x=-\frac{2k}{1+k^2}=-\frac{2}{\frac{1}{k}+k} \quad \longrightarrow \quad 0 \quad (k\to\pm\infty)$$

(「∞」は限りなく大きいことを表す記号で「無限大(むげんだい)」と読む)

$$y=\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{\frac{1}{k^2}-1}{\frac{1}{k^2}+1} \quad \longrightarrow \quad -1 \quad (k\to\pm\infty)$$

のように変形してみると「点 P の大体の動き」を知ることが出来る．すなわち，**$|k|$ を限りなく大きくすると P(x, y) は C(0, −1) に限りなく近づくが，C そのものになることはない**（**C を与える実数値 k は存在しない**）のである．

(**), (***)についてもう少し説明しておこう.

任意の実数 k に対して

$$k=\tan\alpha \quad \cdots\cdots (****)$$

を満たす実数 α は必ず存在する――『諸橋の基礎解析講義（p.65）』のグラフを参照!!したがってこのように k を置き換えると「同書，p.74」の公式によって

$$\frac{-2k}{1+k^2}=\frac{-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\sin 2\alpha=\cos(2\alpha+90°)=\cos\theta$$

$$\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos 2\alpha=\sin(2\alpha+90°)=\sin\theta$$

（ただし，$2\alpha+90°=\theta$ とおいた）

（←―― x 座標を「cos」，y 座標を「sin」に変形している!!）

と表される.

通常は

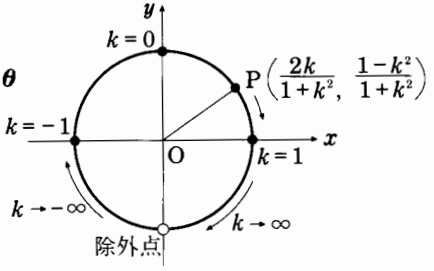
$$x^2+y^2=1 \longrightarrow x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$$

と置く単位円の「パラメーター表示（p.262, 279）」を

$$x=\frac{1-k^2}{1+k^2},\ y=\frac{2k}{1+k^2} \cdots (****)'$$

（k の増加にともなって除外点から左まわり）

←―― 〈図2〉



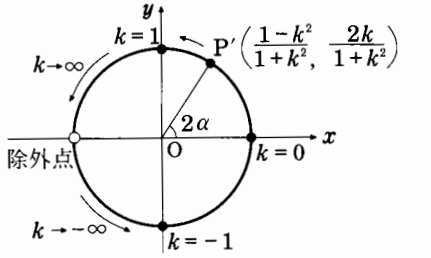
〈図1〉

あるいは

$$x=\frac{2k}{1+k^2},\ y=\frac{1-k^2}{1+k^2} \cdots (****)''$$

（k の増加にともなって除外点から右まわり）

←―― 〈図1〉



〈図2〉

などと置くことも出来る．ただしこの場合は「除外点」が問題になることに注意しなければならない．それは(****)が「任意の実数 k の値」に対して「それぞれの α の値」は決定するが，「任意の実数 α の値」に対して「k の値」が決定するとは限らないからである．すなわち

$$\alpha=\pm 90°,\ \pm 270°\cdots\cdots$$

などに対して「$\tan\alpha$」が定義されない（実数値 k が存在しない）からである.

本問は(****)″の x 座標に「−(マイナス)」のついた例であるから，当然「k の増加」にともなって動点Pは「除外点から左まわり」となる．また，y 座標に「−(マイナス)」がつく場合，あるいは(****)′の x，y 座標に「−(マイナス)」がついたりするときも考え方は同様である．いろいろと実験してみるとよい.

発展問題 6—反転

座標平面上の直線

$x+y-4=0$ ……①

上の任意の点 P と原点 O を通る直線が円

$x^2+y^2-x-y=0$ ……②

と交わる O 以外の点を Q とするとき，OP·OQ が一定となることを示し，その一定値を求めよ．

解　説　点 P の座標を $P(t,\ u)$ とおくと，これは①上にあるから

$t+u-4=0$ ……③

「$t\neq 0$」のとき，OP の方程式は

$y=\dfrac{u}{t}x$

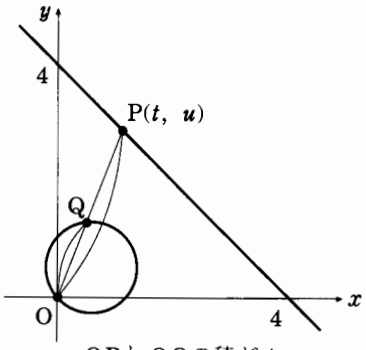
これと②との交点で原点以外のものは

$x^2+\left(\dfrac{u}{t}x\right)^2-x-\dfrac{u}{t}x=0$

$\therefore\quad (t^2+u^2)x=t(t+u)$

$\therefore\quad x=\dfrac{t(t+u)}{t^2+u^2}=\dfrac{4t}{t^2+u^2}$ ←— ③より $t+u=4$

$\therefore\quad y=\dfrac{4u}{t^2+u^2}$ } ……④



OPとOQの積が4

「$t=0$」のとき，P(0, 4)，Q(0, 1) であるから，これは④に含まれる．

$\mathbf{P}(t,\ u)\longrightarrow \mathbf{Q}\left(\dfrac{4t}{t^2+u^2},\ \dfrac{4u}{t^2+u^2}\right)$ ……⑤

である．

$\therefore\quad \mathrm{OP}=\sqrt{t^2+u^2}$

$\mathrm{OQ}=\sqrt{\left(\dfrac{4t}{t^2+u^2}\right)^2+\left(\dfrac{4u}{t^2+u^2}\right)^2}=\dfrac{4}{\sqrt{t^2+u^2}}$

$\therefore\quad \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$（一定）

らしんばん

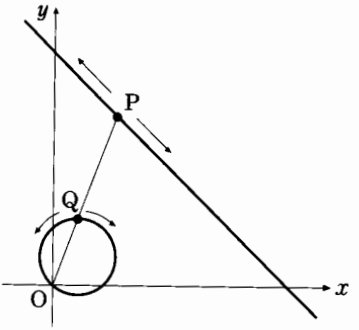
「反転」という変換について——

本問の主張するところは，たとえば右図のように，3 点 O，P，Q が一直線上にあるならば，定直線上の点 P と，原点を通る円周上の点 Q との間にはつねに

$\mathbf{OP\cdot OQ=}k$（一定）

の関係が成り立つということである.

おもしろいことには，逆にこの関係が成り立つときは定直線上の点Pは円周上の点Qに対応し，QはPに対応することが知られている――一般にはこのkの値を「$k=1$」にとり，この「対応関係」を「**反転**」とよんでいる.



キチンとした形で表すと「**反転**」とは

$$f:\quad (x,\ y)\longrightarrow \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

による「**対応関係（変換）**」のことである――本文⑤と比較してみること.

もう少し説明しておこう.

$$\frac{x}{x^2+y^2}=X,\ \frac{y}{x^2+y^2}=Y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

とおいて，$P(x,\ y)$，$Q(X,\ Y)$とすると

(i)　$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は**同方向**（逆向きではない）

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\overrightarrow{OP}\quad (x^2+y^2>0)$$

(ii)　$\mathbf{OP\cdot OQ=1}$――本問では「4（$=k$のこと）」であった.

$$OQ^2=X^2+Y^2$$
$$=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{OP^2}\qquad \therefore\quad OP\cdot OQ=1$$

(iii)　「f:　**P→Q**」と「f:　**Q→P**」が同じである――つまり「$f^{-1}=f$」で，これが「**反転**」とよばれる理由らしい.

（**）をx，yについて解き直してみる.

$$\frac{1}{x^2+y^2}=X^2+Y^2 \quad\longleftarrow\quad \text{(ii)の計算で確認した!!}$$

であったから，これを（**）の2式に入れると

$$(X^2+Y^2)x=X \quad\longrightarrow\quad x=\frac{X}{X^2+Y^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

$$(X^2+Y^2)y=Y \quad\longrightarrow\quad y=\frac{Y}{X^2+Y^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

すなわち，点$(X,\ Y)$から点$(x,\ y)$への対応関係（変換）は

$$(X,\ Y)\longrightarrow \left(\frac{X}{X^2+Y^2},\ \frac{Y}{X^2+Y^2}\right)\longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{対応関係としては}\\ (*)\text{の}f\text{と同じ!!}\end{array}\right)$$

である.

具体的な例で説明しよう.

「$y=2$（直線）」は(＊＊＊＊)で「$y=2$」とおいて

$$y=\frac{Y}{X^2+Y^2}=2$$

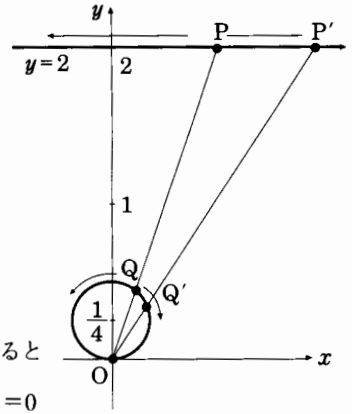
$$\therefore\quad X^2+Y^2-\frac{1}{2}Y=0$$

$$\therefore\quad X^2+\left(Y-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

すなわち，円

$$x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

にうつることがわかる.



逆にこの円は，(＊＊＊)，(＊＊＊＊)を代入すると

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)=0$$

$$\therefore\quad 2(X^2+Y^2)-(X^2+Y^2)Y=0$$

$$\therefore\quad (X^2+Y^2)(2-Y)=0\qquad\therefore\quad Y=2\ \ (X^2+Y^2>0)$$

すなわち，「$y=2$（直線）」にうつることがわかる――「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が同方向」で，「$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$」であることは説明するまでもない.

他の例として

$$y=1 \iff x^2+y^2-y=0$$

なども確かめておくとよい.

なお，この変換では

原点を通る円 $\iff$ **原点を通らない直線**（←――上に述べた例）

原点中心の円 $\iff$ **原点中心の円**

原点を通らない円 $\iff$ **原点を通らない円**

のようにたがいに変換される．このことは知っておいてもよい.

OP と x 軸の正方向とのなす角を θ，「$\mathrm{OP}=r$」とすると点 P の座標は

$$\mathbf{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とおくことが出来る．このとき P は

①：　$x+y-4=0$

上の点であるからこれに代入すると

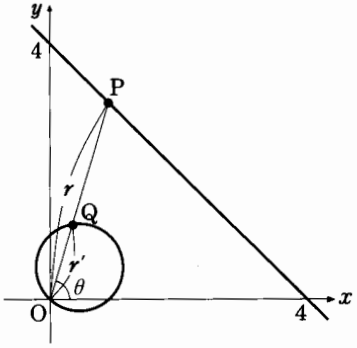
$$r\cos\theta+r\sin\theta-4=0$$

$$\therefore\quad r=\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}$$

同様にして「$\mathrm{OQ}=r'$」とおくと

$$\mathrm{Q}(r'\cos\theta,\ r'\sin\theta)$$

で，これが



②：　$x^2+y^2-x-y=0$

の上にあるから代入して

$(r'\cos\theta)^2+(r'\sin\theta)^2-r'\cos\theta-r'\sin\theta=0$

$(r')^2-r'(\cos\theta+\sin\theta)=0$　　$\therefore$　$r'=\cos\theta+\sin\theta$　$(r'>0)$

$\therefore$　$OP\cdot OQ=rr'=\left(\dfrac{4}{\cos\theta+\sin\theta}\right)\cdot(\cos\theta+\sin\theta)=4$

などとしてもよい．これは**OP**，**OQ**についてθが共通であることを利用した方法であるが，時には有効である．

また，「初等幾何」を用いて求めることも出来る．

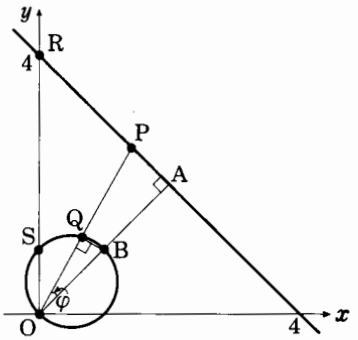
Oから「①：　$x+y-4=0$」に下した垂線が，直線①，円②，と交わる点をそれぞれA，Bとすると

A(2，2)，B(1，1)

である．このときOBは円の直径であるから

$\angle OQB=90°$

で



$\triangle OPA\backsim OBQ$

$\therefore$　$\dfrac{OA}{OP}=\dfrac{OQ}{OB}$　$(=\cos\varphi)$

$\therefore$　$OP\cdot OQ=OA\cdot OB=\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2}=4$

である．

また，求める「一定値」の見当をつけるには図で

$OR\cdot OS=4\cdot1=4$　$(OR=4,\ OS=1)$

はすぐにわかる．いろいろな角度からアプローチを試みるとよい．

発展問題7―2つの円の接触

(1)　円：　$x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$　……①

は，定数aがどんな値をとっても定点を通ることを示せ．

(2)　(1)の円が

円：　$x^2+y^2=4$　……②

と接するようにaの値を定めよ．

解　説　(1)　円の方程式①をaについて整理すると

$(x^2+y^2-10)-2a(3x-y-10)=0$　……①

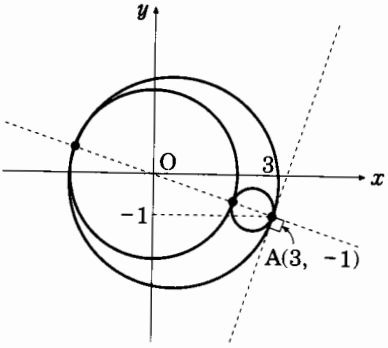
ここで

$3x-y-10=0$　……③

$x^2+y^2-10=0$ ……④

とすると

③，④を同時に満たす x，y は①′すなわち①を必ず満たすから③と④を連立して解いた解が求める定点の座標である．



③： $y=3x-10$

これを④に入れて

$x^2+(3x-10)^2-10=0$

$\therefore\ 10x^2-60x+90=10(x-3)^2=0 \quad \therefore\ x=3,\ y=-1$

ゆえに「円①」は a の値にかかわらず**定点 P(3, −1)** を通る．

(2) 2つの円の中心と半径を調べておく．

①： $(x-3a)^2+(y+a)^2=10(a-1)^2 \quad (a\neq 1)$

$\therefore$ 中心： $(3a,\ -a)$，半径： $\sqrt{10}\,|a-1| \quad (=r_1)$

②： $x^2+y^2=2^2$

$\therefore$ 中心： $(0,\ 0)$，半径： $2 \quad (=r)$

これらの中心間の距離は

$$d=\sqrt{(3a-0)^2+(-a-0)^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\,|a|$$

したがってこの2つの円が接する条件は

内接： $|\sqrt{10}\,|a-1|-2|=\sqrt{10}\,|a|$ ……⑤

外接： $\sqrt{10}\,|a|=\sqrt{10}\,|a-1|+2$ ……⑥

←―― 2円の位置関係（p.348）を参照!!

(i) **④を満たす a の値を求める**――(1)で求めた定点 P(3, −1) が「円②」の外部にあるから

$r_1>r_2 \quad \therefore\ \sqrt{10}\,|a-1|-2=\sqrt{10}\,|a|$ ←―― $|r_1-r_2|=d$（p.348）

(+)

これより

「$a>1$」のとき： $\sqrt{10}(a-1)-2=\sqrt{10}a \quad \therefore\ -\sqrt{10}-2=0$

――→ 適する a の値なし!!

「$0\leqq a<1$」のとき： $-\sqrt{10}(a-1)-2=\sqrt{10}a$

$\therefore\ 2\sqrt{10}a=\sqrt{10}-2 \quad \therefore\ a=\dfrac{\sqrt{10}-2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{5-\sqrt{10}}{10}$ $\left(\begin{array}{l}0\leqq a<1\\ \text{を満たす}\end{array}\right)$

「$a<0$」のとき： $-\sqrt{10}(a-1)-2=-\sqrt{10}a \quad \therefore\ \sqrt{10}-2=0$

$\longrightarrow$　適する a の値なし!!

(ii)　⑤を満たす a の値を求める

「$a>1$」のとき：　$\sqrt{10}a=\sqrt{10}(a-1)+2$　　$\therefore$　$\sqrt{10}-2=0$

$\longrightarrow$　適する a の値なし

「$0 \leqq a<1$」のとき：　$\sqrt{10}a=-\sqrt{10}(a-1)+2$

$\therefore$　$2\sqrt{10}a=\sqrt{10}+2$　　$\therefore$　$a=\dfrac{\sqrt{10}+2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{5+\sqrt{10}}{10}$　$\left(\begin{array}{l}0 \leqq a<1\\ \text{を満たす}\end{array}\right)$

「$a \leqq 0$」のとき：　$-\sqrt{10}a=-\sqrt{10}(a-1)+2$　　$\therefore$　$\sqrt{10}+2=0$

$\longrightarrow$　適する a の値なし

以上のことから求める a の値は

$$a=\frac{5-\sqrt{10}}{10}\ (\text{②が①に内接}),\quad \frac{5+\sqrt{10}}{10}\ (\text{外接})$$

らしんばん

「共有点をもつ2円の位置関係（p.348）」は，2円の半径を r_1，r_2，中心距離を d として

$$|r_1-r_2| \leqq d \leqq r_1+r_2 \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{(A)の等号は内接!!}\\ \text{(B)の等号は外接!!}\end{array}\right) \quad \cdots\cdots(*)$$

(A)　(B)

であった．本文に述べた方法はこれを用いて「バッサリ」と解いた解答である．

しかし，a の値をいろいろと変化させたときの「円①」をコツコツと調べるアプローチの仕方も捨て難い．むしろこの方がうまくいくときもある．

②：　$(x-3a)^2+(y+a)^2=10(a-1)^2$

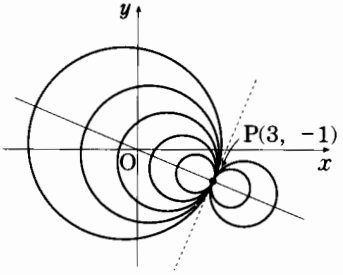
$(\longleftarrow a \neq 1)$ $\cdots\cdots(**)$

であったから，この円の中心は $(3a,\ -a)$ で，

$3a=X,\ -a=Y$

とおいて「a を消去する」と

$$Y=-\frac{1}{3}X \longrightarrow \text{中心の軌跡は}\quad y=-\frac{1}{3}x \quad \cdots\cdots(***)$$



＜図1＞

であることがわかり，さらに(**)が点P(3, −1)を通ることに注目すると本文の「円①」は図のような「円群（いろいろな円）」として表される――＜図1＞．

一方「円②」は

②：　$x^2+y^2=4$ $\cdots\cdots(****)$

であるから，「2円の位置関係」は＜図2＞のような場合に「接する」状況となる．

接点は図の **A**, **B** で，これは「円(＊＊＊＊)」と「直線(＊＊＊)」との交点である．

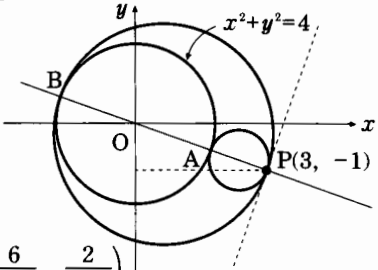
$x^2+y^2=4$，$y=-\dfrac{1}{3}x$

を連立して解くと

$x^2+\left(-\dfrac{1}{3}x\right)^2=4$　　$\therefore$　$x^2=\dfrac{36}{10}$

$\therefore$　$x=\pm\dfrac{6}{\sqrt{10}}$，$y=\mp\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$\longrightarrow$　$A\left(\dfrac{6}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$，$B\left(-\dfrac{6}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$



＜図２＞

これを①に入れると（①に入れると少しメンドウになる），それぞれの場合の a の値が得られる．あるいは**円の中心が PA，PB の中点になっていること**に気がつくと

$3a=\dfrac{1}{2}\left(3\pm\dfrac{6}{\sqrt{10}}\right)$　　$\therefore$　$a=\dfrac{5\pm\sqrt{10}}{10}$

のように比較的簡単に a の値が求まる．

2つの円

①：　$x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$

②：　$x^2+y^2-4=0$

が**共有点をもつとき**，その共有点を通る直線の方程式は辺々引いて

$6ax-2ay-20a+6=0$　　$\therefore$　$3ax-ay-10a+3=0$

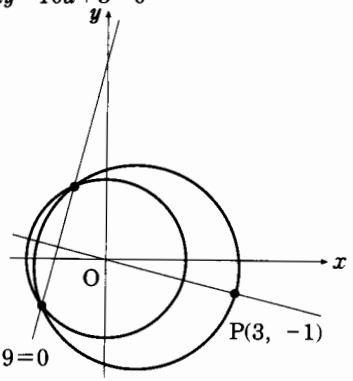
で与えられることはすでに p.350で説明した．これが「円②」に接する条件を求めてみよう――中心（この場合は原点）からの距離が「半径２」に等しいから

$\dfrac{|-10a+3|}{\sqrt{(3a)^2+(-a)^2}}=2$

$\therefore$　$|10a-3|=2\sqrt{10}\,|a|$

両辺は負でないから２乗して

$(10a-3)^2=40a^2$　　$\therefore$　$60a^2-60a+9=0$



$\therefore$　$20a^2-20a+3=0$　　$\therefore$　$a=\dfrac{10\pm\sqrt{40}}{20}=\dfrac{5\pm\sqrt{10}}{10}$

（あるいは $10a-3=\pm 2\sqrt{10}a$ として求めてもよい）

となり，ともあれ上に述べたと同じ結果が得られる．しかし，このとき「**２円は確かに交わっているのだろうか**」という不安が残る――実はその心配はいらない．それは「円②」とこの直線の接点の座標を $Q(x_1, y_1)$ とすると

$Q(x_1, y_1)$ は直線上　$\longrightarrow$　$3ax_1-ay_1-10a+3=0$

$$\therefore \quad 6ax_1-2ay_1-20a+6=0$$

$Q(x_1,\ y_1)$は円②上 $\longrightarrow$ $x_1^2+y_1^2-4=0$

これらの辺々を引くと

$$x_1^2+y_1^2-6ax_1+2ay_1+20a-10=0$$

が得られ，点$Q(x_1,\ y_1)$が「円①」上の点であることが簡単に示されるからである．

いずれにしても扱いにくい問題であった．最初に(＊)で示した「2円が共有点をもつための条件」をいつでも使えるように整理しておくとよい．

発展問題8―極と極線

次の［　　］の中に適当な数，式，文字または用語を入れよ．

原点$O(0,\ 0)$を中心とする円「$C: x^2+y^2=r^2$」の外部の点$P_1(a_1,\ b_1)$から円Cに引いた2つの接線の接点$Q_1(x_1,\ y_1)$，$Q_2(x_2,\ y_2)$を通る直線をL_1とする．このとき，直線L_1上にある円C外の任意の点$P_2(a_2,\ b_2)$から円Cに引いた2つの接線の接点を通る直線L_2は点$P_1(a_1,\ b_1)$を通ることを証明しよう．

まず直線L_1の方程式を求めよう．点$Q_1(x_1,\ y_1)$について考えると，$\triangle OP_1Q_1$は［ア］であるから

$$a_1^2+b_1^2=x_1^2+y_1^2+(\boxed{\text{イ}})^2+(\boxed{\text{ウ}})^2 \quad \cdots\cdots①$$

また点$Q_1(x_1,\ y_1)$は円C上にあるから

$$x_1^2+y_1^2=r^2 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$a_1x_1+b_1y_1=\boxed{\text{エ}} \quad \cdots\cdots③$$

点$Q_2(x_2,\ y_2)$についても同様で

$$a_1x_2+b_1y_2=\boxed{\text{オ}} \quad \cdots\cdots④$$

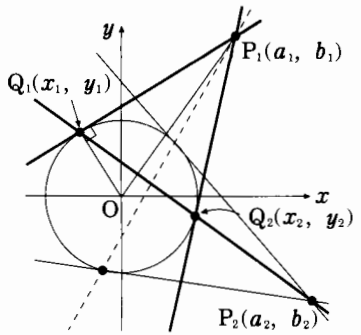
いま直線「$a_1x+b_1y=r^2$」を考えると，③，④は2点$Q_1(x_1,\ y_1)$，$Q_2(x_2,\ y_2)$がこの直線上にあることを示しているから，直線L_1の方程式は［カ］である．

次に点$P_2(a_2,\ b_2)$は直線L_1上にあるから

$$a_1\boxed{\text{キ}}+b_1b_2=r^2 \quad \cdots\cdots⑤$$

一方，前と同様の推論により，直線L_2の方程式は［ク］であるから，⑤は点$P_1(a_1,\ b_1)$が直線［ケ］上にあることを示している．よって証明された．

解　説　$\triangle OP_1Q_1$は，$\angle OQ_1P_1=90°$の直角三角形であるから



$OP_1^2=OQ_1^2+P_1Q_1^2$

$\therefore\quad a_1^2+b_1^2=x_1^2+y_1^2$

$+(a_1-x_1)^2+(b_1-y_1)^2$ ……①

また，$Q_1(x_1,\ y_1)$ は円 C 上にあるから

$x_1^2+y_1^2=r^2$ ……②

そこで①を展開して②を代入する

$$\cancel{a_1^2+b_1^2}=\underbrace{x_1^2+y_1^2}_{\|\ r^2}+\cancel{a_1^2+b_1^2}-2(a_1x_1+b_1y_1)+\underbrace{x_1^2+y_1^2}_{\|\ r^2}$$

$\therefore\quad a_1x_1+b_1y_1=r^2$ ……③

また，$Q_2(x_2,\ y_2)$ についても同様で

$a_1x_2+b_1y_2=r^2$ ……④

いま，直線

$\boldsymbol{a_1x+b_1y=r^2}$

を考えると③，④はそれぞれこれが点 $Q_1(x_1,\ y_1)$，$Q_2(x_2,\ y_2)$ を通ることを示している——これが求める直線 L_1 である．

次に点 $P_2(a_2,\ b_2)$ は直線 L_1 上にあるから代入して

$a_1a_2+b_1b_2=r^2$ ……⑤

である．

一方 L_2 の方程式は L_1 を求めたと同様にして

$\boldsymbol{a_2x+b_2y=r^2}$

であるから⑤は $P_1(a_1,\ b_1)$ がこの直線 L_2 上にあることを示している．

よって証明された．

このことから空欄を埋める正解は

(ア) **直角三角形**，(イ) a_1-x_1，(ウ) b_1-y_1，(エ) r^2，(オ) r^2

(カ) $a_1x+b_1y=r^2$，(キ) a_2，(ク) $a_2x+b_2y=r^2$，　(ケ) $a_2x+b_2y=r^2$

らしんばん

直線 L_1，L_2 の方程式が，**ほとんど計算をしないで求められる**ところがおもしろい——「**代入して成り立つ**」ことをうまく利用していることに注目!!

$P_1(a_1,\ b_1)$ を「**極**」，「L_1：　$a_1x+b_1y=r^2$」を「P_1 を極とする**極線**」とよんでいる．

本問では $\triangle OP_1Q_1$ が直角三角形であることを利用して③を導いているが

円 C：　$x^2+y^2=r^2$

上の点 $Q_1(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式が

$x_1x+y_1y=r^2$ ←―― $x^2,\ y^2$ をそれぞれ $x_1x,\ y_1y$ とおく（p.338）

であることを知っていれば，これが点 $P_1(a_1,\ b_1)$ を通ることから代入すると

$a_1x_1+b_1y_1=r^2$ ←―― 本文③に他ならない!!

が簡単に誘導される――④についてもハナシは同様である．

「極」，「極線」のハナシは「円」に限らず，放物線，楕(だ)円，双曲線などの「2次曲線」一般についていえることがらである――『諸橋の代数・幾何講義（p.309）』を参照されたい．

ここでは放物線を例にあげておこう．

たとえば

点 $P(x_1,\ y_1)$ と放物物線 $y^2=4x$ がある．

(1) $y_1^2=4x_1$ のとき，点Pにおけるこの放物線の接線の方程式が $y_1y=2(x+x_1)$ であることを示せ．

(2) $y_1^2>4x_1$ のとき，点Pからこの放物線に引いた2本の接線の接点をそれぞれQ，Rとすると，直線QRの方程式は $y_1y=2(x+x_1)$ である．これを示せ．

(1) ――放物線と与えられた直線の方程式を連立する．

$y^2=4x$ ……(＊)，　$y_1y=2(x+x_1)$ ……(＊＊)

ここで $x,\ x_1$ を消去すると

$$yy_1=2\left(\frac{y^2}{4}+\frac{y_1^2}{4}\right) \longleftarrow x=\frac{y^2}{4},\ x_1=\frac{y_1^2}{4}$$

$$\therefore\ y^2-2y_1y+y_1^2=0 \quad \therefore\ (y-y_1)^2=0 \quad \therefore\ y=y_1\text{(重解)}$$

すなわち(＊)と(＊＊)は $(x_1,\ y_1)$ で接する．

(2) ―― $Q(x_2,\ y_2)$，$R(x_3,\ y_3)$ における接線の方程式はそれぞれ

$y_2y=2(x+x_2)$
$y_3y=2(x+x_3)$ ＞ ←―― (1)を利用!!

で，これがともに $P(x_1,\ y_1)$ を通るから代入して

$y_2y_1=2(x_1+x_2)$
$y_3y_1=2(x_1+x_3)$

すなわち直線

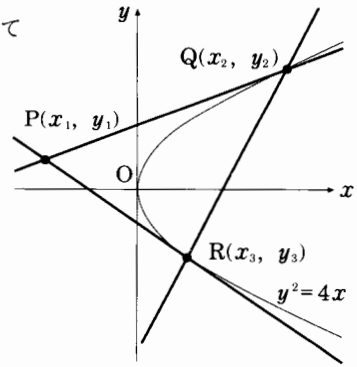
$yy_1=2(x+x_1)$

は $Q(x_2,\ y_2)$，$R(x_3,\ y_3)$ を通る．すなわち求めるものは

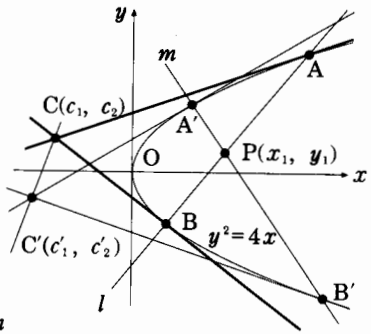
$y_1y=2(x+x_1)$

ついでにもう1つだけつけ加えておこう．いま

$y_1^2<4x_1$



である点 $P(x_1,\ y_1)$ をとる．この点 P を通って x 軸に平行でない 2 直線を l，m とし，l，m とこの放物線との交点をそれぞれ A，B，A′，B′ とする．



極線 AB，A′B′ に対する極をそれぞれ

$$C(c_1,\ c_2),\quad C'(c_1',\ c_2')$$

とすると上に述べたことから

AB ： $c_2y=2(x+c_1)$ ――これが l

A′B′ ： $c_2'y=2(x+c_2')$ ――これが m

そしてこれが $P(x_1,\ y_1)$ を通るから代入すると

$$\left.\begin{aligned}c_2y_1&=2(x_1+c_1)\\ c_2'y_1&=2(x_1+c_1')\end{aligned}\right\rangle \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{これは}(***)\text{で}C(c_1,\ c_2),\ C'(c_1',\ c_2')\\ \text{を代入したものとなっている!!}\end{array}\right)$$

となるが，これは直線

$$yy_1=2(x+x_1) \quad \cdots\cdots (***)$$

が $C(c_1,\ c_2)$，$C'(c_1',\ c_2')$ を通ることを意味している――直線 CC′ が(1)で証明した接線と同じ形をしているところがなかなかおもしろい．

これもほとんど計算ナシでカタがつくハナシである．

発展問題 9―$(x+y,\ xy)$の存在領域

実数 x，y は不等式

$$x^2+xy+y^2\leqq 3$$

を満たしている．

(1) $x+y=u,\ xy=v$

とおくとき，点$(u,\ v)$の存在する範囲を図示せよ．

(2) $k=xy-2x-2y$

のとり得る値の範囲を求めよ．

解　説　(1) $x+y=u,\ xy=v$

とおくと，x，y を 2 つの解とする 2 次方程式は次のように表される．すなわち

$$t^2-ut+v=0$$

ここで，x，y は実数であるから

$$D=u^2-4v\geqq 0 \quad \therefore \quad v\leqq\frac{1}{4}u^2 \quad \cdots\cdots ①$$

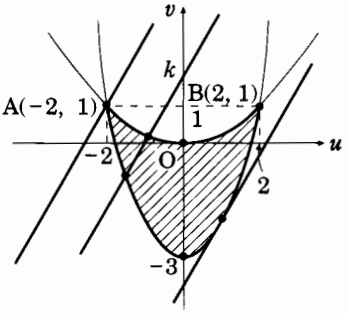
また，与えられた不等式は

$x^2+xy+y^2 \leqq 3$　　$\therefore$　$(x+y)^2-xy \leqq 3$

$\therefore$　$u^2-v \leqq 3$　　$\therefore$　$\boldsymbol{v \geqq u^2-3}$

……②

すなわち「①，②を同時に満たす領域（図の斜線部分）」が求める範囲である．ただし，「境界線」は含むものとする．なお，「境界線の交点」は



$$\begin{cases} v=\dfrac{1}{4}u^2 \\ v=u^2-3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=\pm 2 \\ v=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \mathrm{A}(-2,\ 1),\ \mathrm{B}(2,\ 1)$$

である．

(2)　$k=xy-2x-2y$

$=xy-2(x+y)=v-2u$ ……③

$\therefore$　$v=2u+k$ ……④

であるから，「(1)で求めた領域」と「直線④」とが共有点をもつ条件を「k（④の v 切片）の範囲」としてとらえればよい．

k が最大となるのは，明らかに「直線③（あるいは④）」が図の点 A(−2, 1) を通るときであるから「k の最大値」は

$k=1-2\cdot(-2)=5$ ←―― ③に代入!!

最小となるのは「直線③（あるいは④）」が「領域の境界線」

$\boldsymbol{v=u^2-3}$ ……⑤

と「接する」ときであるから，④と⑤を連立して

$u^2-3=2u+k$　　$\therefore$　$u^2-2u-(k+3)=0$

$\therefore$　$\dfrac{D}{4}=1^2+(k+3)=0$　　$\therefore$　$k=-4$ ←―― 最小値!!

（このとき $(u-1)^2=0$　　$\therefore$　$u=1$，$v=1^2-3=-2$）

となり，求める k の範囲は

$\boldsymbol{-4 \leqq k \leqq 5}$

である．

らしんばん

(1)の「不等式①」はどこから来たか――慣れるまでは「トートツ」に思われてもしかたのない不等式である．

問題文の「**実数 x，y は……**」に注目してもらいたい．x，y が

$\boldsymbol{x+y=u,\ xy=v}$

の形で与えられるときは

u, v が実数であったとしても，もとの x, y が実数とは限らないことに由来するハナシである．たとえば

$x=1+i$, $y=1-i$ ←― x, y を「共役複素数」にとる!!

とすると，x, y が虚数であるにもかかわらず

$$x+y=(1+i)+(1-i)=2$$
$$xy=(1+i)(1-i)=1-i^2=2$$

←― 「和」と「積」は実数!!

であり，x, y が実数になるとしても

ある条件の u, v に対してのみ x, y が実数であることがわかる．

そこで本問では「2次方程式の解と係数の関係（p.120）」を利用して，x と y を2つの解とする2次方程式

$t^2-ut+v=0$ ←― $x+y=u$, $xy=v$

を作り，その「実数解条件（p.115）」から

$D=u^2-4v\geqq 0$ ←― x, y が実数であるための条件!!

を導いたわけである．

特にこの条件は，「問題文」の中に具体的に示されていない場合が多く，ウッカリすると忘れてしまうことになるので「十分な注意」が必要である．

(2)は本文③に示すように

$k=v-2u$ ∴ $v=k+2u$ ……(＊)

であるが，「v」は(1)から

$u^2-3\leqq v\leqq\frac{1}{4}u^2$ ←― 本文(1)の領域を表す不等式

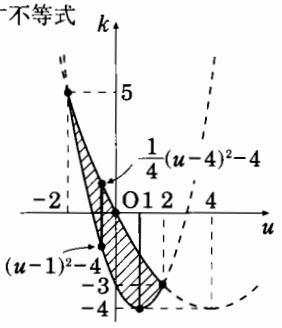
これに(＊)を入れると

$$u^2-3\leqq k+2u\leqq\frac{1}{4}u^2$$

$$\therefore\quad u^2-2u-3\leqq k\leqq\frac{1}{4}u^2-2u$$

ここで

$$f(u)=u^2-2u-3=(u-1)^2-4$$
$$g(u)=\frac{1}{4}u^2-2u=\frac{1}{4}(u-4)^2-4$$



に注意して $(u,\ k)$ の存在する領域を示すと図のようになり

最大値：　5（$u=-2$），最小値：　-4（$u=1$）

であることがわかる．