第１章

確　率

「可能性の度合」を
数量化するのだ!!

〈「起こり得る可能性の度合」を「数量化」する〉

「賭け事」の有利性についての「パスカル(1623～1662)フランス)」や「フェルマー(1601～1665)フランス」の研究が**「確率論」**の始まりとも言われているが，それが学問として成立したのは「ベルヌーイ(1700～1782)スイス」以後のことであり，**「統計学」**が数学の一分野となったのは「ピアソン(1895～)イギリス」以後のことであるから歴史的にもそれほど古い学問ではない．とはいえ確率や統計の考え方自体は古い時代からあり，それは「ごく常識的なもの」であったに違いない．にもかかわらずこの科目が「数学の一分野としての市民権(？)」を得るのが遅れた理由は，「確定的なことがら」を主に扱う「数学という学問の他の分野」に比較して，**あまりにも「不確定な要素」が含まれていたり，あまりにも「偶然性に左右されるもの」を対象にしている**ことが大きな原因であったと思われる．

たとえば，サイコロを振って「1の目が出る確率」を求めるにはごく単純に考えて次の2つの立場が考えられる．

(i)　6つの面に注目して．その確率は$\frac{1}{6}$　　←――**先験的確率**

(ii)　600回振れば100回くらいは1の目が出る　←――**経験的確率**

ベルヌーイの「推量法(1713)」の**「大数の法則」**はこの(i)(ii)が「一致する」ことを示したものであった．以後「ラプラス(1749～1827)フランス」が当時めざましい発展を続けていた「解析学」を武器として「確率の解析的理論(1812)」を完成した．それは**「同様に確からしい」**という先験的判断から確率を定義するものである．しかし，それにも限界があり，「相対度数」にもとづく確率も考えられるようになったが，結局「数学としての確率論」の確立は「コルモゴロフ(1903～)ソ連」の「確率の公理系の提示(1932)」を待たなければならなかった．

われわれとしては初学者として**「ラプラス流」に「順列と組合せなどを利用して場合の数を数える」ところから出発し，その立場から「確率の定義」，「加法定理」，「乗法定理」，……とハナシも進めていくことにする――最もシンプルで取り扱い易いモデルを用いて「確率の基礎的な概念」を養うことが主な目的**である．

第1節
場合の数

「**場合の数**」という言葉には何か日常用語と違う雰囲気がある．「**場合**」というのは「**ある条件を満たす場合**」というほどの意味である．

ここで調べる「場合の数」は主に「**順列(並べ方)**」と「**組合せ(とり方)**」の数であるが，考え方の基本からキッチリと解説することにしよう．「ハナシのつながり」としては次節「**確率**」への準備である．

1　基本法則

「ある条件」を満たすものの個数を求めるにはどうすればよいか．

そのような「ある条件」を満たすものは1つの集合をつくる．そこで，まず集合の要素の数え方，扱い方についての知識を整理することからはじめることにする．

要素の個数が有限である集合を「**有限集合**」という．有限集合 E の要素の個数を $n(E)$ で表すことにする——以下，この表し方を用いて「**和の法則**」と「**積の法則**」を解説する．

(1) 和の法則

次の定理を「**和の法則**」と呼んでいる．

和の法則

A，Bを有限集合とするとき

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つ．

解　説　具体的な例を用いて説明する．

1～15の自然数を**「全体集合」**とし，これをSで表すことにする．このとき，**「2で割り切れるもの」**，**「3で割り切れるもの」**の集合をそれぞれA，Bとすると

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots,\ 13,\ 14,\ 15\}$$

$$A=\{2,\ 4,\ ⑥,\ 8,\ 10,\ ⑫,\ 14\}$$

$$B=\{3,\ ⑥,\ 9,\ ⑫,\ 15\}$$

である．したがって

$$n(S)=15,\ n(A)=7,\ n(B)=5$$

であり，$n(A\cap B)$，$n(A\cup B)$は

$$A\cap B=\{6,\ 12\}\longrightarrow n(A\cap B)=2$$

$$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15\}\longrightarrow n(A\cup B)=10$$

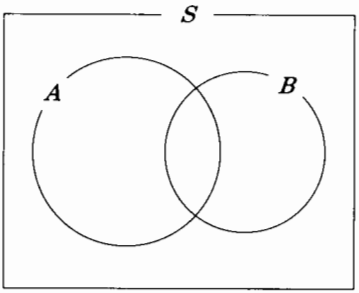
と簡単に数えられるから

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=7+5-2=10$$

で，上に述べた

$$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

は容易に確かめられるが，一般には右のような図(ベン図という)を用いるとビジュアルでわかりよい．



図を用いると，Aの補集合$\overline{A}$で表される集合の個数$n(\overline{A})$，あるいは$n(A\cap\overline{B})$なども

$$\boldsymbol{n(\overline{A})=n(S)-n(A)}$$

$$\boldsymbol{n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)}$$

と簡単に計算することが出来る．

らしんばん

➡ **「$A\cap B=\phi$(空集合)」のときは「$n(A\cap B)=0$」であるから「和の法則」は**

$$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

となる．

また，「$A\cap\overline{A}=\phi$」，「$A\cup\overline{A}=S$」であるから(＊)で「$B=\overline{A}$」とおくと

$$n(S)=n(A)+n(\overline{A})\qquad\therefore\ \boldsymbol{n(\overline{A})=n(S)-n(A)}$$

なども導くことが出来る．

➡ この定理を，3つの集合の場合に拡張すると次のようになる．

ハナシを簡略に進めるために，次の図のa，b，c，p，q，r，sなどを，それぞれの集合の要素の個数(もちろん空集合のときは0とする)とすると

$$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+p+q+r+s \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

である．このとき

$$n(A)=a+(q+r)+s,\ n(B\cap C)=p+s$$

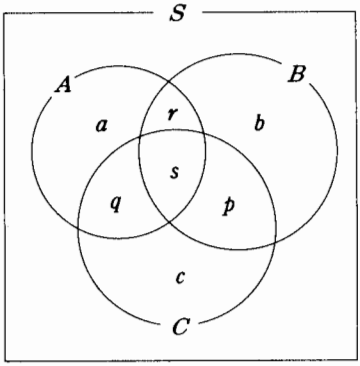
などを用いると

$$n(A)+n(B)+n(C)=(a+q+r+s)+(b+p+r+s)+(c+p+q+s)$$
$$=a+b+c+2(p+q+r)+3s \cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$
$$n(B\cap C)+n(C\cap A)+n(A\cap B)=(p+s)+(q+s)+(r+s)$$
$$=(p+q+r)+3s \cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

であることがわかる．そこで，計算の順序として，まず「(***)−(****)」を作り，足りない「s」を加えると(**)が次のように表される．すなわち

$$\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)}$$
$$\boldsymbol{-\{n(B\cap C)+n(C\cap A)+n(A\cap B)\}}$$
$$\boldsymbol{+n(A\cap B\cap C)}$$

が導かれる——図を<ruby>睨<rt>にら</rt></ruby>んで確認しておくこと!!



例題 1

1から100までの自然数のうち，3でも5でも割り切れないものの個数を求めよ．

解　説　1から100までの数を書き並べておいて，その中から「3で割り切れるもの」，「5で割り切れるもの」を消していって残ったものの数を数えればよい．しかし，これが「1～100」でなくて「1～10000」となると，これらの数を書き並べるだけでも大変である．

そこで「和の法則(p. 3)」を用いる．特に

$$n(\overline{A})=n(S)-n(A)$$

に注目する．

「1～100」の自然数のうち「3の倍数」，「5の倍数」の集合をそれぞれA，Bとすると「$A\cap B$」は「15の倍数」である．すなわち

$$n(A)=33,\ n(B)=20,\ n(A\cap B)=6$$

であるから

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=33+20-6=47$$

次に「3でも5でも割り切れないもの」は $\overline{A\cup B}$ であるから

$$n(\overline{A\cup B})=n(S)-n(A\cup B)=100-47=53$$

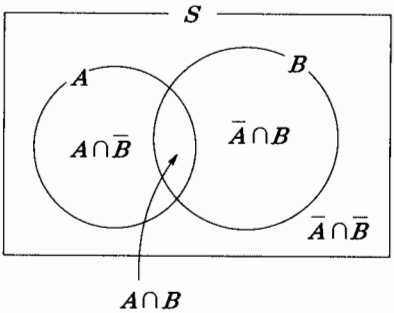
らしんばん

これも図を描いて確かめておくとよい．結局Sに対してAとBとの関係は $A\cap B$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ が考えられ，本文で求めたのは

$$n(A\cap B)=6$$
$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=53$$

などであった．他のものについては

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=33-6=27$$
$$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=20-6=14$$



のように簡単に計算される．

なお

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$ ←―― 『諸橋の数Ⅰ講義』(p. 6)

は「ド・モルガンの法則」といい，集合を扱う上できわめて重要な定理である．

(2) 積の法則

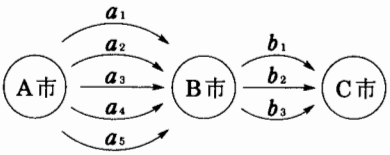
いま，A市からB市を通ってC市に行く「行き方」を考える．このときA市からB市へは5通りの「行き方」があり，B市からC市へは3通りの「行き方」があるものとすると，A市からC市への「行き方」の個数が

$$5\times3=15\text{(通り)}$$

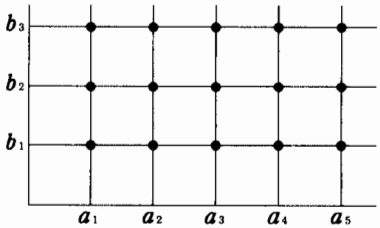
であることはほとんど「あたりまえ」のことであるが，それは

A市――→B市

の a_1～a_5 の「5通りの道筋」の選び方のうちのどの1つに対しても



〈図1〉



〈図2〉

B市——→C市

のb_1〜b_3の「3通りの道筋」を選ぶことが出来るからである——〈図1〉.

このハナシを〈図2〉で見ると「A市からC市に行く道筋」は

$(a_1,\ b_1)$, $(a_1,\ b_2)$……, $(a_5,\ b_3)$

←——(これらを「**順序対(ペア)**」という)

などの黒点に対応していることがわかる——座標平面と考えてみよ.

この考え方を一般化すると次の定理が得られる.

積の法則

集合A, Bがあって,「Aからa個」の要素をとり, そのおのおのに対して「Bからb個」の要素をとって, それらを組合せて出来る「**順序対の個数は** ab」である.

解　説　もう少し詳しく説明しよう.

2つの集合A, Bについて, Aの要素xとBの要素yの「順序を考えた組$(a,\ b)$」の全体が作る集合をAとBとの「**直積(直積集合)**」といい,「$\boldsymbol{A\times B}$」と書く. すなわち

$$A\times B=\{(x,\ y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

である.

一般に有限集合A, Bの要素の個数と, それらの直積「$A\times B$」の要素の個数の間には次の等式が成り立つ.

$$\boldsymbol{n(A\times B)=n(A)n(B)}$$ ←—— $n(A)$カケル$n(B)$のこと!!

上に示した「**積の法則**」で得られた数値「$\boldsymbol{ab}$」は, **2つの集合AとBとの「直積(集合)の個数」に他ならない**——実用的な表現として言いかえておこう.

「ことがらA」が「a通りの仕方」で起こり, Aの起こり方と無関係に「ことがらB」が「b通りの仕方」で起こるならば,「AかつB」の起こる仕方は「ab」通りである. すなわち「**積の法則**」は以下

$$\boldsymbol{n(A\cap B)=n(A)n(B)}\quad(=n(A\times B))$$

の形で用いられる.

らしんばん

「積の法則」は3つ以上の集合でも成立し, たとえば

$$n(A\cap B\cap C)=n(A\times B\times C)$$
$$=n(A)n(B)n(C)$$

である.

例題 2

108の正の約数は全部で何個あるか.

解　説　いろいろの考え方がある.

(1)「1, 2, 3, ……」と小さい方から順に書きあげていくのも1つの方法ではある. しかし,「108」だからよいが, これも数が大きくなると手におえなくなるからあまり良い方法とはいえない.

(2)「108」を**「素因数分解」**してみると**「$108=2^2\times3^3$」**で約数は

$$2^a\times3^b\quad(a=0,\ 1,\ 2\quad b=0,\ 1,\ 2,\ 3)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である.

一方「2^2の約数」と「3^3の約数」は

2の約数：　2^a　$(a=0,\ 1,\ 2)$

3の約数：　3^b　$(b=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

であるから「指数のa, b」に注目して

$$A=\{0,\ 1,\ 2\},\ B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

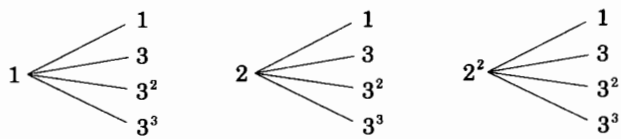
とすると**「①におけるAとBとの直積$(A\times B)$」**が108の約数を与えることになる. すなわち「108の約数の個数」は

$$n(A\times B)=n(A)n(B)\longleftarrow\text{積の法則}$$

$$=3\times4=12$$

である.

(3)**「樹形図**(文字通り枝わかれの図)」を描くと「調べ落とし」を防ぐことが出来る.



これより

$$3\times4=12$$

(4)少しアプローチの方法は違うが,「108の約数」は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)$$

の展開式の各項にあらわれる(**『諸橋の数Ⅰ講義』** p.22)ことに注目すると, 求める「約数の個数」は

$$3\times4=12$$

と, きわめて簡単に求められる.

しかもこのハナシを一般化すると，正整数Nが

$$N=p^{\alpha}q^{\beta}\cdots\cdots r^{\gamma}$$

の形に素因数分解されるとき，Nの正の約数の個数は

$$(1+\alpha)(1+\beta)\cdots\cdots(1+\gamma)$$

であり，おまけ(？)にこの方法によれば「約数全体の和」を求めることが出来る．すなわち

$$(1+p+p^2+\cdots\cdots p^{\alpha})(1+q+q^2+\cdots\cdots q^{\beta})\cdots\cdots(1+r+r^2+\cdots\cdots r^{\gamma})$$

$$=\frac{1-p^{\alpha+1}}{1-p}\cdot\frac{1-q^{\beta+1}}{1-q}\cdots\cdots\cdot\frac{1-r^{\gamma+1}}{1-r}$$

(←――**等比数列の和の公式**――『**諸橋の基礎解析講義**』p.114以下)

である．

らしんばん

「場合の数」を数える基本原理について――

「場合の数」を数えるには本文にも述べたようにいろいろな考え方があることが多い．このあと「順列」，「組合せ」で学ぶ公式を使うといくらか効率よく数えられるが，その場合でもたとえば微積分の公式のように，それを用いないと絶対に出来ないというわけでもなく，先に述べた**「和の法則」と「積の法則」だけを用いて，あるときはそれさえも用いないでコツコツと数えあげるという方法で解決することが多い**のである．

また，この分野の問題は，「クイズ」風なところがあって，ある見方に固執していたのではなかなか困難である場合でも，少し視点を変えると，問題が非常に易しく見えたりすることもある．したがってこの種の問題はいくらやっても完ペキというわけにはいかず，やはり不安が残るのは仕方がない．比較的やさしい問題をいろいろとやってみるとよい．

ポイントは「数え落とし」と「重複」を徹底的に排除することである．

たとえば

6個のチームがリーグ戦をするときの試合数を求めよ．

いろいろな考え方がある．チーム名をA，B，C，D，E，Fとした上で

(i)　**もれなく**　(ii)　**重複なく**

に注意して「数え方」を考えてみよう．

(1)不規則に数えたのではどうしても「数え落とし」や「重複」が起こるので，まずAに注目して素朴に数えていく．Aが対戦するのは

(ア)　(AB)(AC)(AD)(AE)(AF) …… 5試合

で，あとはAが出て来ないからBに注目すると

(イ)　(BC)(BD)(BE)(BF) …… 4試合

次にA，Bは出て来ないでCが出て来るものという具合に順にあげていくと

(ウ)　(CD)(CE)(CF) …… 3試合

(エ)　(DE)(DF) …… 2試合

(オ)　(EF) …… 1試合

これらを加えて

5＋4＋3＋2＋1＝15(試合)←――**和の法則**

このように「和の法則」が用いられるのは当然前ページの(i)(ii)が満たされているからである．

(2)次のように考えてみることも出来る．

AチームはA以外の他の5チームと試合をするから5試合することになる．

他のすべてのチームについても同じことがいえるから

6×5＝30 …… (＊)

ということになるが，これがそのまま「試合数」ということにはならない．それは，「AとBとの試合」について「**Aの側」からと「Bの側」からの両方から2通りに数えてしまっている**からである．したがって「試合数」は

30÷2＝15(試合)

としなければならない．

上の(＊)は確かに「**積の法則**(p.6以下)」に従った計算，すなわち$(x,\ y)$という「順序対(ペア)」を考えるとき，「xのとり方がm通り」，「yのとり方がn通り」ならば「$(x,\ y)$のとり方は$m\times n$通り」だが，本問の場合はたとえば(A，B)というペアと(B，A)というペアは同じものと見るので，それを区別するために数えた「場合の数」を2で割ることになる．

(3)「リーグ戦表」を書いてみよう．

右の表はCチームの成績だけが記してあるのだが

{AとBには負け
　DとEとFには勝った

ことを示している．この表では右下がりの対角線に関して対称の場所で一方が黒丸ならば他方が白丸でなければならないことは説明するまでもないが実際の試合数は次のようになる．

	A	B	C	D	E	F
A	×		○			
B		×	○			
C	●	●	×	○	○	○
D			●	×		
E			●		×	
F			●			×

{(マス目の総数)－(対角線上の×印のマス目の数)}÷2＝{6×6－6}÷2＝15

以上(1)，(2)，(3)はn個のチームの場合にも拡張される――考え方は同じ!!

(1)の方法によるとき：

$$(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots 3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

(2)の方法によるとき：　「積の法則」から $n(n-1)$ であるが「重複」に注意して

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

(3)の方法によるとき：　マス目の総数は n^2,「×印」の総数は n だから

$$\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

しかし，このように苦労して数えた「場合の数」も，あとで述べる「組合せの公式(p.21以下)」を用いれば

$${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=\frac{n(n-1)}{2}$$

と1パツでいくことになる．

2　順列

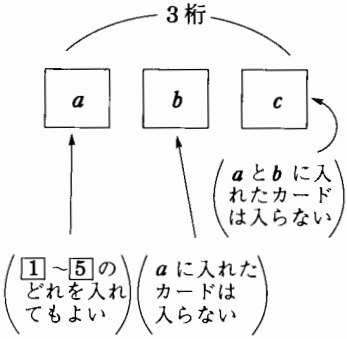
(1)「順列」とは何か

集合 A の異なる要素の数が n 個のとき，この n 個の中から r 個とり出して並べたものを**「n 個のものから r 個とる順列」**といい，この順列の総数を，n と r とを用いた記号「${}_nP_r$（n *Permutation* r などと読む）」で表す．

具体的な例で示すことにする．集合 A を1枚毎に1から5までの数を書いてある5枚のカードとする．すなわち

$$A=\{\boxed{1},\ \boxed{2},\ \boxed{3},\ \boxed{4},\ \boxed{5}\}$$

である．このとき，この5枚から3枚とって3桁の整数を作る場合を考えてみよう——右図．



$\boxed{a}$ には $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ のカードのどれを入れてもよいから，この「場合の数」は5通りである．

$\boxed{b}$ には $\boxed{a}$ に入れたカードは入れられない(すでに使ってしまった)からこれを除いて残りの4枚のカードから選ぶことになり，「場合の数」は4通り．

$\boxed{c}$ には $\boxed{a}$，$\boxed{b}$ に入れた2枚のカードを除いて3通りの「場合の数」が得ら

れる．そこで「**積の法則**(p.7)」を用いると

3桁の数——異なる5個から3個とって並べる順列の総数は

$${}_5P_3=5\times4\times3=60$$

であることがわかる．

この考え方を一般化すると，${}_nP_r$ を求める公式が得られる．

順列

異なるn個のものからr個とって並べる順列の総数は

$${}_nP_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}_{r\text{個の連続整数の積}}$$

で与えられる．

解　説　考え方は上に述べたカードの場合と同様である．

特に「$r=n$」のときは

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

となる．この「1からnまでの自然数の積」を「**nの階乗**」といい，「$n!$」で表す．すなわち

$${}_nP_n=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

である．そしてこの階乗の記号を用いると

$$\begin{aligned}{}_nP_r&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

と簡略に表される——「$r=n$」のときは分母が「$0!$」となるが，この場合も上の式が使えるように「**$0!=1$**」**と約束**しておく．

らしんばん

➡ 本文中の文章の「……とって並べる……」は「**とる**」ということと「**並べる**」ということとが同時に起こっており，これはp.21以下に述べる「組合せの数(とり方の数)」を誘導するときに大きな意味をもつことになる．そのときに詳しく解説することにする．

➡ 本文に ${}_nP_r$ として述べた

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

が「**r個の連続整数の積**」であることに最初はなじみにくい．慣れるまで次のように書いてはどうか．

$${}_nP_r=\underbrace{(n-0)(n-1)(n-2)\cdots\cdots\{(n-(r-1)\}}_{\left(\text{引く数に注目すると 0 から } r-1 \text{ までの } r \text{ 個の積}\right)}$$

いずれにしてもこの先の議論の中心となる記号であるから正確に理解し，覚えておくことが大切である．

例題 3

男4人，女4人が横に1列に並ぶとき
(1)並び方は全部で何通りあるか．
(2)男女が交互に並ぶ並び方は何通りあるか．
(3)(2)の場合，特定な男1人と女1人とが必ず隣りあうような並び方は何通りあるか．

解　説　(1)要するに8人を横に1列に並べるのだから

$${}_8P_8=8!=\mathbf{40320}$$

(2)M(男)とW(女)とが交互に並ぶ並び方は次の2通りがある．

M　W　M　W　M　W　M　W ……(a)
W　M　W　M　W　M　W　M ……(b)

まず(a)について考えると男4人，女4人の並び方がたがいに無関係に起こるから求める並び方の個数は

$$4!\times4!$$

また，(b)についても同様なので並び方の個数は

$$4!\times4!\times2=\mathbf{1152}$$

(3)特定の男女を1組にするとき，これをどこに配置するかが問題になる．たとえば(2)の(a)の場合に左端の2人を特定な2人とすると

M　W　M　W　M　W　M　W ……(c)

のように，他の男3人，女3人の並べ方を考えればよい．特定な男女2人の位置については上の例の他に

M　W　M　W　M　W　M　W ←((c)の他に6通り) …… (d)

のようにとれるから全部で7通りの場合がある．したがって求める場合の数は「(2)の(a)と(b)の場合」を考えて

$$7\times3!\times3!\times2=\mathbf{504}$$

らしんばん

➡ (1)は順列の公式通りだから問題はないが(2)，(3)は「並べ方」に条件が加わっているだけ少しメンドウになる．このようなときは「**典型的な例の1**

つ」を図，または表にしてみるとよい．たとえば(3)の思考過程を振り返ってみると

(i) 「特定な男女2人」の位置をとりあえず(c)のように決める——この決め方は(d)のように7通りあることがわかる

(ii) 「特定な男女2人」の1つの決まり方に対して「残りの男3人，女3人」の並べ方を考える——それぞれ3！通り

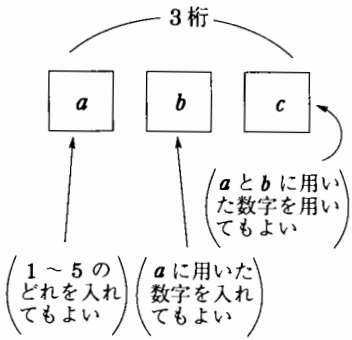
(iii) 「(2)の(a)と(b)の場合」を考えて2通り

(iv) 「積の法則」を利用する

となる．

(2) 重複順列

集合Aの異なる要素の数がn個のとき，この中から同じものを繰り返し使うことを許してr個とって作る順列を「**n個のものからr個とる重複順列**」といい，これをnとrとを用いた記号「${}_n\Pi_r$(エヌ　パイ　アールなどと読む)」で表す．



たとえば，「順列」の導入では「1～5」の数字を記入した5枚のカードを用いたが，ここでは「数字そのもの」を用いて「3桁の整数」を作ることを考えよう——カードでは繰り返し用いることは出来ないが，数字ならば何回でも使うことが出来る．

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

とすると右図の「a」には「1～5」のどの数を入れてもよく，「**b**」にも「**aに入れたもの**」も含めて「**1～5**」**のどの数を入れてもよい**．

「c」についても同様であるから

$${}_5\Pi_3=5\times5\times5=5^3=125$$

となる．

この考え方を一般化すると「${}_n\Pi_r$」を求める公式が得られる．

重複順列

異なるn個のものから重複を許してr個とって並べる順列の総数は

$${}_n\Pi_r=n^r$$

である．

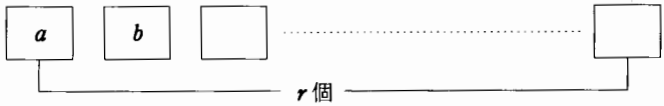
解　説　要するに「**重複順列 ${}_n\Pi_r$**」は，**n 個のものの集合 A の r 個の直積**

$$\underbrace{A\times A\times\cdots\cdots\times A}_{r\text{個}}$$

の要素の個数である．

らしんばん

➡ **「重複を許さない順列 ${}_nP_r$」を，上に述べた「重複順列 ${}_n\Pi_r$」と比較してみるとわかり易い．**次のように1直線に r 個の位置を用意しておく．



1番目の選択はいずれも n 通りであるが，2番目から違って来る．

「${}_nP_r$」では1番目に何を選んだとしても，その1つ1つの選択に対して2番目に入れるものは1番目で用いなかった $(n-1)$ 通りの中から選ぶことになる．

3番目に入れるものも1番目，2番目に入れたものは除いて考えるから

$${}_nP_1=n,\ {}_nP_2=n(n-1),\ {}_nP_3=n(n-1)(n-2),\ \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots,\ {}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=\frac{n\,!}{(n-r)\,!}$$ ←―― p.12

である．

「${}_nP_r$」は1度とり出したものはもとにもどさず(非復元抽出という)，「${}_n\Pi_r$」はとり出して並べる位置を決めたらもとにもどし(復元抽出という)，さらに任意のものをとり出して他の位置に並べるものを決める個数とみることが出来る．

例題 4

集合 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ の部分集合(空集合と全体集合を含む)の個数を求めよ．

解　説　与えられた集合の要素の1つ1つについて，「とる」か「とらない」かを決めればよい．たとえば

a	b	c	d
|	|	|	|
×	○	○	×

←――「○印」は「とる」を表し，「×印」は「とらない」を表すものとする

のときは部分集合は $\{b,\ c\}$ に対応する．

いくつか例をあげておくと上の $a,\ b,\ c,\ d$ の順に

○　×　×　×　――→ $\{a\}$

× × × × ⟶ { }(空集合)

○ ○ ○ ○ ⟶ $\{a,\ b,\ c,\ d\}$(全体集合)

などである．したがって求めるものは「○と×とから重複を許して4個とって作る重複順列」の個数に等しく

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

らしんばん

➡ ${}_nP_r$ では ${}_5P_3$，${}_5P_2$ のように必ず「$n \geqq r$」であったが ${}_n\Pi_r$ ではこの例のように「$n<r$」の場合もある．

➡ 「組合せ(p.21以下)」を知っていれば

${}_nC_r$ ⟵ n 個から r 個とるとり方の個数

を用いて

$${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=1+4+6+4+1=16$$

のように考えることも出来るが，これはあとで詳しく説明する．

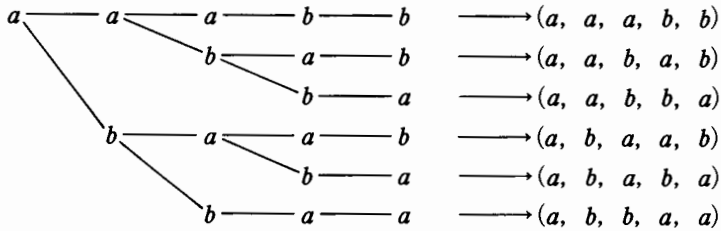
(3) 同じものがあるときの順列

いままでのところでは，n個のすべて異なるものの中からr個をとって並べる順列を考えたが，n個のうちに同じものが入っているとき，たとえば

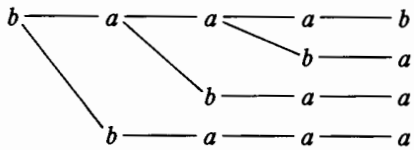
$a,\ a,\ a,\ b,\ b$

の5個をいろいろに並べかえて得られる順列の個数について考えてみよう．

マジメに「樹形図」を描いてみるのも1つの方法である．



これは最初にaが来るときの樹形図だが，最初にbが来るときも同様にして樹形図を描くと



これより求める並べ方の数は

$6+4=10$(通り)

であることがわかる．

しかし，この方法は文字が少ないときはよいが並べる要素が多くなるとメンドウである．そこで次のような考え方をしてみる．

まず上に示した順列の1つ，たとえば$(a,\ a,\ a,\ b,\ b)$に注目する．

もし，この3個のaがすべて異なるものであったとしたらどうなるか．たとえばこの順列のaにa_1，a_2，a_3の区別をつけてみると

$$a_1\quad a_2\quad a_3\quad b\quad b \left\langle \begin{array}{l} a_1\quad a_2\quad a_3\quad b_1\quad b_2 \\ a_1\quad a_2\quad a_3\quad b_2\quad b_1 \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{l}\text{さらに}\ b\ \text{に}\ b_1,\ b_2 \\ \text{の区別をしたとき}\end{array}\right)$$

$a_1\quad a_3\quad a_2\quad b\quad b$ ……

$a_2\quad a_1\quad a_3\quad b\quad b$ ……

$a_2\quad a_3\quad a_1\quad b\quad b$ ……

$a_3\quad a_1\quad a_2\quad b\quad b$ ……

$a_3\quad a_2\quad a_1\quad b\quad b$ ……

のように，$(a,\ a,\ a,\ b,\ b)$の$(a_1,\ a_2,\ a_3)$から異なる順列が「$3!=6$」通り出来，さらに$(b,\ b)$についてもb_1，b_2の区別を与えると「$2!=2$」通りの異なる順列が出来る．

したがってaが3個，bが2個で出来る順列の一つに対して，これらの5個がすべて異なるとすると「$3!\times 2!$」通りの異なる順列が出来る．

このことから，求める順列の個数をxとすると

$$x\times(3!\times 2!)=5!\ (={}_5P_5)$$

←――5個のものすべてを区別するときの順列!!

$$\therefore\quad x=\frac{5!}{3!\,2!}$$

となる．これを一般化すれば次の定理が得られる．

同じものがあるときの順列

n個のもののうち，p個は同じもの，q個は他の同じもの，r個はまた別の同じもの，……であるとき，これらn個を全部用いて作る順列の総数は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots}\quad (p+q+r+\cdots\cdots=n)$$

である．

解　説　この定理で

$$p=q=r=\cdots\cdots=1$$

とすると，すべて異なるときの順列 ${}_nP_n$ になる——よく考えてみればこれはあたりまえのことではある．

また，条件についている

$$p+q+r+\cdots\cdots=n$$

はきわめて重要な条件であって，これはn個のもの全部を並べることを意味している——同じものを含むn個からいきなりr個をとって並べる順列の総数を求める公式はない．

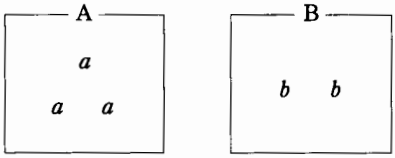
らしんばん

この公式のもう1つの意味を考えてみよう．

先に述べた

$a,\ a,\ a,\ b,\ b$

で作る順列は「組分け」と見ることも出来る．つまり「**5個の空席のうちどの3個をaにするか(残りの2個はb)**」ということであり，もう少し言い方をかえて「組分け」らしい表現をすると，「**5人を2つの部屋A，Bにそれぞれ3人，2人ずつ入れる入れ方の数**」と見ることも出来る．そうするとあとで出て来る「組合せ(p.22)」の公式を用いて



$${}_5C_3=\frac{5!}{3!2!}$$

となり，これはこれとしてキチンとした考え方である．あとで詳しく説明する．

例題 5

combination の文字をすべて用いて作った順列について次の問いに答えよ．

(1)異なる順列の総数を求めよ．

(2)2つあるiのうち，一方が偶数番目に，他方が奇数番目にある順列の数を求めよ．

解　説　(1)用いる文字の個数を調べておくと

$c,\ m,\ b,\ a,\ t$ ←——それぞれ1個
$o,\ i,\ n$ ←——それぞれ2個
合計11個

で，11個のうち，2個，2個，2個が同じものだから

$$\frac{11!}{2!2!2!}=4989600$$

(2)11文字を1列に並べるとき，奇数番目は6個，偶数番目は5個あり，それぞれに1つずつ「i」を入れるからその方法の個数は

$6\times5=30$　←――積の法則(p.7)!!

そこでこの場合の1つのサンプルを実際に書いてみると

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
□	□	□	$\boxed{i}$	□	□	$\boxed{i}$	□	□	□	□

(たとえば，4番目と7番目にiを入れた)

であるから，あとは「i」を入れたものを除いた残り9個の文字の並べ方を考える．この9個には「o」と「n」とがそれぞれ2個ずつ含まれているからこのことに注意して求める順列の総数は

$$\frac{9!}{2!2!}\times30=\mathbf{2721600}$$

らしんばん

考え方はそれほどメンドウではないが数値計算がやっかいである．

$2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24,\ 5!=120$

くらいまでは覚えていられるとしても，あとは地道に計算するしかない．場合によると分母と分子で約分できるような場合もあるので，よくにらんでから「かけざん」を実行するとよい．

(4) 円順列

n個のものを円形に並べた順列を**「円順列」**という．

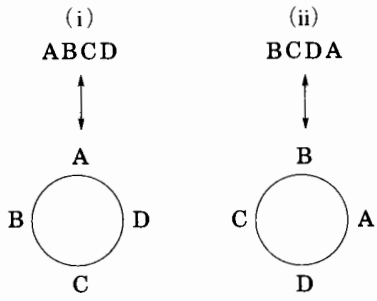
実例で説明しよう．

例題 6

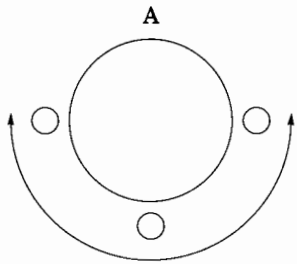
A，B，C，Dの4人を円形のテーブルのまわりに着席させる仕方は何通りあるか．

解　説　1列に並べる順列を便宜上「線順列」と呼ぶことにしよう．

図の(i)，(ii)は上に線順列，下に円順列が描いてある．(ABCD)と(BCDA)とは線順列としては異なる順列であって，その下に描いてある円順列では着席している人の相互位置関係だけを問題とするので(i)と(ii)では「同じ」と考



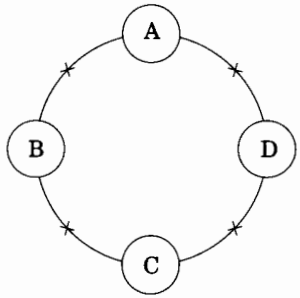
えてよい．さらに(CDAB)という線順列についても(i)(ii)と同じになる．つまり，左(あるいは右)まわりに1つずつ4人をずらした着席の仕方はすべて同じ円順列であることがわかる――2通りの考え方を説明しよう．



(1) 4人のうちの1人(これは任意にとってよい)，たとえばAを1つの席に固定しておいて，残りのB，C，Dを3つの空席に着席させる仕方を考えると，これは線順列で，その数は

$${}_3P_3=3!=(4-1)!=6(\text{通り})$$

であることがわかる．



(2) 図のような1つの円順列を考え，これをA，Bの間で切断して引き延ばすと(BCDA)という線順列が得られる．BとCの間で切断して引き延ばせば線順列(CDAB)が得られる．

このように考えると，1つの円順列から切断箇所の数だけ線順列が得られることになり，求める円順列の個数をxとすると

$$x\times 4={}_4P_4=4! \qquad \therefore\ x=3!$$

となる．

らしんばん

一般的なハナシとしてまとめると次のようになる．

円順列

異なるn個のものを円形に並べる仕方は$(n-1)!$通りである．

円卓のパーティでは「幹事さん(?)」に対して「位置関係」が決まると考えればよい．

少し踏み込んで**「異なるn個のものからr個とって作る円順列の個数」**は本文に述べた切断の考え方を用いると

$${}_nP_r\div r \longleftarrow \text{「}x\times r={}_nP_r\text{」と考えればよい!!}$$

で計算される．

また，円形のテーブルに着席するときとは違って，たとえばネックレスのように**裏返しの出来るもの**，すなわち「右まわり」と「左まわり」の区別が出来ないものの円順列の個数はトウゼンのことながら

$(n-1)!\div 2$

となる(たとえば表から見た「右まわり」は裏から見た「左まわり」と同じ).

たとえば

6面体のサイコロの各面に1から6までの目を記入する.

(1)立方体のときの目の入れ方の個数を求めよ.

(2)直方体のときの目の入れ方の個数を求めよ.

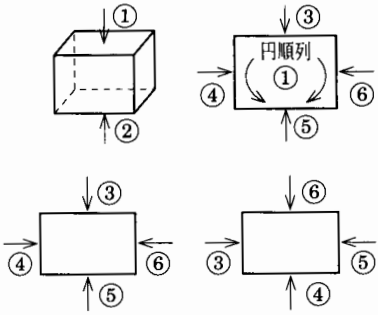
(1)どの面も区別されないから，とりあえず1つの目を入れてから残りの目の入れ方を考える.

(i)　最初の目はどの面に入れてもよい

(ii)　第2の目は「ウラ側」に5通り

(iii)　残りの4つの目で円順列を考える

と考えればよい.



(図は，「最初の目に1」，「第2の目に2」を入れたものである)

$\therefore\ 5\times(4-1)!=5\times 6=\mathbf{30}$(通り)

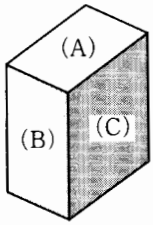
(2)「面の種類が3通りある」ことに注目する.

(i)　最初の目の入れ方が3通り

(ii)　第2の目の入れ方が5通り

(iii)　円順列のとり方が2通り

と考える.



(図は異なる2つの円順列を示したものである――3種類の異なる面(たとえば上，下のように)に対して円順列の出発点が2つある)

$\therefore\ 3\times 5\times(4-1)!\times 2=3\times 5\times 6\times 2=\mathbf{180}$(通り)

3　組合せ

(1)「組合せ」とは何か

順列 ${}_nP_r$ は，異なる n 個のものから r 個をとって並べる並べ方の個数であった――「とり出す順序」，または「並べる順序」が問題になっていることに特に注目してもらいたい．その**「順序」を問題とせず，「r 個の組(部分**

集合)」を作るとき，その「組」を「n 個のものから r 個をとる組合せ」といい，その「組合せの総数」を記号「${}_nC_r$（n Combination（コンビネイション） r などと読む)」で表す．

以下，具体的な例で説明する．

集合$\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$から 3 個とって作る「組合せの数 ${}_5C_3$」を求めてみよう．

たとえば，$\{a,\ b,\ c\}$という組合せが考えられる．これについて順列との関係を考えてみる．$a,\ b,\ c$の並べ方は「${}_3P_3=3!$ 通り」であるので，1つの組合せに対して ${}_3P_3$ 通りの異なる順列が出来る．このことは他の組合せ$\{b,\ c,\ d\}$，$\{a,\ e,\ c\}$……などについても同様であるから，求める組合せの数をxとすると

$$x\times{}_3P_3={}_5P_3$$

$$\therefore\quad x=\frac{{}_5P_3}{{}_3P_3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=10\text{（通り）}\longleftarrow {}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

となる．この考え方を一般化すると次の定理が得られる．

組合せ

異なる n 個のものから r 個とる組合せの総数は

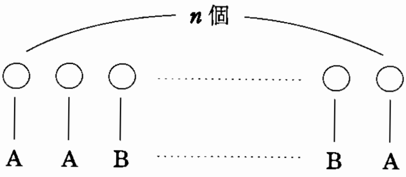
$$ {}_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

で与えられる．

解　説　先に述べた例に習って導いてもよいが，いろいろな考え方が出来る．

たとえば，異なる n 個のものから r 個とると $(n-r)$ 個残るから，n 個のものを r 個と $(n-r)$ 個の 2 組に分ける仕方を考えてもよい．その 2 組をA，Bと名づけることにする．

いま，Aと書いたカードを r 枚，Bと書いたカードを $(n-r)$ 枚用意し，これらを 1 列に並べた n 枚のカードの前に置くことにすると組分けが決まる．



このカードの置き方は r 個のAと $(n-r)$ 個のBの順列であるから「**同じものがあるときの順列**(p.17)」によって

$$ {}_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である．

この公式で「$r=0$」のときの「${}_nC_0$」は意味のないものになるが，それで

も上の公式をそのまま適用すると

$${}_nC_0=\frac{n\,!}{0\,!\,n\,!}=1\longleftarrow(0\,!=1\longrightarrow \text{p.12})$$

となるので「${}_nC_0=1$」と約束しておく――「とらない」こともとり方の1つと考えればよい．

そうすると上の定理は「$0\leqq r\leqq n$」のすべてのrについて用いることが出来て便利である．

らしんばん

➡ ${}_nC_r$を集合の分割の仕方とみると，次の重要な公式が得られる．

${}_nC_r$に関する公式

(1) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$　　(2) ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

(1)は本文の公式①の形からほとんど明らかであるが

n人のうちr人をとる⟷n人のうち$(n-r)$人残す

(「r人」合格すれば「$(n-r)$人」が落ちる⟷キツイかなあ)

と考えればただちに了解される．

(2)については右辺をマジメに計算すれば

$$\begin{aligned}{}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}&=\frac{(n-1)\,!}{r\,!\,(n-1-r)\,!}+\frac{(n-1)\,!}{(r-1)\,!\,(n-r)\,!}\\&=\frac{(n-1)\,!\,(n-r)}{r\,!\,(n-r)\,!}+\frac{(n-1)\,!\,r}{r\,!\,(n-r)\,!}\\&=\frac{(n-1)\,!\,\{(n-r)+r\}}{r\,!\,(n-r)\,!}=\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}={}_nC_r\end{aligned}$$

となるが，この等式にはそれなりの意味がある．その説明をしておこう．

まず

${}_nC_r$：異なるn個のものからr個とるときのとり方の個数

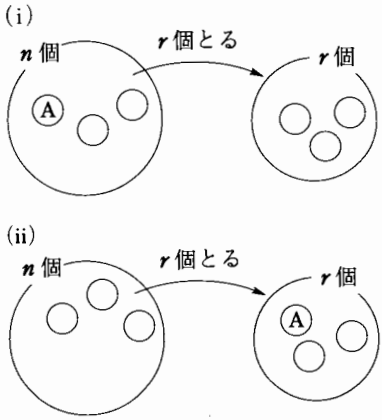
について改めて考えてみる．それには最初のn個のうちの特定な1つ(これをAと名前をつけておく)に注目する．そうするとこのr個のとり方は

(i)　**r個の中にAが含まれない**

(ii)　**r個の中にAが含まれる**

場合があってもちろんこれ以外のとり方はないからこの2つの場合の数をそれぞれ調べて加えればよい．

(i)⟶n個のうちAを除いた$(n-1)$



個からr個をとるのでそのとり方は「${}_{n-1}C_r$」通り.

(ii)⟶Aはとったr個に入っているからとり方の数はn個のうちのAを除いた$(n-1)$個からAをすでに計算にいれてAを除いた$(r-1)$個をとるとり方が「${}_{n-1}C_{r-1}$」通り.

以上(i)(ii)に「和の法則(p. 3)」を適用して

$${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$

となる. 同様に考えて

$${}_nC_r={}_{n-2}C_r+2{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_{r-2}$$ ←——特定な2つに注目!!

$${}_nC_r={}_{n-3}C_r+3{}_{n-3}C_{r-1}+3{}_{n-3}C_{r-2}+{}_{n-3}C_{r-3}$$ ←——特定な3つに注目!!

なども成り立つ——以下同様だが, このときの係数が「パスカルの三角形(『諸橋の数Ⅰ講義』p.52)」, あるいは「2項定理(p.33以下)」と一致するところがおもしろい.

なお, 「${}_nC_r(r=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots n)$」は「とる」か「とらない」かを「$r$個($r=0$, 1, 2……$n$)」について調べると「とり方」の総数は, 「${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n$」で, これを「$n$個の1つ1つ」に注目すると「入る」か「入らない」かのいずれかであるからこれが「2^n通り」, すなわち

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$$

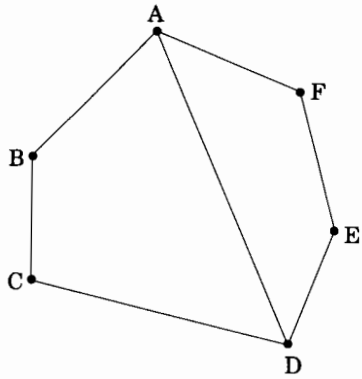
が成り立つ. これはp.35. で「2項定理」の考え方から説明する.

例題 7

(1)凸6角形の対角線は何本あるか.

(2)6人を2人ずつ3つのグループに分ける仕方は何通りあるか.

解 説 (1)6個の頂点からともかく2つ選んで線分を作ると, ${}_6C_2$本となるが, この中にはAB, BCなどの辺の数も含まれているからこれらを除いて求める対角線の本数は



$${}_6C_2-6=15-6=9\text{(本)}$$

あるいは, 頂点Aに注目するとAから出る対角線は3本で, 他の頂点についても同様であるから

$$3\times6=18\text{(本)}$$

しかし, これには, たとえば対角線ADについていえば「Aから」で1本「Dから」で1本と重複して数えているので上で求めた18を2で割っておか

なければならない．したがって

$$18\div 2=9\text{(本)}$$

このように考えると，凸n角形 ($n\geqq 4$) の対角線の数は

$${}_nC_2-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}\text{(本)}$$

(2)まず6人のうち2人を選んで1つのグループを作る．

その選び方は ${}_6C_2$ 通り．残りの4人から2人を選んでグループを作ると残った2人はすでに1つのグループとなるから

$${}_6C_2\times{}_4C_2(\times{}_2C_2)$$

とやるとこれは間違い!!

そのわけは，この6人を{①，②，③，④，⑤，⑥}としておくと，たとえば最初に選んだ2人が{①，②}で，次に選んだ2人が{③，④}であったとするとこの組分けは

{①，②}，{③，④}，{⑤，⑥} ……(i)

である．ところが，たとえば最初に選んだ2人が{③，④}で，次に選んだ2人が{⑤，⑥}，などのとき，この組分けは

{③，④}，{⑤，⑥}，{①，②} ……(ii)

となるのだが，この(i)と(ii)は「組分け」としては同じものである．したがって「${}_6C_2\times{}_4C_2$」にはこの(i)，(ii)のような重複があり，その分を調整しなくてはならない．どれだけ重複しているかというと上の例でいえば{①，②}，{③，④}，{⑤，⑥}の並べかえ(順列)の分だけ重複しているわけで，求める組分けの数をxとすると

$$x\times{}_3P_3={}_6C_2\times{}_4C_2$$

$$\therefore\quad x=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{{}_3P_3}=\frac{15\times 6}{6}=15\text{(通り)}$$

となる．

らしんばん

➡ 本問の(2)についてはもう少し説明しておかなければならない．

問題文を少し変えよう．

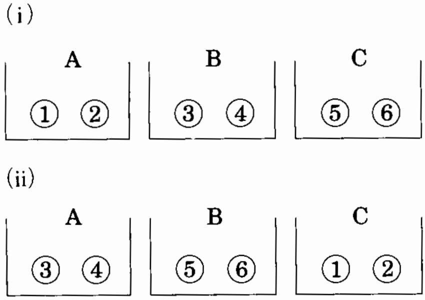
“6人を2人ずつ3部屋A，B，Cに分けて入れる入れ方は何通りか”

に変えるとどうなるか．

この場合はA室に入れる2人の選び方が ${}_6C_2$ 通り，残りの4人から2人をB室に入れる入れ方が ${}_4C_2$ 通り，あとの2人は自動的に決まってしまう(${}_2C_2=1$)からこの場合の数は

$${}_6C_2\times{}_4C_2=15\times 6=90$$

本文で「間違い!!」と指摘したのはこの場合の数を求めてしまったからである——図の(i)と(ii)とは明らかに違うことがらである．



さらに問題文を変えてみる．

“6人を3人，2人，1人に分けて3部屋A，B，Cに入れる入れ方”とするとどうなるか．

この場合は

$_6C_3\times{}_3C_2(\times{}_1C_1)$ …………………………………………………… (＊)

とやりたいがそうはいかない．この場合は3つのグループの人数が違っているために同人数(本問では2人ずつ)の入れかえがおこらず，(＊)の段階ですでにグループ分けが起こってしまうからである．したがって3部屋A，B，Cに入れるにはさらに部屋割りの順列「$_3P_3=3!$」を考えなければならなくなってしまう．正解は

$_6C_3\times{}_3C_2(\times{}_1C_1)\times3!$
└(グループ分け)┘

このように「グループ分け」と「部屋割り」との関係で問題が起こって来るのは「同人数のグループ」が出来るときであることがわかる．

以上の準備をした上でもう1つ問題文を変えた例を考えてみよう．

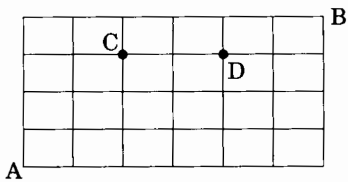
“6人を4人，1人，1人のグループに分けて3室A，B，Cに入れる入れ方”としたらどうなるか．上の2つの改題の応用問題である．

まず，「同人数のグループが2つ」であることに注意して3部屋の部屋割りを考えればよい——次のようになる．

$_6C_4\times{}_2C_1(\times{}_1C_1)\times\dfrac{1}{2!}\times3!$ (←—— 3！は3部屋への分け方)
└(4人，1人，1人のグループ分け)┘

例題 8

右図で，AからBに行く最短路のうち，次の条件を満たすものの個数を求めよ．



(1) Cを通るもの．
(2) Dを通るもの．
(3) CかDかのうち少なくとも一方を通るもの．

解　説　(1)PからQへ行く最短路の数をn(P→Q)で表すことにする．

$n(\mathrm{A}\to\mathrm{C})={}_5C_2=10$

$n(\mathrm{C}\to\mathrm{B})={}_5C_1=5$

$\therefore\quad n(\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B})=10\times5=\mathbf{50}$ ←――積の法則(p. 7)

(2)　$\left.\begin{array}{l} n(\mathrm{A}\to\mathrm{D})={}_7C_3=35 \\ n(\mathrm{D}\to\mathrm{B})={}_3C_1=3 \end{array}\right\}\quad\therefore\quad n(\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B})=35\times3=\mathbf{105}$

(3)CかDを通る最短路の数はn(A→C→B)とn(A→D→B)を加えると，これにはCとDの両方を通るものが重複して数えられているからこの分を除かなければならない．

$n(\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B})=n(\mathrm{A}\to\mathrm{C})\times n(\mathrm{C}\to\mathrm{D})\times n(\mathrm{D}\to\mathrm{B})$

$=10\times1\times3=30$

であるから求めるものは

$n(\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B})+n(\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B})$

$=50+105-30=\mathbf{125}$

らしんばん

➡　(1)の「$n(A\to C)$」で説明する．Aを出発して最短路を通りCに達するには図に示すように「右へ2区画」，「上へ3区画」，合計5区画だけ進まなければならない．本文中の「${}_5C_2$」は「5区画の中のどこで右に進むか」のとり方を表したものである．いま

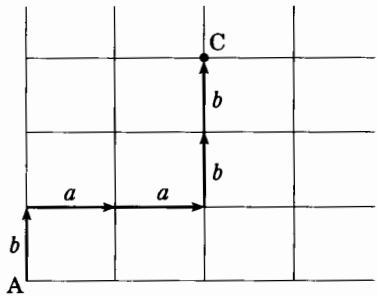
右に進む区画――→a

上に進む区画――→b

と表すことにすると図の矢印の進み方は，「aが2個，bが3個の順列」の1つである

$b\quad a\quad a\quad b\quad b$

を表している．したがって求める場合の数はこのタイプの順列の総数であるから「**同じものがあるときの順列**(p.17)」を用いて



$$\frac{5!}{2!\,3!}=10$$

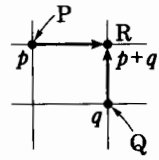
とすることも出来る――基本的には${}_5C_2$と同じことである．

➡　もう1つ，素朴ではあるが時には便利な数え方を紹介しておこう．

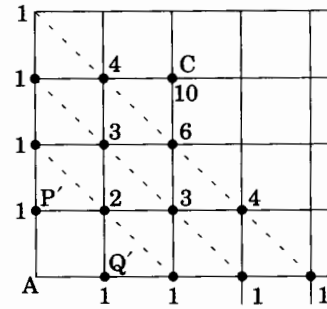
「右と上しか進めない」とき，次ページの〈図1〉でRに行くにはPから行くかQから行くかの2通りしかない．そこでP，Qへの行き方がそれぞれp通り，q通りであったとするとRへの行き方は「$p+q$通り」あることになる．

これと，〈図2〉でP′，Q′へ行く行き方が1通りであることを用いると各点への行き方の個数が簡単に数えられる——図の各点にその数値を記した．

しかも「同時には通らない点(排反である点)」の数値が「**2項定理**(p.33)」になっているのも面白い．



〈図1〉



〈図2〉

本問についてもこの方法でやってみるとよい．

(2) 重複組合せ

n個のものから同じものを繰り返しとってもよいことにしてr個とって作る組合せを「**n個のものからr個とる重複組合せ**」といい，その数を記号「${}_nH_r$(エヌ　エイチ　アールなどと読む)」で表す．説明にはいろいろの仕方があるが，まずはなるべく簡単な実例で数えることからはじめよう．

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

から「重複を許して3個とる」ことにする——起こり得るすべての場合を系統的に並べてみる．この場合，左側の数が右側の数より大きくならないように並べておくことにする．次に**各組を構成している各数に左から順に0，1，2を加えたものを対応させる**．右の表(?)はそのようにして作ったものである．たとえば最初の組で

1 1 1	⟶	1 2 3
1 1 2	⟶	1 2 4
1 1 3	⟶	1 2 5
1 1 4	⟶	1 2 6
1 2 2	⟶	1 3 4
1 2 3	⟶	1 3 5
1 2 4	⟶	1 3 6
1 3 3	⟶	1 4 5
1 3 4	⟶	1 4 6
1 4 4	⟶	1 5 6
2 2 2	⟶	2 3 4
2 2 3	⟶	2 3 5
2 2 4	⟶	2 3 6
2 3 3	⟶	2 4 5
2 3 4	⟶	2 4 6
2 4 4	⟶	2 5 6
3 3 3	⟶	3 4 5
3 3 4	⟶	3 4 6
3 4 4	⟶	3 5 6
4 4 4	⟶	4 5 6

$$111 \longrightarrow 123$$

の「123」は「111」の各数にそれぞれ0，1，2を加えて作ったものである．そうすると「数えなければならない組の数」は「左側にタテに並んだ組の数」であるが，これは「右側にタテに並んだ組の数」と一致しているのはトウゼンで，しかも**「右側にタテに並んだ組」は集合**

$$\boldsymbol{B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$$

から「重複を許さずに3個とる組合せ」に他ならないから「${}_4H_3$」は「${}_6C_3$」に等しいことがわかる．すなわち

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

である．ここで

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3$$

になっていることに注目してこのハナシを一般化すると次の定理が得られる．

重複組合せ

異なるn個のものから重複を許してr個とるとり方の個数${}_nH_r$は

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

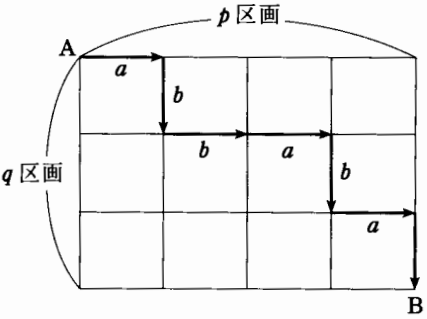
で計算される．

解　説　導入は具体的な実例で数えておいて，いきなりこの公式を書いてしまったが，もう少しスッキリしたアプローチもないことはない．p.27で説明した**「最短路」の数え方**を思い出してもらいたい．

図のように「ヨコにp区画」，「タテにq区画」で構成される場合を考えてみよう．この場合，AからBへ行く最短路の個数は

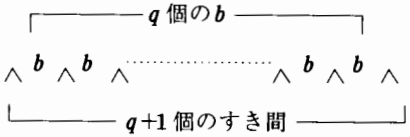
$$n(\mathrm{A}\to\mathrm{B})={}_{p+q}C_q \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．



このことは「右に進むことをa」，「下に進むことをb」と書くことにすると「p個のa」と「q個のb」の並べ方の問題でもある――このことはすでに述べた(p.27)．

そこで，この並べ方に少し工夫をしてみることにする．



まず先にq個のbを並べておいて「bとbとのすき間」にaを入れるこ

とを考える．「すき間」は両端をカンジョウに入れて $(q+1)$ 個であるから並べ方の個数はこの $(q+1)$ 個の「すき間」にp個のaを入れること，すなわち，**$(q+1)$個から重複を許してp個をとるとり方の個数** ${}_{q+1}H_p$ に等しい（${}_{q+1}C_p$ のことではない!!）．

$$\therefore\quad n(A\to B)={}_{q+1}H_p \cdots\cdots ②$$

①，②は等しいから

$${}_{q+1}H_p={}_{p+q}C_p\left(=\frac{(p+q)!}{p!\,q!}\right)\cdots\cdots ③$$

が成り立つ．ここで「$q+1$，p」をそれぞれ「n，r」とおくと

$$\left.\begin{array}{ll} q+1=n & \therefore\ q=n-1 \\ p=r & \end{array}\right\}\quad \therefore\ p+q=n+r-1,\ p=r$$

であるから③は

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

となる．

らしんばん

➡ 本文中にも示したが，「$(q+1)$ 個にp個のaを入れる入れ方」は ${}_{q+1}C_p$ ではない．それは**1つの「すき間」にaを1つずつ入れるわけではないからである．**「すき間」にはaはいくつはいっていてもよいし，1つもはいらなくてもよい．

➡ ${}_nH_r$ では ${}_n\Pi_r$ と同様に「$n\geqq r$」とは限らない．

➡ たとえば3文字 a，b，c から4つとった重複組合せについて「積」を作ると，4次の同次積（次数の同じ積）

$$a^4,\ a^3b,\ a^3c,\ a^2b^2\cdots\cdots$$

などとなるので ${}_3H_4$ は $(a+b+c)^4$ の展開式の項の数であると考えることも出来る．${}_nH_r$ のHは「同次積（*Homogeneous Product*）」の頭文字をとったものである．

例題 9

x，y，z，uについての方程式

$$x+y+z+u=10$$

について次の問いに答えよ．

（1）文字がすべて0または正の整数のとき，解は何通りあるか．

（2）文字をすべて正の整数とするときはどうか．

解　説　（1）X，Y，Z，Uという4つの箱に10個の区別されない球を入れる方法の数と考えてもよいし，また同じことだが，4種類のものから重複

を許して10個とるとり方の個数と考えてもよい．

要するに

$$_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\mathbf{286}\ ({}_nC_r={}_nC_{n-r})$$

(2)(1)で求めたのはx，y，z，uが「0または正の整数」の場合であった．(2)は「1以上の整数」の場合である．

球を入れるハナシでいえば，最初に1個ずつ入れておけばよいのである．

$$x-1=x',\ y-1=y',\ z-1=z',\ u-1=u'$$

とおくと

$$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1,\ u=u'+1$$

これを与えられた方程式に代入すると

$$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(u'+1)=10$$

$$\therefore\ x'+y'+z'+u'=6 \longleftarrow x',\ y',\ z',\ u' \text{は正または}0$$

となり，条件は(1)の場合と同様になる．ゆえに求める個数は

$$_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\mathbf{84}$$

らしんばん

「重複組合せ」を扱う上でぜひとも紹介しておきたい「おいしいハナシ」がある．たとえば本問(1)で説明しよう．

要するに(1)は「りんご」，「なし」，「かき」，「みかん」をとりまぜて10個にして「おみやげ」にしたい((2)ではこの4種のうち「ない」ものがないように)ということである．

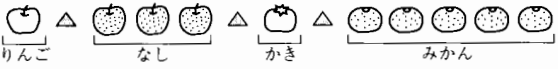
最初に10個の○印を描いておく．

○○○○○○○○○○

そしてこの間に3個の「仕切り(△印)」を入れる．

○△○○○△○△○○○○○

要するに全体で(仕切りの場所も入れて)13個になった．ただし△印は両端にあっても「△印と△印との間」に○印がなくてもかまわない．そして左(あるいは右でもよい)から順に「りんご」，「なし」，「かき」，「みかん」としよう．上の図を「らしく」見えるように描き直しておこう．



……　(＊)

ただし，次のような図は「かき」がないときの図としておく．

……　(＊＊)

結局「13個の場所」から「仕切りを入れる場所3個」のとり方の問題となる．すなわち求める「負でない整数解」の個数は

$$_{13}C_3=\frac{13\,!}{3\,!\,10\,!}=286$$

として求められる．

上の(＊)，(＊＊)は

(＊)：$x=1$，$y=3$，$z=1$，$u=5$

(＊＊)：$x=2$，$y=3$，$z=0$，$u=5$

の場合である．

たとえば

候補者2人，選挙人が6人の選挙で，無記名投票で1人1票を投票する．票のわかれ方は何通りあるか．

「無記名投票」であるから「誰が誰に投票したか」はわからない．ただ2人の候補者A，Bがそれぞれx票，y票の票を獲得したとすると

$x+y=6$(x，yは負でない整数)←――票数の和しかわからない!!

で，この整数解の個数を調べることになる．すなわち**「異なる2個(候補者の数)から重複を許して6個(選挙人の数)とる重複組合せの数」**を求めて

$$_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7\text{(通り)}$$

が求めるものである．

ちなみに**「記名投票」**の場合は6人の選挙人の1人1人が2人の候補者A，Bのいずれかに投票するから票のわかれ方は

$$2^6=64\text{(通り)}$$

である．このように結果が違う理由は，たとえば候補者A，Bの獲得した票数が

A：2票，B：4票

であるとしても，選挙人「①，②，③，④，⑤，⑥」の投票で

$$\begin{cases}\text{A：①，②}\\ \text{B：③，④，⑤，⑥}\end{cases}\qquad\begin{cases}\text{A：①，③}\\ \text{B：②，④，⑤，⑥}\end{cases}$$

などが「記名投票」ではシッカリ「違うことがら」として区別されるのに，「無記名投票」では区別されないからである．

4　2項定理

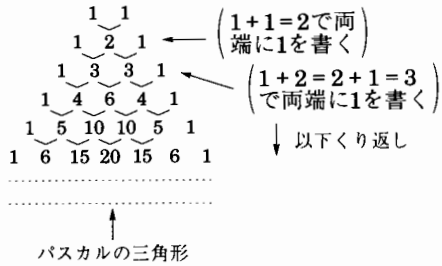
よく知られた展開公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

などを一般化したもの，$(a+b)^n$ の展開式はどのように表されるだろうか．

この係数がどのようにして得られるかについては「パスカルの三角形（『諸橋の数 I 講義』p.52）」で少しだけ説明した．



2項定理

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\ \boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^k$$

である．

解　説　記号の用い方

$$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^k={}_nC_0\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{b}^0+{}_nC_1\boldsymbol{a}^{n-1}\boldsymbol{b}^1+\cdots\cdots+{}_nC_k\boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^k+\cdots\cdots+{}_nC_n\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^n$$

については説明するまでもあるまい．

「数学的帰納法（『諸橋の基礎解析講義』p.132以下を参照）」で証明する．

(i)　「$n=1$」のとき，両辺はともに $(a+b)$ となり明らかに成り立つ．

(ii)　「$n=m$」のとき成り立つと仮定すると

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}{}_mC_ka^{m-k}b^k$$

これを用いて「$n=m+1$」のときの成立を示す．

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)^m(a+b)=\left(\sum_{k=0}^{m}{}_mC_ka^{m-k}b^k\right)(a+b)$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{m}{}_mC_ka^{m-k}b^k\right)a+\left(\sum_{k=0}^{m}{}_mC_ka^{m-k}b^k\right)b$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{m}{}_mC_ka^{m-k+1}b^k}_{A}+\underbrace{\sum_{k=0}^{m}{}_mC_ka^{m-k}b^{k+1}}_{B}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$={}_mC_0a^{m+1}b^0+\underbrace{\sum_{k=1}^{m}{}_mC_k\boldsymbol{a}^{m-k+1}\boldsymbol{b}^k}_{A'}+\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}{}_mC_k\boldsymbol{a}^{m-k}\boldsymbol{b}^{k+1}}_{B'}+{}_mC_ma^0b^{m+1}\cdots\cdots②$$

←——①のAで最初の項を，Bで最後の項をΣから切り離す!!

ここで②のB'は

$$\sum_{k=0}^{m-1}{}_mC_k\boldsymbol{a}^{m-k}\boldsymbol{b}^{k+1}=\sum_{k=1}^{m}{}_mC_{k-1}\boldsymbol{a}^{m-k+1}\boldsymbol{b}^k\longleftarrow\left(\begin{array}{l}k\text{の値をそれぞれ代入}\\\text{して等号を確認せよ!!}\end{array}\right)\cdots③$$

また

$$ {}_mC_0=1={}_{m+1}C_0,\quad {}_mC_m=1={}_{m+1}C_{m+1} $$

であるから，これらを②に入れるとこの展開式は

$$ {}_{m+1}C_0a^{m+1}b^0+\sum_{k=1}^{m}({}_mC_k\underline{a^{m-k+1}b^k}+{}_mC_{k-1}\underline{a^{m-k+1}b^k})+{}_{m+1}C_{m+1}a^0b^{m+1} $$

$$ ={}_{m+1}C_0a^{m+1}b^0+\sum_{k=1}^{m}({}_mC_k+{}_mC_{k-1})a^{(m+1)-k}b^k+{}_{m+1}C_{m+1}a^0b^{m+1} $$

また，p.23にも示したが一般に

$$ {}_mC_k+{}_mC_{k-1}={}_{m+1}C_k \quad\cdots\cdots④ $$

が成り立つことを用いると

$$ (a+b)^{m+1}={}_{m+1}C_0a^{m+1}b^0+\sum_{k=1}^{m}{}_{m+1}C_ka^{(m+1)-k}b^k+{}_{m+1}C_{m+1}a^0b^{m+1} $$

$$ =\sum_{k=0}^{m+1}{}_{m+1}C_ka^{(m+1)-k}b^k $$

ゆえに「$n=m+1$」のときも成り立つ．

(i)，(ii)より「**2項定理**」が証明された．

らしんばん

これが一応キチンとした証明ではあるが，なかなかむずかしい．ポイントをまとめてみると

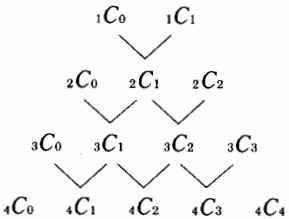
(i) **①のA，Bから最初の項と最後の項を切り離して②の形を作る**

(ii) **②のB'を③のように変形してA'とB'をまとめる**

(iii) **④を用いて「2項定理」の「$n=m+1$」のときの形を作る**

となる．

ここであらためて「**パスカルの三角形**」をながめてみよう．



「**上の段の係数を加えながら次の段の係数を次々に求めていく方法**」は本文④に述べた公式

$$ {}_mC_k+{}_mC_{k-1}={}_{m+1}C_k $$

そのものではないか．

実際に展開するときはこの表で係数を求める方が実用的である．

この定理は次のように考える方がわかり易い．

まず，「式の展開」について考えてみよう．たとえば

$$ (a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d $$

$$ \llcorner A\lrcorner\ \llcorner B\lrcorner\ =ac+bc+ad+bd $$

で「展開して得られる項」は「**Aのaかbかのどちらか**」と「**Bのcかdかのどちら**

か」をかけたものから得られるすべてのものの総和となっている．

まったく同様に考えると

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots\cdots(a+b)}_{n\text{個}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の右辺を展開した各項は「**n個のカッコ**」のそれぞれから「**aかbか**」をとり，**n個についてかけあわせて得られる**ことがわかる――そのような項をすべて加えたものが $(a+b)^n$ である．

たとえば「$a^{n-k}b^k$」は「$(*)$のk個のカッコ」からbをとり，残りの「$(n-k)$個のカッコ」からaをとってかけ合せたものである．そして，この項は「**どのk個のカッコからbをとるか**」が「${}_nC_k$ **通り**」あり，これを係数とした「${}_nC_ka^{n-k}b^k$」を「$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$」として加えれば $(a+b)^n$ の展開式が得られることになる．すなわち次の公式が得られる．

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ka^{n-k}b^k$$

➡ **$(a+b)^n$ は「a，bに関して対称式(aとbをとりかえてもかわらない)」**であるから「**2項定理**」を

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ka^kb^{n-k}\longleftarrow\left(\begin{array}{l}(b+a)^n\text{ として上の}\\\text{公式を用いてみよ!!}\end{array}\right)$$

$$={}_nC_0a^0b^n+{}_nC_1ab^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_ka^kb^{n-k}+\cdots\cdots+{}_nC_na^nb^0$$

のように書いてもかまわない――自分で「主にどちらを使うか」を決めておくとよい．実際は

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_kx^k+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n\cdots\cdots(**)$$

のように「**${}_nC_k$ のk**」と「**x^kのk**」**をあわせておくとスッキリとして覚え易い．

ついでにこの式で「$x=1$」とすれば

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_k+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

となるが，この式についてはp.24で説明した．

また，「$x=-1$」とおくと

$$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n$$

$$\therefore\ {}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots$$

なども簡単に確かめることが出来る．

たとえば

次の式を簡単にせよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_nC_k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2$

(1)――→与えられた式で

$$k\cdot{}_nC_k=k\cdot\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}=n\cdot{}_{n-1}C_{k-1}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_nC_k=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}C_{k-1}$$

$$=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})=n\cdot 2^{n-1}\longleftarrow\left(\begin{array}{l}(***)\text{で}n\text{を}\\ n-1\text{とおいた!!}\end{array}\right)$$

となる．しかし(**)を利用するともっと簡単にいく．

すなわち(**)の両辺をxで微分して「$x=1$」とおく．(**)の微分は

$$n(1+x)^{n-1}={}_nC_1+2\,{}_nC_2x+3\,{}_nC_3x^2+\cdots\cdots+k\,{}_nC_kx^{k-1}+\cdots\cdots+n\,{}_nC_nx^{n-1}$$

$$\therefore\quad n\cdot 2^{n-1}={}_nC_1+2\,{}_nC_2+3\,{}_nC_3+\cdots\cdots+k\,{}_nC_k+\cdots\cdots+n\,{}_nC_n$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_nC_k=n\cdot 2^{n-1}$$

(2)$\longrightarrow$(**)を利用する．

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$$

$$=({}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)({}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)$$

両辺の「x^nの係数」に注目すると

$${}_{2n}C_n={}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}\cdot{}_nC_1+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$$

ここで「${}_nC_k={}_nC_{n-k}$」であるから右辺は次のように変形される．すなわち

$$({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots\cdots+({}_nC_n)^2=\sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2={}_{2n}C_n$$

例題 10

(1) $\left(2x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式における定数項は□である．

(2) $\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}-4\right)^5$ の展開式における x^4 の係数は□である．

解　説　(1)展開式の一般項は「2項定理」をそのまま用いて

$${}_{10}C_k(2x^4)^{10-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k={}_{10}C_k\cdot 2^{10-k}\cdot(-1)^k\cdot x^{40-5k}$$

定数項について考えているのだから

$$40-5k=0\qquad\therefore\quad k=8$$

ゆえに求める定数項は

$${}_{10}C_8\cdot 2^{10-8}\cdot(-1)^8=\mathbf{180}$$

(2)「分数式でない部分 (x^2-4)」を1まとめにして「2項定理」を用いる．

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}-4\right)^5=\left\{(x^2-4)+\frac{4}{x^2}\right\}^5$$

$$=(x^2-4)^5+{}_5C_1\cdot(x^2-4)^4\cdot\frac{4}{x^2}+{}_5C_2(x^2-4)^3\cdot\left(\frac{4}{x^2}\right)^2+{}_5C_3(x^2-4)^2\cdot\left(\frac{4}{x^2}\right)^3+\cdots\cdots$$

「x^4」が出て来るのは「はじめの2項から」だけであるからまとめると

$${}_5C_3(-4)^3+{}_5C_1\cdot{}_4C_1(-4)\cdot4=-960$$

らしんばん

「2項定理」を用いて「3項の展開公式」を導くことが出来る．たとえば $(a+b+c)^n$ を展開するときの「$a^pb^qc^r(p+q+r=n,\ p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0)$の係数」を調べるには次のようにする．

$$(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n=\sum_{p=0}^{n}{}_nC_pa^p(b+c)^{n-p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

で，さらに $(b+c)^{n-p}$ は

$$(b+c)^{n-p}=\sum_{q=0}^{n-p}{}_{n-p}C_qb^qc^{n-p-q}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

であるから「$a^pb^qc^r(=a^pb^qc^{n-p-q})$ の係数」は$(**)$を$(*)$に入れた形から

$${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q=\frac{n!}{p!\,\cancel{(n-p)!}}\times\frac{\cancel{(n-p)!}}{q!\,(n-p-q)!}=\frac{n!}{p!\,q!\,r!}\cdots\cdots(***)$$

（ただし「$r=n-p-q$」とする）

となる．もっとも「展開」の考え方の基本は

$$(a+b+c)^n=\underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\cdots\cdots(a+b+c)}_{n\text{個}}$$

の右辺の「n個のカッコ」のうち「p 個はa」，「q 個はb」，「r 個はc」をとってかけあわせ，それらをすべて加えるわけであるから「$a^pb^qc^r$ の係数」が$(***)$で求められることは「あたりまえ」のことである．

このハナシは「**多項定理**」として次のように一般化される．

多項定理

$(a+b+c+\cdots\cdots)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots}a^pb^qc^r\cdots\cdots\quad\left(\begin{array}{l}p+q+r+\cdots\cdots=n,\ \text{ただし}\\ p,\ q,\ r,\ \cdots\cdots\text{は負でない整数}\end{array}\right)$$

で与えられる．

これを用いると本問(2)は「3項の場合」で

$$\frac{5!}{p!\,q!\,r!}(x^2)^p\left(\frac{4}{x^2}\right)^q(-4)^r=\frac{5!}{p!\,q!\,r!}\cdot4^q\cdot(-4)^rx^{2p-2q}$$

「x^4 の係数」を求めるには

$$\begin{cases}2p-2q=4\longrightarrow p=q+2\\ p+q+r=5\end{cases}$$

を満たす「負でない整数解」を求めることになる．「第1式」を「第2式」に入

れると

$$(q+2)+q+r=5 \qquad \therefore\ 2q+r=3 \qquad \therefore\ r=3-2q\geqq 0$$

これよりqの値としてまず「$q=0,\ 1$」が得られ，これに対して$p,\ r$を求めると

$$(p,\ q,\ r)=(2,\ 0,\ 3),\ (3,\ 1,\ 1)$$

となり，これらに対して「係数」は

$$\frac{5\,!}{2\,!\,0\,!\,3\,!}\cdot 4^0\cdot(-4)^3+\frac{5\,!}{3\,!\,1\,!\,1\,!}\cdot 4^1\cdot(-4)^1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (****)$$

$$=-640-320=-960$$

で，本文に述べた結果と一致する．しかしこの方法は「不定方程式(負でない整数解を求める)」を解かねばならず，(****)の計算もさほどラクになるわけでもないので，本文のように「**2項定理**」をうまく利用できればその方がよい．

第2節
確　率

「確率とは何か」を一言でいえば「確からしさの数量化」ということである.

しかし,「確からしさの数量化」といってもいかにも曖昧でとらえどころがないように思われる. そこでわれわれとしては**「出発点」としての立場**をハッキリしておきたい. それは, たとえば「火星に生物のいる確率」とか「新人の某歌手がスターになる確率」とか, その手の問題を考えるわけではない.「コインを投げる」とか「サイコロを振る」とか, あるいは「袋から球をとり出す」など,**「何度でも繰り返すことの出来ることがら」について「ある現象が起こる確からしさ」を数量化しようという試み**である.

1　確率

(1) 試行と事象

一定の条件のもとで繰り返し行うことの出来る観測や実験を**「試行(しこう)」**といい, 試行の結果として起こることがらを**「事象(じしょう)」**という.

たとえば, サイコロを投げたとき(これは1つの試行),「1の目が出る」, あるいは「偶数の目が出る」などは事象である. ところで,「1の目が出る」, という事象はこれ以上単純な事象に分解することは出来ないが,「偶数の目が出る」という事象は「2の目が出る」,「4の目が出る」,「6の目が出る」という3つの事象に分解することが出来る. それ以上分解することの出来ない事象を**「根元(こんげん)事象」**という.

「確率」を考える場合, 調べる対象をハッキリと限定しておく必要がある. そのためには「集合」の考え方を用いると便利である. そこで, ある試行の

結果としてあらわれるすべての根元事象を要素とする集合を考え，これをその試行における「**標本空間**」という．また，根元事象のことを「標本空間の要素」という意味で「標本点」などと呼ぶときもある．

このように見て来ると，先に説明した「**事象**」は「**標本空間**」の**部分集合**であると言うことも出来る．

注❶　本文に用いられている「**標本空間**(*Sample Space*)」の「空間」という言葉は高校(日常)ではふつうの場合「立体的な意味」でしか使われないので多少の異和感があるかもしれない．しかし数学では「立体的な広がりをもつ概念」だけでなく，「**ある構造をもった集合**」ごとに「……**空間**」という呼び方はよく用いられる．たとえば「ベクトル空間」などもそうである——数学用語として了解しておいてもらいたい．

注❷　同じ試行においても，違った標本空間を考えることもある．また，何を根元事象とするかも問題により異なり一定ではない．たとえば「サイコロを振る」試行において

A：偶数の目が出る　　B：奇数の目が出る

に関心があるときの標本空間Sは

$$S=\{A,\ B\}$$

としてA，Bを根元事象と考えてもよく，サイコロの目の1つ1つの出方に関心があるときの標本空間Sとしては

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

をとるのが便利である——この場合，A，Bは当然のことながら根元事象ではない．

注❸　われわれが考える標本空間は有限集合である．

たとえば，「線分AB上に点Pをとる」という試行を考えると，その標本空間は無限集合になる．このような確率を扱う理論はもちろんあるが，それは高校数学の範囲外である．

(2) いろいろな事象

確率の議論に入る前に，いろいろな事象の呼び方とその意味について簡単に説明しておく．

(i) 全事象

サイコロを振るときに出る目の標本空間は

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

であり，S自身もSの部分集合で，「1から6までのどれかの目が出る」という事象である．このように「**必ず起こる**」事象を「**全事象**」という．

(ii) 空事象

たとえば，1つのサイコロを振るとき，「5の倍数でかつ偶数であるような目」は決して出ることはない．これをSの部分集合として示そうとすれば

ϕ，または{　　}(空事象)

となる．このように**「決して起こらない」事象を「空(くう)事象」**という．

(iii) 余事象

「事象Aが起こらない」という事象を「Aの余事象」といい，「$\overline{A}$(またはA^c)」で表す．

たとえば，「偶数の目が出る」という事象は

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$

であるが，これに対して「偶数の目が出ない事象」は「$\overline{A}$(またはA^c)」で表され

$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5\}$

である．

(iv) 和事象

「2つの事象A，Bの少なくとも一方が起こる」という事象を「AとBとの和事象」といい，「$A\cup B$」で表す．

(v) 積事象

「2つの事象A，Bの両方が同時に起こる」という事象を「AとBとの積事象」といい，「$A\cap B$」で表す．

(vi) 排反事象

「$A\cap B=\phi$」，すなわち，「A，Bの一方が起これば他方は起こらない」というとき，「AとBとは互いに排反である」という．

(3) 確率とは何か

「確率」の定義

1つの試行における標本空間Sで，**その要素の1つ1つが起こることが「同様に確からしい」**とき，事象Aの起こる確率$P(A)$は

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

である．ただし，$n(A)$は集合Aの要素の数を表すものとする．

解　説　このように定義された確率を**「数学的確率」**という．

この定義を了解する上で重要なポイントは**「同様に確からしい」**というこ

とで，確率を考える場合は，標本空間は「起こる可能性が同程度である」，「起こることが同程度に期待できる」ような集合でなければならない．

たとえば，サイコロを振ったとき，「1～6の目のうちどの目が出るか」の期待度は，実際には1つ1つのサイコロについて違うだろう．しかし，われわれは長い間の経験によって，サイコロが正しく作られているものであるほど「目の出方の期待度の違いが少なくなって来る」ということを知っている．「まったく正しいサイコロ」などというものは実在しないのだが，それを理想化し，「1～6の目のどれが出るかが同様に確からしいサイコロ」というモデルを考えるのである．

1枚のコインを投げるとき「表(H)が出るか裏(T)が出るか」についても同じで，それが「同様に確からしい」と見なして確率を考えれば

$$P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$$

である．

2枚の硬貨ではどうなるか．その標本空間の1つとして

$$S_1=\{(2\text{つとも}H),\ (H\text{と}T\text{が1個ずつ}),\ (2\text{つとも}T)\}$$

がある．しかし，この場合は**3つの標本点が「同様に確からしい」とはいえない**．2枚の硬貨をX，xとして，それぞれが表，裏となることをH，T，h，tで表すと

$$S_2=\{(H,\ h),\ (H,\ t),\ (T,\ h),\ (T,\ t)\}$$

（S_1の「HとTが1個ずつ」はこれのこと!!）

となる．この場合は**4つの標本点は「同様に確からしい」と見ることが出来る**．そこで，「表と裏が1個ずつ」という事象Aを考えるとS_2では

$$A=\{(H,\ t),\ (T,\ h)\}$$

であるから

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S_2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

が正しい．これをS_1から

$$P(A)=\frac{1}{3}$$

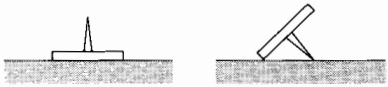
などとしてはならない．

らしんばん

- 「$P(A)$」の「P」は「確率(*Probability*)」の頭文字をとったものである．
- 本文に述べた「確率の定義」は**「同様に確からしい」事象が構成される標**

本空間を想定した上での「数学的確率」といわれるものである．しかし，これだけではその適用される範囲が制限される．

そこで，たとえば「画びょう」を1個投げる試行を考えてみよう．考えられる「事象」としては右図の(A)，(B)のような2つの場合が考えられるだろうが，これらを「同様に確からしい」と見ることは出来ない．そこでこのような場合は上に述べた「定義」とは違う立場から「確率」を定義しなければならなくなる．



(A)　(B)

たとえば，この試行を数多く，1万回，10万回，あるいは100万回……も繰り返してみる．そして実験の回数Nに対して(A)の状態の起こった回数rを考える．このとき$\frac{r}{N}$を「**相対度数**」といい，Nを大きくしていくとこの「相対度数」はある一定の値pに安定していく傾向がある．

もう1つ例をあげてみよう．たとえば「現在20才のある人が，あと30年間生きる可能性」を考える．この場合，「人の生死」を繰り返し実験するわけにはいかない．そういうときは「20才のある人」ではなくて，「20才の日本人」というふうにハナシを抽象化し，その何パーセントが30年間生きているかについて調べる．非常に多くの人々について，さらに数年間，あるいはもっと長い期間に渡って調べていくとそのパーセンテイジがやはりある一定の値に近づいていく傾向が出て来る．

このことは「資料の数」を大きくすることが「試行の繰り返し」とほぼ同じであることを意味している．このような考え方に基づいて「相対度数」の接近していく一定値pを「その事象の起こる確率」と定義する．このような確率を「数学的確率」に対して「**統計的確率**」という．しかし，Nを大きくしていくとき，「相対度数：$\frac{r}{N}$」がいつでも「一定値p」に近づいていく保証があるかということになると難しい問題になる．実はこのことについては「**大数の法則**(p.121で述べる)」という定理があって，これによると，同じ条件のもとでは$\frac{r}{N}$のNを大きくしていくと「**つねに一定値pに近づくということは言えないが，近づかないことがごく稀である**」ということが説明される．そこで，そのような(近づかないような)例外的な場合は無視して試行回数を増していけば「$\frac{r}{N}$は一定値pに近づくと考えてさしつかえない」とするのである．

しかし，ここではそのようなメンドウな立場の確率については「あとまわし」にしておいて，「**同様に確からしい根元事象を考え方の基本におく数学的確率(ラプラス流の確率ともいわれる)**」を「**まず学ぶ**」ことにする．このような立場での確率にはおのずと限界があり，しかもごく限られた範囲でしか適用され

ないが，それだからこそ「よりシンプルな形で」確率の概念を了解することが出来るはずである．われわれとしては「このような展開の仕方」の意義を認め，採用し，そしてもっと広い視野での確率を考えていくための出発点としてこの章を学ぶことにする．

「確率」の理論が数学の1つの分野として発展したのは「パスカル(1623～1662)フランス」と「フェルマー(1601～1665)フランス」以後のことであるが，その出発点は「サイコロ投げ」や「カード遊び」などの「賭けごと」からのようである．賭博師から数学者に宛(あ)てた「大まじめ(?)」な手紙が残っていたりしてなかなか愉快なハナシではある．

例題 11

大小2つのサイコロを投げるとき，次の確率を求めよ．

(1)目の和が7になる確率

(2)目の和が7以上になる確率

解　説　大きいサイコロの目をx，小さいサイコロの目をyとすると，標本空間Sは$(x,\ y)$の「順序対(ペア)」で作られる．

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

これら36個の要素は**「同様に確からしい」**と考えられる．

(1)「和が7」となる事象Aは

$$A=\{(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)\}$$

であるから求める確率は

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(2)「和が7以上」となる標本点は「集合Sの右上から左下の対角線上，またはその下側の点」で，その個数を調べて，求める確率は

$$\frac{6+5+4+3+2+1}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

らしんばん

本文では正直に「標本点」を全部書きあげたが，大きいサイコロを振った

ときの標本空間 S_1 は

$$S_1=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

で，小さいサイコロを振ったときの標本空間 S_2 もこれと同様だから，大小2個のサイコロを振ったときの標本点の個数は「**直積集合**(p. 7)」の個数を調べて

$$\boldsymbol{n(S)=n(S_1\times S_2)}$$
$$\boldsymbol{=n(S_1)\times n(S_2)}=6\times6=36$$

としてもよい．

➡ 最初から「2つのサイコロの目の和」を表す表を作ってみる．

そうすると「(1)，(2)の場合の数」は一目瞭然である．

あるいは，座標平面上に

$$1\leqq x\leqq6,\ 1\leqq y\leqq6$$

の領域をとり

(1)では　$x+y=7$

(2)では　$x+y\geqq7$

を満たす「格子点の個数」を数えてもよい．

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

要するに「同様に確からしい」ことさえわかれば標本点の数え方はいろいろと工夫することが出来るので，数え易い方法を考えればよい．

2　確率の加法定理

まず，「確率の基本的な性質」を調べておく．

標本点のどれが起こることも「同様に確からしい」標本空間Sがあって，その部分集合をA，Bとするとき

$$n(S)=N,\ n(A)=a,\ n(B)=b$$

とすると「確率の定義」より

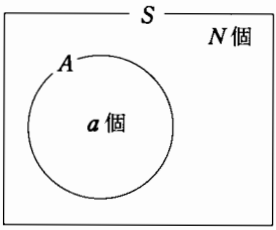
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{a}{N}$$

である．しかも「$A\subseteqq S$」であるから

$$0\leqq a\leqq N$$
$$\therefore\ \ \boldsymbol{0\leqq P(A)\leqq1}$$

で，特に

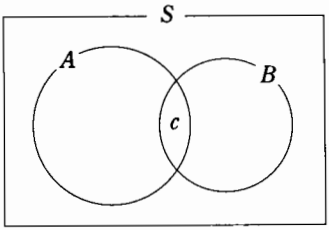
$$P(S)=\frac{N}{N}=1,\ P(\phi)=\frac{0}{N}=0$$



である．

また，「$n(A\cap B)=c$」とすると「**和の法則**(p. 3)」から

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=a+b-c$$



が成り立つから，両辺を「$n(S)=N$」で割ると

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=\frac{a}{N}+\frac{b}{N}-\frac{c}{N}}$$
$$\boldsymbol{=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

特に「$A\cap B=\phi$」，すなわちA，Bが排反のときは

$$P(A\cap B)=0 \qquad \therefore\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

となる．以上まとめておく．

確率の基本的な性質

（1） $\boldsymbol{0\leqq P(A)\leqq 1}$

（2） $\boldsymbol{P(S)=1,\ P(\phi)=0}$

（3） $\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ ←――**加法定理**

特に「$A\cap B=\phi$」のときは

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

解　説　この(3)を「**確率の加法定理**」という．

これは3つ以上の事象に拡張することが出来るが，3つの場合では

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-\{P(B\cap C)+P(C\cap A)+P(A\cap B)\}+P(A\cap B\cap C)$$

となる――これも「和の法則」で説明したことがらの応用である(p. 5)．

らしんばん

➡ この3つの「基本的な性質」からいろいろな定理が導かれる．

余事象の定理

$P(\overline{A})=1-P(A)$ ←――これを**余事象の定理**という．

これは大変よく用いられる定理である．導いておこう．

「**基本的な性質**(3)」では「$A\cap B=\phi$」のとき

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

であった．このBのかわりに$\overline{A}$とおくと「$A\cap\overline{A}=\phi$」が成り立ち，したがって

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

ところで「$A\cup\overline{A}$」は全体集合Sになるので

$$P(A\cup\overline{A})=P(S)=1$$

である．これを(＊)に入れると

$$1=P(A)+P(\overline{A}) \qquad \therefore\ P(\overline{A})=1-P(A)$$

となる．このように「確率の演算」は「集合の演算」にうつして考えることが出来る．

もう1つあげておく．

ド・モルガンの法則

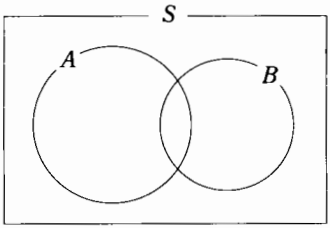
$$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B}),\ P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$$

集合の演算に関する「**ド・モルガンの法則**(p. 6)」

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

に対応するものである．ベン図を描いて確かめれば，この定理の成立はほとんど明らかとしてよいだろう．



例題 12

赤球が5個，白球が4個はいった袋から同時に3個の球をとり出すとき，次の確率を求めよ．

(1)とり出した3球が同じ色である確率．

(2)少なくとも1球が白球である確率．

解　説　**赤球には1，2，3，4，5，白球には6，7，8，9の番号をつけて球を区別しておくと，**「標本空間」は1から9までの9個の球から3個とる「組合せ」で，その数は ${}_9C_3$ である．

(1) 3球が同色であるから，「3球とも赤球(これを事象Aとする)」か，または「3球とも白球(これを事象Bとする)」で，求めるものは「$P(A\cup B)$」である．この場合，AとBとは排反だから

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

ところで，赤球3球の「とり方」は「1～5から3個とる組合せ」だから，その数は ${}_5C_3$，同様に白球3個の「とり方」は ${}_4C_3$ である．

$$\therefore\ P(A\cup B)=\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}+\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}\left(=\frac{{}_5C_2}{{}_9C_3}+\frac{{}_4C_1}{{}_9C_3}\right)=\frac{1}{6}$$

(2)**「少なくとも1球が白球」という事象Cを直接調べるのはメンドウだからその「余事象」を考える．**事象Cの余事象 $\overline{C}$ は「3球すべてが赤球」と

いうことであるから，これは(1)の事象Aのことである．

$$\therefore\quad P(C)=1-P(\overline{C})$$
$$=1-P(A)=1-\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{37}{42}$$

らしんばん

(2)の「少なくとも……」という事象に「余事象」で処理する方法はなかなか便利のよい方法である．ぜひマスターしてもらいたい．

マジメにやると次のようになる．3球のうち白球に注目すると

白球3個，白球2個，白球1個

の場合を考えればよいから

$$\frac{{}_4C_3\times{}_5C_0}{{}_9C_3}+\frac{{}_4C_2\times{}_5C_1}{{}_9C_3}+\frac{{}_4C_1\times{}_5C_2}{{}_9C_3}=\frac{4+30+40}{84}=\frac{37}{42}$$

となる――各項の分子の${}_5C_0$，${}_5C_1$，${}_5C_2$は「それぞれの場合の赤球のとり方」の場合の数である．これをカケルのを忘れてはならない．

例題 13

$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(A\cap B)=0.2$のとき，次の事象の確率を求めよ．

(1)$A\cup B$　(2)$\overline{A}\cap B$　(3)$\overline{A}\cup\overline{B}$

解　説　(1)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=0.5+0.3-0.2=\mathbf{0.6}$$

(2)「事象B」から「事象$A\cap B$」の部分を除けばよいから

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.3-0.2=\mathbf{0.1}$$

(3)「**ド・モルガンの法則**(p.47)」と「**余事象の定理**(p.46)」を用いて

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})$$
$$=1-P(A\cap B)=1-0.2=\mathbf{0.8}$$

らしんばん

本問のような問題をキチンと扱うには傍に「図」を描いて確認しながら計算すると間違いが少ない．「図」には「ベン図」を用いてもよいが，全事象を2つの事象A，Bについて整理すると

(i)　Aについて――「起こる」か「起こらない」かのいずれか

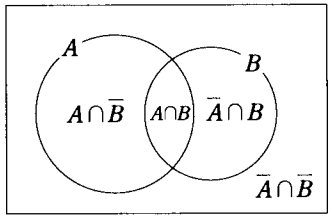
(ii)　Bについて――「起こる」か「起こらない」かのいずれか

であるから，これらの関係が「一目(ひとめ)」でわかる「**カルノー図**」を用いるとよい．

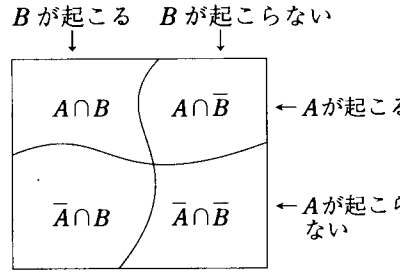
たとえば「(i)を上下」に，「(ii)を左右」にとることにすると全事象は

$$A\cap B,\ \overline{A}\cap B,\ A\cap\overline{B},\ \overline{A}\cap\overline{B}$$

であるが，これらと事象A，Bとの関係，およびこれらと全事象との関係がより ハッキリと了解される．



ベン図



カルノー図

3　確率の乗法定理

(1) 条件付確率

2つの事象A，Bが与えられたとき，「Aが起こっているとき」と「そうでないとき」でBの起こる確率が違うときがある．いま**「Aが起こったことがわかっているとき」のBの起こる確率を**

$$P_A(B)\ (\text{または}\ P(A\mid B))$$

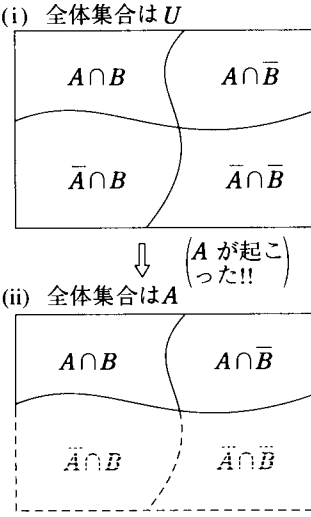
で表し，これを**Bの「条件付確率」**という．右の図は「Aが起こったかどうか」が不明のときは(i)だが，「Aが起こった」という情報が入ると

$$\overline{A}\cap B,\ \overline{A}\cap\overline{B}$$

が消滅して(ii)のように「全事象」が

$$A\cap B,\ A\cap\overline{B}$$

のみになることを表していると考えればよい．したがって「Bの条件付確率」は「$P(A)\neq 0$」のとき



$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

$$=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\dfrac{n(A)}{n(U)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

で計算することが出来る．このことからハナシを逆転させて「条件付確率」を次のように定義する．

条件付確率

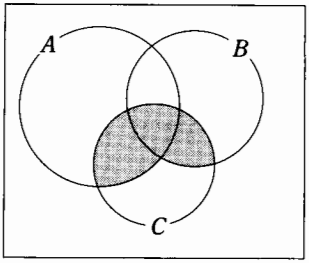
Aを「$P(A)>0$」の事象とするとき，任意の事象Bに対して

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

を，**Aが起こったときのBの条件付確率**という．

解　説　「**確率の基本的な性質**(p.46)」などで述べた諸定理は「条件付確率」の場合も成り立つだろうか——**実は「そのまま成り立つ」**のである．確かめておこう．たとえば**「加法定理」**については次のように考えればよい．

A，B，Cを「$P(C)>0$」である任意の事象とすると「条件付確率」の定義から



$$P_C(A\cup B)=\frac{P(C\cap(A\cup B))}{P(C)}$$

$$=\frac{P((C\cap A)\cup(C\cap B))}{P(C)}$$

(分子の計算は右に示すベン図で確かめよ!!)

この分子に「加法定理」を適用すると

$$(\text{分子})=P(C\cap A)+P(C\cap B)-P(C\cap A\cap B)$$

である．これを上の式に代入すると

$$P_C(A\cup B)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}+\frac{P(C\cap B)}{P(C)}-\frac{P(C\cap A\cap B)}{P(C)}$$

$$=P_C(C\cap A)+P_C(C\cap B)-P_C(C\cap A\cap B)$$

特に「$A\cap B=\phi$」のときは

$$P_C(A\cup B)=P_C(C\cap A)+P_C(C\cap B)$$

が成り立つことは「あたりまえ」のことである．

また一般に

$$0\leqq P_A(B)\leqq 1,\quad P_A(A)=1,\quad P_A(\phi)=0$$

などは説明するまでもない．

らしんばん

「Aが起こったときの条件付確率 $P_A(B)$」では「$P(A)=0$」のときは定義し

ない．

➡ 言葉をかえて言うと「**事象Aに関していろいろな事象の条件付確率を考える**」ということは「**新しい標本空間として事象Aを選ぶ**」ということに他ならない．

➡ 「**条件付確率の定義**」からただちに次の「**乗法定理**」が導かれる——きわめて重要な定理である．

乗法定理

$P(A)>0$ のとき

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

が成り立つ．

解　説　この定理は3個以上の事象についても成り立つ．すなわち「$P(A_1\cap A_2)>0$」のとき

$$\boldsymbol{P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)}$$

となる．それはこの右辺が

$$\cancel{P(A_1)}\cdot\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\cdot\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}=P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

と計算されることからも簡単に確かめることが出来る．

また，この「**乗法定理**」から次の重要な公式が導かれる．すなわち「$0<P(A)<1$」のとき

$$\boldsymbol{P(B)=\underbrace{P(A)P_A(B)}_{A\text{のときの}B}+\underbrace{P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}_{A\text{でないときの}B}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

で，これは「**$P(B)$ を直接求めにくいとき**」に使われるものの1つである．

証明は次のように考えればよい．

前ページの図で

$$B=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B),\quad (A\cap B)\cap(\bar{A}\cap B)=\phi$$

であるから「**加法定理**」を用いて

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)\ (\longleftarrow\text{加法定理!!})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

ところで「$0<P(A)<1$」だから

$$P(\bar{A})=1-P(A)>0$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P_A(B)\\P(\bar{A}\cap B)&=P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)\end{aligned}\right\}\longleftarrow\text{乗法定理!!}$$

これらを②に入れると①が得られる．

らしんばん

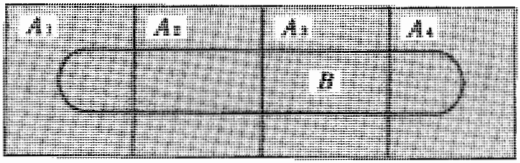
本文に述べた「公式①」も３つ以上の場合に拡張できる．

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 (=S)$ ←――どれか１つは必ず起こる

で，「事象 $A_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$」がどの２つも排反で，かつすべてが空集合でないとき

$$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+P(A_3)P_{A_3}(B)+P(A_4)P_{A_4}(B)$$

となる．次の図を見て了解しておくとよい．



（このように図を描いて理解しておくとよい）

このハナシはn個の場合にまで拡張される．すなわち

$$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\cdots\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)$$

が成り立ち，「**完全確率の定理**」と呼ばれるときもある．

例題 14

n本中a本$(n>a>0)$の当りクジがあるクジ引きで，１番目に引く人と２番目に引く人との当りクジを引く確率が等しいことを示せ．

解　説　「１番目に引く人が当りクジを引く」という事象をA，「２番目に引く人が当りクジを引く」という事象をBとすると $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{a}{n}$$

Bについては次の２通りの場合が考えられる．すなわち

(i)　**１番目の人が当り，２番目の人も当る**――→$P(A\cap B)$

(ii)　**１番目の人が外れ，２番目の人が当る**――→$P(\overline{A}\cap B)$

で，これらは互いに排反であるから

p.51の①，②式に示した「公式」によって

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$

$$=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．ところで

$$P_A(B)=\frac{a-1}{n-1}$$ ←――当りクジはすでに1本出てしまっている．

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{a}{n}=\frac{n-a}{n}$$

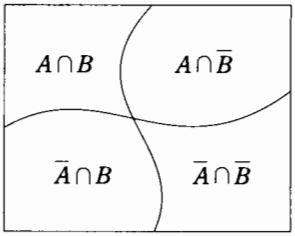
$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{a}{n-1}$$ ←――当りクジはそのままa本残っている．

これらを①に入れると

$$P(B)=\frac{a}{n}\cdot\frac{a-1}{n-1}+\frac{n-a}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

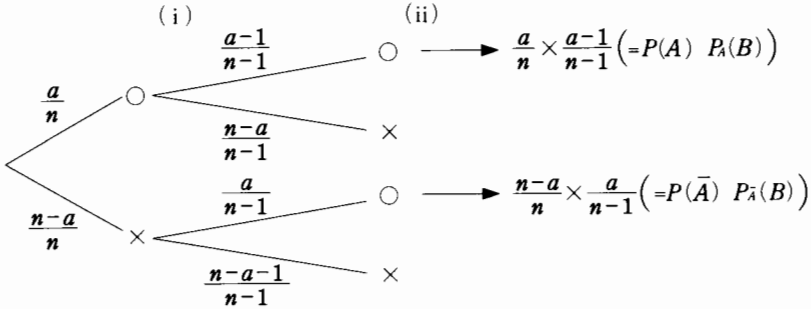
$$=\frac{a}{n}$$

$$\therefore\quad P(A)=P(B)$$



らしんばん

「**樹形図**」も理解を助ける有効な補助手段である――「○印を当り」，「×印を外れ」とすると次のような樹形図が描ける．

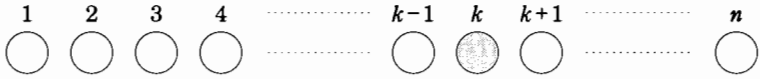


これより2番目の人が当る確率は「(ii)の○印の部分」を計算して

$$\frac{a}{n}\times\frac{a-1}{n-1}+\frac{n-a}{n}\times\frac{a}{n-1}=\frac{a}{n}$$ ←――(加法定理と乗法定理の応用そのもの!!)

となる．いずれにしても「$P(A)=P(B)$」であるところが面白い――先を争って「かけつける」必要はないわけである．

少し別の角度から眺めてみよう――**n本のクジを引き，それを1列に並べる順列**を考えてみる．そうすると「その順列でk番目に当りクジが当る」ということは「k番目に引いた人が当る」ということと対応する．



「当りa本，はずれ$(n-a)$本」のクジの順列は全部で

$$\frac{n!}{a!\,(n-a)!}$$

だけあり，そのうち，上のような「k 番目に当りクジ」が来る順列は

$$\frac{(n-1)!}{(a-1)!\,(n-a)!}$$

だけあるので，k 番目の人が当る確率は

$$\frac{(n-1)!}{(a-1)!\,(n-a)!}\div\frac{n!}{a!\,(n-a)!}=\frac{a}{n}$$

であり，これは「**k に無関係な値**」だから，**何番目に引いても「当る確率」は同じ**であることがわかる．

例題 15

同一の製品を作っているA，B，Cの3つの機械がある．A，B，Cは全製品のそれぞれ30%，20%，50%を生産し，A，B，Cの製品の不良品の割合は，それぞれa%，b%，c%であるとする．いま，全製品の中から1個の製品をとり出したとき，それが不良品であったという．この製品がAの機械から生産された確率を求めよ．

解　説　これは「**原因の確率（あるいはベイズの定理）**」といわれるもので高校の教科書には出て来ないが，入試問題ではときどき見かけるのでとりあげた．

製品が機械A，B，Cで作られたという事象をそれぞれA，B，Cとし，「不良品である」という事象をEで表すことにすると「乗法定理」より

$$P(A\cap E)=P(A)P_A(E)=\frac{30}{100}\times\frac{a}{100}=0.003a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$P(B\cap E)=P(B)P_B(E)=\frac{20}{100}\times\frac{b}{100}=0.002b$$

$$P(C\cap E)=P(C)P_C(E)=\frac{50}{100}\times\frac{c}{100}=0.005c$$

これより

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)\\&=0.003a+0.002b+0.005c\end{aligned}$$

また，

$$P(A\cap E)=P(E\cap A)=P(E)\cdot P_E(A)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

であるから，求める確率$P_E(A)$は

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.003a}{0.003a+0.002b+0.005c}=\frac{3a}{3a+2b+5c}$$

らしんばん

「原因の確率(ベイズの定理)」も「条件付確率」で表されているが，今迄に述べた「それ」とは少し違っている——説明しておこう．本文①で

$$P(A\cap E)=P(A)P_A(E)$$

というのは，**「まずAの機械で生産され，その結果がEになったり$\overline{E}$になったりする」ときの「Eの方の確率」**を考えているわけである．

ところが②で

$$P(A\cap E)=P(E\cap A)$$

まではよいとしても，これを「$P_E(A)$」とおくことに抵抗はないか．

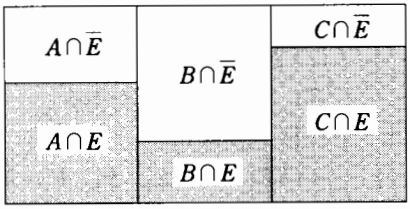
それは，本問に述べている認識の順序が

(1)まず不良品であることがわかる．

(2)次に，その不良品がどの機械から作られたかを調査する．

という手順であるにもかかわらず，「事実」としては「不良品であった」というとき，すでに「それがどの機械から作られたものか」が決まっているからである．

しかし，この「時間的な順序」については気にしなくてもよい．



全製品の集合をΩとすると，

(i)　**どの機械で作ったか．**

(ii)　**良品か不良品か．**

で「6つの排反である部分集合」にわかれる．その上で「ある製品が不良である」ということがわかったら，そのときの標本空間を

$$(A\cap E)\cup(B\cap E)\cup(C\cap E)$$

にとり直している，と考えればよいのである．

本問の「3つの機械A，B，C……」を「3大予備校S，K，Y……」とおきかえた「ギャグ」は大ウケであった．

異和感を解消するために例を1つあげておく．

たとえば

5回に1回の割合で帽子を忘れるくせのあるK君が，正月にA，B，C 3軒を順に年始まわりをして家に帰ったとき，帽子を忘れて来たことに気がついた．2番目の家Bに忘れて来た確率を求めよ．

次のように考えればよい．

Aに忘れる確率：$\frac{1}{5}$(←——以下，1軒につき忘れる確率が$\frac{1}{5}$)

Bに忘れる確率：$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$(←——$\frac{4}{5}$はAに忘れない確率)

Cに忘れる確率：$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\left(\longleftarrow \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\right.$ はA，Bに忘れない確率$\left.\right)$

したがってBに忘れる確率は

$$\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{20}{25+20+16}=\frac{20}{61}$$

(2) 事象の独立性

2つの事象A，Bについて，**「事象Bの起こることが事象Aの起こることにエイキョウされない」とき，「事象Bは事象Aに対して独立である」**といい，そうでないときは**「従属である」**という．

このことは「条件付確率」を用いて次のように表される．すなわち

BがAに対して独立 $\Longleftrightarrow$ $P_A(B)=P_{\bar{A}}(B)$

具体的な例をあげて説明しよう．

〈例1〉 サイコロを1回振るとき事象A，Bを

A：偶数の目が出る

B：3の倍数の目が出る

とすれば標本空間Sは

$S=\{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5,\ E_6\}$　(E_i：iの目が出る)

であるから

$A=\{E_2,\ E_4,\ E_6\}$，$\bar{A}=\{E_1,\ E_3,\ E_5\}$，$B=\{E_3,\ E_6\}$

$\therefore\quad P_A(B)=P_{\bar{A}}(B)=\frac{1}{3}$

これより**「BはAに対して独立である」**ことがわかる．

〈例2〉 10本のうち3本の当りクジのあるクジ引きで，甲，乙2人がこの順に1本ずつクジを引くものとする．このとき事象A，Bを

A：甲が当りクジを引く

B：乙が当りクジを引く

とすると

$P_A(B)=\frac{2}{9}$，$P_{\bar{A}}(B)=\frac{3}{9}\left(=\frac{1}{3}\right)$

である――これは**「事象Bが事象Aに対して独立でない(従属)」場合の例**である．

「事象の独立性」については次のように定義する．

事象の独立性

2つの事象 A，B があって，「$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$」のとき

$$\boldsymbol{P_A(B)=P_{\overline{A}}(B)} \cdots\cdots ①$$

が成り立つならば「A と B は互いに独立である」といい，「A，B が独立でない」ときは「従属である」という．

解　説　「互いに独立」というのは「B が A に対して独立である」と同時に「A が B に対して独立である」ことをいう．すなわち，①が成り立つとき

$$P_B(A)=P_{\overline{B}}(A) \cdots\cdots ①'$$

も成り立つということである．

また，①が成り立つときこの式は「$P(B)$」に等しい．すなわち

「A と B が互いに独立」であるとき

$$\boldsymbol{P_A(B)=P_{\overline{A}}(B)=P(B)} \cdots\cdots ②$$

である．このことについて少し詳しく説明しておく．

いま，

$$n(A\cap B)=a,\ n(A\cap\overline{B})=b,\ n(\overline{A}\cap B)=c,\ n(\overline{A}\cap\overline{B})=d$$

とすれば，右の「カルノー図」をながめて

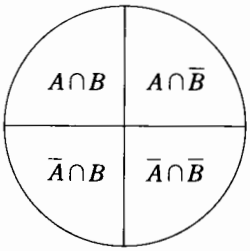
$$n(S)=a+b+c+d$$

（ただし，$a+b\neq 0$，$c+d\neq 0$）

であるから

$$P_A(B)=\frac{a}{a+b} \cdots\cdots ③$$

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{c}{c+d} \cdots\cdots ④$$



	B	$\overline{B}$
A	a	b
$\overline{A}$	c	d

そこで，これらを①に示した「$\boldsymbol{P_A(B)=P_{\overline{A}}(B)}$」に入れると

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \qquad \therefore\ ad=bc$$

この式を

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}=k \qquad \therefore\ d=kc,\ b=ka$$

と変形すると③，④は

$$③：\boldsymbol{P_A(B)=\frac{a}{a+ka}=\frac{1}{1+k}}$$

$$④：\boldsymbol{P_{\overline{A}}(B)=\frac{c}{c+kc}=\frac{1}{1+k}}$$

である．このとき $P(B)$ を求めてみると

$$\boldsymbol{P(B)}=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{a+c}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{a+c}{a+ka+c+kc}=\frac{a+c}{(1+k)(a+c)}=\boldsymbol{\frac{1}{1+k}}$$

すなわち

$$P_A(B)=P_{\bar{A}}(B)=P(B)\left(=\frac{1}{1+k}\right)$$

であることがわかる．

ちなみに，ここで①′の両辺を計算してみると

$$P_B(A)=\frac{a}{a+c}=\frac{a}{a+ka}=\frac{1}{1+k}$$

$$P_{\bar{B}}(A)=\frac{b}{b+d}=\frac{ka}{ka+kc}=\frac{a}{a+c}=\frac{1}{1+k}$$

となり，①′の成立が確かめられ，しかもその値が$P(B)$に等しいことがわかる．すなわち

$$P_B(A)=P_{\bar{B}}(A)=P(B)\left(=\frac{1}{1+k}\right)$$

である．

らしんばん

➡ ここで定義した「**2つの事象A，Bが独立であるかどうか**」ということは，日常用いている「関係がない」というような漠然とした意味から1歩踏み込んで，本文②に示した等式

$$\boldsymbol{P_A(B)=P_{\bar{A}}(B)=P(B)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が「**成り立つかどうか**」によってのみ決まることがらであり，ここで用いられる「独立」という概念は数学の，しかも「確率」特有のものであると理解しておかなければならない．要するに「事象A，Bが独立であることを示す」には$(*)$から得られる3本の等式

$$P_A(B)=P_{\bar{A}}(B),\ P_A(B)=P(B),\ P_{\bar{A}}(B)=P(B)$$

のいずれか1つが成り立つことを示せばよい――一般には「第1式」または「第2式」を示す場合が多い．これは**例題16**(p.60)で詳しく説明する．

➡ **「事象A，Bが独立である場合」の「乗法定理」**

「乗法定理」は「条件付確率」を用いて

$$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P_A(B)}$$

で表された(p.51)．

「事象A，Bが独立である場合」は上に述べた$(*)$より「$P_A(B)=P(B)$」であるから，この場合の「乗法定理」は

$$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P(B)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

と表される．逆にこれが成り立つときは

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

であることもわかる．

また，「(*)の第2の等式」についても

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{1-P(A)}=\frac{P(B)(1-P(A))}{1-P(A)}=P(B)$$

も簡単に誘導される．要するに(*)に(**)を加えて得られる4本の等式

$$\boldsymbol{P_A(B)=P(B),\ P_{\overline{A}}(B)=P(B),\ P_A(B)=P_{\overline{A}}(B),\ P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

は「同値」であり，どれを「**独立の定義**」としてもよいことがわかる――このとき「第1式から第3式(あるいは(*))」と違い「第4式(あるいは(**))」で見ると，「**事象A，Bの独立**」が「**A，Bについて対称**」であることがわかり興味深い．ハナシをまとめると次のようになる．

独立事象の乗法定理

事象A，Bが独立であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

が成り立つことである．

このとき，もし「$P(A)=0$」とすれば「Bの任意の事象」として「$P(A\cap B)=0$」，「$P(A)\cdot P(B)=0$」となるから，「事象の独立」をこのように定義するときは「$P(A)=0$，または$P(B)=0$」のときを含んで考えてもよい．

この定理を用いるとうまくいく例をあげておく．

たとえば

A，Bが互いに独立な事象であるとき，次の事象も互いに独立であることを証明せよ．

(1)Aと$\overline{B}$，(2)$\overline{A}$とB，(3)$\overline{A}$と$\overline{B}$

どれも同じようにやれるので(3)を証明しておく．上に述べたことから

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

を示せばよい．

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})\longleftarrow\text{ド・モルガンの法則(p.47)}$$

$$=1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\longleftarrow\boldsymbol{A}\text{と}\boldsymbol{B}\text{とは独立!!}$$

$$=(1-P(A))(1-P(B))=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

例題 16

正しく作られたサイコロがある．このサイコロの1の目が刻んである面からある数 k $(1 \leqq k \leqq 5)$ の目が刻んである面まで赤く塗り，$(k+1)$ の目が刻んである面から6の目が刻んである面までを白く塗る．このサイコロを振るとき，事象 A，B をそれぞれ

A：偶数の目が出る　　B：赤い面が出る

として，次の問いに答えよ．

(1) $k=3$ のとき

(i) 事象 B の起こる確率 $P(B)$ を求めよ．

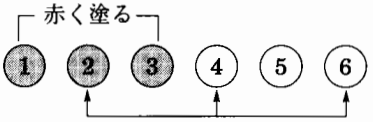
(ii) 事象 A が起きたとき事象 B の起こる条件付確率 $P_A(B)$ を求めよ．

(2) 事象 A と事象 B が独立であるときの k の値を求めよ．

解　説　(1)「$k=3$」であるから「1～3の目」を赤く塗ってみる．

(i) 右の図を見ながら

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$



(ii) 偶数の目は{2，4，6}で，
そのうち「赤い目は2のみ」だから

$$P_A(B)=\frac{1}{3}$$

(2)「$k=3$」のときは「$P_A(B) \neq P(B)$」であるから「独立」ではない．

あとの k の値については1つ1つ調べてみないとわからない．

そこで，(1)に習って「1～5」を「1から順に」赤く塗りながら「$P_A(B)$」と「$P(B)$」の値を表にして表してみる：

これより「$P_A(B)=P(B)$」が成り立つ k の値は「$k=2$，4」で

$$k=2:\quad P_A(B)=P(B)=\frac{1}{3}$$

$$k=4:\quad P_A(B)=P(B)=\frac{2}{3}$$

k	1	2	3	4	5
$P_A(B)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(B)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$

これより求める k の値は

$$k=2,\ 4$$

このように「独立である」ことを示すには，p.56以下で説明したように「数値」を用いてキチンと示さなければならない．

らしんばん

➡ 「サイコロの例」をあげたから「トランプの例」もやってみよう——考え方

は同じことである．

たとえば

(1)トランプ52枚から，1枚をとり出したとき，それがハートである事象をH，キングである事象をKとする．HとKが独立であることを示せ．
(2)ジョーカーを1枚加えた53枚について同じことをやってみよ．

(1)ハートは13枚，そのうちのキングは1枚だから

$$P_H(K)=\frac{1}{13},\ P_{\overline{H}}(K)=\frac{3}{39}=\frac{1}{13}\longrightarrow \text{独立である}$$

(2)同様にして

$$P_H(K)=\frac{1}{13},\ P_{\overline{H}}(K)=\frac{3}{40}\qquad \therefore\ P_H(K)\neq P_{\overline{H}}(K)$$

したがって，この場合は「独立でない」ことがわかる．

このように，「独立であるかないか」を示すには，**先に述べた4本の等式のいずれか1本の「成立，あるいは不成立」を示す**ことになる．その際どれを用いれば簡単にいくかには多少の差はあるが，一般には

$$P_A(B)=P(B),\ P_A(B)=P_{\overline{A}}(B),\ P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

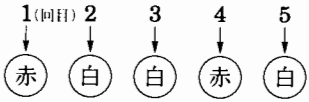
のどれかを示すようである．いろいろとやってみておくとよい．

(3) 試行の独立性

たとえばサイコロを3回振るとき，「1回目に1」，「2回目に3」，「3回目に6」が出る事象などは「互いに独立」である．このように**「ある試行を繰り返すとき，毎回おこる事象が独立」ならば「それらの試行は独立である」，あるいは「独立試行である」という．**

いま，赤球3個，白球2個が入った袋から1球をとり出すという試行を5回くり返すものとする――ただし，とり出した球はその都度もとにもどすものとする．このとき，5回のうち3回だけ白球の出る確率を考えてみよう．

まず，5回のうち「どの3回に白球が出るか」で${}_5C_3$通りの場合があるが，そのうちの1つ，たとえば右図に示すような場合を考えると，これが起こる確率は「乗法定理」により



$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

である．したがって求める確率は

$${}_5C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2\longleftarrow\left({}_5C_3\text{は5回のうち「どの3回に白球が出るか」についての「加法定理」}\right)$$

である．

この考え方を一般化すると次の定理が得られる．

独立試行

1回の試行における「事象Aの起こる確率がp」であるような独立試行で，その試行をn回くり返すとき，「r回だけAが起こる」確率は

$$ {}_nC_r\, p^r(1-p)^{n-r} $$

である．

解　説　ここに述べる**「試行の独立」**は**「ある試行 T_1 とそれとは別の試行 T_2 との関係」**のことであるから先に述べた「事象の独立性(p.56)」と混同してはならない．キチンとした形で説明しておこう．

試行 T_1，T_2 の標本空間をそれぞれ

$$ S_1=\{e_1,\ e_2,\ \cdots\cdots,\ e_m\},\quad S_2=\{f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots,\ f_n\} $$

とし，この2つの試行をあわせたものを1つの試行Tと考えるときは

「$m\cdot n$個」の順序対(ペア)

$$ (e_i,\ f_j)\,(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n) $$

から構成される S_1 と S_2 との直積集合(p. 7)

$$ S=S_1\times S_2 $$

を標本空間にとる．このとき

$$ P(\{e_i,\ f_j\})=P(\{e_i\})\cdot P(\{f_j\}) $$
$$ (1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n) $$

が成り立つならば**「2つの試行 T_1，T_2 は独立である」**という．

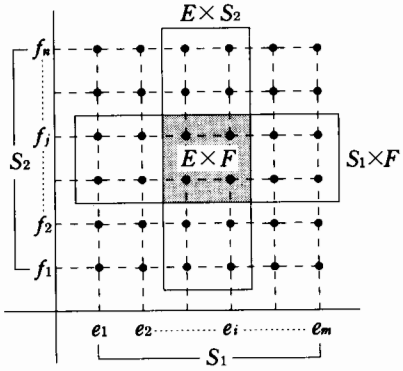
もう少し具体的に説明しよう．

E，Fをそれぞれ S_1，S_2 の事象とするとき「EとFとが同時に起こる事象」は「$S(=S_1\times S_2)$」の部分集合で「$E\times F$」で表される．

このとき

$$ E\longrightarrow E\times S_2 $$
$$ F\longrightarrow S_1\times F $$

でいずれもSの部分集合である(右図)．



このことより

$$ E\times F=(E\times S_2)\cap(S_1\times F)\cdots\cdots① $$

であり，「2つの試行 T_1，T_2 が独立である」ということは，S_1 の任意の事象E，S_2 の任意の事象Fに対して

$$P(E\times F)=P\{(E\times S_2)\cap(S_1\times F)\}=P(E)\cdot P(F)$$

（①の両辺を「$S=S_1\times S_2$」で割ってみよ!!）

が成り立つことと同値であることがわかる――2つのサイコロならば「$m=n=6$」である．やってみておくとよい．

ハナシをもとにもどそう．T_1 と T_2 が「同じ試行の繰り返し」ならば「独立」であることは明らかである．この定理は「n 回の繰り返し」をテーマにしており，これが**「独立試行の定理」**と呼ばれる理由はこの辺にあると思われる．

また，この定理のように，**毎回の試行が「起こる」か「起こらない」かの2種類であり，その確率が各回ともに一定で等しく，独立である試行を「ベルヌーイ試行」，この定理を「ベルヌーイの公式」などと呼ぶこともある．**

あるいはもっと単純に**「反復試行」**あるいは**「重複試行」**などと呼んだりもするが，この方が意味がわかり易くてよいかも知れない．

らしんばん

上に示した確率「${}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}$」は「ちょうど r 回 A が起こる確率」であるが，これを**「少なくとも r 回 A が起こる確率」**とすると

$$\sum_{k=r}^{n}{}_nC_k\,p^k(1-p)^{n-k}\longleftarrow r\text{回，}(r+1)\text{回……，}n\text{回起こる確率の和!!}$$

を計算することになる．

また，「$1-p=q$」とおくと

$${}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}={}_nC_r\,p^rq^{n-r}\ (p+q=1)$$

となり，「2項定理(p.33)」の一般項(第 $(r+1)$ 番目の項)になっている．

あらためてその「展開式」を書いてみると

$$\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,p^rq^{n-r}(={}_nC_0\,p^0q^n+{}_nC_1\,pq^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_r\,p^rq^{n-r}+\cdots\cdots+{}_nC_n\,p^nq^0)$$

$$=(p+q)^n=1\longleftarrow\text{（「2項定理」と「}p+q=1\text{」を用いた）}$$

で，これはよく考えると「0回(1回も起こらない)から n 回(全部起こる)までの確率の総和」であるから「その和が1」であることは「あたりまえ」のことである．

なお，この確率は「2項分布(p.117以下)」でさらに新しい展開をみることになる．

実例で使い方を説明しておく．

たとえば

サイコロを5回振るとき，次の確率を求めよ．

(1) 3の倍数が3回でる．　(2) 1の目が奇数回でる．

(1) 1回振るときの目の出方は「1～6」の6通り，そのうち「3の倍数の目」

は「3，6」の2通りであるから，1回振るときの「3の倍数の目が出る確率」は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ゆえに求める確率は

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=10\times\frac{1}{27}\times\frac{4}{9}=\frac{40}{243}$$

(2)「1の目が出る確率」は$\frac{1}{6}$,「出ない確率」は$\frac{5}{6}$である.

奇数回は1回，3回，5回であるからそれぞれ「どの回にこれらが出るか」を考えて

$${}_5C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4+{}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2+{}_5C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$=\frac{5^5+10\times25+1}{6^5}=\frac{3376}{7776}=\frac{211}{486}$$

例題 17

4個の答の中から1個を選ぶ問題が10題ある．これを無作為(デタラメ)に答えるとき，正解がr題得られる確率をP_rとする.

(1)P_rを求めよ.

(2)$r=0$，1，2，……，9のとき$P_{r+1}>P_r$となるのはどんなときか.

(3)P_rが最大となるのはrがどのような値のときか.

解　説　「最大確率」を求める問題である.

(1)$P_r={}_{10}C_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{10-r}$ ←――10題のうちr題が正解!! ……①

(2)「$P_{r+1}>P_r$」を調べるには「比をとって1との大小比較」で考えるとよい――それは①で見るようにP_rが「正」で，「ベキ(累乗)」と${}_{10}C_r$が「階乗の積の形」で与えられているからである.

$$\frac{P_{r+1}}{P_r}=\frac{{}_{10}C_{r+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{r+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{9-r}}{{}_{10}C_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{10-r}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_{10}C_{r+1}}{{}_{10}C_r}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\dfrac{10!}{(r+1)!\,(9-r)!}}{\dfrac{10!}{r!\,(10-r)!}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{10-r}{r+1}$$

これより

$$P_{r+1}>P_r \Longleftrightarrow \frac{P_{r+1}}{P_r}=\frac{1}{3}\cdot\frac{10-r}{r+1}>1$$

$$\therefore\ 10-r>3(r+1) \qquad \therefore\ 4r<7 \qquad \therefore\ r<\frac{7}{4}=1.75$$

これを満たす「負でない整数 r」は

$$r=0,\ 1$$

(3)(2)より

$P_0<P_1<P_2 \longleftarrow$ (2)の不等式が成り立つのは $r=0,\ 1$

したがって「$r\geqq 2$」のときは不等号の向きが逆になり「$P_r>P_{r+1}$」であるから

$$P_0<P_1<P_2>P_3>P_4>\cdots\cdots>P_{10}$$

したがって P_r が最大となる r の値は

$$r=2$$

らしんばん

➡ (2)について――「大小関係」を調べる基本は「差をとって考える」ことであった(『諸橋の数Ⅰ講義』p.171). しかし本問の P_r と P_{r+1} のように「正」で「べき(累乗)や階乗で構成されている」ものの大小関係は,「比をとって1との大小関係を調べる」と簡単になるときがある.

P_{r+1} と P_r の差をとれば

$$P_{r+1}-P_r={}_{10}C_{r+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{r+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{9-r}-{}_{10}C_r\left(\frac{1}{4}\right)^{r}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-r}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{r}\left(\frac{3}{4}\right)^{9-r}\left(\frac{1}{4}\,{}_{10}C_{r+1}-\frac{3}{4}\,{}_{10}C_r\right)$$

$$=\frac{3^{9-r}}{4^{10}}\left\{\frac{10\,!}{(r+1)\,!\,(9-r)\,!}-3\cdot\frac{10\,!}{r\,!\,(10-r)\,!}\right\}$$

$$=\frac{3^{9-r}}{4^{10}}\cdot\frac{10\,!}{r\,!\,(9-r)\,!}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{3}{10-r}\right)>0 \quad (\longleftarrow P_{r+1}>P_r)$$

$$\therefore\ \frac{1}{r+1}>\frac{3}{10-r}$$

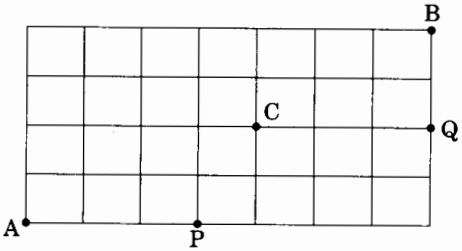
$$\therefore\ 10-r>3(r+1) \qquad \therefore\ 4r<7$$

となり,同様の結果が得られるが,本文の方法で「約分」したところを「くくり出す」ことになり計算が繁雑になる――本問については「比をとる」方がよい.

例題 18

図のAからBまで最短路で進むものとする．このとき，次の2つの条件の下でCを通る確率を求めよ．

(1)AからBまでの最短路の選び方がすべて同様に確からしい場合．



(2)分岐点(図で，たとえばPは分岐点だがQは分岐点ではない)に来たとき，硬貨を投げて，表が出れば右，裏が出れば上に進むものとする場合．

解　説　(1)「最短路の数え方」については 例題 8 (p.26以下)を参照．

$$n(\mathrm{A}\to\mathrm{B})={}_{11}C_4=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=330\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$n(\mathrm{A}\to\mathrm{C})={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15,\quad n(\mathrm{C}\to\mathrm{B})={}_5C_2=10$$

標本空間の個数は①で計算した330個で，これらが「同様に確からしい」から求める確率は

$$\frac{15\times10}{330}=\frac{150}{330}=\frac{5}{11}$$

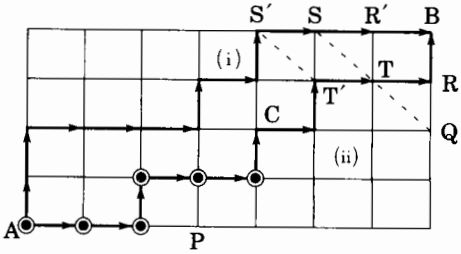
(2)AからCに達するには，「合計6区画」，そのうち「右へ4区画，上へ2区画」進まなければならないが，新しい区画へ進むときはその都度，硬貨を投げて進む方向を決めることになる――「6回投げてそのうち4回が表，2回が裏」のときにCを通る．したがって求める確率は

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{2^6}=\frac{15}{64}$$

らしんばん

「(1)と(2)との違い」に注目してもらいたい――「何を同様に確からしいとするか」によって確率が違って来ることの典型的な例である．

(1)では，たとえば右図の(i)，(ii)などの進み方を



〈図1〉

「同様に確からしい」と考えている．これに対して(2)では各分岐点で「右に進むこと」と「上に進むこと」を「同様に確からしい」と考えている．

そのことによって本文に示したように違う結論になるが，この場合，どちらが正しいということはない．

(1)ではすべての最短路についてよく知っていることが前提であり，それに対して(2)は「知らない街」を「北と東に進む」ことだけを手がかりに歩いて行く場合にあてはまるとでもいえばいくらかわかり易いだろうか．

➡ (1)についてはほとんど問題なしとしよう．しかし(2)については少し説明しておかなければならないことがある．

たとえば〈図1〉で「AからCを通ってBに進む経路」の1つである(ii)で考えてみる．

まず，「AからCに達する」には〈図1〉の⊙印をつけた6個の分岐点で硬貨を投げる．矢印に従えば，それぞれの区画での進み方は

右　右　上　右　右　上 ⟷ 表　表　裏　表　表　裏

であるからこのときの確率が

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^6 \longleftarrow \text{表が4回，裏が2回出る．(乗法定理)}$$

それに「どの順に出るか」が${}_6C_4$通りで，求めるものは

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^6 \longleftarrow \text{加法定理}$$

となる——ここまでは問題ない．

しかし，**「Cからあと」はどうなるのか**——本文ではそのことについては触れていない．それは**「Cに達したもの」は，そのあとどのように進むにせよ「右か上にしか進まない限り自動的にBに達してしまうからである**(Cからあとの確率は1)．このことは次のように考えれば確かめることが出来る．

まず，**「通過することが排反である(同時には起こらない)点」に注目する．**

たとえば〈図1〉のS，T，Qなどはこれにあたる．しかもS，Qからはストレートに**B**に行くしかなく，Tからは

$$\left.\begin{cases} \mathrm{T}\to\mathrm{R}\to\mathrm{B}:\dfrac{1}{2} \\ \mathrm{T}\to\mathrm{R}'\to\mathrm{B}:\dfrac{1}{2} \end{cases}\right\rangle \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \longleftarrow \text{必ずBに達する!!}$$

これと，「CからこれらS，T，Qのどれかに達する確率」は

$$\mathrm{C}\to\mathrm{Q}:\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8} \qquad \longleftarrow \text{3回とも右}$$

$$\mathrm{C}\to\mathrm{T}:{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8} \qquad \longleftarrow \text{考え方は本問(2)と同じ!!}$$

「C→S」は少し難しい．Sに達するのは〈図1〉の「S′から」と「T′から」の

場合がある(排反)のでそれぞれを求めて加えると

$$\left.\begin{array}{l} C\to S' : \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \\ C\to T' : {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right\rangle \quad \therefore \ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\underset{\substack{\uparrow \\ (T'からS)}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

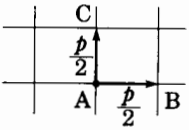
したがってS，T，Qのいずれかを通る確率は

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{4}{8}+\frac{1}{2}=1$$

すなわち，Cから出発したものは必ずS，T，Qのどれかに達し，それらは必ずBに達することがわかる．

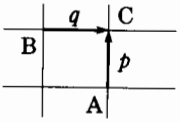
➡ (2)の確率を簡単に計算する方法がある．

それは〈図2〉で，「とにかく分岐点Aに来る確率がp」ならば，この点Aで硬貨を投げて「ABかACを進む」ことになり，それぞれの確率は$\frac{p}{2}$，$\frac{p}{2}$となる．



〈図2〉

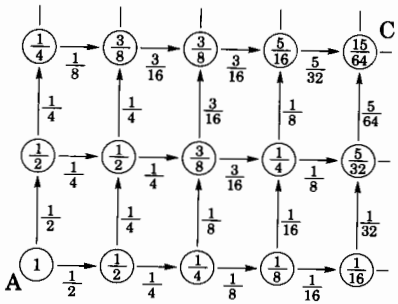
また，〈図3〉でAC，BCを通って分岐点Cに達する確率がp，qならば，Cに達する確率は「$p+q$」である．



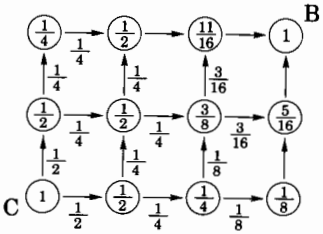
〈図3〉

この原理に従って各通路と各分岐点の確率を記入していけば「きわめて素朴な形で」求めることが出来る．

次の〈図4〉，〈図5〉に「A→C」，「C→B」について示しておく．



〈図4〉



(Cを通ったものは必ずBに達する!!)

〈図5〉

第3節
問題解法の研究

発展問題1—順列

6個の数字0，1，2，3，4，5から異なる3つの数字をとり出して3桁(けた)の整数を作る.

(1)偶数はいくつ出来るか.

(2)3の倍数はいくつ出来るか.

(3)作られた3桁の整数の総和を求めよ.

解　説　(1)末位が0のとき，第1位と第2位は他のどれが来てもよいから

$${}_5P_2=5\times4=20$$

末位が2，4のときは，それぞれ「第1位に0が来てはならない」ことに注意して

$$4\times4\times2=32$$

これらを加えて求める偶数の個数は

$$20+32=\mathbf{52}$$

(2)「各位の数の和が3の倍数」となる場合を調べればよいから，その和をxとすると

$$0+1+2\leqq x\leqq3+4+5 \qquad \therefore\ 3\leqq x\leqq12$$

この範囲の3の倍数は

$$x=3,\ 6,\ 9,\ 12$$

となる——これらの1つ1つについて調べればよい.

「$x=3$」のとき：　3つの数の組は(0，1，2)であるから

$${}_3P_3-{}_2P_2=3!-2!=4 \quad (\text{あるいは}\quad 2\times2\times1=4)$$

「$x=6$」のとき：　(0，1，5)，(0，2，4)，(1，2，3)について

$$4\times2+3!=8+6=14$$

「$x=9$」のとき：　(0，4，5)，(1，3，5)，(2，3，4)について

$4+3!\times 2=4+12=16$

「$x=12$」のとき：　(3, 4, 5)の並べ方は

$3!=6$

以上を加えて

$4+14+16+6=\mathbf{40}$

(3)(i)　100の位の数の総和：　100位の数が1のものは10位と1位の数に注目して「${}_5P_2=20$(通り)」あり，他の数のときも同じだから「**10位以下の数字**」を**無視して100位の数の総和**を求めると

$(1+2+3+4+5)\times 20\times 100=30000$

(ii)　10の位の数の総和：　10位の数が1である3桁の整数は

$4\times 4=16$(通り)

(←――100位の数が0と1を除いて4通り，1位が残りの4通り)

あり，0以外の他の数のときも同様であるから「**100位の数**」と「**1位の数**」を**無視して10位の数の総和**を求めると

$(1+2+3+4+5)\times 16\times 10+0\times 20\times 10=2400$

(10位の数が0のときは100位と1位の数に注目して　$5\times 4=20$(通り))

(iii)　1の位の数の総和：　同様にして「**100位の数**」と「**10位の数**」を**無視して1位の数の総和**を求めると

$(1+2+3+4+5)\times 16\times 1+0\times 20\times 1=240$

以上のことから求める総和は

$30000+2400+240=\mathbf{32640}$

らしんばん

➡　まず(1)では与えられた6個の数字の中に「0」があることに注目!!――これらの数を用いて整数を作るとき「**第1位**」に「**0**」**が来ることはない**から注意しなければならない．したがって(1)は最初，「末位」に「0，2，4」を入れて数えておいて，「第1位」に「0」を置く場合を除いてもよい．すなわち

${}_5P_2\times 3-4\times 2=60-8=52$

とも計算される．

➡　(2)について――「**ある整数が3の倍数**」である条件は「**各位の数の和が3の倍数**」となることである．たとえば各位の数がa，b，cである3桁の整数Nは

$N=a\times 100+b\times 10+c=99a+9b+(a+b+c)$

と表され，実は

Nが9の倍数$\Longleftrightarrow$「$a+b+c$」が9の倍数

であることもわかる．また

$$N=99a+11b+(a-b+c)$$

などと変形すると

Nが11の倍数$\Longleftrightarrow$「$a-b+c$」が11の倍数

あるいは

Nが4の倍数$\Longleftrightarrow$$N$の下2桁が4の倍数

などもいえる．調べておくとよい．

➡ (3)について――「作られた3桁の整数」を全部並べて加えるのは大変である．このようなときは「100の位」,「10の位」,「1の位」の数に注目し，それが「何回あらわれるか」に注目すると効率よく「総和」を求めることが出来る．この場合も「第1位に0が来るときを除外する」ことは当然である．

発展問題2―三角形をつくる（${}_nC_r$の応用）

平面上に11個の相異なる点がある．このとき2点ずつを結んで出来る直線が全部で48本であるとする．次の問いに答えよ．

(1)与えられた11個の点のうち3個以上の点を含む直線は何本あるか．

(2)与えられた11個の点を選び三角形を作ると全部で何個できるか．

解　説　(1)どの3点も同一直線上にないとすれば，2点を結ぶ直線の数は

$${}_{11}C_2=\frac{11\cdot 10}{2\cdot 1}=55(本)$$

k個の点を含む直線が1本あるごとに直線の本数は$({}_kC_2-1)$本ずつ少なくなるから，「$k=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$」としてその数を調べると

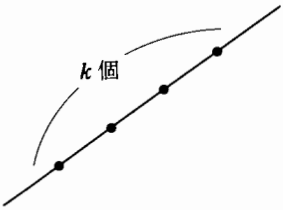
$${}_3C_2-1=3-1=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$${}_4C_2-1=6-1=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$${}_5C_2-1=10-1=9$$

……

……



である．

このとき，直線の本数の減少分としては「$55-48=7$」で，この数を上で調べた数値「2，5，9，……」で表すことが出来るものは

$$7=2+5$$

で，これ以外にはない．これは上で調べた①，②の場合であるから

3個の点を含むもの（$k=3$）が1本　$\longleftarrow l_1$

4個の点を含むもの（$k=4$）が1本　$\longleftarrow l_2$

であることがわかる.

(2) ${}_{11}C_3$ から l_1, l_2 上でつぶれる三角形の個数を引いて

$$ {}_{11}C_3-{}_3C_3-{}_4C_3=\frac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2\cdot1}-1-4 $$

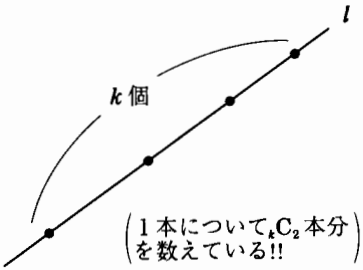
$$ 165-5=\mathbf{160}\text{(個)} $$

となる.

らしんばん

(1)について——なかなか難しい問題である.

スナオ(?)に考えれば, 11個の異なる点から2点をとって「${}_{11}C_2=55$本」の直線が出来そうに思われるのだが, そう簡単にはいかない——実は48本しかないのだ!!



そこで, **「k個の点が1直線上にあるとすれば, この1本に${}_kC_2$本分が数えられている」**ことを見ぬくのがポイント!!

しかし, **${}_kC_2$を引いたのではlもなくなってしまうので(${}_kC_2-1$)(lの分を残すために)を引く**のである.

本問は「l_1, l_2上でつぶれる三角形の個数」が問題となっている.

たとえば

平面上に6個の点がある. これを頂点とする三角形は16個しか作れないという. これらの点のうち3個以上を含む直線の本数を求めよ. また, これらの点と直線の関係を図示せよ.

「つぶれる三角形がない」とすると

$$ {}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20\text{(個)} $$

しかし, 実際は16個しか出来ないから

$20-16=4$ ←——「つぶれる三角形」の個数!!

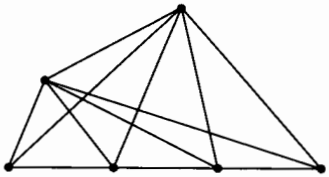
このとき, 1直線上で「つぶれる三角形」の頂点となり得る点の個数をnとしてその関係を数式で表すと

$$ {}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4 $$

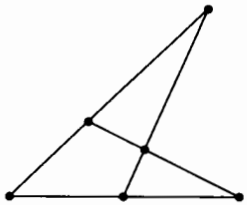
$$ \therefore\ n(n-1)(n-2)=4\cdot3\cdot2 $$

$\therefore\ n=4$ ←——4点が同一直線上!!

また, この他に3点が同一直線上にある場合も考えられるので図に示すと次の2つの場合が考えられる.



（1本のとき）



（4本のとき）

発展問題3―確率とは何か

袋の中に数字0を書いたカードがl枚，1を書いたカードがm枚，2を書いたカードがn枚入っている．ただし，$l \geqq 1$，$m \geqq 1$，$n \geqq 1$とする．

(1)袋の中から2枚のカードを同時にとり出すとき，それらのカードの数の和が3以上である確率を求めよ．

(2)袋の中のカードが全部で10枚であるとき，(1)の確率が$\dfrac{1}{10}$以下であるようにl，m，nを決めよ．

解　説　(1)カードは

$\boxed{0}$ ―― l枚，$\boxed{1}$ ―― m枚，$\boxed{2}$ ―― n枚

であるから全部で$(l+m+n)$枚である．この中から2枚とり「和が3以上」となるのは

$3=1+2$，$4=2+2$ ――→ $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，または$\boxed{2}$，$\boxed{2}$

すなわち，求める確率Pは

$$P=\frac{{}_mC_1\times{}_nC_1+{}_nC_2}{{}_{l+m+n}C_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$=\frac{m\times n+\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{(l+m+n)(l+m+n-1)}{2}}=\frac{n(2m+n-1)}{(l+m+n)(l+m+n-1)}$$

(2)カードが全部で10枚であるから「$l+m+n=10$」で，これを与えられた条件に用いると

$$P=\frac{n(2m+n-1)}{10\cdot 9}\leqq\frac{1}{10}\qquad\therefore\quad n(2m+n-1)\leqq 9\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

このとき「$m\geqq 1$，$n\geqq 1$」であるから

$$n(2+n-1)\leqq n(2m+n-1)\leqq 9$$

$\therefore\ n(n+1)=n^2+n\leqq 9 \quad \therefore\ n^2\leqq 8 \quad \therefore\ n=1,\ 2$

(i) 「$n=1$」のとき，これを②に入れて

$1\cdot(2m+1-1)\leqq 9 \quad \therefore\ 2m\leqq 9 \quad \therefore\ m=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\therefore\ (m,\ l)=(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)$

(ii) 「$n=2$」のとき，これを②に入れて

$2(2m+2-1)\leqq 9 \quad \therefore\ 4m\leqq 7 \quad \therefore\ m=1 \quad \therefore\ l=7$

以上のことから$(l,\ m,\ n)$の組は

(8, 1, 1), (7, 2, 1), (7, 1, 2), (6, 3, 1), (5, 4, 1)

らしんばん

(1)では，問題文の「**2枚のカードを同時にとり出す……**」に敬意(?)を払って求める確率Pを${}_nC_r$(組合せの数)で表した(本文①)――「**1枚ずつもとにもどさずとり出す**」ときはどうなるか．カードの出方は

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, または$\boxed{2}$, $\boxed{1}$, または$\boxed{2}$, $\boxed{2}$

であるから求める確率は

$$P=\frac{m\times n+n\times m+{}_nP_2}{{}_{l+m+n}P_2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$=\frac{2mn+n(n-1)}{(l+m+n)(l+m+n-1)}=\frac{n(2m+n-1)}{(l+m+n)(l+m+n-1)}$$

となり，本文で求めた結果と同じになる――(*)は本文①の分母と分子に2！(とり出した2枚のカードの順列の数)をかけたものになっている．すなわち

本文①：分母，分子を「組合せの個数」にとっている

(*)　：分母，分子を「順列の個数」にとっている

が，このように標本空間の設定が違っていても確率が同じになることが起こり得る例の1つである．

たとえば

袋の中に同じ大きさの球が6個入っており，そのうち4個は白球，2個は赤球である．次の確率を求めよ．

(1)同時に3個をとり出すとき，白球2個を得る確率．

(2)1個ずつ順に3個とり出すとき，白球2個を得る確率．

(3)1個とり出し，それが白球か赤球かを見てもとにもどす．これを3回繰り返して，2回白球を得る確率．

(4)1個とり出し，それが赤球であったときだけもとにもどし，また1個とり出すとする．このとり出し方で，3回までに白球を得る確率．

問題は(1)，(2)，(3)の違いをキッチリと確認すること!!　(3)は少しメンドウか．

順に説明する．

(1)$\longrightarrow \dfrac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\dfrac{6\times2}{20}=\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

(2)$\longrightarrow \dfrac{({}_4C_2\times{}_2C_1)\times3\,!}{{}_6P_3}=\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

（あるいは

$$\underbrace{\underset{\text{白}}{\frac{4}{6}}\times\underset{\text{白}}{\frac{3}{5}}\times\underset{\text{赤}}{\frac{2}{4}}}+\underbrace{\underset{\text{白}}{\frac{4}{6}}\times\underset{\text{赤}}{\frac{2}{5}}\times\underset{\text{白}}{\frac{3}{4}}}+\underbrace{\underset{\text{赤}}{\frac{2}{6}}\times\underset{\text{白}}{\frac{4}{5}}\times\underset{\text{白}}{\frac{3}{4}}}=\frac{3}{5}$$

）

(3)$\longrightarrow {}_3C_2\left(\dfrac{4}{6}\right)^2\left(\dfrac{2}{6}\right)=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$　$\longleftarrow$独立試行(反復試行)p.62

(4)$\longrightarrow$1回目，2回目，3回目にはじめて白が出る場合を考えて

$$\underset{\text{白}}{\frac{4}{6}}+\underbrace{\underset{\text{赤}}{\frac{2}{6}}\times\underset{\text{白}}{\frac{4}{6}}}+\underbrace{\underset{\text{赤}}{\left(\frac{2}{6}\right)^2}\times\underset{\text{白}}{\frac{4}{6}}}=\mathbf{\frac{26}{27}}$$

（あるいは「3回までに白球を得ない確率(余事象の確率)」からアプローチすると

$$1-\underset{\text{3回とも赤}}{\left(\frac{2}{6}\right)^3}=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$$

）

ハナシを本問にもどそう．(2)は「確率」を素材とした「整数問題」である．本文②の左辺で「$m=1$」とおいて「nの範囲を絞る」ところがポイントで，これが出来ればあとはスッキリといく．

発展問題4―条件付確率の応用

赤球4個，白球5個がはいっている袋があり，それらの球をよくかきまぜて，その中から1個を誰かが持ち去ってしまった．持ち去られた球の色を推定するために，袋の中に残された8個の球をよくかきまぜた後，1個をとり出してその色を調べてもとにもどすという実験を3回くり返すことが出来るものとする(ただし，球はその都度もとにもどす)．3回の実験中，赤球のとり出された回数が1以下ならば，持ち去られた球は赤球と推定し，2以上ならば持ち去られた球は白球と推定する．この推定の的中する確率を求めよ．

解　説　問題文をよく読んで，ハナシをわかり易く整理する．

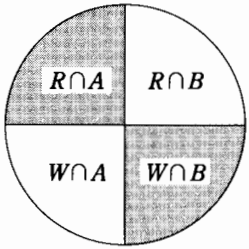
持ち去られた球が赤である事象……$\longrightarrow R$

持ち去られた球が白である事象……$\longrightarrow W$

3回の実験中，赤球の出る回数が1以下$\longrightarrow A$

2以上……$\longrightarrow B$

とすると，RとW，AとBはそれぞれ「互いに排反」である．



このとき，**「推定が的中する」**ということは

$\boldsymbol{R \cap A}$，**または**$\boldsymbol{W \cap B}$

であるから，求める確率は

$$P(R \cap A) + P(W \cap B)$$
$$= P(R)P_R(A) + P(W)P_W(B) \quad \cdots\cdots ①$$

を計算すればよい．

まず

$$P(R) = \frac{4}{9},\ P(W) = \frac{5}{9}$$

は問題ナシとしよう．

次に

$$P_R(A) = \underbrace{{}_3C_0\left(\frac{3}{8}\right)^0\left(\frac{5}{8}\right)^3}_{\text{赤球が0回}} + \underbrace{{}_3C_1\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^2}_{\text{赤球が1回}} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{持ち去られたあとは}\\ \text{赤球3個，白球5個}\end{array}\right)$$

$$= \frac{125}{512} + \frac{225}{512} = \frac{350}{512} = \frac{175}{256}$$

$$P_W(B) = \underbrace{{}_3C_2\left(\frac{4}{8}\right)^2\left(\frac{4}{8}\right)}_{\text{赤球が2回}} + \underbrace{{}_3C_3\left(\frac{4}{8}\right)^3\left(\frac{4}{8}\right)^0}_{\text{赤球が3回}} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{持ち去られたあとは}\\ \text{赤球4個，白球4個}\end{array}\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

これらを①に入れて

$$P(R \cap A) + P(W \cap B) = \frac{4}{9} \times \frac{175}{256} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{335}{576}}$$

となる．

らしんばん

メンドウな「言いまわし」をしてはいるが，W，Bをそれぞれ$\overline{R}$，$\overline{A}$とおくと本問は

$$R \cap A,\ R \cap \overline{A},\ \overline{R} \cap A,\ \overline{R} \cap \overline{A}$$

の問題である――本文のカルノー図を参照!!

たとえば

1，2，……，Nの番号が1つずつ記入してあるN枚の札を1列にデタラメに並べ，一番左の札から順に第1位，第2位，……，第N位の順位をつける．次の確率を求めよ．ただし，$m \neq k$とする．

(1)番号kの札が第k位にならない．

(2)番号kの札が第k位にならず，番号mの札が第m位になる．

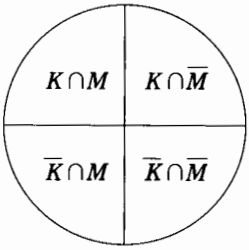
(3)番号kの札が第k位にならず，番号mの札が第m位にならない．

番号xの札が第x位にあるという事象をXで表す．

(1)――→まず$P(K)$を求め，その余事象をとればよい．

$$P(K)=\frac{(N-1)!}{N!}=\frac{1}{N}$$

$$\therefore\quad P(\overline{K})=1-P(K)=1-\frac{1}{N}=\frac{N-1}{N}$$



(2)　$P(\overline{K}\cap M)=P(M\cap\overline{K})=P(M)P_M(\overline{K})$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}=\frac{N-2}{N(N-1)}$$

($P_M(\overline{K})$は(1)のNを$N-1$とおけばよい)

(3)　$P(\overline{K}\cap\overline{M})=P(\overline{K})-P(\overline{K}\cap M)$

$$=\frac{N-1}{N}-\frac{N-2}{N(N-1)}=\frac{N^2-3N+3}{N(N-1)}$$

あるいは

$P(\overline{K}\cap\overline{M})=P(\overline{K\cup M})$←――ド・モルガンの法則(p.6)

$=1-P(K\cup M)$

$=1-\{P(K)+P(M)-P(K\cap M)\}$

$$=1-\left\{\frac{1}{N}+\frac{1}{N}-\frac{(N-2)!}{N!}\right\}=1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N(N-1)}=\frac{N^2-3N+3}{N(N-1)}$$

としてもよい．

発展問題5―順位を決める

n人($n\geqq 2$)がそれぞれ1つのサイコロを同時に振り，出た目の数が最も大きい人を残す．残った人でこのような試行を繰り返し，最後の1人を勝者とする．ただし，すべての目が同じときは引き分けとする．

(1)1回の試行で勝者の決まる確率を求めよ．

(2)$n=3$のとき，2回以内の試行で勝者の決まる確率を求めよ．

解　説　(1) 1人が6の目を出して勝者になる確率は

$${}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{6の目を出した人以外は5，4，3，2，}\\ \text{1のどれかを出しているから5通り!!}\end{array}\right)$$

である．同様にして1人が5，4，3，2を出して勝者になる確率を求めて加えると

$$P_n=\sum_{k=1}^{5}{}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{k}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{6^n}(1+2^{n-1}+3^{n-1}+4^{n-1}+5^{n-1})$$

(2)「$n=3$」として，2回以内に勝者が決まるのは次の3通りの場合がある．

(i)　1回目で勝者が決まるとき——(1)をそのまま利用する．

$$P_3=\frac{3}{6^3}(1+2^2+3^2+4^2+5^2)=\frac{55}{72}$$

(ii)　1回目は3人が同じ目で，2回目に勝者が決まるとき

$$\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^3\times{}_6C_1\right\}\times P_3=\frac{1}{6^2}\times\frac{55}{72}=\frac{55}{2592}$$

└3人とも1～6の同じ目!!┘

(iii)　1回目に2人が残り，2回目に勝者が決まるとき——次の表に示す．

2人の目	6	5	4	3	2
残りの1人	5以下	4以下	3以下	2以下	1

で，その確率は

$${}_3C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{24}$$

└2人が6～2の同じ目!!┘　└残りの1人の負け方┘

さらに，勝ち残った2人のうち1人が勝つ確率は(1)で「$n=2$」として

$$P_2=\frac{2}{6^2}(1+2+3+4+5)=\frac{5}{6}$$

したがって，この場合の確率は

$$\frac{5}{24}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{144}$$

ゆえに，求める確率は(i)，(ii)，(iii)の場合の確率を加えて

$$\frac{55}{72}+\frac{55}{2592}+\frac{25}{144}=\frac{55\cdot36+55+25\cdot18}{2592}$$

$$=\frac{1980+55+450}{2592}=\frac{2485}{2592}$$

らしんばん

➡ (2)で「順位をキッチリ決める」には，(i)，(ii)の場合は「2位決定戦」をやらなければならない——説明をしないが考えてみるとよい．

例題をあげておく．

たとえば

3人がジャンケンで順位を決めるとき

(1) 3人の順位がn回目 ($n \geqq 2$) で決まる確率 P_n を求めよ．

(2) 3人の順位が4回以内に決まる確率を求めよ．

(1)——→「3人が勝負なし(3人であいこ)」，「3人の中の1人だけが勝ち，あるいは負ける」，「2人のジャンケンで勝負なし(2人であいこ)」，「順位が決定する」事象をそれぞれA，B，C，Dとすると，

第k回目に事象Bが起こる場合

は

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & — & A & — & \cdots\cdots & A & — & B & — & C & — \\ 1 & & 2 & & & k-1 & & k & & k+1 & \end{array} \cdots\cdots — \begin{array}{cc} C & — & D \\ n-1 & & n \end{array}$$

となる．ここで事象A，B，C，Dの起こる確率をそれぞれ求めておくと

$$P(A)=\frac{3!+3}{3^3}=\frac{1}{3} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}3!\text{は3人がそれぞれ他と}\\\text{違っているときの場合の数!!}\end{array}\right)$$

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(C)=\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{2人の出し方は「グー」，「チョ}\\\text{キ」，「パー」の3通り!!}\end{array}\right)$$

$$P(D)=1-P(C)$$

$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

これらを組み合せて

$$P_n=\sum_{k=0}^{n-2}\{P(A)\}^k\{P(B)\}\{P(C)\}^{n-2-k}\{P(D)\} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}A,\ C\text{などは起こらな}\\\text{いときもあり得る!!}\end{array}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2-k}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}1=\frac{4(n-1)}{3^n} \longleftarrow \sum_{k=0}^{n-2}1=n-1$$

(2) $P=P_2+P_3+P_4$ ←—— P_1はトウゼン起こり得ない．

$$=\frac{4\cdot1}{3^2}+\frac{4\cdot2}{3^3}+\frac{4\cdot3}{3^4} \longleftarrow$$ (1)の結果に「$n=2,\ 3,\ 4$」を代入して加える

$$=\frac{8}{9}$$

発展問題 6—樹形図

座標平面上で，原点O(0, 0) から出発した点Pが次の規則に従って動くものとする．すなわち，サイコロを振って奇数の目が出たら (x, y) から $(x+1, y+1)$ へ，偶数の目が出たら (x, y) から $(x+1, y-1)$ へ移るものとする．いま，サイコロをN回振るものとし，そのときに通る点Pの座標を $(1, Y_1)$，$(2, Y_2)$，……，(N, Y_N) とする．

(1) $N=5$ とする．$Y_n(1 \leqq n \leqq 5)$ のうちに正のものがちょうど3個ある確率は□である．

(2) $N=5$ とする．$Y_n(1 \leqq n \leqq 5)$ がすべて正である確率は□である．

(3) $N=6$ とする．$Y_n(1 \leqq n \leqq 5)$ がすべて正であり，かつ $Y_6=0$ である確率は□である．

(4) $N=8$ とする．$Y_n(1 \leqq n \leqq 7)$ がすべて正であり，かつ $Y_8=0$ である確率は□である．

(5) $N=8$ とする．$Y_n(1 \leqq n \leqq 8)$ がすべて正である確率は□である．

解　説　最初に「移動の規則」をシッカリと了解しておくことが大切である．

すなわち，点Pの動きは

奇数の目：$(x, y) \longrightarrow (x+1, y+1)$

偶数の目：$(x, y) \longrightarrow (x+1, y-1)$

で，それぞれの確率が $\frac{1}{2}$ である．

(1) $N=5$ のときの点Pの可動範囲は〈図1〉の黒丸となるが，このとき

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5

のうちに正のものがちょうど3個ある場合を数え落としのないように調べ上げなければならない．すなわち

OからはAかBかに進む(他にはない)

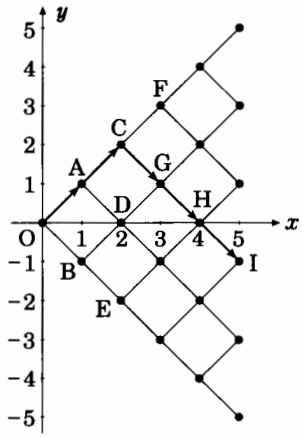
AからはCかDかに進む

BからはDかEかに進む

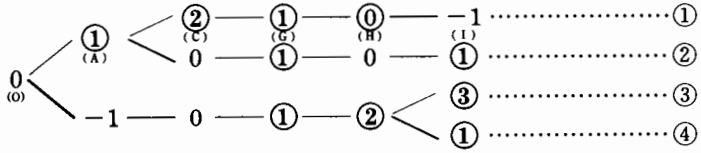
……

のように1つ1つ調べていくと次に示すような「枝わかれ」の図が出来る．

——「**樹形図**」を描く．



〈図1〉



←——(ただし，数値は y 座標の値で，正のものには○印をつけた)

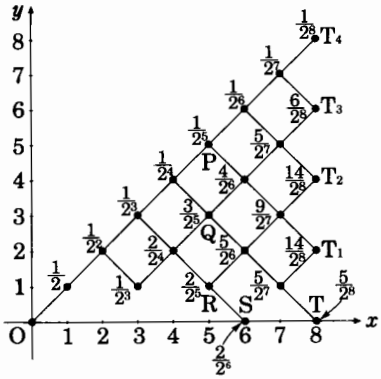
(たとえば，①で表される経路は，OからAに行き，さらにCに達するがCからFに行くことはない(y 座標が正である点が3個より多くなる)．そこでCからGに行き(これで3個)，もう y 座標が正になることは出来ないからHを通りIに達するということである——②，③，④についても確認しておくこと!!)

結局，条件を満たす経路は上の①～④の4通りしかなく，それぞれ「5回の選択(サイコロを振っている)」があるので，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5\times 4=\frac{4}{2^5}$$

$$=\frac{1}{8}\text{(←——①，②，③，④について加法定理!!)}$$

(2)～(5)について——これらについては条件を満たす経路を示した次の〈図2〉をそのまま樹形図として用いることが出来る．図の黒丸の点に示した数値はこれらの点に達する確率である．この数え方については **例題 8** (p.26)ですでに詳しく説明した．



〈図2〉

(2)〈図2〉のP，Q，Rに達する確率を合計すると

$$\frac{1}{2^5}+\frac{3}{2^5}+\frac{2}{2^5}=\frac{6}{2^5}=\frac{3}{16}$$

(3)〈図2〉のSに達する確率は

$$\frac{2}{2^6}=\frac{1}{32}$$

(4)〈図2〉のTに達する確率は

$$\frac{5}{2^8}=\frac{5}{256}$$

(5)〈図2〉の T_1，T_2，T_3，T_4 に達する確率を合計して

$$\frac{1}{2^8}+\frac{6}{2^8}+\frac{14}{2^8}+\frac{14}{2^8}=\frac{35}{2^8}=\frac{35}{256}$$

らしんばん

いくつかの事象にまたがっている「ある確率」を

(i) **数え落としがないように**　(ii) **重複して数えないように**

求めるのはなかなかメンドウである．このようなときの「**心覚え(?)**」に樹形図はきわめて有効である――「**加法定理**」と「**乗法定理**」の**実践**(ヴィジュアル化)と考えればよい．

たとえば

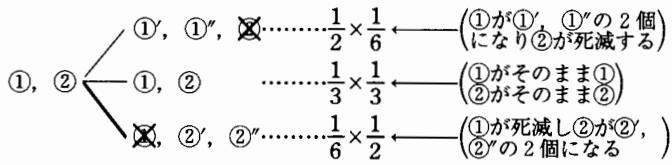
1個のバクテリアが10分後に2個，1個，0個になる確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$ であるとする．1個のバクテリアが

(1)20分後に2個になっている，(2)30分後に6個になっている

確率をそれぞれ求めよ．

(1)――→20分後に2個になっている場合を10分毎の状況がわかるような樹形図を描いて調べると

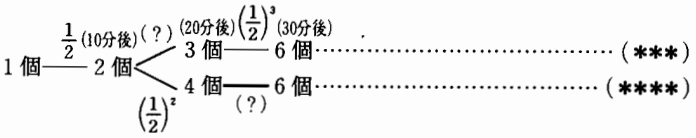
となるが，ここで(**)の「10分後の2個」から「20分後の2個」への変化は「10分後の2個」がどのように変化して「20分後の2個」になるのかがハッキリとしない．この部分をあらためて樹形図に描いてみると



であるからこれを(**)にあてはめて最初からの確率を計算すると

$$\underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}_{(*)}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)}_{(**)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)=\mathbf{\frac{11}{36}}$$

(2)――→これも同様に樹形図を描く．最終的には6個であるから樹形図は



となる．

問題は，まず(＊＊＊)の「10分後の2個」から「20分後の3個」になる「なり方((＊＊＊)の(？)印)」で，これは「どれが2個になるか(あるいはどれが1個のままか)」を考えて ${}_2C_1$ 通りである．

次に(＊＊＊＊)の「20分後の4個」から「30分後の6個」になる「なり方((＊＊＊＊)の(？)印)」についてはもっと詳しく調べてみないとわからない．そこでまた樹形図を描くと

①, ②, ③, ④ ＜ ①′, ①″, ②′, ②″, ③, ④のタイプ――${}_4C_2$通り
　　 ＜ ①′, ①″, ②′, ②″, ③′, ③″, ⊠のタイプ――${}_4C_1$通り

を調べなければならないことがわかる．

そこでこれらを(＊＊＊)と(＊＊＊＊)に入れて最初からの確率を計算すると

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times{}_2C_1\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{(***)}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times{}_4C_2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{6}\times{}_4C_1\right\}}_{(****)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{48}+\frac{1}{32}=\mathbf{\frac{5}{96}}$$

となる．

このように**樹形図を描くことは「調べる過程を1つ1つ素朴に記録していくこと」**であり，「マジメ(？)にやればそれだけの成果を期待することが出来る」ところが有難い．

発展問題7―確率と漸化式(1)

2つの箱があって，そのどちらにも赤球1つ，白球1つの合計2個ずつの球が入っている．両方の箱からでたらめに(無作為に)球を1つずつとり出して入れかえる．この操作をn回引き続いて行なったとき，最初のようにそれぞれの箱に赤球と白球が1つずつ入っている確率を p_n とする．

(1) $n\geqq 2$ として，p_{n-1} と p_n との関係式を求めよ．

(2) p_n をnで表し，さらに $\lim_{n\to\infty}p_n$ を求めよ．

解　説　(1) n回目に2つの箱がともに赤球が1個，白球が1個である事象をA_nで表し，$(n-1)$回目に注目すると，これはA_{n-1}，または$\overline{A_{n-1}}$の場合があり，それ以外にはない．

すなわち，簡単な樹形図で表すと

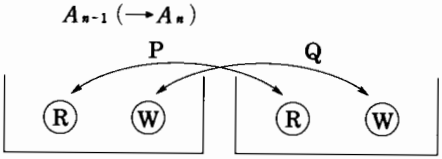
$$\begin{array}{l} A_{n-1}(p_{n-1}) \\ \overline{A_{n-1}}(1-p_{n-1}) \end{array} \begin{array}{l} \overset{(\mathrm{i})}{\searrow} \\ \underset{(\mathrm{ii})}{\nearrow} \end{array} A_n(p_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である(ただし，$n \geqq 2$ とする)．

(i) $A_{n-1} \longrightarrow A_n$

この場合は A_{n-1}，A_n がともに「赤球，白球が1個ずつ」であるので「同色の球の入れかえ」が起こる．ゆえにこの確率は，それぞれの入れかえに対して

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{赤球}(\mathrm{P})}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{白球}(\mathrm{Q})}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

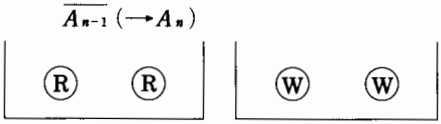


(同色の球の入れかえ)

(ii) $\overline{A_{n-1}} \longrightarrow A_n$

この場合は $\overline{A_{n-1}}$ が「一方の箱に赤球2個，他方の箱に白球2個」であるので「どのような入れかえをしても A_n」となる——確率は「1」としてよい．

$$\left(\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}=1\right)$$



(どのように入れかえてもよい)

ゆえに(i)，(ii)を用いて①を書きなおすと

$$p_n=p_{n-1}\times\frac{1}{2}+(1-p_{n-1})\times 1 \cdots\cdots ②$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{p_n=-\frac{1}{2}p_{n-1}+1\quad (n\geqq 2)}$$

(2)(1)より漸化式は次のように表される．

$$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+1\quad (n\geqq 1)\longleftarrow\left(\begin{array}{l}\text{定形にしたいので}n\text{を}\\ n+1\text{におきかえた!!}\end{array}\right)$$

これは次のように変形される．すなわち

$$p_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{2}{3}\right)$$

このとき数列 $\left\{p_n-\frac{2}{3}\right\}$ は初項：$\left(p_1-\frac{2}{3}\right)$，公比：$\left(-\frac{1}{2}\right)$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\quad \left(p_1=\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\therefore\quad p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\longrightarrow\frac{2}{3}\quad(n\to\infty)\quad\left(\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=0\right)$$

らしんばん

p.51で「**加法定理・乗法定理の応用**」として

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\qquad(\longleftarrow\text{加法定理})$$

$$=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)\ (\longleftarrow\text{各々が乗法定理})\cdots(*)$$

という式を説明した．

本問(1)は(＊)のB，AをA_n，A_{n-1}でおきかえたものである．すなわち

$$P(A_n)=P(A_{n-1}\cap A_n)+P(\overline{A_{n-1}}\cap A_n)$$

$$=P(A_{n-1})P_{A_{n-1}}(A_n)+P(\overline{A_{n-1}})P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)$$

さらに

$$P(A_{n-1})=p_{n-1},\quad P(\overline{A_{n-1}})=1-p_{n-1},\quad P_{A_{n-1}}(A_n)=\frac{1}{2},\quad P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)=1$$

を入れると

$$p_n=p_{n-1}\times\frac{1}{2}+(1-p_{n-1})\times1\longleftarrow\text{本文②!!}$$

ということである．

たとえば

サイコロをn回振って，1の目が偶数回(0回も含む)出る確率p_nは

$$p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}$$

である．これを証明せよ．

問題文を「文字通り」受けとれば

$$p_n=\underbrace{{}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{0\text{回の確率}}+\underbrace{{}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}_{2\text{回の確率}}+\cdots\cdots\cdots$$

を計算せよということである――「**2項定理**(p.32以下)」によれば

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^n={}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)^n={}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n-{}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

この2式の辺々を加えると「符号違い」のものが消えて

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^n=2\left\{{}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

であるが，この右辺の{　}の中が求めるp_nである．

$$\therefore\quad p_n={}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

となる．

しかし，**問題文の「n回振って……」に注目すると「$(n-1)$ 回でどうだったか」が気にかかる．すなわち，「n 回振って 1 の目が偶数回出る」**のは

$$\begin{cases}(n-1)\text{ 回振って 1 の目が偶数回}\longrightarrow n\text{ 回目に 1 は出ない}\\(n-1)\text{ 回振って 1 の目が奇数回}\longrightarrow n\text{ 回目に 1 が出る}\end{cases}$$

場合が考えられ，これ以外にはないからこれを漸化式で表すと

$$p_n=p_{n-1}\times\frac{5}{6}+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{6}\qquad\therefore\quad p_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6}\quad(n\geqq 2)$$

これを定形になおすと

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6},\ p_1=\frac{5}{6}\longleftarrow\left(\begin{array}{l}1\text{ 回振るとき，1 の目が偶数回出る}\\\text{場合とは「0 回出る場合」のこと!!}\end{array}\right)$$

これを変形して

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)\longrightarrow p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad p_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

で，この方がずっとスッキリした扱いとなる．

あるいは，**n 回振って 1 の目が偶数回，奇数回出る確率をそれぞれ p_n，q_n** とすると上に述べた関係は連立漸化式

$$\begin{cases}p_n=\frac{5}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1}\\q_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{5}{6}q_{n-1}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}p_{n+1}=\frac{5}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n\\q_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{5}{6}q_n\end{cases}\qquad\begin{cases}p_1=\frac{5}{6}\\q_1=\frac{1}{6}\end{cases}$$

で表される．すなわち

$$p_n+q_n=p_{n-1}+q_{n-1}=\cdots\cdots=p_1+q_1=1$$

$$p_{n+1}-q_{n+1}=\frac{2}{3}(p_n-q_n)\longrightarrow p_n-q_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(p_1-q_1)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2 式を加えて

$$2p_n=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\qquad\therefore\quad p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

なお，**これらの漸化式の解き方については『諸橋の基礎解析講義』を参照されたい．「2 項間漸化式」については p.138以下，「連立漸化式」については p.171以下に詳しく説明した．**また(2)の「極限」については説明するほどのこともないが，関連事項も含めて整理するには「**『諸橋の微積分講義』**(p.12以下)」を参照されたい．

発展問題8―確率と漸化式(2)

袋の中にa個$(1 \leqq a \leqq N-1)$の球が入っている．いまサイコロを振り，1の目が出れば袋から球を1個とり出し，他の目が出れば球を1個袋の中に入れる．袋の中の球がなくなるかまたはN個になるまでこの操作を続けるものとする．袋の中に最初a個の球が入っているとき，ついに袋の中に球がなくなっしまう確率をP_aで表す．

(1) $1 \leqq a \leqq N-1$に対して$P_a=\frac{1}{6}P_{a-1}+\frac{5}{6}P_{a+1}$が成り立つことを証明せよ．ただし，$P_N=0$，$P_0=1$とする．

(2) $P_{a+1}-P_a$をP_1-P_0で表せ．また，$5P_{a+1}-P_a$を$5P_1-P_0$で表せ．

(3) P_aをNとaで表せ．

解　説　(1)袋の中にa個$(1 \leqq a \leqq N-1)$の球がはいっている．このときサイコロを1回振ることにより袋の中の球の数は

(i)　1の目が出る――$(a-1)$個になる――確率$\frac{1}{6}$

(ii)　1以外の目が出る――$(a+1)$個になる――確率$\frac{5}{6}$

$a=N$，$a=0$でもP_aは定義されるから

$$\boldsymbol{P_a=\frac{1}{6}P_{a-1}+\frac{5}{6}P_{a+1}} \cdots\cdots ①$$

(1個減ってなくなる場合と1個増えてなくなる場合を考える)

(2)　(1)の①を変形して

$$6P_a=P_{a-1}+5P_{a+1}$$

$$\therefore\quad P_{a+1}-P_a=\frac{1}{5}(6P_a-P_{a-1})-P_a=\frac{1}{5}(P_a-P_{a-1})$$

数列$\{P_{a+1}-P_a\}$は初項(P_1-P_0)，公比$\frac{1}{5}$の等比数列であるから

$$\boldsymbol{P_{a+1}-P_a=\left(\frac{1}{5}\right)^a(P_1-P_0)} \cdots\cdots ②$$

また

$$5P_{a+1}-P_a=(6P_a-P_{a-1})-P_a=5P_a-P_{a-1}$$
$$=5P_{a-1}-P_{a-2}=\cdots\cdots=5P_1-P_0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{5P_{a+1}-P_a=5P_1-P_0} \cdots\cdots ③$$

(3)　③から

$$P_{a+1}-\frac{1}{5}P_a=P_1-\frac{1}{5}P_0 \cdots\cdots ③'$$

③′−②を計算すると P_{a+1} が消去されて

$$\frac{4}{5}P_a=\left(P_1-\frac{1}{5}P_0\right)-\left(\frac{1}{5}\right)^a(P_1-P_0)$$

$$=\left(1-\frac{1}{5^a}\right)(P_1-P_0)+\frac{4}{5}P_0$$

$$=\left(1-\frac{1}{5^a}\right)(P_1-1)+\frac{4}{5}\quad(P_0=1)$$

$$\therefore\quad P_a=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^a}\right)(P_1-1)+1\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

ここで $a=N$ とおくと $P_N=0$ であるから

$$P_N=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^N}\right)(P_1-1)+1=0\qquad\therefore\quad\frac{5}{4}(P_1-1)=-\frac{5^N}{5^N-1}$$

これを④に入れると

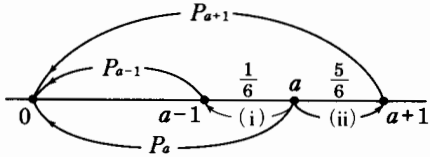
$$P_a=\left(1-\frac{1}{5^a}\right)\cdot\left(-\frac{5^N}{5^N-1}\right)+1=-5^{N-a}\frac{5^a-1}{5^N-1}+1$$

$$=\frac{-5^N+5^{N-a}+5^N-1}{5^N-1}=\frac{5^{N-a}-1}{5^N-1}$$

らしんばん

(1)で「P_a」は「袋の中の球の数が a 個になる確率」ではない!! この誤解から①で $\frac{1}{6}$ と $\frac{5}{6}$ の位置をとり違える間違いが多い．注意してもらいたい．

「P_a」は「袋の中の球の数が a 個の状態からついになくなる確率」である．この「a 個」から「0個」になる「なり方」は



(i) $a-1$ 個となり，そして0個になる

(ii) $a+1$ 個となり，そして0個になる

の2通りである——右図．

すなわち

$$P_a=\frac{1}{6}P_{a-1}+\frac{5}{6}P_{a+1}\longleftarrow\text{乗法定理と加法定理!!}$$

である．

「3項間漸化式の基本的な扱い方」については「『諸橋の基礎解析講義』(p.146以下)」に詳しく述べたのでここでは説明しない．ただ「初期条件」の与え方が違っていることに注目してもらいたい——普通は P_0，P_1 が与えられるが，

本問では P_0, P_N が与えられている．しかし結局は本文④に $P_N=0$ を適用することにより P_1 が決定するわけで基本的には同じことである．

発展問題9—繰り返しの確率

A，B，Cの3高校が野球の試合をする．まず2校が対戦して，勝った方が残りの1校と対戦する．これを繰り返して2連勝した高校が優勝とする．A校がB，C校に勝つ確率をそれぞれp，qとし，B校がC校に勝つ確率を$\frac{1}{2}$とする．次の確率をそれぞれ求めよ．

ただし，$0<p<1$，$0<q<1$ とする．

(1)第1戦にA校とB校が対戦した場合，この第1戦でA校がB校に勝ってA校が優勝する確率．

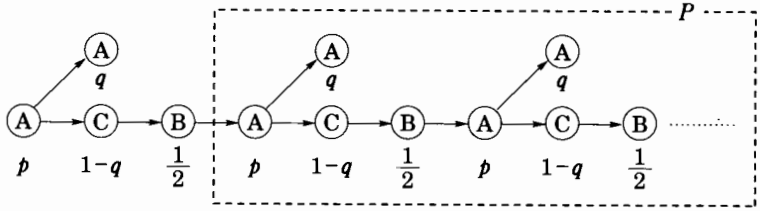
(2)第1戦にA校とB校が対戦した場合，この第1戦でA校がB校に負けてA校が優勝する確率．

(3)第1戦にB校とC校が対戦した場合，A校が優勝する確率．

解　説　(1)樹形図を描いてみるとよい．ポイントは次の2点である．

(i)　**A，B，Cの3校しかない．**

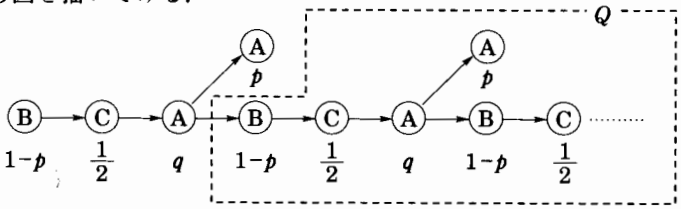
(ii)　**B，C校がA校より先に2連勝してはならない．**



第4戦以降は最初と同じ条件となることに注目したい．したがって求める確率をPとすると「加法定理」と「乗法定理」から

$$P=p\cdot q+p\cdot(1-q)\cdot\frac{1}{2}\cdot P \qquad \therefore\ P=\frac{2pq}{2-p+pq}$$

(2)やはり樹形図を描いてみる．



この場合も第4戦が問題になる．**第4戦でA校が勝てばA校の優勝となるが，負ければ「A校が優勝する確率」は最初と同じ**になる．求める確率Qは

$$Q=(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot q\cdot p+(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot q\cdot Q \qquad \therefore\quad Q=\frac{pq(1-p)}{2-q+pq}$$

(3)第1戦でB校が勝つときの第2戦はB校とA校の対戦であり，A校が勝たなければならないから，第2戦以降は(1)を適用すればよい——第2戦以降「A校が優勝する確率」は(1)で求めたPである．

また，第1戦でC校が勝つときの第2戦はC校とA校の対戦であり，やはりA校が勝たなければならないから，第2戦以降は(1)におけるB校の立場をC校におきかえて考えればよい——(1)のPにおけるpとqを入れかえる．

すなわち，求める確率は

$$\frac{1}{2}\times P+\frac{1}{2}\times(P\text{の}p\text{と}q\text{を入れかえたもの})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2pq}{2-p+pq}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2qp}{2-q+qp}=\frac{pq}{2-p+pq}+\frac{pq}{2-q+pq}$$

らしんばん

➡ 本問で特徴的なことは，樹形図を描いていくと**「最初と同じ状態」が起こり，そこから先は「1まとめ」にして考えることが出来る**という点である．しかし，そのことに気がつかなくても「Aが2連勝する場合の確率」をマジメに拾っていけばよい——(1)で説明する．

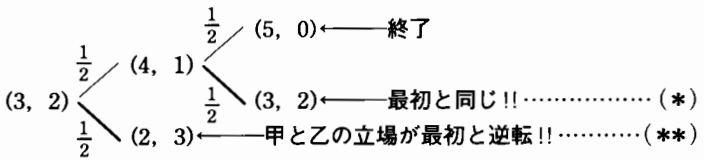
$$pq+\left\{\frac{1}{2}p(1-q)\right\}pq+\left\{\frac{1}{2}p(1-q)\right\}^2pq+\cdots\cdots\longleftarrow\text{無限等比級数!!}$$

$$=\frac{pq}{1-\frac{1}{2}p(1-q)}=\frac{2pq}{2-p+pq}\longleftarrow\frac{a}{1-r}\quad\left(\begin{array}{l}a=pq,\ r=\frac{1}{2}p(1-q)\\ 0<r<1\text{で「和」が存在!!}\end{array}\right)$$

たとえば

甲は3個の球を，乙は2個の球をもっている．ジャンケンで勝った者は負けた者から1個の球をもらうことにする．また，引き分けのときは球のやりとりはないものとする．甲または乙が手もとに球がなくなるまで続けるとして甲が5個の球を得る確率を求めよ．

球の数を(甲，乙)として樹形図を描くと次のようになる．



求める確率をPとすると「(＊)以降の確率はP」,「(＊＊)以降の確率は $1-P$」であるから

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2P+\frac{1}{2}(1-P) \qquad \therefore\ \boldsymbol{P=\frac{3}{5}}$$

あるいは，甲から見て「球を i 個もっている状態から5個の球をもつようになる確率」を P_i とすると

$$P_i=\frac{1}{2}P_{i+1}+\frac{1}{2}P_{i-1} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),\ P_0=0,\ P_5=1$$

であるからこの式から P_3 を求めてもよい．

$$P_4=\frac{1}{2}P_5+\frac{1}{2}P_3 \qquad \therefore\ P_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_3$$

$$\boldsymbol{P_3=\frac{1}{2}P_4+\frac{1}{2}P_2} \longleftarrow \text{求めているものは}P_3\text{!!}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_2=\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_1 \\ P_1=\frac{1}{2}P_2+\frac{1}{2}P_0 \qquad \therefore\ P_1=\frac{1}{2}P_2 \end{array}\right\} \quad \therefore\ P_2=\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_2$$

$$\therefore\ P_2=\frac{2}{3}P_3$$

P_2，P_4 を第2式に入れると

$$P_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_3\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}P_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (＊＊＊)$$

$$\therefore\ 12P_3=3+3P_3+4P_3 \qquad \therefore\ P_3=\frac{3}{5}$$

このとき P_2 を求めると

$$P_2=\frac{2}{3}\cdot P_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}=1-P_3$$

で，(＊＊＊)が上の解法と同じ内容であることが了解される．

発展問題 10―独立試行

ある硬貨を投げるとき，表と裏がおのおの確率 $\frac{1}{2}$ で出るものとする．

この硬貨を8回くり返して投げ，n 回目に表が出れば $X_n=1$，裏が出れば $X_n=-1$ とし

$$S_n=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n \quad (1\leqq n\leqq 8)$$

とおく．このとき次の確率を求めよ．

(1) $S_2\neq 0$，かつ $S_8=2$ となる確率．

(2) $S_4=0$，かつ $S_8=2$ となる確率．

解　説　(1) $S_2\neq 0 \Longleftrightarrow S_2=2,\ -2$ (2回とも表か，2回とも裏!!)

(i) 「$S_2=2$」のとき：2回とも表が出る!!

$$S_8=X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_8=2$$

$$\llcorner S_2=2 \lrcorner$$

$$\therefore\ \underbrace{X_3+X_4+\cdots\cdots+X_8}_{6\text{回}}=0 \longleftarrow \left(\begin{array}{l}1\text{と}(-1)\text{との回}\\ \text{数が同じはず!!}\end{array}\right)$$

この6回は計算するまでもなく「**表と裏が3回ずつ**」だから，この場合の確率は

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\substack{\text{表が}\\2\text{回}}}\times{}_6C_3\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\substack{\text{表が}3\text{回}\\ \text{裏が}3\text{回}}}=\frac{{}_6C_3}{2^8}=\frac{20}{2^8}$$

(ii) 「**$S_2=-2$**」**のとき：2回とも裏が出る!!**

$$S_8=X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_8=2$$

$$\llcorner S_2=-2 \lrcorner$$

$$\therefore\ \underbrace{X_3+X_4+\cdots\cdots+X_8}_{6\text{回}}=4 \longleftarrow \left(\begin{array}{l}1\text{と}(-1)\text{との回数は見た}\\ \text{目だけではわからない!!}\end{array}\right)$$

この6回が「1がx回，(-1)がy回」で構成されるとしてx，yを求める．

$$\begin{cases}x+y=6\\ 1\times x+(-1)\times y=4\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}x+y=6\\ x-y=4\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}x=5\\ y=1\end{cases}$$

ゆえに，この場合の確率は

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\substack{\text{裏が}\\2\text{回}}}\times{}_6C_5\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)}_{\substack{\text{表が}5\text{回}\\ \text{裏が}1\text{回}}}=\frac{6}{2^8}$$

求める確率は(i)(ii)の結果を加えて

$$\frac{20}{2^8}+\frac{6}{2^8}=\frac{26}{2^8}=\mathbf{\frac{13}{128}}$$

(2)「$S_4=0$」であるから，はじめの4回は「裏と表が2回ずつ」である．

また

$$S_8=\underbrace{X_1+X_2+X_3+X_4}_{S_4=0}+X_5+X_6+X_7+X_8=2$$

$$\therefore\ \underbrace{X_5+X_6+X_7+X_8}_{4\text{回}}=2 \longleftarrow \left(\begin{array}{l}1\text{が}x\text{回，}(-1)\text{が}y\text{回}\\ \text{で2になると考える!!}\end{array}\right)$$

残りの4回について調べると

$$\begin{cases}x+y=4\\ 1\times x+(-1)\times y=2\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}x+y=4\\ x-y=2\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$$

ゆえに，求める確率は

$$ {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6\times4}{2^8}=\frac{3}{32} $$

らしんばん

「ナマの入試問題」であるから「表現」はキンキラ(?)しているが**「独立試行」の問題**である．次のように**「x軸上の点Pの移動」**として読みかえればよい．

(i) **表が出れば $X_n=1$，裏が出れば $X_n=-1$**

⟶点Pは表が出れば正方向に1，裏が出れば負方向に1進む．

(ii) **S_n⟶n回目を投げたときの点Pのx座標．**

たとえば

点Pは，x軸上の原点から出発し，サイコロを振って1または6の目が出ればx軸上を正の方向に1だけ進み，その他の目が出ればx軸上を負の方向に1だけ進むものとする．次の確率を求めよ．

(1)繰り返し3回振るとき，点Pが$x=-1$の位置にある確率．

(2)繰り返しn回振るとき，点Pが$x=n-4$の位置にある確率．

(1)⟶「1または6の目が出る事象」をAとおく．

Aがp回，$\overline{A}$がq回起こるとすると

$$ \begin{cases} p+q=3 \\ 1\times p+(-1)\times q=-1 \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} p+q=3 \\ p-q=-1 \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} p=1 \\ q=2 \end{cases} $$

ゆえに求める確率は

$$ {}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^2=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} $$

(2)⟶(1)と同様にして

$$ \begin{cases} p+q=n \\ 1\times p+(-1)\times q=n-4 \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} p+q=n \\ p-q=n-4 \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} p=n-2 \\ q=2 \end{cases} $$

ゆえに求める確率は

$$ {}_nC_{n-2}\left(\frac{2}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{6}\right)^2={}_nC_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2n(n-1)}{3^n} $$

たとえば，p.64の**例題 17**を思い出してもらいたい．これに減点法を適用するとどうなるか．簡単にするために

1題の正解に対して10点，1題の間違いに対して−10点

としてみよう(少し乱暴ではある)．このとき**「60点を得る確率」**を計算するには「x題が正解，y題が間違い」として

$$ \begin{cases} x+y=10 \\ 10\times x+(-10)\times y=60 \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} x+y=10 \\ x-y=6 \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} $$

ゆえに，この確率は

$$ {}_{10}C_8\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2={}_{10}C_2\cdot\frac{3^2}{4^{10}}=\frac{405}{4^{10}} \quad (4^{10}=(2^{10})^2=1024^2=1048576) $$

となる．

なお，この問題のように，サイコロを振るなりして「ある偶然」にまかせて進むような進み方を「乱歩」などと呼んだりもする．酔っ払いが歩いているようでなかなかおもしろい表現ではないか．

発展問題 11—点の移動

平面上で座標$(l,\ m)$に位置する点Pが，1秒後に4個の点

$(l+1,\ m)$，$(l-1,\ m)$，$(l,\ m+1)$，$(l,\ m-1)$

のうちの1点に，それぞれ確率$\frac{1}{4}$で移るものとする．

(1)はじめ原点にある点Pがn秒後に移り得る点の個数を求めよ．

(2)はじめ原点にある点Pがn秒後に原点に移る確率をp_nとして，p_4，p_5，p_6を求めよ．

解　説　(1)上に示した4つの移動をベクトルで表すと

$$ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} $$

n秒後にはn回の移動を考えればよい——$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$をそれぞれp，q，r，s回とすれば，p，q，r，sは当然「n以下の負でない整数」で

$$ p+q+r+s=n \cdots\cdots ① $$

このとき$\mathrm{P}(x,\ y)$は

$$ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}+s\vec{d} $$

$$ =p\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-q\\r-s\end{pmatrix} \cdots\cdots ② $$

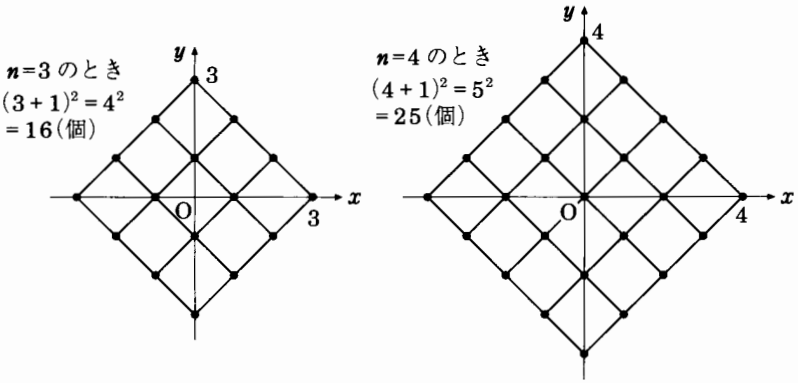
$$ \therefore\ \begin{cases}x=p-q\\y=r-s\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x+y=(p+r)-(q+s)\\x-y=(p+s)-(q+r)\end{cases} \cdots\cdots ③ $$

これに①を用いると

$$ \begin{cases}x+y=n-2(q+s)=n,\ n-2,\ \cdots\cdots,\ -n\\x-y=n-2(q+r)=n,\ n-2,\ \cdots\cdots,\ -n\end{cases} $$

($q+s$，$q+r$は独立に0，1，2，……，nをとり得る!!)

という $(n+1)$ 本ずつの直線の交点を考えて $P(x,\ y)$ が移動し得る点の個数は $(n+1)^2$ 個である.



(2)(i)　p_4 は $n=4,\ x=y=0$ の場合であるから(1)の①, ②にこれらを入れて

$$\left.\begin{array}{l} p+q+r+s=4 \quad (p,\ q,\ r,\ s\text{は負でない整数}) \\ p-q=0,\ r-s=0 \longrightarrow q=p,\ s=r \end{array}\right\} \quad \therefore\ p+r=2$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} p=0 \\ r=2 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\therefore\ (p,\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 2,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 0,\ 0)$$

これらの1つ1つの $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ に対して「その1つをとる確率が $\dfrac{1}{4}$」であるから「1組毎の順列(経路が決まる)」を考えて

$$p_4=\underbrace{\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\vec{c},\ \vec{d}\text{ が各 2 回ずつ}}+\underbrace{4!\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}\text{ が各 1 回}}+\underbrace{\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\vec{a},\ \vec{b}\text{ が各 2 回ずつ}}$$

$$=\frac{6+24+6}{4^4}=\frac{36}{4^4}=\boldsymbol{\frac{9}{64}}$$

(ii)　p_5 は $n=5,\ x=y=0$

$$\left.\begin{array}{l} p+q+r+s=5 \\ p-q=0,\ r-s=0 \longrightarrow q=p,\ s=r \end{array}\right\} \quad \therefore\ 2(p+r)=5$$

左辺は奇数には成り得ないからこれは不成立.　$\therefore\ p_5=\mathbf{0}$

(iii)　p_6 は $n=6,\ x=y=0$

$$\left.\begin{array}{l} p+q+r+s=6 \\ p-q=0,\ r-s=0 \longrightarrow q=p,\ s=r \end{array}\right\} \quad \therefore\ p+r=3$$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l} p=0 \\ r=3 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} 3 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\therefore\ (p,\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 3,\ 3),\ (1,\ 1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1,\ 1),\ (3,\ 3,\ 0,\ 0)$$

$$\therefore\ p_6=\underbrace{\frac{6\,!}{3\,!\,3\,!}\left(\frac{1}{4}\right)^6}_{\vec{c},\ \vec{d}\text{ が各 3 回ずつ}}+\underbrace{\frac{6\,!}{1\,!\,1\,!\,2\,!\,2\,!}\left(\frac{1}{4}\right)^6}_{\vec{a},\vec{b}\text{ が各 1 回ずつ},\ \vec{c},\vec{d}\text{ が各 2 回ずつ}}$$

$$+\underbrace{\frac{6\,!}{2\,!\,2\,!\,1\,!\,1\,!}\left(\frac{1}{4}\right)^6}_{\vec{a},\ \vec{b}\text{ が各 2 回ずつ},\ \vec{c},\ \vec{d}\text{ が各 1 回ずつ}}+\underbrace{\frac{6\,!}{3\,!\,3\,!}\left(\frac{1}{4}\right)^6}_{\vec{a},\ \vec{b}\text{ が各 3 回ずつ}}$$

$$=\frac{20+180+180+20}{4^6}=\frac{400}{4^6}=\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{256}}$$

らしんばん

➡ (1)は $n=2$, 3 などの具体的な場合を図に描いてみれば簡単に見当はつくが，キチンとした説明をするのは難しい．条件としては

①：$p+q+r+s=n$(p, q, r, sは負でない整数)

1 本のみで，それ以外に制約がない．しかし，これに対して与えられたx, y

②：$x=p-q$, $y=r-s$ …… (＊)

ではx, yの範囲を絞り切れないので③の形，すなわち

③：$\left\{\begin{array}{l} x+y=(p+r)-(q+s) \\ x-y=(p+s)-(q+r) \end{array}\right.$ ＞2 本まとめて(＊)の 2 本と同値!!

に変形するとよい．この変形の同値性については「**連立方程式を解く原理**(『**諸橋の数Ⅰ講義**』p.145以下)」を参照されたい．

➡ (2)について――「**多項定理**(p.37)」を思い出してもらいたい，4 項の展開は

$$(a+b+c+d)^n=\sum\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!\,s\,!}a^pb^qc^rd^s \quad \cdots\cdots (**)$$

($p+q+r+s=n$, かつ p, q, r, s は負でない整数)

である．そこで，本文に用いたベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ に注目し

$\vec{b}$ は $\vec{a}$ の逆向き――$\vec{b}$ の個数分だけ x 座標が減る

$\vec{d}$ は $\vec{c}$ の逆向き――$\vec{d}$ の個数分だけ y 座標が減る

ことと，(＊)のx, y がそれぞれ「$p-q$」，「$r-s$」であることを睨(にら)んで(＊＊)のb, d を

$$b=a^{-1},\ d=c^{-1}$$

とおくと(**)は

$$(a+a^{-1}+c+c^{-1})^n=\sum\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!\,s\,!}a^{\overbrace{p-q}^{x}}c^{\overbrace{r-s}^{y}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

と表される．すなわち，**「n回の移動で点 $(x,\ y)$ に達する順列の総数(経路の総数)」を求めるには(***)の左辺を展開し，「a^xc^y の係数」を求めればよいことがわかる．**たとえば本問の p_4 の場合は

$$n=4,\ x=y=0$$

であるから $(a+a^{-1}+c+c^{-1})^4$ の展開式の**「定数項」に注目すればよい．**

一般項から得られる条件は

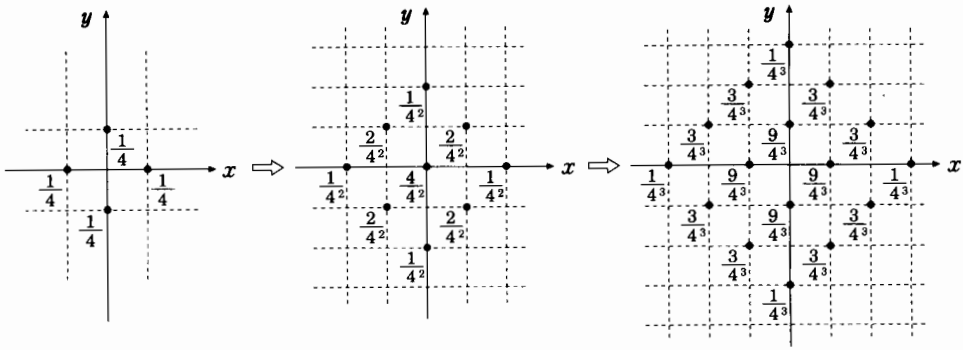
$$\frac{4\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!\,s\,!}a^{p-q}c^{r-s}\longrightarrow\begin{cases}p+q+r+s=4\\p-q=r-s=0\end{cases}$$

となり，本文に述べたのと同様の結果が得られる．

本問は**点Pの移動の方向が「両軸の方向(タテとヨコ)」であり，「少しオシャレ(?)である分だけメンドウ」**であるが，**普通は「独立試行の定理**(p.62)**」とからませた「x軸上の点の移動」として出題される場合が多い**(前問を参照!!)——基本的な考え方は同じことである．

本問(2)についてはうまい方法がある——それは樹形図!!(本問は「樹形(?)」にはならないが……)．

まず，1秒後，2秒後，3秒後の様子を図示すると次のようになる．



1秒後　　2秒後　　3秒後

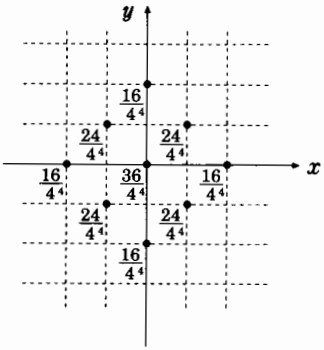
同じ要領で，4秒後の「原点の近くだけ」を図示すると次ページの図のようになる．

$$p_4=\left(\frac{9}{4^3}\times\frac{1}{4}\right)\times4=\frac{36}{4^4}=\frac{9}{64}$$

したがって5秒後には原点に「いない」から

$$p_5=0$$

p_6 については，これと同じ要領で機械的に図を描いて確率を書き込めばよいのだが，そうするまでもなく「あと2秒後」原点に達する点は「4秒後の図」に示した9個の点のみであるから



4秒後

$$p_6=\left(\frac{16}{4^4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times4+\left(\frac{24}{4^4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)$$

$$\times2\times4+\left(\frac{36}{4^4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times4$$

$$=\frac{4}{256}+\frac{12}{256}+\frac{9}{256}=\mathbf{\frac{25}{256}}$$

となる．本文に示した方法とあわせて整理しておくとよい．

発展問題12—攪乱(かくらん)順列とその確率

5つの指定席の，各自の指定席の番号を知らされていない5人の人がいる．この5人の人が無作為に5つの指定席に着席するとき

(1) 5人がみな各自の指定席に着席している確率は□である．

(2) 5人のうちの3人だけが各自の指定席に着席している確率は□である．

(3) 5人のうちの2人だけが各自の指定席に着席している確率は□である．

(4) 5人のうちの1人だけが自分の指定席に着席している確率は□である．

解　説　(1) 5人がみな各自の指定席に着席する仕方は1通りであるから求める確率は

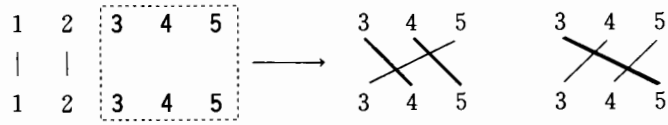
$$\frac{1}{{}_5P_5}=\frac{1}{5!}=\mathbf{\frac{1}{120}}$$

(2) 3人だけが各自の指定席に着席しているのであるから，まず5人のうちの3人が自分の指定席に着席し，この場合の数が ${}_5C_3$ 通り．残りの2人は「入れかわっている」からこの場合の数が1通りである．ゆえに求める確率は

$$\frac{{}_5C_3\times1}{{}_5P_5}=\frac{10\times1}{120}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

(3) 5人のうちの2人が自分の指定席に着席すると，この場合の数が ${}_5C_2$ 通

りで，あとの3人が自分の指定席に着席してはならない．たとえば



で，残りの3人の誰もが自分の指定席に着席しない仕方は2通りである．したがって求める確率は

$$\frac{{}_5C_2\times 2}{{}_5P_5}=\frac{10\times 2}{120}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

(4) 5人のうちの1人だけが自分の指定席に着席する仕方が ${}_5C_1$ 通りで，あとの4人についてはあらためて考えなければならない．たとえば

1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 ←――4人を別に考える．

残りの4人については「着席の仕方」が

${}_4P_4=4!=24$(通り)……①

であるが，**この中から「1人でも自分の指定席に着席している場合」を除かなければならない．**

(i)　4人が全員自分の指定席に着席する仕方は1通り．

(ii)　2人だけが自分の指定席に着席する仕方は，**まず指定席に着席する人の選び方が ${}_4C_2$ 通りで，残りの2人は「入れかえ」で1通り．**

$\therefore\ {}_4C_2\times 1=6$(通り)

(iii)　1人だけが自分の指定席に着席する仕方は，**まず指定席に着席する人の選び方が ${}_4C_1$ 通りで，残り3人については(3)に習って2通り．**

$\therefore\ {}_4C_1\times 2=4\times 2=8$(通り)

①からこれら(i)～(iii)を除くと

$24-(1+6+8)=9$

であるから求める確率は

$$\frac{{}_5C_1\times 9}{{}_5P_5}=\frac{5\times 9}{120}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$$

らしんばん

本問の(1)～(4)の設問は，実は

5人のうち誰も自分の指定席に着席しない確率

を目ざしていると読んでもらいたい．それは「(1)～(4)全体」の余事象の確率として与えられるからである．すなわち，それは

$$1-\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)=1-\frac{76}{120}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

本文の説明でも出て来たこのタイプの順列の解説からはじめることにする．

n人の誰もが自分の指定席に着席しない．

このような順列を「**撹乱順列**」という――フランスの数学者「$P.\ R.$ モンモール(1678～1719)」はこの問題を「n 組の手紙と封筒」で考えたといわれるハナシは有名である．このことから「**モンモールの問題**」といわれるときもある．

実はこの順列を与える漸化式が知られているので紹介しておこう．

「**n 個の撹乱順列の個数を a_n**」とするとき

$$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})\quad(n\geqq 3),\ a_1=0,\ a_2=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

である．たとえば，$a_2=1$ は本問(2)で用いているが，a_3，a_4，a_5 などは

$a_3=2\cdot(a_2+a_1)=2\cdot(1+0)=2$ ←――本問(3)で用いた．

$a_4=3\cdot(a_3+a_2)=3\cdot(2+1)=9$ ←――本問(4)で用いた．

入試では a_5 あたりまで用意しておきたい．a_5 は

$a_5=4\cdot(a_4+a_3)=4\cdot(9+2)=44$

である．本文の方法(5！＝120 から 1 つ 1 つ引いていく)で確かめておくとよい．この数値から「確率」を計算すると

$$\frac{44}{5!}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}$$

となり，(*)に示した結果と一致することがわかる．

さて，(**)の漸化式についてももう少し詳しく説明しておこう．いま「①～ⓝ」の背番号をもつ n 人に対して n 個の指定席を用意する．

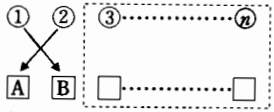
① ② ③ ……ⓝ ←――n人

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

A B C □ ←――n個の指定席

Aに 1 は入らないから，たとえば 2 を入れてみる――Bには何が来るか．

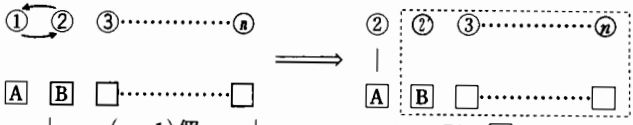
(i) **Bが①のとき：** 1 と 2 との交換が起こっている．



←――($n-2$ 個の撹乱順列!!)

この場合は「3，4，……，nの撹乱順列」として a_{n-2} 通り．

(ii) **Bが①でないとき：** まず，確定した最初の「②」は除いておいて残りを考えるのだが，ここで①を②と書くと



(②(実は①)はBには入らないから ($n-1$)個の撹乱順列!!)

となり，この場合は「②，③，……，ⓝの攪乱(かくらん)順列」として a_{n-1} 通り．

そして，最初のⒶに入れる数は「②，③，……，ⓝ」の $(n-1)$ 通りであるから(i)(ii)とあわせて「攪乱(かくらん)順列の総数 a_n」は

$$a_n=(a_{n-2}+a_{n-1})\times(n-1)$$

すなわち，$(**)$ が成り立つことが確かめられた．

➡ 「攪乱(かくらん)順列の確率 $\dfrac{a_n}{n!}$」の一般の形について――漸化式を利用する．

$$(**):\ a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}),\ a_1=0,\ a_2=1$$

を次のように変形する．

$$a_n=na_{n-1}-a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n-na_{n-1}=(-1)\{a_{n-1}-(n-1)a_{n-2}\}}$$

これより数列 $\{a_{n+1}-(n+1)a_n\}$ は初項 (a_2-2a_1)，公比 (-1) の等比数列であるから，第 $(n-1)$ 項は

$$a_n-na_{n-1}=(-1)^{n-2}(a_2-2a_1)=(-1)^{n-2}=(-1)^n \longleftarrow (-1)^2=1$$

両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!} \longrightarrow \frac{a_{k+1}}{(k+1)!}-\frac{a_k}{k!}=\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$$

「階差数列の公式（『諸橋の基礎解析講義』p.120以下）」を用いると「問題の確率」は

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{a_1}{1!}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{(k+1)!}-\frac{a_k}{k!}\right)\longleftarrow a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$=\underbrace{1-\frac{1}{1!}}_{=0}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

となる．さらに「微積分」で e^x の展開

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$ （「『諸橋の微積分講義』(p.119)」を参照!!）

を知っていれば，この式で $x=-1$ とおくと

$$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots\cdots$$

であることがわかり，この右辺は $(***)$ で「$n\to\infty$」としたものに他ならない．

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}=\frac{1}{e}$$

である．「$e\,(=2.71828\cdots\cdots)$」は実に不思議な数である．

発展問題 13—応用問題

n 個の袋があり，第 k 番目の袋には赤い球が k 個と白い球が $(n-k)$ 個入っている．まず，袋の1つを無作為に選び，その袋から球を無作為に1つとり出して色を見てもとにもどすことをその選ばれた袋で6回くり返すものとする．このとき，赤い球をちょうど3個とり出す確率を P_n として，$\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ．

解　説　k番目の袋が選ばれたとき，6回の「無作為復元抽出」で赤球が3個とり出される確率は

$$ {}_6C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^3=20\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^3 $$

$$ \therefore\quad P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot 20\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^3=20\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^3 $$

$$ \therefore\quad \lim_{n\to\infty}P_n=20\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^3 \cdots\cdots\cdots\cdots ① $$

$$ =20\int_0^1 x^3(1-x)^3dx \longleftarrow \frac{k}{n}\text{ を }x\text{ とおいて被積分関数を決定する!!} $$

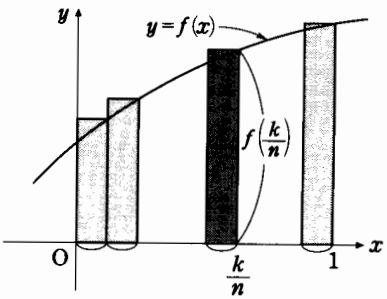
$$ =20\int_0^1(x^3-3x^4+3x^5-x^6)dx=20\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{5}x^5+\frac{3}{6}x^6-\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{1}{7} $$

らしんばん

「確率」を素材とした「積分」の問題である．

本文①で注目しなければならないものは $\frac{1}{n}$ と $\frac{k}{n}$ で

$$ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx $$

である．

このことは「定積分と無限級数(『諸橋の微積分講義』p.189以下)」に詳しく解説した．