はしがき

あえて「イマイチ」

なぜ「イマイチ」かと言われると困ってしまうが、とにかく今、数学で自分の立ち位置がヘンだと思っている諸君を何とかしようという講座である．

次に聞かれるのは「レベルは？」ということだが、これも関係ない．私はそういう「切り口」で生徒を見たことがない．しかし、**やる気**だけは持ってきてもらいたい．

何がヘンなのかがわかればもうヘンではないのだ．こまごましたことはここには書かない．受けてもらえば自然にわかると思う．

この冊子の意味

街の本屋の棚を見てもらいたい．こう言ってははばかるが、問題集はヤマのようにあっても、**基本原理**をキッチリと書いた参考書らしいものはほとんど見かけない．そして受験生は問題集のことを参考書だと思っているらしい．

それに、困ったことに生徒諸君は、問題をたくさん解いて練習すれば実力がつくと思っているようだ．しかし、それはちょっとはあたっているが大きくまちがっている．

そこで、私としては自前で「それらしいモノ」を書くことにした．このテキストは私がパソコンを打ち、河合塾のスタッフに作ってもらったいわば手作りの特注品である．

実際、60 歳を過ぎてのパソコンは少々キツかった．夜中まで血圧を気にしながら人差し指でキーボードをつつく爺さんを想像できるか———正気の沙汰ではない．

まあ、それやこれやでとにかくできた．君たちがしがみつても沈没しない「筏 (いかだ)」はこうして完成した．これには安心してつかまってよい．

ここでハッキリ言っておくが、易しいことは易しいし、難しいことはやはり難しい．これは仕方がない．まして数学が君に擦り寄ってくることなどあろうはずがない．

だから、どうしても超えなければならないヤマならば、君が出かけて行って君の実力で打ち破るほかはないのである．ここにはそのための道具がつまっている．

少なくとも理科系の大学に進もうとする若者が知っていなくてはならない**すべてのことがら**を、その将来を見据えて**べた書き**にしたつもりである．

若者には無限の可能性がある

この歳になって振り返ってみると「人生は意外に短いなあ」とつくづく思う．私にも君の年齢があった．何もわからずウロウロと極楽トンボをやっていたのであろう．

生きるということは次々に可能性を剥奪されることなのです．まず、やりたいことを決めなさい．そして、それに向かって悔いのないように全力で頑張ることだ．

爺さんになった今だから言えることだが、君たち若者が本気になってやれないことなどあるわけがない．そして、それは先に延ばせばそれだけ困難になる．

実際、才能などというものはやっているうちに出てくるものであると私は思っている．何でもやってみなければわかるものか．自分では何も気がついていないだろうが、君の人生はまだ始まってもいない．すべては今から始まるのです．

2014 年 04 月 17 日　　　　諸橋　実

＜追記＞

数学ってナンダ

まあ、いろいろな立場からいろいろな考え方があろうが、私はここで数学はキレイだとか、数学はすばらしい、などというつもりはサラサラない．しかし、とりあえず

数学とは数と量に関する言語である

ということは誰もが素朴に認める共通認識としてもよかろう．まず、ここからはじめよう．

その上でこの科目をサボルとどうなるか．結果、数と量に関する認識があいまいになり、それにかかわるコミニュケーションが破綻する——これは世界の半分を失うことではないか．

何も専門家になれというのではない．しかし、そのことから人々の「判断の信頼性」が失墜し、社会そのものの崩壊にもつながるハナシなのだ．だから本来、どうしてもこの科目を避けて通ることはできない．そういうことなら、いっそハラを据えて徹底的にやればよいではないか．

ヤルなら効率よく

私は「問題演習をドンドンやればデキルようになる」という信仰を否定するつもりはない．確かにそういう一面もある．しかし、去年の問題も、一昨年の問題も解いて、$\cdots\cdots$ のようなことをしていたのでは「来年出るはずの問題」も練習をしなければならなくなるのではないか．

しかし、幸いなことにこの科目はタダの暗記科目ではない．数学はその個々の概念が、「関係」として**体系的に構成されているという特殊な性質がある**．だから、教師の側からいえば、具体的な数値や形式がちがってもどの部分のどういうハナシなのかが大体わかってしまう．

たとえば確率の例でいうと、素人 (生徒) サンは

さいころの問題、くじ引きの問題、袋から球を出す問題、$\cdots\cdots\cdots\cdots$

のように、みんなちがうハナシに見えてしまう．しかし、教師の切り口はちがう．つまり

数学的確率の定義、加法定理、条件つき確率、乗法定理、$\cdots\cdots\cdots\cdots$

と数学の体系に沿って考える．要するに「さいころの問題」と「くじ引きの問題」は素材がちがっても、数学的確率という同じマナイタの上の問題と見るのである．それは、去年の問題も一昨年の問題も、はたまた来年出る問題も、その出所はみな同じということにつながるのだ．

つまり、私に言わせれば、その素材がちがっていても、ショセンは確率という数学の体系のカケラをつついて作っているにちがいない．こちらも個々の知識をバラバラに覚えるのではいかにも非効率である．だったら、その体系ごとゴッソリとさらってしまえばよいではないか．

公式について

あるとき教室で「自分で証明できない公式は使うな！」と言ってみたのだが、そのときの反応がおもしろかった．どうやら、そういうことは考えてみたこともないらしいのである．

大体、自分で確かめてもいないことを振り回す根性も気に入らないが、それより、そういうことではその公式が正しく使えているとは思えない．公式というのは、それぞれの数理現象をとりまとめて数式などで簡潔に表したものだからうまく使えば便利なものではある．しかし、その背景を正しく把握していないと十分に使いこなせない．そういうものなのである．

つまり公式は、先に述べた「数学の体系」で言えば骨に当たるものであろう．しかし、タダの骨だけでは何の役にも立たない．君の手でその証明を確認し、その意味を探り、時には感動もし、そういうことがなければ君にとって血の通った道具にはなり得ない．その上ではじめて、そのありがたさもわかってくるというものである．ラクをした分のツケは大きいぞ．

別人になろう

まず、「知る」と言うことはどういうことか．あるとき授業の後で、「今、言ったことを全て忘れてもらって、全くなかったことにしよう」と言ったら、「それはできない」と言う．

そうです．知るということはそういうことなのです．つまり、知る前の君と知ってからの君とは全くの**別人**なのです．一旦知ってしまったことを忘れてもとの君にはもどれない．

「知る」ことにより、そして**「考える」**ことにより、人は強くなる．生涯、人は強くなり続けるしかない．だから、君の闘う相手は他人ではなくて君自身であり、良くも悪しくも君のいま立っている所がつねに君の出発点なのです．それが生きることの基本原理なのだと私は思います．

2014 年 04 月 17 日　　　　著者記す

目 次

第1章　ベクトル

ベクトルとは何か．筆者の記憶によれば，図形と方程式を習ったときあのメンドウな幾何が計算でイケルのかという，ある種の開放感があったような気がする．ベクトルはそれに加えて平行移動がデキル，つまりつぎたしてもよいという可能性が広がったという筆者の幼い時代のイメージはおおむねそういうことでよかったのだと思う．

初学者の大きな混乱は、たとえば $\overrightarrow{a}$ などと書くとき、あたかもこれを 1 つの数であるかのように錯覚してしまうところにあるのだと思う．$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ などと数の計算に倣った記述をしてはいるが、このばあいの $\overrightarrow{a}$ にしても $\overrightarrow{b}$ にしても、ベクトルというものは数をいくつかセットにしたもので、数そのものではない———ここがシッカリしていないと、内積などになるとさらに混乱してメチャメチャになってしまうのです．

そして、2 次元ベクトル，3 次元ベクトルまでは，1 次独立にせよ内積にせよ常に図形的な対応がその裏打として引っ付いている．ここまでが高校数学と筆者は考える．

ここでチョッと興味のあるハナシをしておくと，大学ではこれを n 次元にまで拡張して多次元量としてのベクトルを扱うことになるのだが，そのような場合でも図形で成り立つ基本的な性質がほぼそのまま成り立つことが知られている．というより，それらの性質の成り立つ集合をベクトル空間と定義するのである．

そのような数学の分野は線形代数学として体系化されるが，さらに長い歴史をもつ微積分はこれを新たな道具として多次元量の微積分，つまりベクトル解析へと発展し，いまや物理学を中心とする理科系の分野ではもちろん，経済学などを含むあらゆる分野にとって必要欠くべからざる科目になっているのである．

まあ，難しいことはいまのところどうでもよいがこの先に，多次元量の 1 次関数の議論である線形代数学が，1 変数の変化の解析である微積分にさらなる展開をもたらしたという事実を知っておくこともよいことではある．

このような視点で考えてみると具体的なモノが引っ付いている 3 次元までのベクトルをそのモデルとしてシッカリ学んでおくことが，先行きいかに有効であるかは，以上の説明だけでも十分わかってもらえると思う．

1.1　ベクトルとは何か

ベクトル (Vector) という言葉の語源はラテン語で**運び屋**という意味であるということをどこかで読んだことがある．矢印を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書けば，モノを地点 A から地点 B まで運ぶことを表すにはモットモらしくて誠に都合がよい．

なかなかウマイ記号を思いついたものである．これを**変位**といい，実際に図に示すときは地点 A(始点) から地点 B(終点) までを矢印を引いて示し，この矢印は**向きと大きさ**の両方を表すのでタダの線分と区別して**有向線分**ともいう———以下，正式名称として**ベクトル**と呼ぶことにする．

1.1.1　代表ベクトルと幾何ベクトル

このハナシの枕で座標を使いたくないと思いながら，結局は座標を使って説明するハメになってしまった———**ベクトル**と**座標**を混同してもらいたくないのだ．

座標を使わなければ，それはそれで別の誤解が発生しそうな気がするので，まあ，点の位置を確認するための**メヤス**とでも考えておいてもらいたい．

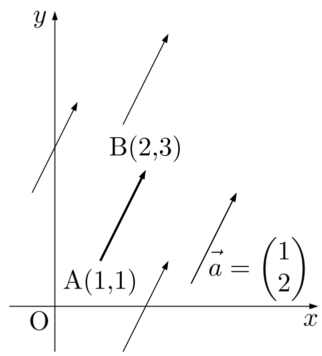
たとえば、2 点 A(1, 1)，B(2, 3) をとると，点 A から点 B までの**変位**は $\boldsymbol{x}$ **方向に 1 目盛り，$\boldsymbol{y}$ 方向に 2 目盛り**だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{始点 と 終点 が確定している！}$$

のように表すことにする．

このとき**変位**だけを取り出して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a} \longleftarrow \text{変位だけ だから無数にある！}$$



と表すと，これは始点も終点指定されていないからこの平面上に**無数**に存在する．

これに較べて上記の $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ は始点も終点もキマッテいるから**ただ 1 つ**に確定する———$\vec{a}$ で表される無数のベクトル集団のすべてを**代表**していると考えて，以下そのように扱う．

このとき $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ を $\vec{a}$ で表される**ベクトル集団の代表ベクトル**という．つまり

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$:　ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}$ を表す有効線分$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

$\vec{\boldsymbol{a}}$　:　有効線分 $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ の表すベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で代表されるベクトル ($\vec{a}$ で表されるベクトル集団のこと) を**ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$** というときもある．

一般に**ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}$** というときは**平行移動**してこれに**重なる**ベクトル集団の個々のベクトルの**すべて**を表しており，したがって**始点を選ばない**．要するに $\vec{a}$ は**住所不定，神出鬼没，どこでもドアー**なのです———これこそがベクトルの**真髄**である．

たとえば、上記の例でいえば点 A を始点にとる $\vec{a}$ が，**オレが代表ベクトルだ**と言えばそれが代表ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ そのものになる．このような視点で $\vec{a}$ をとらえるときこれを特に**幾何ベクトル** (あるいは**矢線ベクトル**) という———普通，単に**ベクトル**というときはこの幾何ベクトルのことをさしていると思ってよい．

そういうことだから，ベクトルの実際の運用についてはどこに平行移動して継ぎ足してもよいことになり，だから図形問題で**おいしい**計算ができるのである．

さてここで，そのベクトルの**成分**と**大きさ**についても説明しておこう．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動して $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (ただし O は原点) に**重なる**とすると

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

となり，点 P(1, 2) として **P** の**座標**が決まる．この**座標の値**を $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ の**成分**という．

そして，$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ の**大きさ**を求めるには**絶対値**をつけて次のように計算する．すなわち

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

である．

＜補足説明＞「ベクトルの加減」に向けてのコメント

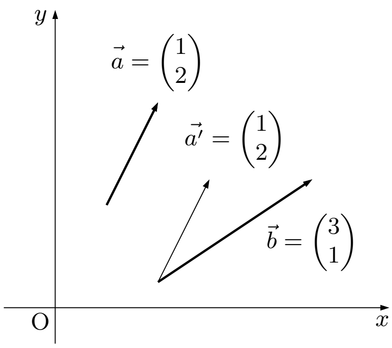
上記は、まあうまく解説したつもりだったが、読み返して見ると何のためにこんなことをやっているのかを疑問に思うかも知れない．

ここでは、特に**幾何ベクトル**という**概念**の**導入**に注目 してもらいたい———ここがわかっているようで何か怪しいのだ．**幾何ベクトル**のことを**矢線ベクトル**と書いている本もあるが同じことだから振り回されてはならない．

まずは、問題点を整理しておく．次の図を見てもらいたい．2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ でその和

$$\vec{a} + \vec{b} \longleftarrow \ \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{の位置関係に注目！}$$

を構成する場合を考える．



物理の教師ならば何の躊躇もなく、まずは一方を**平行移動**して他方と始点を揃える．

そして平行四辺形を作り対角線の矢線ベクトルをその和とすると言うだろう．

あるいは、一方を**平行移動**して他方の終点に継ぎ足し、その結果として得られる矢線ベクトルをその和とする、と言うかも知れない．

まあ、**変位**としては同じだからそれはそうなのだが、もうチョッと精密に考えてもらいたい．それは $\vec{a} + \vec{b}$ と言ったって、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ とがアッチとコッチに離れているからキモチがわるい．

それを図の $\vec{a}$ を $\vec{a'}$ のように勝手に「**平行移動して同じ**」とやってよいものか．離れているからにはちがうものだろう．数学ではここのところをどう説明しているのだろう———スッキリしておきたいではないか．

まず、任意の点を始点として、しかも向きも長さもマチマチでバラバラな、任意の代表ベクトル**全体**の**集合** S を想定してもらいたい———トウゼン個数は無限個である．

次に、たとえば $\overrightarrow{a}$ を

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$\longleftarrow$ 右に 1、上に 2 の変位！

として、任意の点を始点として $(*)$ で確定する無限個の代表ベクトルの集合 M を想定してもらいたい．そうすると、集合 M は集合 S から**「ある性質」**、この場合で言えば「$(*)$ で表される性質」を持つ要素を区別して取り出した部分集合であることがわかる．そこで、集合 M の要素の始点に関する情報を**無視**して、その**「ある性質」**にだけ注目 するのである．

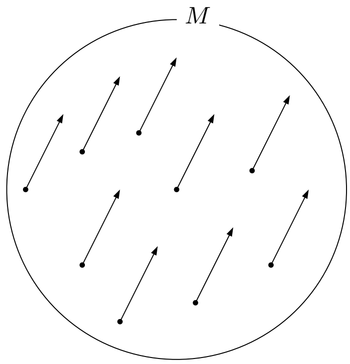
そうしておいて、任意の点を始点にとることを許せば、どこに平行移動して継ぎ足してもよい**幾何ベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$** が集合 M に対してただ 1 つ**「$(*)$ の形」**で確定することがわかるだろう．

こうして抽出された**成分表示**が**ベクトル**という**概念**なのだ———わかってもらえただろうか．

それは他の幾何ベクトル $\overrightarrow{b}$, $\cdots$ などについても同様である．

こういう方法を、数学用語では**「類別する」**というのだが、それは $\overrightarrow{a}$ を、それとは向きまたは長さのちがうベクトルと区別するというほどの理解でよい．

ここで、あらためて「類別する」などという聞きなれない数学用語にビックリするかも知れないが、整数で「剰余類に分ける」ということをすでにやっているではないか．



どれもが $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ なのだ！

ともかくこのようにして、始点や終点を固定せず、**変位**だけを抽出した**幾何ベクトル**という**新しい数学的概念**を**導入**することができた．

つまり、座標表示よりさらに融通の効く、発展的な**成分表示**を獲得した ことになる．そしてそのことにより、図形問題、あるいはその延長線上の議論は目の覚めるような展開をすることになるのである．

< end. >

1.1.2　変位は”たす”ことができる

ベクトルはショセン運び屋だから，モノを **A** から **B** に運び，さらに **B** から **C** に運ぶとすると結局 **A** から **C** に運んだことになる．

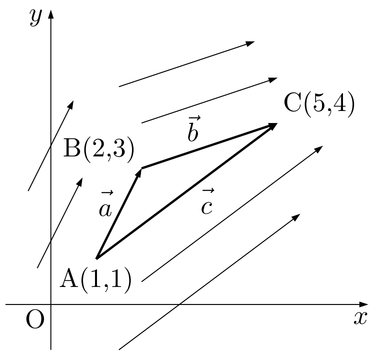
A(1, 1), B(2, 3), C(5, 4) とすると代表ベクトルの関係は

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

だが，それぞれのベクトルを幾何ベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{a},\qquad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\vec{c}$$



で，$\boldsymbol{\vec{c}}$ の $\boldsymbol{x}$ 成分，$\boldsymbol{y}$ 成分はそれぞれ $\boldsymbol{\vec{a}}$ と $\boldsymbol{\vec{b}}$ の $\boldsymbol{x}$ 成分の和，$\boldsymbol{y}$ 成分の和になっている．

すなわち

$$\boldsymbol{\vec{a}}+\boldsymbol{\vec{b}}=\boldsymbol{\vec{c}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

何を言いたいかというと (∗) は代表ベクトルの関係，(∗∗) は幾何ベクトルの関係である———特にここを言いたい．

要するに、図形問題を解決する現場では、<u>それぞれの状況に応じた代表ベクトルで記述されるさまざまな関係が，実際はそれらを代表ベクトルとする適当な幾何ベクトルで計算される</u> ということなのだ．

それは，たとえば $\vec{a}+\vec{b}$ などについても $\vec{a}$ の先端に $\vec{b}$ を継ぎ足そうと，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の対角線と考えようと一切かまわないということである．

1.2　ベクトル入門

ベクトルを学ぶ目的は当面，図形問題を計算で解決することにあると言ってよい．あえて**入門**と書いたわけは，まずベクトルの**加減**，**実数倍**の演算規則の意味とその先に展開するベクトルの 1 **次結合**とその応用など，**内積**の前段階のベクトルをすべて絡め取ろうという目論みである———著者としては内積の**前**と**後**に分けて学ぶのが効果的と思う．

なお，空間 (3 次元) ベクトルは平面 (2 次元) ベクトルの扱いに準ずるので特に項目を立てず，必要な場面で解説することにした．これは**ベクトル**というものを**早く**しかも**正確に**理解することを最優先した結果であると思ってもらえばよい

1.2.1　ベクトルの加減法と実数倍

ここでベクトルに数の演算に似た**加法**，**減法**，**スカラー (実数) 倍**の演算を定義する．ただし，あくまでベクトルは**数ではない**．数でないものに数をモデルにした演算を設定していることを意識しながら以下を読み進めてもらいたい．

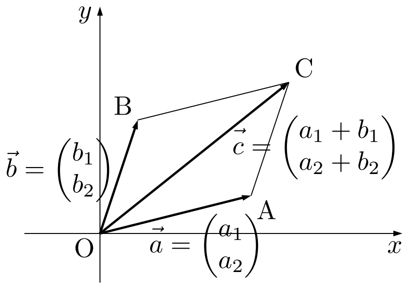
1.2.1.1　ベクトルの和 (加法) の定義

前項でベクトルはどこへもっていって**継ぎ足してもよい**と言った．

たとえば右の図で $\vec{a}+\vec{b}$ を作図するにはどうするか——こちらの**都合**に合わせて**幾何ベクトル**を**配置**し，そこに**代表ベクトル**で表示すればよい．

まず，$\vec{a}$ をトメておくなら $\vec{b}$ を**平行移動**して $\vec{a}$ の先端に**継ぎ足す**ことができる．

$\vec{a}, \vec{b}$ の和, すなわち $\boldsymbol{\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}}$ はこうして作図されるが，得られた $\vec{c}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ を隣り合う 2 辺とする**平行四辺形**の**対角線**で表されるベクトルに他ならない．



このことを成分で表すと

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{b}$ をトメて $\vec{a}$ を $\vec{b}$ の先端に継ぎ足してもトウゼン同じ結果が得られる．これらについては座標軸を睨めば改めて説明するほどのこともない．しかし，1 つだけ**注意**しておかなければならないことがある．それは，ベクトルは**数ではない**ということ——冒頭では**変位**と言った．それは座標軸を意識した成分で表される．

＜メモ＞————————————————————————————————

■ **ベクトルは数ではない**

上記の計算では数の計算と同じ記号 "+" を用いてベクトルの和を $\vec{a}+\vec{b}$ を表したが，これは数の和の場合とは決定的に**ちがう**——ここの例でいえば $\vec{a}$ は数 a_1 と数 a_2 をセットにしたもの，$\vec{b}$ は数 b_1 と数 b_2 をセットにしたものであり，それらベクトルは数そのものではない．上記の計算は**第 1 成分の和** a_1+b_1 と**第 2 成分の和** a_2+b_2 を**同時に実行**しているのである．

そしてこれらの演算については数の演算の場合と同様に**交換則**，**結合則**が成り立つがこれらについては説明するまでもなかろう．

このように数学は**数でないもの**に数で成り立つ演算と類似の演算を設定しドンドンその世界に取り込んできたということもできる．

それはこの先**ベクトルの内積**，**行列**，1 **次変換**と進むうちに自然に明らかになってくるのだが，われわれ学ぶものとして最も注目すべきポイントは，**数でないもの**について設定された**演算**は数の演算と**どこが違うか**というこの 1 点であると言ってよい．

————————————————————————————————

1.2.1.2　ベクトルの差 (減法) の定義

さて，**ベクトルの差** (減法) の定義についてはどう理解すればよいか．大体，数の演算についてさえ**差**とか**負の数**の説明は具体的な**イメージ**が追いつかずなかなか難しい．

ベクトルの差 $\vec{a}-\vec{b}$ を定義するには, まず**基準**となるベクトル (数の場合でいえば 0) を定義する．

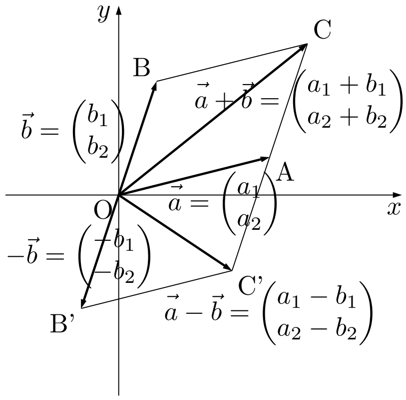
$$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \longleftarrow \textbf{変位ナシ！}$$

次に，上記の数の**減法**の定義と同様に

$$\begin{aligned}\vec{0}-\vec{b}&=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\end{pmatrix}=-\vec{b} \longleftarrow \boldsymbol{-\vec{b}}\ \textbf{の定義！}\end{aligned}$$

とキメル———**和** (加法) に帰着させて**作図**する．

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=\vec{a}+(-\vec{b})\\&=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$



となる (右図)．

ちなみに $-\vec{b}$ は $\vec{b}$ に対して**等大**で**逆向き**のベクトルである．

<メモ>————————————————————————————————

■ **負のベクトルとはナンダ！**

まず，数でないベクトルにマイナスの符号をつけて**負のベクトル**を導入したことに違和感はないか．それをナットクするには**負の数**そのものがどこから来たものか，どのように形成されたものか，その素性を突き止めておく必要がある．

数についていえば，まず記号"+"は**大きい**という積極的な意味があり，記号"−"は**小さい**というこれも積極的な意味があることは誰も異存はあるまい———それは**何に対して**か．

記号"+"については問題なかろうから記号"−"の説明から始めよう．たとえば

$$4-2=2,\ 3-2=1,\ 2-2=0 \longleftarrow 2,1,0 \text{ は } 4,3,2 \text{ より } \textbf{2 だけ小さい！}$$

だが，ハナシはここで行きヅマル．この**基本原則**を貫こうとすれば 1 より 2 だけ小さい数，0 より 2 だけ小さい数などを記述しなければならない．つまり，**0 より小さい数**を作り出さねばならなかった———**負の数の誕生**である．そしてこれらのことから **0 に対して**，これを**基準**に 2 だけ小さい負の数 −2 を各数に**加える**ことでそれぞれの数より 2 だけ小さい数が得られる**差** (減法) という演算規則を確立したものと思われる．要するに，負の数はその必要から人々の知恵で**人工的に作られた数**なのである．

それを R. **デカルト** (1596−1650 フランス) は**数直線**上に見せてくれた．さらに，もう 1 本の数直線を交叉させることで平面上の任意の点を表示する方法論を開発した．おそらくこれが**座標平面の起源**であろう．

まあ，そういうことではあろうがここから数の体系が構成され，やがて数を並べてセットにしてこれをベクトルとし，**ベクトル空間**という概念が形成されるにいたる経緯ははるかなはるかな行程であったにちがいない．

————————————————————————————————————

1.2.1.3　スカラー (実数) 倍の定義

ここまでくれば，もう図を描いて説明するまでもなかろう．
すなわち、k を実数として

$$k\vec{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} \longleftarrow \textbf{各成分が } \boldsymbol{k} \textbf{ 倍！}$$

である．

また、$\boldsymbol{k < 0}$ のときは上記のようにベクトルの向きが**逆向き**で，その大きさが $|\boldsymbol{k}|$ 倍となる．

1.2.2　1 次独立と 1 次従属

1 次独立という言葉は高校の教科書には出てこない数学用語だが，ヒビキがよいのでここではあえて使うことにする．また，1 次独立でない場合を **1 次従属**という．

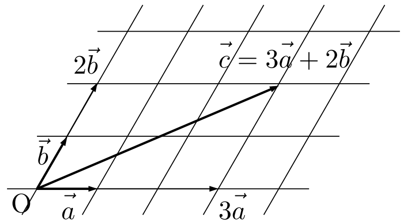
これらの概念をうまくイメージするためのシンプルな例として，まずは平面上のベクトルで説明しよう．

1 次独立とはこの平面上の 2 つのベクトルがともに $\vec{\mathbf{0}}$ でなく平行でもない状況のことを表している．それでは，**1 次独立**だと何がありがたいか．

まず右の図を見てもらいたい．図のベクトル $\vec{c}$ がベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$$

と表されることに異存はあるまい．このとき，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との **1 次結合**で表されたという．



ところが **1 次従属**だと、2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とが平行か、またはいずれかが $\vec{0}$ だからそうはいかない．図のグリッド (格子状のワク) そのものが上記のベクトルに平行な直線上，または原点につぶれてしまう——$\vec{a}$ と $\vec{b}$ をどう組み合わせてもソッポを向いている $\vec{c}$ をそれらの 1 次結合として表すことはできない．これらは明らかに一組 2 つのベクトルの異なる立場のあり様である．

一方，このハナシは，実は一般には次のようなキレイな形にまとめられている．すなわち，n 個のベクトル $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots\cdots,\vec{a_n}$ に対して $k_1,\ k_2,\ \cdots,k_n$ を実数として

$$k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+\cdots\cdots+k_n\vec{a_n}$$

を n 個のベクトル $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots\cdots,\vec{a_n}$ による 1 次結合という．

そこで、この結果を $\vec{\mathbf{0}}$ とおく．すなわち

$$\boldsymbol{k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+\cdots\cdots+k_n\vec{a_n}=\vec{0}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が　$\boldsymbol{k_1=k_2=\cdots\cdots=k_n=0}$　のときに限って成り立つならば n 個のベクトル $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots\cdots,\vec{a_n}$　は **1 次独立**であるという．

そうでないとき，すなわち　$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_n$　のうちに，少なくとも 1 つ 0 でないものがあって，なお $(*)$ が成り立つならば n 個のベクトル　$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots\cdots,\vec{a_n}$　は **1 次従属**であるという．

ざっとこんな具合だが，これが 1 次独立，1 次従属の本来の定義である. しかし，これではあまりにキレイすぎて冒頭に述べた図形的な状況との関係がよく見えない．

いずれ大学では n 次元ベクトルで議論することになるのだが、ここでは，上記の n で具体的な図形が引っ付いている場合の

$$\boldsymbol{n=2}\ \longrightarrow\ \text{平面ベクトル}\qquad \boldsymbol{n=3}\ \longrightarrow\ \text{空間ベクトル}$$

の場合を素材として具体的な図形でウラをとり，上記の定義の意味を確認することが主な仕事であると思ってもらいたい．

1.2.2.1　平面ベクトルの 1 次独立

冒頭に述べたように **1 次独立**である 1 組のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 つの平面を張り，その平面上の任意のベクトル $\vec{c}$ はそれらの **1 次結合**として次のように表される．

すなわち

$$\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\,\vec{b}\ (x, y}\ \text{は実数}\boldsymbol{)}$$

まあ，ここまでは認めるとしよう．しかし，その表現の**一意性**について問題が残る．

つまり，同じベクトル $\vec{c}$ が上記とは違う実数 x, y の組合せで表されることはないか，という不安のことである．

上に示した図で見るかぎりそんなことは**ナイ**にキマッテイルとは思いつつ，3 次元ではどうなるかなどと言われるとチョッと**心もとない**ではないか．

実はそのことをキチンと説明するのが次の**定理**である．

平面ベクトルの 1 次独立

> 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が **1 次独立**であるとき
>
> (1)　$\boldsymbol{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \iff \alpha = \beta = 0}$
>
> (2)　$\boldsymbol{x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b} \iff x = x',\ y = y'}$
>
> (ただし，$x,\ y,\ x', y'$, は実数とする)
>
> が成り立つ．

（解説） (1) は先に述べた**本来の定義**の $\boldsymbol{n = 2}$ の場合のハナシである．

特に (2) が重要で，これは上記の**一意性**を保証するものである．

証明については (1)(2) とも**必要性**と**十分性**を示さなければならないが，(2) は移項して (1) をそのまま利用すればよい．

(1) まず，**必要性** (右向き) の証明は**背理法**を利用する———背理法の**典型的**な応用例！

もし $\beta \neq 0$ とすると

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \longrightarrow \vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} = k\vec{a}\quad (\,\vec{b}\ \text{は}\ \vec{a}\text{と平行！})$$

これでは k が実数で条件に反するから $\beta = 0$，同様にして $\alpha = 0$ となる．

次に**十分性** (左向き) だが, まあこれは**明らか**としてよかろう．

(2) 同じベクトル $\vec{c}$ が

$$\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},\ \ \vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b}}$$

のように 2 **通り**に表された場合，**実は 1 通り**であることを確認する定理である．

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}\ (= \vec{c}\text{とおく}) \iff (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$$

ここで (1) を用いると、$\vec{a}$と$\vec{b}$ が 1 次独立であることから

$$x - x' = 0,\ \ y - y' = 0 \quad \therefore\ x = x',\ y = y'$$

すなわち，$\vec{c}$ は $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$ の形でただ 1 **通り**に表される———**一意性**が保証された！

<メモ>――

■ **1 次独立と成分**

上記のハナシは**成分**で説明するとわかりやすい．以下，その**一意性**の意味を確認するための簡単な実例を挙げておく．

<例 1 >

3 つのベクトル

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$$

で，$\vec{c}$ を $x\,\vec{a}+y\,\vec{b}$ の形で表せ．

(解) $\vec{c}=x\,\vec{a}+y\,\vec{b}$ の x,y を求めるのだからこれを成分で表すと

$$x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ \begin{cases}x-y=-3\\x+3y=-5\end{cases}$$

これは**連立方程式**だから解いて

$$x=-\frac{7}{2},\ y=-\frac{1}{2}\qquad \therefore\ \ \vec{c}=(-\frac{7}{2})\,\vec{a}+(-\frac{1}{2})\,\vec{b}$$

と，まあハナシはカンタンだが，さてこのことは何を意味するか――x,y が**ただ 1 組**だけ求まったということは $\vec{a},\ \vec{b}$ が 1 **次独立**ということに他ならない．このことを**成分**で確認しておこう．

$\vec{a},\ \vec{b}$ が 1 次独立であるための条件

$$\boldsymbol{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}\iff\alpha=\beta=0}\ \ ，\text{ただし }\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\text{とする！}$$

は左側の条件が成り立つのは $\boldsymbol{\alpha=\beta=0}$ **のときに限る**ということである．すなわち成分で

$$\alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad\therefore\ \begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta=0\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\a_2\alpha+b_2\beta=0\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

これを $\alpha,\ \beta$ の方程式とみて $\alpha=\beta=0$ とキマル条件を求める．

①× b_2 − ②× b_1 : $(a_1b_2-a_2b_1)\alpha=0$

②× a_1 − ①× a_2 : $(a_1b_2-a_2b_1)\beta=0$

ここで，$\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1=0}$ とすると $\alpha,\ \beta$ は**ナンデモイイ**ことになって条件を満たさない．

ゆえに，$\alpha=\beta=0$ のときに限る条件は $\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1\fallingdotseq 0}$ である．以上まとめると

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\text{ が }\mathbf{1}\text{ 次独立 }(\ \boldsymbol{\vec{a}\not\parallel\vec{b}}\ )\ \longrightarrow\ \boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1\fallingdotseq 0}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\text{ が }\mathbf{1}\text{ 次従属 }(\ \boldsymbol{\vec{a}\parallel\vec{b}}\ )\ \longrightarrow\ \boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1=0}$$

だが，本問についていえば $\vec{a},\ \vec{b}$ の成分を上記にならって計算すると

$$1\cdot 3-1\cdot(-1)=3+1=4\fallingdotseq 0$$

から，与えられた $\vec{a},\ \vec{b}$ が 1 **次独立**の場合であることが確認される．

<例 2 >

同一平面上の 3 つのベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は 1 次従属である．このことを証明せよ．

(解) 先に述べた**本来の定義**の $n=2,3$ のときを思い出してもらいたい．

(i) まず，$\vec{a},\vec{b}$ が 1 次独立であるとすると

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\qquad\therefore\ \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+(-1)\vec{c}=\vec{0}$$

ここで，$-1 \fallingdotseq 0$ だから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立ではない——1 次従属である．
(ii) $\vec{a}, \vec{b}$ が 1 次従属ならば

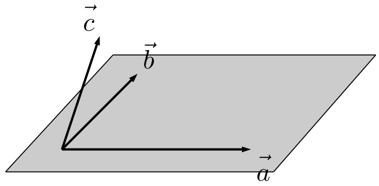
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \ (\alpha \fallingdotseq 0, \text{または}\beta \fallingdotseq 0)$$

$$\therefore \quad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0} \ (\alpha \fallingdotseq 0, \text{または}\beta \fallingdotseq 0)$$

で，係数のすべてが 0 とはならないから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立ではない——1 次従属である．
で，一件落着！
　結局，4 つ以上のベクトルについても同じことがいえるから，同一平面上で 1 次独立となるベクトルは 2 つしかないことがわかる．

-

1.2.2.2　空間ベクトルの 1 次独立



平面ベクトル (2 次元) の 1 次独立は，要するに 2 つのベクトルの**向きの関係**のハナシだったが，これは **3 つのベクトル**の向きの関係のことである．

状況としては，まず 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ で平面を作るとき第 3 のベクトル $\vec{c}$ がこの平面に対して**起きている** (平行でない) 場合のことである．

これも**定理**として次のように表される．

空間ベクトルの 1 次独立

> 3 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が 1 **次独立**であるとき
>
> (1) $\boldsymbol{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \iff \alpha=\beta=\gamma=0}$
>
> (2) $\boldsymbol{x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=x'\vec{a}+y'\vec{b}+z'\vec{c} \iff x=x',\ y=y',\ z=z'}$
>
> (ただし，係数は実数とする)
>
> がなりたつ．

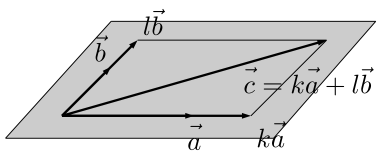
（解説） ———先に述べた**本来の定義**の $n=3$ の場合である．

その扱い方は基本的には平面ベクトルと同じだから，(1) の**必要性** (右向き) について証明すればそれでたりる．

それを以下に示しておく———あとの説明はサボル．

もし，$\gamma \fallingdotseq 0$ とすると

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \longleftarrow \vec{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{b}=k\vec{a}+l\vec{b} \quad (k,l \text{ は実数})$$



で，$\vec{c}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とで作られる平面に**ベッタリ引っ付いている** (あるいは平行) ことを示している．

しかし，これは上記の 1 次独立の条件に反する．

ゆえに $\gamma=0$ であるが，他の場合も同様だから

$$\alpha=\beta=\gamma=0$$

以上のことから，3 つのベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が 1 **次独立**であるとき，それらで張られる空間上の任意のベクトル $\vec{d}$ はこれらの 1 **次結合**

$$\boldsymbol{d=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}} \quad (x,y,z \text{ は実数})$$

として**一意的** (ただ 1 **通り**) に表されることがわかる．

ちなみに，**1 次従属**の場合は，上図のように 2 つのベクトルが平面を張る場合の他に，1 つの直線上につぶれたり，さらには $\vec{0}$ につぶれるなど，1 次独立でないすべての場合を含んだ表現のことである．

＜メモ＞

■ **空間ベクトルの 1 次独立と成分**

3 次元で要素が 3 つになるとかなり厄介だが**基本原理**は同じことだ.

＜例 1＞

(1) 4 つのベクトル

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\ \vec{d}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$$

について，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が 1 次独立であることを示し，$\vec{d}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表せ.

(2) ベクトル $\vec{l},\ \vec{m},\ \vec{n}$ が 1 次独立のとき，次のベクトル $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ は 1 次独立か.

(i) $\vec{p}=\vec{m}+\vec{n},\ \vec{q}=\vec{n}+\vec{l},\ \vec{r}=\vec{l}+\vec{m}$

(ii) $\vec{p}=2\vec{l}+\vec{n},\ \vec{q}=\vec{l}+\vec{m},\ \vec{r}=\vec{l}+3\vec{m}-\vec{n}$

(解) (1) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が 1 **次独立**である条件は

$$\boldsymbol{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}\iff\alpha=\beta=\gamma=0}$$

だから，成分計算でこれを確めればよい.

$$\begin{aligned}\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=&\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}2\alpha-\beta+3\gamma\\-\alpha+3\beta+2\gamma\\3\alpha+2\beta-\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これを解いて (計算省略) $\alpha=\beta=\gamma=0$ を得る———十分性は明らか.

ゆえに，3 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は 1 **次独立**である.

このとき，$\boldsymbol{\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}}$ の $\boldsymbol{x,y,z}$ を求めるのだがこれらを成分で表すと

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\begin{pmatrix}2x-y+3z\\-x+3y+2z\\3x+2y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \ 2x-y+3z=4\quad -x+3y+2z=2\quad 3x+2y-z=0$$

これらを解いて (計算省略)

$$x=\frac{9}{26},\ \ y=\frac{1}{26},\ \ z=\frac{29}{26}\qquad\therefore\ \ \vec{d}=\frac{9}{26}\vec{a}+\frac{1}{26}\vec{b}+\frac{29}{26}\vec{c}$$

(2) (i) $\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0}$ とおくと

$$\alpha(\vec{m}+\vec{n})+\beta(\vec{n}+\vec{l})+\gamma(\vec{l}+\vec{m})=\vec{0}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{(\beta+\gamma)\vec{l}+(\gamma+\alpha)\vec{m}+(\alpha+\beta)\vec{n}=\vec{0}}$$

ベクトル $\vec{l},\ \vec{m},\ \vec{n}$ が 1 **次独立**だから

$$\boldsymbol{\beta+\gamma=0,\ \gamma+\alpha=0,\ \alpha+\beta=0}\qquad\therefore\ \alpha=\beta=\gamma=0$$

ゆえに 3 つのベクトル $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ は 1 **次独立**である.

(ii) 同様に

$$\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\ \ \alpha(2\vec{l}+\vec{n})+\beta(\vec{l}+\vec{m})+\gamma(\vec{l}+3\vec{m}-\vec{n})=\vec{0}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{(2\alpha+\beta+\gamma)\vec{l}+(\beta+3\gamma)\vec{m}+(\alpha-\gamma)\vec{n}=\vec{0}}$$

ベクトル $\vec{l},\ \vec{m},\ \vec{n}$ が 1 次独立だから

$$\boldsymbol{2\alpha + \beta + \gamma = 0,\ \beta + 3\gamma = 0,\ \alpha - \gamma = 0} \qquad \therefore\ \alpha = \gamma,\ \beta = -3\gamma\ (\gamma \text{ は任意 !})$$

すなわち，$\alpha = \beta = \gamma = 0$ でなくとも $(*)$ は成り立つから 3 つのベクトル $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ は 1 次従属である.

1.2.3　ベクトルと図形

ベクトルはどこへもって行って継ぎ足してもよいと言った．こんな風来坊を図形問題の解決に利用するには**始点**を与えて問題の条件に**適合**させる必要がある．

そこで**基準点** (たとえば原点) を決めると平面または空間上の各点は**代表ベクトル**で表される．各点の**表示** (位置ベクトル) が決まればそれらの間の**関係** (分点の公式など) ということになる———あとは**領域**のハナシまで一直線だ．

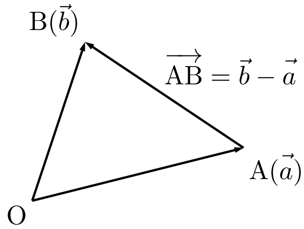
1.2.3.1　位置ベクトルと 2 点間の距離

平面でも空間でもよいが，まず，**基準**となる定点 O をとって定ベクトル $\vec{a}$ を与えると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a} \ \longleftarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ は } \vec{a} \text{ のすべてを } \textbf{代表} \text{ している！}$$

をみたす定点 A がただ 1 つ定まる．すなわち，$\vec{a}$ を用いて点 A の位置を表せるので $\vec{a}$ は特別なイミをもつ．そこで $\vec{a}$ を点 A の**位置ベクトル**といい A($\vec{a}$) などで表す．また，このとき基準として決めた定点 O を**原点**という．

さらに点 B($\vec{b}$) を与えると**ベクトルの和の定義**から



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}}$$

$\longleftarrow$ 後から前を引く！

だが，このベクトルの**大きさ** (長さ)，線分 AB が 2 点 A,B 間の**距離**を与えることになる．

すなわち

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

1.2.3.2 分点の公式

線分 AB を一定の比に分ける点の**位置ベクトル**は次の定理で与えられる．

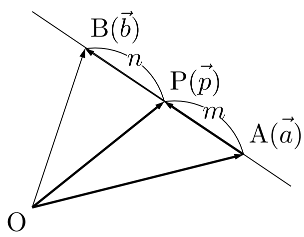
分点の公式

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分を $\boldsymbol{m:n}$ $(m>0, n>0)$ に**内分**する点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{n}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{b}}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}} \longleftarrow \text{ } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ に } \boldsymbol{n} \text{ を, } \vec{\boldsymbol{b}} \text{ に } \boldsymbol{m} \text{ をカケル！}$$

で与えられる．

(**解説**) 右図でベクトルの演算，**和**と**実数倍**を実践する．



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{OP}} &= \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{AP}} \longleftarrow \text{ベクトルの 和！} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{の 実数倍 を実行！} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= (1 - \frac{m}{m+n})\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\mathbf{OB}} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n} \ (= \vec{\boldsymbol{p}})
\end{aligned}$$

となる．

<メモ>

■ **外分点を与える公式———怖くない！**

上記の公式はチョイと**工夫**すれば**外分点**を求める場合にも使うことができる．

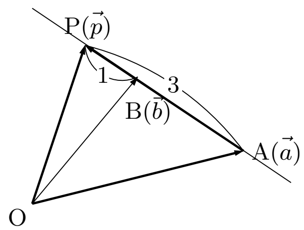
結論から言うと，この公式の**形**をそのまま使うときは線分 AB に注目して点 P が A **の外側**にあるときは n を $-n$ に置き換え，B **の外側**にあるときは m を $-m$ に置き換えればよいのだが，これがなかなか**覚えられない**．このままでは説明もヤッカイだ．

そこで，与えられた**外分**の状況をよくにらんで，$\mathrm{P}(\vec{p})$ を未知としたまま**内分**の状況に置き換える．そうすれば上記の公式がそのまま使えて**覚える公式も 1 つ**ですむ．

たとえば，線分 AB を $3:1$ に**外分**する点 P の位置ベクトルを求めてみよう．この状況は点 B が線分 AP を $2:1$ に**内分**していると**読みかえる**ことができる．すると上記の**内分点の公式**から

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \frac{\mathbf{1}\cdot\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathbf{2}+\mathbf{1}} \longleftarrow \ \vec{p} \text{ の 方程式 とみる！}$$

$$\therefore\ 2\vec{p} = 3\vec{b} - \vec{a} \qquad \therefore\ \vec{p} = \frac{3\vec{b}-\vec{a}}{2}$$



念のため上記の公式で $m=3,\ n=-1$ とおくと

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{(\mathbf{-1})\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{b}}}{(\mathbf{-1})+\mathbf{3}} = \frac{3\vec{b}-\vec{a}}{2}$$

となり同じ結果が得られる———もちろんどちらの方法でもよい．

1.2.4　図形問題への展開

内積を学ぶ以前の段階における図形問題は**分点の公式**か，その**延長線上**のハナシでおおむね**カタ**がつくが，その運用に当たっては次の 2 点に注意することが肝要である．

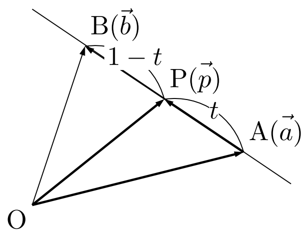
(i) **基準点**をキメル．

(ii) **1 次独立**である 1 組のベクトルに注目する．

以下，具体的に解説する．

1.2.4.1　分点の公式から共線条件，ベクトル方程式へ

前項に示した**分点の公式**は



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\vec{p}} &= \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\\ &= \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m+n}}\boldsymbol{\vec{a}} + \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m+n}}\boldsymbol{\vec{b}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \end{aligned}$$

$\dfrac{n}{m+n}=\alpha,\ \dfrac{n}{m+n}=\beta$ とおくと $\boldsymbol{\alpha+\beta=1}$ だから

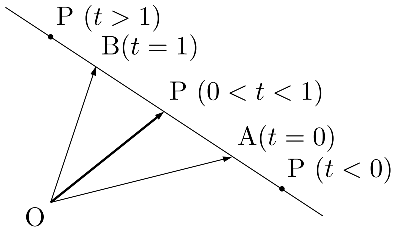
$$\boldsymbol{\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\ \ (\alpha+\beta=1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\beta=t$ とおくと $\alpha=1-t$ だから，この公式はさらに変形されて

$$\boldsymbol{\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

と **1 文字 $\boldsymbol{t}$** で表される．とまあ，ダラダラと変形してきたが，要するにこれらは**形はちがう**が実は**同じこと**を表している——その**正体**は何だろう．

そこで ③ をさらに書き直してみると



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots④\end{aligned}$$

ここで右辺の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を移項して整理すると

$$t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

この式は何を意味するか——3 点 P, A, B が**同一直線上**にある条件 (**共線条件**) に他ならない．そしてこの場合の係数 t は，① の $\vec{b}$ の係数 $\dfrac{n}{m+n}$ のことだが，ここまで変形してくると，もともとは同じことでも状況はよりハッキリと見えてくる．

t の値に，たとえば

$$t=-0.5<0,\quad t=0,\quad 0<t=0.5<1,\quad t=1,\quad t=1.5>1$$

などの数値を適当に入れてみると，それぞれ直線 AB 上の点に対応していることがわかる——実際に図上で点 P を**追跡**してみるとよい．

＜メモ＞

■ 分点公式からベクトル方程式へ

ところで，一般に直線 l はその通過点が決まり，向きが決まれば決定する．そのことをナットクした上で改めて ④ を見てもらいたい．

通過点： $\mathrm{A}(\vec{a})$　　向き：$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{m}$

そして，t をいっそ変数として $\vec{p}$ を未知のベクトルらしく $\vec{x}$ と書くと

$$④:\ \boldsymbol{x} = \vec{\boldsymbol{a}} + t\vec{\boldsymbol{m}}\ (\vec{m} \fallingdotseq \vec{0} \text{とする}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

どうやらカタチができた―――実数 t の変化に対応して点 $\mathrm{P}(\vec{x})$ は直線 l 上を動く．そこで、このとき、⑥ の表示を直線 l のベクトル方程式という．

まあ，とりあえず必要な知識はここまでだが先行き空間座標，図形と方程式，一次変換などをガンガン扱うにはこの成分表示やパラメーター (媒介変数) 表示がモノをいうことになるのでもう少し先までハナシを進めておくことにする．

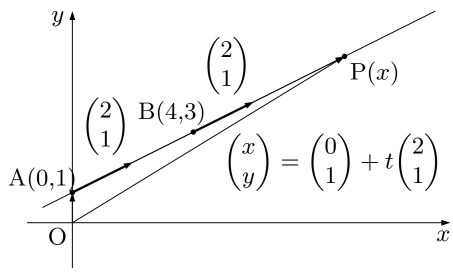
まず

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\quad \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

として ⑥ を成分表示すると

$$⑥:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{パラメーター表示 で} \begin{cases} x = m_1 t + a_1 \\ y = m_2 t + a_2 \end{cases}$$

これは $\mathrm{P}(m_1 t + a_1, m_2 t + a_2)$ のように x, y 座標が **1 文字 $\boldsymbol{t}$** で表せてなかなか便利である．



たとえば直線 $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ は

方向ベクトル： $\vec{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \longleftarrow$ 傾き $\dfrac{1}{2}$!

定点 $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ を通過！$\longleftarrow$ y 切片が 1！

に注目して，上記のベクトル方程式を成分で表すと

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{P}(2t, t+1) \text{ と パラメーター表示 される！}$$

だが，上記の直線は点 $(4, 3)$ なども通るので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{P}(2t+4, t+3) \text{ で，形は違うが 同じ直線！}$$

ようにも表される．

長々と書いてしまったがここではこれ以上深入りはしない．

要はこれら一連のことがらの火元はショセン ① である．それがわかってもらえれば目的はおおむね達成したと思ってよい．理解するにせよ覚えるにせよ，そう考えて 1 本スジを通せば負担はずいぶん軽くなるかと思う．

■ 典型的な用例

ゴタクを並べてみても具体的に使って見せなければわかるまい．以下，頻出の実例として読んでもらいたい．

＜例 1 ＞

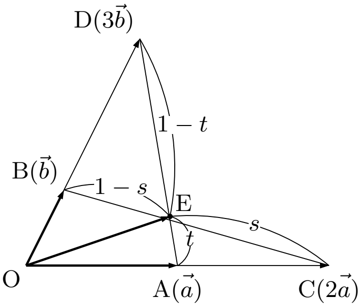
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\vec{b}$ のとき，AD と BC との交点を E とし，OE，AB，CD の中点をそれぞれ P, Q, R とする．ただし，$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0},\ \vec{b}\fallingdotseq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．　　(2) 3 点 P, Q, R が同一直線上にあることを示せ．

(解) (1) これは 1 次独立の**典型的**な問題———何はさておき**マスター**すべし．

E は **AD 上**にあるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}}$$
$$=(1-t)\vec{a}+3t\vec{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$



また，E は **BC 上**あるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-s)\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$
$$=2(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

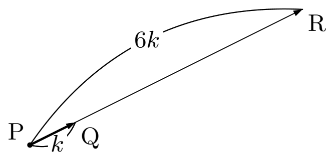
ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 **次独立**であるから $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ の表記は **1 通り**である．ゆえに，係数部分を比較して

$$1-t=2(1-s),\ 3t=s\ \longrightarrow\ t=\frac{1}{5},\ s=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$

(2) 要するに，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}}$ (共線条件) を示せばよい．そこで $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$,$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ それぞれ求めると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$
$$=\frac{1}{10}(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PR}}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{1}{2}(2\vec{a}+3\vec{b})-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$
$$=\frac{3}{5}(\vec{a}+2\vec{b})$$



右辺の $\vec{a}+2\vec{b}$ に注目すると

$$10\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{PR}}\ (=\vec{a}+2\vec{b})$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PR}}=6\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}\longleftarrow\ 3\text{ 点 P, Q, R は 共線！}$$

＜例 2 ＞

3 点 A,B,C は同一直線上にないものとする．
実数 $p,\ q$ が $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の終点 C，D を結ぶ直線はある定点を通ることを証明せよ．

(解) これは**難しい**———どこから斬りこんでいいのかわからない．

頼るは**直線上の点**のベクトル表示をどう理解したか———**ウデ**の見せ所ではある．

まず，実数 $p,\ q$ は**定数**である，これらが定数だから 2 点 C,D が決まりこの 2 点を通る直線が決まるのだ———$p,\ q$ が**異なる値**をとれば先とは異なる直線が決まる．

条件の $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ をみたす定数 $p,\ q$ を次々に与えるとき，次々にできる直線が**どの場合も同じ定点を通過**していることを示せと言っているのである———これはなかなか難しい．

とりあえずは $p,\ q$ は定数，したがって C, D は定点である．

その上で，この 2 点を通る直線上の点 P をベクトルで表すと

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OD}}\ \ (\alpha+\beta=1)} \longleftarrow \text{ 点 P は線分 CD 上 (\textbf{共線条件！})}$$

$$=\alpha(p\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta(q\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

つまり，ここでは α,β が直線を表す**変数**なのだ．

これを $\boldsymbol{\alpha+\beta=1}$ の条件のもとで変化させると点 P は直線 CD 上を動くことになる．

そこでこの式をよく眺めてもらいたい———たとえば β にどんな数値を選ぶべきか．

$(*)$ の**第 2 項のカッコ**で，その中の q を見て $\boldsymbol{\beta=\dfrac{1}{q}}$ を入れてみると

$$\alpha=1-\beta$$

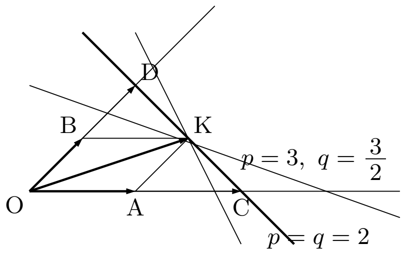
$$=1-\frac{1}{q}=\boldsymbol{\frac{1}{p}} \longleftarrow \boldsymbol{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$$

これはウマイ———チョッと**ウマすぎる**が $(*)$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{p}(p\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{1}{q}(q\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \longleftarrow \text{ \textbf{定ベクトル！}}$$

まあ，証明は一応**デキタ**．



1.2.4.2　初等幾何とベクトル

初等幾何の問題もベクトルを利用して**計算**に乗せるとスッキリいくものもある．

＜メモ＞――

■ **重心を計算する**

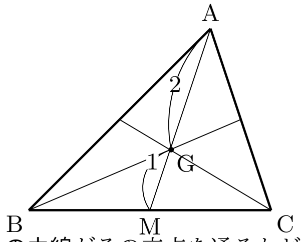
＜例 **1** ＞

三角形 ABC の重心 G を 3 点 A,B,C の位置ベクトルで表せ．

(解) (1) **三角形に重心**については**初等幾何**の定理で

三角形の 3 **つの中線は** 1 **点で交わり，互いに他を** $\mathbf{2:1}$ **に内分する**

であった―――右図で考える．



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2} \\ &= \frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}}{\mathbf{3}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)\end{aligned}$$

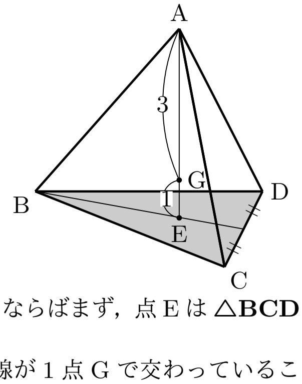
ヘンなハナシだが筆者は昔，2 つの中線は確かに交わるが，**第 3 の中線**がその交点を通るかどうか**怪しいモンダ**と思ったことがある．

そのとき，上記の位置ベクトルが与えられれば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{OG}} &= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \longleftarrow \quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\text{とおく！} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\end{aligned}$$

と変形すると G が OM 上にあって，AM を 2 : 1 に内分していることがすぐワカル．他の中線についても**同様**ということで**妙**に**ナットク**したことがある．

それにしても (∗) は**キレイ**な形ではないか―――**相加平均**になっている！しからば **4 つのベクトル**ではどうか．次のように変形すると様子が**見えてくる**．



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}}{\mathbf{4}} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}}{\mathbf{3}} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}} \quad \longleftarrow \quad \textbf{E は △BCD の重心！}\end{aligned}$$

すなわち，4 点 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$, D$(\vec{d})$ が**四面体** ABCD を構成するならばまず，点 E は **△BCD の重心**，そして G は AE を 3 : 1 に内分している．

しかも他の 3 つの場合も同様だから上の変形はこのような 4 直線が 1 点 G で交わっていることを示している．このときの交点 G を**四面体 ABCD の重心**という．

■ 内心を計算する

＜例 **2** ＞

三角形 ABC において BC=a, CA=b, AB=c とする．

(1) 頂角 A の 2 等分線と BC との交点を D とするとき BD : CD を求めよ．

(2) $\triangle$ABC の内心を I として $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

(解) 初等幾何で内心は

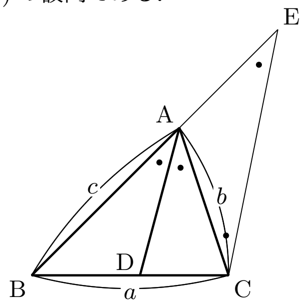
　　三角形の 3 つの頂角の 2 等分線は 1 点で交わる，この点を内心という

と**定義**されたが，これをベクトルで扱うには**頂角の 2 等分**という図形的性質を**線分の長さの比**に読み替えるというチョッとした**手続き**が必要になる——それが (1) の設問である．

　しかし，特に求められなければ**定理**として**いきなり**用いてよい．

(1) これは**初等幾何**でやるのが簡単だ．

　C を通る AD の平行線と BA の延長線との交点を E として



$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{BAD} \longleftarrow$ **同位角！**

$\angle\mathrm{ACE} = \angle\mathrm{CAD} \longleftarrow$ **錯角！**

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} \longleftarrow$ **頂角 $\boldsymbol{A}$ の 2 等分！**

これらのことから

$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{ACE} \longrightarrow \triangle\mathrm{ACE}$ は $\mathrm{AC} = \mathrm{AE}$ の **二等辺三角形！**

$\therefore$ **BD : CD** = BA : AE (**平行線と比例！**) = **AB : AC**

と，まあこれが自然だろう．

　しかし**ベクトル**でやれないこともない．それには**単位ベクトル** (長さが 1 のベクトル) の知識が必要なのでここで説明しておく——$\boldsymbol{\vec{a}}$ **向きの単位ベクトル** $\boldsymbol{\vec{e}}$ は次のように計算される．

$$\boldsymbol{\vec{e}} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}}}{|\boldsymbol{\vec{a}}|} \text{ (向き と 長さ を確認のこと !)}$$

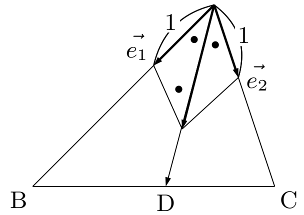
$$\longleftarrow \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}\right| = \frac{1}{\cancel{|\vec{a}|}}\cdot\cancel{|\vec{a}|} = 1$$

これを用いると**頂角の 2 等分線**上の点 D は

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{t}\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathbf{AC}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AC}}|}\right)$$

$$\longleftarrow \text{単位ベクトル} \frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|} = \boldsymbol{\vec{e_1}} \text{ と } \frac{\overrightarrow{\mathbf{AC}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AC}}|} = \boldsymbol{\vec{e_2}} \text{ で ひし形 を構成！}$$

$$= \frac{t}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{t}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$



ところが点 D は BC 上の点だから

$$\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{c}} + \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{b}} = \mathbf{1} \quad \therefore\ t = \frac{bc}{b+c}$$

これを $(*)$ に入れると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\overrightarrow{\mathbf{AC}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

となって**予定通り**の結果が得られる．

(2) さて，ここからが本論だが AD が頂角 A を 2 等分するので

$$\mathbf{BD : CD = AB : AC} = \boldsymbol{c : b}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

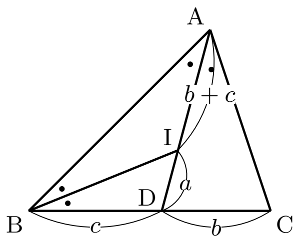
$$= \frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c} \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

また I は AD 上にあり，BI は頂角 B を 2 等分するから

$$\mathbf{AI : DI = BA : BD}$$

$$= c\ :\ a \times \frac{c}{b+c} = \boldsymbol{(b+c) : a}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{a}{(b+c)+a}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$



これに $(**)$ を入れると

$$\overrightarrow{\mathbf{OI}} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{\boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \boldsymbol{c}\overrightarrow{\mathbf{OC}}}{\boldsymbol{b+c}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \boldsymbol{c}\overrightarrow{\mathbf{OC}}}{\boldsymbol{a+b+c}} \cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

となり，これも**キレイな**形になる．もし $(***)$ が先に与えられて I が内心であることを示すには

$$\overrightarrow{\mathbf{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= \frac{b(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + c(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})}{a+b+c}$$

$$= \frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c} = \frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}\right)$$

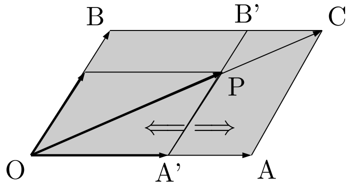
$$= \boldsymbol{k}\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathbf{AC}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AC}}|}\right) \longleftarrow \text{ただし，} \frac{bc}{a+b+c} = k \text{ とおいた！}$$

すなわち，**AI は頂角 A を 2 等分**し，BI，CI も同様であるから I は**内心**である，とすればよい．

1.2.4.3 領域内の点の表示

三角形 OAB を含む平面上の任意の点 P は

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\mathbf{OB}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



として**一意的**に表されることはすでに述べた．

このとき $\boldsymbol{\alpha}$ を、$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる α に**トメタ**まま $\boldsymbol{\beta}$ を、たとえば 0 から 1 まで変化させると点 P は図の A' から B' まで**動く**.

その上で α を 0 から 1 まで変化させると線分 $\mathbf{A'B'}$ は OB から AC まで動く———結局、全体で点 P は**平行四辺形** OACB の周または内部を動くことになる.

どうも ① の α, β に**ある条件**を与えると点 P はこの平面上に**図形**や**領域**などを描くらしい.

一方，**直線図形**は，すべていくつかの三角形に分割されるから**三角形の性質**をよく知ることが図形問題をうまく扱う**カギ**となる———ベクトルの**超得意科目**なのだ.

<メモ>———————————————————————————————

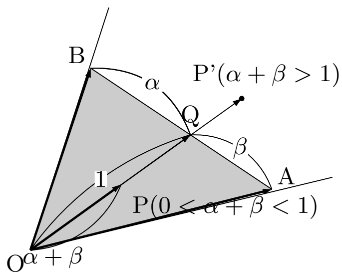
■ 三角形の内部の点の表示

まず，① で $\alpha > 0,\ \beta > 0$ としておこう．その上で $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ を**前にくくりだす**.

$$\begin{aligned}
①:\ \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= (\alpha+\beta)\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha+\beta}}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha+\beta}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}\right) \quad \longleftarrow \quad \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1 \\
&= (\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathbf{OQ}}
\end{aligned}$$

と変形すると点 Q は線分 AB 上にあり，$\boldsymbol{\alpha + \beta < 1}$ ならば点 P は △OAB の**内部**，$\boldsymbol{\alpha + \beta > 1}$ ならば**外部**に存在する———点 P が **△OAB の内部**に存在するための条件まとめると

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\mathbf{OB}}$$
$$(\ \boldsymbol{\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1}\ ) \cdots\cdots\cdots ②$$



これが**基本**だが，われわれとしては一般の △ABC のハナシで扱いたい.

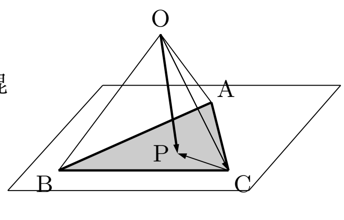
そのためには上記の ② の O を C と書きかえればよい———代表ベクトルを書きかえる．そうすると、上記の条件は点 P が **△ABC の内部**に存在するための条件に置きかわる.

すなわち

$$\overrightarrow{\mathbf{CP}} = \boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\mathbf{CA}} + \boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\mathbf{CB}}\ \ (\boldsymbol{\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1}) \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

だが $\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が 1 **次独立**ならば，定点 A,B,C に対して点 P は**一意的に決定**する.

しかし、③ をよく見てもらいたい．この式には**原点 O** が混入していない———原点 O のあり場所に**関係なく成り立つ**関係式なのだ.



それでは**原点との関係**はどうなっているのか———左辺は

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とバラせるからこれを ③ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OC}}+\alpha\overrightarrow{\mathbf{CA}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{CB}}\ \ (\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

これは原点 O に対して点 C が決まり，点 C を基準に $\triangle$ABC の内部に点 P が決まることを表している———α,β を変化させれば空間に点 P が描く $\triangle$ABC が**浮かぶ**状況が見えてくる．

さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

だから，これらを ④ に代入して整理すると，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の係数 が $1-\alpha-\beta=\boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{(>0)}$ と書けて，点 P が $\triangle$**ABC の内部**に存在するための条件は

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\mathbf{OC}}$$

$$\mathbf{(}\ \boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}=\mathbf{1},\ \boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0},\ \boldsymbol{\beta}>\mathbf{0},\ \boldsymbol{\gamma}>\mathbf{0}\ \mathbf{)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

と整理される———これは**キレイ**だ．

このとき，原点 O が平面 ABC 上になければ $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 **次独立**だから α,β,γ の**一意性**について問題はない．

しかし原点 O がこの平面上にあるときは，同一平面上の 3 つのベクトルが 1 次独立となることはない．したがって $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 **次従属**である．

そうすると，たとえば $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ などと表せるから，これを ⑤ に入れると $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が消えて $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の係数が 0 となったりする場合があるかにみえる．

しかし，上記の $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}=\mathbf{1}$ という条件があるかぎりそういうことは**ない**．

なぜかというとこの条件により，**形はちがうが** ⑤ は $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}=\mathbf{1}$ をツナギとして⊠と全く**同じ内容**を表しており，原点 O が平面 ABC 上にあろうとなかろうと点 P を与える α,β の**一意性**は ③ ですでに**保証**されているからである．

これは条件の $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}=\mathbf{1}$ で $\boldsymbol{\gamma}$ を消去してみればすぐわかる———上記の ③ はなかなか深い内容を秘めていて結構**エライ**条件なのだ．

ここで，先に述べた**重心**，**内心**の位置ベクトルを思い出してもらいたい．

あのときの係数をこの ⑤ にあてはめて読むと

重心： $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{3}$

内心： $\alpha=\dfrac{a}{a+b+c},\ \beta=\dfrac{b}{a+b+c},\ \gamma=\dfrac{c}{a+b+c}$

で，これらがそれなりに**意味**のある数値であったことがわかる．

キレイついでに ⑤ の意味するところをもう少し詳しく調べておこう．まず，$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}=\mathbf{1}$ だが，これは点 P が**平面 ABC 上**にあるための条件である．しからば α,β,γ の**符号**は何を意味するか———⑤を次のように変形してみるとよい．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \longleftarrow\ \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\text{に注目！}\\&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\beta+\gamma)\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta+\gamma}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\beta+\gamma}}\overrightarrow{\mathbf{OC}}\right)\\&\qquad\longleftarrow\ \frac{\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}=1\\&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\alpha)\overrightarrow{\mathbf{OQ}}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ Q は BC を$\gamma:\beta$に **内分**, P は AQ を $(1-\alpha):\alpha$に **内分**！

これをどう読むか．

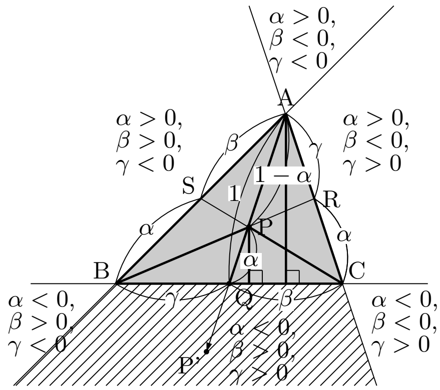
$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$ だから，まず P は AQ を $(1-\alpha):\alpha$ に**内分**し，その Q は線分 BC を $\gamma:\beta$ に**内分**している．

すなわち点 P は △ABC の**内部**の点である．

これは CA，AB の場合も同様だから**各辺**の内分比も図のように決まり，この条件の下で $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を変化させれば点 P は △ABC の内部を動く．

さらにこのとき，△ABC に対して △PBC は**底辺が共通**，**高さが $\boldsymbol{\alpha}$ 倍**だから面積も α 倍となる．

これは △PCA，△PAB にも言えるから △ABC の面積を S とすれば



$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{PBC}:\triangle \mathrm{PCA}:\triangle \mathrm{PAB}&=\alpha S:\beta S:\gamma S\\&=\alpha:\beta:\gamma\end{aligned}$$

さて，**符号**についてだが，たとえば $\beta>0,\ \gamma>0$ はそのままで $\boldsymbol{\alpha<0}$ としてみよう．

そのときは $\boldsymbol{\beta+\gamma>1}$ で点 P は AQ を**外分**することになり，P は △ABC の**外にハミ出してしまう**．そしてこの条件の下で $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を変化させると点 P は図の斜線部分の領域を動く．

要するに ⑤ で与えられる点 P は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=1}$ を満たす数値を与えれば 3 点 A,B,C で定まる平面上のある 1 点に対応することがわかる．

これらのことから ⑤ にその条件として与える数値の組合せ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ を特に**重心座標** (あるいは重点座標) というときもある．

■ 四面体の内部の点の表示

高校数学としては**余談**だが，4 点のときはどうなるか——**四面体**の議論になる．

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{OD}}}$$
$$\boldsymbol{(\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=1,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \delta>0\ )}\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

を与えると点 P は四面体 ABCD の内部の 1 点に対応する．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\alpha)\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}\ \ (1-\alpha=\beta+\gamma+\delta)$$

ただし，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\beta}{\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{\delta}{\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{\mathrm{OD}}}$

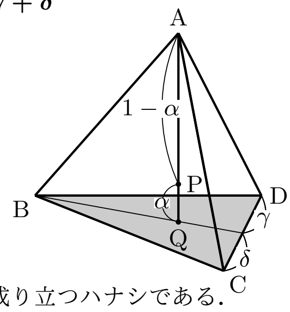
$$\longleftarrow\ \ \frac{\beta}{\beta+\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma+\delta}+\frac{\delta}{\beta+\gamma+\delta}=1$$

これをどう読むか——点 Q は △BCD の内部の点で点 P は線分 AQ を $(1-\alpha):\alpha$ に内分している．

すなわち点 P は**四面体** ABCD の**内部**の点である．

また，点 P を頂点とする 4 つの四面体の**体積比**も

$\alpha:\beta:\gamma:\delta$



となるがもういいだろう——n 次元ベクトルでは n 個の点について成り立つハナシである．

■ ハナシをもとにもどそう

われわれとしては問題が解けなくてはハナシにならん——例題を挙げておく．

＜例 1＞

△OAB に対して点 P が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で与えられている．実数 s, t に次の条件を与えるとき，点 P の存在し得る範囲を図示せよ．

(1) $|s| + |t| \leqq 1$　　(2) $2s + 3t > 6,\ s > 0,\ t > 0$

(解) (1) 条件 $|s| + |t| \leqq 1$ の絶対値をはずす——s, t の正，負で場合を分けて表す．

(i) $s > 0$,$t > 0$ のとき $s + t \leqq 1$

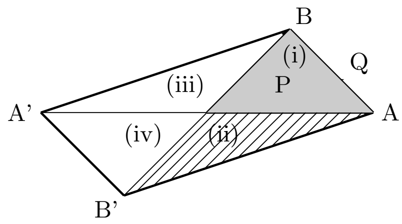
$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = s\overrightarrow{\mathbf{OA}} + t\overrightarrow{\mathbf{OB}}$$

$$= (s+t)\left(\frac{s}{s+t}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \frac{t}{s+t}\overrightarrow{\mathbf{OB}}\right)$$

$$\longleftarrow \quad \frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t} = 1$$

$$= (s+t)\,\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$$

⟵ P は △OAB の周または内部！



(ii) $s > 0$,$t < 0$ のとき $s + (-t) \leqq 1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-t)(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

ここで，$\boldsymbol{-t = t'}$, $\boldsymbol{-\overrightarrow{\mathbf{OB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB'}}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB'}},\ s > 0,\ t' > 0, s + t' \leqq 1 \longleftarrow$$ P は △OAB' の周または内部！

(iii) $s < 0$,$t > 0$, (iv) $s < 0$,$t < 0$ のときは同じことだから**省略**する．

結局，求める領域は図の平行四辺形 ABA'B' の**周または内部**である．ただし，$s = 0$ または $t = 0$ のときは線分 AA'，BB' になる

(2) 与えられた条件を**どう読むか**．

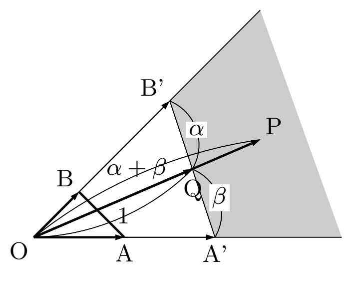
$$2s + 3t > 6 \quad \therefore\ \boldsymbol{\frac{s}{3} + \frac{t}{2} > 1} \longleftarrow$$ 両辺を 6 で割って **右辺を 1** にした！

その上で

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \frac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

ここで

$$\frac{s}{3} = \alpha\ ,\ \frac{t}{2} = \beta,\ \ 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}},\ \ 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$



とおくと条件は次のようにおきかわる．

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\mathbf{OA'}} + \boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\mathbf{OB'}}$$

$$(\ \boldsymbol{\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta > 1}\ )$$

$$= (\alpha+\beta)\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right)$$

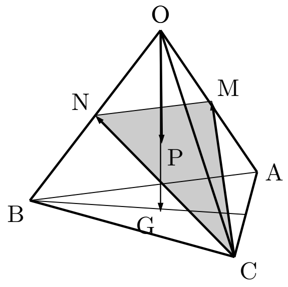
$$= (\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

すなわち，Q は AB の内分点，P は OQ の**外分点**で，求める範囲は上図——ただし，境界を除く．

＜例 2＞

四面体 OABC で辺 OA の中点を M，辺 OB の中点を N とする．このとき三角形 ABC の重心を G，直線 OG と平面 CMN との交点を P として $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

(解) 空間における平面上の点の表示，空間ベクトルの 1 次独立がテーマになっている．
点 P は直線 OG 上にあるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\ &= k\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\\ &= \frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

また，点 P は △CMN を含む平面上にあるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CP}} = p\overrightarrow{\mathrm{CM}} + q\overrightarrow{\mathrm{CN}}} \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}} &\boldsymbol{= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + p\overrightarrow{\mathrm{CM}} + q\overrightarrow{\mathrm{CN}}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + p(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) + q(\overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{p}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{q}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-p-q)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立だから $(*)$ と $(**)$ を比較して

$$\frac{p}{2} = \frac{k}{3},\quad \frac{q}{2} = \frac{k}{3},\quad 1-p-q = \frac{k}{3}\qquad \therefore\ k = \frac{3}{5}\quad \left(\ p = q = \frac{2}{5}\ \right)$$

$(*)$ に入れると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{1}{5}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\end{aligned}$$

で，一件落着！だが，点 P が平面 **CMN** 上にある条件からいきなり

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}} &= \boldsymbol{\alpha\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{ON}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (\ \alpha+\beta+\gamma=1\ )}\\ &= \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\beta}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

これを $(*)$ と較べて

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \gamma = \frac{k}{3} \longrightarrow \alpha = \beta = \frac{2k}{3},\ \gamma = \frac{k}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{2k}{3} + \frac{2k}{3} + \frac{k}{3} = 1 \longleftarrow \alpha+\beta+\gamma = 1$$

$$\therefore\ k = \frac{3}{5}$$

としてもよい――トウゼン同じ結果が得られる．

1.3 内積とその計算

内積という言葉のルーツはもともと図形的な立場から発祥したものではない．2 つのベクトルの成分の積の和 $\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}$ を数の演算の**積** (乗法) になぞらえていつかこう呼ぶようになったのであろう．

ところが不思議なことに，実はこのような量がベクトルの**図形的性質**と深くかかわっているのである．つまり，ベクトルの**長さ，なす角**などを上記の**成分の積の和**で計算することができる———こんなことを思いついた人はいったい誰だろう．ともあれ，われわれは**図形を計算する**上で，さらに強力な手段を手にすることになるのである．

1.3.1 内積の定義

まあ，のっけから**トートツ**だが，とりあえずベクトルの**内積**を 2 つのベクトルの間に**黒丸「・」**を打って次のように**定義**する———図形的な意味は後で**こじつける**.

$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$ ⟵ **$\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{\vec{a}}$ と $\boldsymbol{\vec{b}}$ とのなす角！**‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥ $(*)$

このとき，長さについてはすでに述べたが，一般に**角の測り方**については**測る方向性**があるので注意しなければならない．筆者は昔

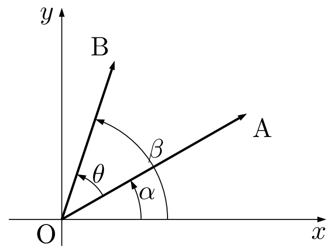
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: **点 A から点 B** を測る

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角 $\boldsymbol{\theta}$：$\boldsymbol{\vec{a}}$ から $\boldsymbol{\vec{b}}$** を測る

と唱えながら覚えた記憶がある．具体的には

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$： 点 **B** の座標から点 **A** の座標を**引く！**

$\boldsymbol{\theta}$ ： 右図で $\boldsymbol{\beta-\alpha}$ の**こと！**



と計算する———トウゼン θ は負の値のときもある．

ここで角の測り方にシツコクこだわるワケは，内積は**偶関数** cos で定義されるので負の値でも問題はないが，交代積 (後述) は奇関数 sin で定義され，逆に測ると符号が変わる———このハナシと区別するためである．

ただし，特に符号にこだわらないときは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とのなす角 θ といえば **0 から $\boldsymbol{\pi}$** で定義する (どちらから測ってもよい).

さて，$(*)$ で内積を**図形的に定義**したが，これは計算のできる形式の表現ではない．これを冒頭の成分の積の和 $\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}$ で表せてはじめて**内積の計算**が構成されることになる．以下にその**要**となる定理を述べる．

内積と成分

2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$\boldsymbol{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2}$ ⟵ 左辺は上記の **内積**，右辺は **成分の積の和！**

が成り立つ.

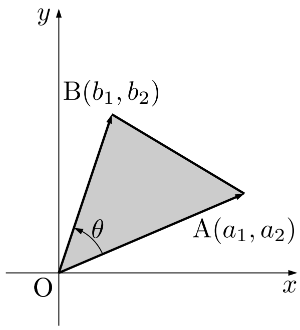
（解説）これは**図形的に定義**された内積を**成分の積の和**という数式の計算に**置き換える**という重要な役割を担う定理である———ここから内積は**図形のイメージ**から離れて**積**という**計算規則のハナシ**にいれ替わるのである．

さて，この定理の**証明**にかかろう．それには**余弦定理**を利用する．

右の △OAB に余弦定理を適用すると

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{OA}}\;\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$$

$$\therefore (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$



これを整理して

$$\boldsymbol{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と，一応の証明は**デキタ**．

① をどう読むか———2 つのベクトルの**長さ**，**角度**などの図形的な量が**成分の積の和**で求まることを意味している．

たとえば ① で $\vec{b} = \vec{a}$ とおけば $\theta = 0$ だから

$$\boldsymbol{\left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\therefore\ \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

で，①が**長さ**そのものをも表す式であることもわかる．

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ との**なす角 $\boldsymbol{\theta}$** がほしければ

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

を計算すればよい———2 件も**落着**してしまった．

しかし，**内積の定義**の本来の意味は ① の**右辺**でないと困るのだ．

これは次のハナシになるが，実は**交換則**，**分配則**などの内積の計算規則を ① の**右辺の形**をモロ利用してあたかも**数のかけざん**のように**演算**を構成するのである．

そうするといかにも**トートツ**で**不自然**に見えた冒頭の内積の**図形的定義**は，数学という科目が**成分の積の総和**を内積として **1 括り**で演算化したい，つまり**公理化**したい，という**お家の事情**があって，やむなく左辺の形で**ツジツマあわせ**をしたのではないかと思われる———そうすれば定積分や期待値など**積の総和**で表されるものはすべてその中に入れてしまえるではないか．まあ，なかなかよく**デキた**ハナシではある．

そんなワケだからここで改めて**内積**を ① の右辺で定義し直そう．つまり

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}\ (= \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

である．

しかし，これはベクトルの**成分の積の和**だからベクトルそのものが**成分表示**されていなければならない．つまり，数を並べて**セット**にしたものを改めて**ベクトル**と定義しておく必要がある．

そういうわけでこれを新たに**数ベクトル**と定義する———3 次元までは冒頭の図形的定義と**ぴったり符合する**のでまったく問題はない．そして，その状態でベクトルという

ものを数ベクトルとして図形のイメージからいったん切り離すのだ———数ベクトルは数のセットであってあくまで数そのものではない．そうして定めたベクトルとベクトルの間に，数と数との間に成り立つ演算をそのモデルとして，それに類似した演算を設定する———上記の ②, ③ のベクトルの長さ，なす角は次のように表される．

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} \longleftarrow \text{絶対に } \vec{a}^{\,2} \text{とは 書かない から注意のこと！}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\quad \text{特に } \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ のときは } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ だから } \vec{a}\perp\vec{b}$$

つまり，内積を用いて図形問題を解決するということは，ベクトルの長さとかなす角に関する量を，④ を内積の定義とする計算規則で求めるというハナシである———やはりこの定理は内積計算のカナメになっているのである．

1.3.2　内積の計算規則

たとえば，ベクトルで**直交条件**などを長々と計算するような場合，その基本原理は次に示す内積の**交換則**と**分配則**である．それは**形式的**には数式の文字計算と同じだが**内容**としては**全くちがう計算**である．

内積の計算規則

ベクトルの内積では次の計算規則が成り立つ．

(1) **交換則**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

(2) **分配則**

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\longleftarrow \text{第 1 分配則！}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\longleftarrow \text{第 2 分配則！}$$

（解説）(1) は**内積の成分表示**の式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の数値は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を**入れかえても変わらない**———だから**交換則**というのだ．

これは説明するまでもなかろう．ただ，冒頭に述べた内積の**図形的定義**で sin でなく **cos** を採用した理由はここにあるのだがそれはあとで詳しく述べる．

(2) 数式の計算で**カッコをはずす**計算の過程を 1 つ 1 つ調べると

$$a\ (b+c)=ab+ac \ \longleftarrow \text{第 1 分配則！}$$

$$(a+b)\ c=ac+bc \ \longleftarrow \text{第 2 分配則！}$$

である———**数式の計算**はこれらを**組み合わせる**ことで成り立っている．

上に示す**内積**の分配則もこれと**同じ形**をしている．われわれとしてはだから覚えやすくて**ありがたい**のだがその**内容**はそう単純なハナシではない．

なにせ相手のベクトルは**数ではない**のだ———**数ベクトル**による**内積の定義**にもどってキチンと**証明**しないと使えない．まず上記の**第 1 分配則**を $(*)$ を用いて証明しよう．各々のベクトルを成分表示して左辺に代入すると

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right]\\&=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\end{pmatrix}\\&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_1c_1+a_2c_2\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

のように成り立つことが示される．

第 2 分配則も同様に**成分の積の和**の計算を実行すればよい．

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= (a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2 \\
&= a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2 \\
&= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}
\end{aligned}
$$

さて，これらのことは何を意味するか———われわれとしては**ベクトルの演算**として数の四則演算 (加，減，乗，除) と類似の演算，**和**，**差**，**実数倍**，そして**内積**という演算を**獲得した**ことになる．ただし，この中で**内積**だけはベクトルではなく**スカラー** (**タダの実数値！**) **量**である．また，ベクトルには数の演算の商 (わりざん) にあたる演算は**ない**．

ここで実際の**内積計算**を実例で説明しよう．たとえば $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ を求めるには

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \quad \longleftarrow \textbf{第 1 分配則！} \\
&= (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} \quad \longleftarrow \textbf{第 2 分配則！} \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} \quad \longleftarrow \ \vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b} \ \ \textbf{(交換則！)} \\
&= \left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2
\end{aligned}
$$

と計算し，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ が与えられていたりすれば代入して平方根をとる．

そして，だんだん慣れてきたら上の計算は途中を省略していきなり

$$
\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2
$$

と書いたりするが，形はよく**似ている**が数式の 2 乗展開とは全く**ちがうモノ**を全く**ちがう方法**で計算しているのである．

＜メモ＞————————————————————————————————

■ **内積の公理**

数ベクトルで定義された**内積**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が内積の**図形的定義**として $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ に等しいことはすでに本文で**余弦定理**を用いて証明した．

しかしハナシがウマすぎる———ツジツマを合わせたかに見えないか．**内積**というコトバの響きからして**成分の積の和**として ① で定義されるのが**スジ**というものではないか．

数学事典で調べてみると，2 つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が次の 4 つの条件

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq 0$

を満たすとき $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，上記の (1)〜(4) を**内積の公理**としている———まさに本文で確認したことである．

つまり数学は自らを学問として体系化していく中で”積の和”で表されるものを一括りにして**内積**として**公理化した**のである———広い意味では期待値も定積分も内積である．要するに内積の図形的定義は内積の公理を満たす 1 つのモデルに過ぎない．

そういう意味でいえば冒頭に述べたような図形を用いた内積の図形的定義は上記の ① を仲立ちとしてはじめて内積として認知されるということになる———その定義が実際の図形的立場とどうかかわるかについては**正射影の長さ**としてあとで詳しく説明する．

■ **交代積と面積公式**

次の**絶対不等式**を見てもらいたい．

$$(a_1t-b_1)^2+(a_2t-b_2)^2 \geqq 0$$

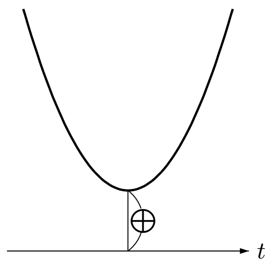
$$\therefore\quad \boldsymbol{({a_1}^2+{a_2}^2)t^2-2(a_1b_1+a_2b_2)t+({b_1}^2+{b_2}^2)\geqq 0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

この不等式は明らかに**常に成り立つ**が，そのとき**係数**はどういう条件を満たしているか．

まず，${a_1}^2+{a_2}^2=0$ のときは $a_1=a_2=0$ だから，不等式の左辺は ${b_1}^2+{b_2}^2$ のみになり不等式は明らかになりたつ．

${a_1}^2+{a_2}^2 \neq 0$ のときはこの値は明らかに正だから、② は t の **2 次不等式**である．

したがって、これが**常に成り立つ**条件は、② の左辺を 0 とおいた t の 2 次方程式の判別式を D として



$$\frac{D}{4}=(a_1b_1+a_2b_2)^2-({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)\leqq 0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

だがよく見てもらいたい———おなじみの**コーシー・シュワルツの不等式**ではないか．

これをベクトル記号で書くと

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\geqq(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

いま，$|\vec{a}|\neq 0$ のもとに議論を進めているのだが．このとき $|\vec{b}|=0$ なら上記の不等式は等号が成り立つから問題はない．そこで，さらに $|\vec{b}|\neq 0$ という条件をつけて

$$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2\leqq 1\qquad\therefore\ \boldsymbol{-1\leqq\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\leqq 1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

すなわち

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\cos\theta\qquad\therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

をみたす角 θ が存在する．

つまり，冒頭で述べた**トートツ**で**奇妙**に見える内積の**図形的定義**はどうやらこの**数ベクトル**による**内積の定義**に由来するものであるらしいことが**見えてきた**．ただし，定義には $\vec{a}=\vec{0}$，または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも含めるものとする．そうすれば内積の図形的定義は数ベクトルの内積の定義 ① に**ピッタリと符合**する．さて，上の説明では ③ を見て -1 と $+1$ との間の数値に $\boldsymbol{\cos\theta}$ を採用した———$\sin\theta$ ではマズイのか．実は**マズイ**のだ．

そのワケは，これを $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ としたのでは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とをとり換えた場合，$\sin\theta$ が奇関数であるために**角そのものの符号**が変わる．したがってこの値の**符号**が変わってしまう．

そうすると上記 ① で定義される数ベクトルの内積で成り立っている**交換則**を満たさなくなってしまい、それでは**困る**ではないか．

そういう理由があって**ここはどうしても**偶関数 $\boldsymbol{\cos\theta}$ でなくてはならないのである．しからばこのようにして決まる θ に対して $\boldsymbol{\sin\theta}$ の図形的な意味は何なのか．

以下に計算してみる．

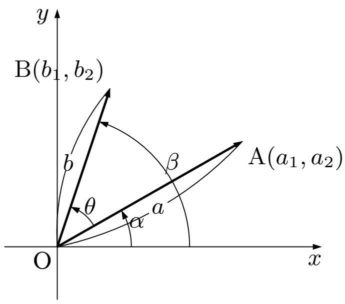
$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2 \longleftarrow \boldsymbol{\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$
$$= \frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}$$

分母を払うと

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta = \boldsymbol{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \cdots\cdots ④$$
$$= ({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$$
$$= (a_1b_2-a_2b_1)^2$$

だから $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ を求めると

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = \pm(a_1b_2-a_2b_1)$$



となるが，ヤッカイなことに $\pm$ だ———どちらをとるか．

一方，図のように α, β を決めて $|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b$ と表すと

$$\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1} = a\cos\alpha b\sin\beta - a\sin\alpha b\cos\beta$$
$$= ab(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)$$
$$= ab\sin(\beta-\alpha)$$
$$\boldsymbol{= ab\sin\theta} \cdots\cdots ⑤$$

だから，この**両辺の符号が一致**するように上記 $\pm$ の $(+)$ の**記号**を採用する———図で確認のこと．

そこで内積を黒丸 $\cdot$ で表したように**新しい記号** $*$ を導入して上記の計算で得られる $\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1}$ を表すことにすると

$$\boldsymbol{\vec{a}*\vec{b} = a_1b_2-a_2b_1}\ (=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta) \cdots\cdots ⑥$$

で，内積とはチョッと異なるベクトルの**新しい演算**が設定される———これを**交代積**という．

さて，この演算で内積のときのような交換則や分配則は成り立つか———やってみよう．

まず，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を入れかえてみる．

$$\boldsymbol{\vec{b}*\vec{a}} = b_1a_2-b_2a_1$$
$$= -(a_1b_2-a_2b_1) = \boldsymbol{-\vec{a}*\vec{b}}$$

で，予想 (θ の符号が変わる) の通り符号が変わる———**交換則は成り立たない．**

交代積という呼称は入れかえると**符号が変わる**ことに由来するものと思われるが，いかにも内積とはちがうことを強調しているかにみえる．

また，交代積では交換則は成り立たないが**分配則**は成り立つ———以下に示す．

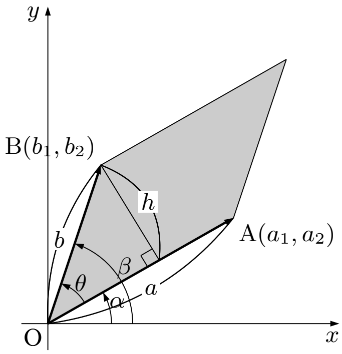
$$\boldsymbol{\vec{a}*(\vec{b}+\vec{c})} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}*\left[\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\end{pmatrix}$$
$$= a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)$$
$$= (a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1)$$
$$= \boldsymbol{\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}} \longleftarrow \textbf{第 1 分配則が成り立つ！}$$

同様の計算で.

$$\begin{aligned}
(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}})*\vec{\boldsymbol{c}} &= \left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\\
&= (a_1+b_1)c_2-(a_2+b_2)c_1\\
&= (a_1c_2-a_2c_1)+(b_1c_2-b_2c_1)\\
&= \vec{\boldsymbol{a}}*\vec{\boldsymbol{c}}+\vec{\boldsymbol{b}}*\vec{\boldsymbol{c}} \longleftarrow \textbf{第 2 分配則が成り立つ！}
\end{aligned}$$

まあ，ハナシはざっとこんなところだが，この議論は先行き**行列式**として展開することになる．しかし，ここでは深入りはしない．

ただ，この量 $\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1}$ は**連立方程式，ベクトルの平行条件，三角形の面積公式，行列**などいろいろな場面でチョコチョコ出てくるのでその**サワリ**の部分だけ簡単に説明した．さて，ハナシをもとにもどそう．まず，⑤ を見てもらいたい．



図のように $\sin\theta>0$ ならば，⑤ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を隣り合う 2 辺とする**平行四辺形の面積**そのものである———⊠左辺の**符号を無視**すれば 2 点 A と B の位置関係によらない**面積公式**を誘導することができる．すなわち ④, ⑤, ⑥ から

$$\begin{aligned}
S &= ab\sin\theta \longleftarrow b\sin\theta=h\\
&= \sqrt{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2|\vec{\boldsymbol{b}}|^2-(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦\\
&= |\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1}|\ (=|\vec{a}*\vec{b}|\ )\cdots\cdots\cdots ⑧
\end{aligned}$$

のようにまとめられるが，これらは**公式**としてその適切な場面で**いきなり**用いてよい．

空間ベクトルの場合も平面ベクトルでの ⑧ のように成分で計算する公式があるにはあるが，これは 3 次の行列式をキチンと学んでからでないと効率が悪いのでここでは触れない．

なまじそんなものを覚えるより **⑦ を用いてマジメに計算**するほうがずっと**正確**で**早い**．

なお三角形の面積を求めるときはトウゼン上記の面積を $\dfrac{1}{2}$ 倍するから △OAB の面積は

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}ab\sin\theta \longleftarrow b\sin\theta=h\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}}\sqrt{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2|\vec{\boldsymbol{b}}|^2-(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})^2}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1}|\ (=\frac{1}{2}|\vec{a}*\vec{b}|\ )
\end{aligned}$$

である．

＜例１＞

(1) $a^2+b^2+c^2=1$ のとき $a+b+c$ のとり得る値の範囲を求めよ．
(2) $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(4,-1)$, $\mathrm{C}(2,3)$ のとき $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(解) (1) いろいろな切り口が考えられるが，まあこれも**勉強**だから**ベクトル**で行こう．

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \longleftarrow \text{スペースをとるが \textbf{タテ} に書くほうが \textbf{見通しがよい！}}$$

とすると

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \qquad \therefore\ (\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

上記ベクトルの成分を入れると**コーシー・シュワルツの不等式**になる．すなわち

$$\boldsymbol{(a\cdot1+b\cdot1+c\cdot1)^2} \leqq \boldsymbol{(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)}=1\cdot3=3$$
$$\therefore\ (a+b+c)^2\leqq3 \qquad \therefore\ -\sqrt{3}\leqq a+b+c\leqq\sqrt{3}$$

等号の成立は $\theta=0,\ \pi$ のときだから $\vec{a}=k\vec{b}$ として条件から k を求める．

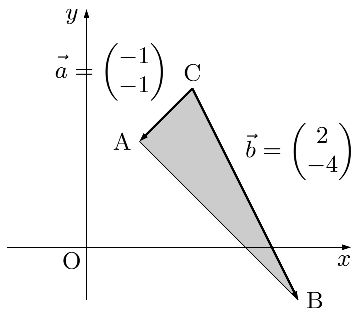
$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix} \longrightarrow a=b=c=k$$

これらを条件に代入すると

$$a^2+b^2+c^2=k^2+k^2+k^2=3k^2=1 \quad \therefore\ k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow \quad a=b=c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

このような代数的なテーマの問題もベクトルで扱うとハナシが**具体的**になり，等号成立時の確認などの作業がずっとやりやすくなる．

(2) 原点 O が指定されていない場合の例——こういうときは 1 点，たとえば点 C を**基準点**にとる．



$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=\vec{b}$$

で，面積を求める**公式**をモロ利用すればよい．

$$\begin{aligned}S&=\boldsymbol{\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}\\&=\frac{1}{2}|(-1)\cdot(-4)-(-1)\cdot2|=3\end{aligned}$$

となる．

1.3.3 図形を計算する

トートツな**内積の図形的定義** $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ が**成分の積の和**としての**内積の公理**の条件を満たすために調整されたきわめて**作為的**な形であることを説明した．

ここでわれわれは図形問題，特に**長さ**と**角度**に関する問題を解決する方法論を獲得するわけだが，その主な計算である**交換則**，**分配則**が，皮肉なことに図形的な立場からではなく**内積の公理**により**成分計算**の形で保証されてはじめて実現されるものであることを知っておいてもらいたいのである———決して当たり前のことではないのだ．

そして最後にそのトートツに見えた図形的定義が，実は**正射影の長さ** (**符号付長さ**) として**図形的意味**に対応していることを示す———ここで内積という数学的概念のナマの姿を説明しよう．

＜補足説明！＞

ここでは図形に関する問題として、**ベクトルの長さ**、**ベクトルのなす角**、とりわけ**垂直条件**などを計算するのだが、ここで 1 つ注意しておきたいことがある．

それは、たとえば $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ がベクトル $\overrightarrow{a}$ に垂直である条件を計算で実現するには

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{a}\cdot(\cdots\cdots\cdots) \quad \longleftarrow \quad \text{文字計算のようにカッコをはずす！} \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0\end{aligned}$$

と**内積の計算**を実行するわけだが、<u>こういう計算ができることの保証は前掲の**内積の分配則**によって担保されているわけで、しかもその証明は図形的な立場ではなく、内積がその**成分の積の和**であることに由来するハナシなのだ</u>．つまり

$$\boldsymbol{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2} \quad \longleftarrow \quad \textbf{分配則は右辺の形を使って証明される！}$$

はこの計算をするにあたって何らかの形で確認しておく必要がある．

したがって、<u>内積の分配則の計算そのものは普段は何気なく「**形式的に**文字計算と同じ」に計算しているが、**内容としては全くそれとはちがう**</u> ものとして了解しておかなければならないし、また運用しなくてはならないのである．

＜ **end.**＞

1.3.3.1　図形問題と内積

たとえば垂直条件をベクトルで表すには内積の図形的定義で $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときだから $\cos\theta=0$ で，結局は **内積＝0** を示すことになるが，その途中計算のスッタモンダを交換則，分配則でつなぐことになるのだ———以下，そこに注目して読んでもらいたい．

＜メモ＞——————————————————————————

■ 垂直条件と内積

＜例 1＞

三角形 OAB で $\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=\sqrt{3},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とのなす角を θ として $\cos\theta$ の値を求めよ．また線分 AB の長さを求めよ．

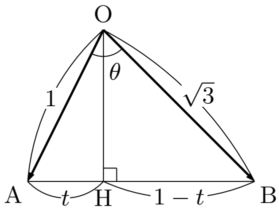
(2) 点 O から対辺 AB に垂線 OH を下ろすとき $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(解) (1) 三角形 OAB から何を読みとるか———基準点を O にとり，**1 次独立**である 1 組のベクトル $\overrightarrow{\mathbf{OA}},\ \overrightarrow{\mathbf{OB}}$ でハナシを展開する．

まずは，内積の図形的定義のおさらいといこう．

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathbf{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{OB}}\right|\cos\boldsymbol{\theta}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}=\frac{\frac{1}{3}}{1\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$



普通は $\sin\boldsymbol{\theta}$ を求めて三角形の面積というオマケがついている．

あまりに素朴だが確認しておくとよい．

次に AB の長さだが，余弦定理までもどることはなかろう．ここでは内積の演算規則に徹してその扱い方になれてほしい

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathbf{OB}}-\overrightarrow{\mathbf{OA}}\right|^{\mathbf{2}}\longleftarrow \text{交換則，分配則 と唱えて展開！}\\&=\left|\overrightarrow{\mathbf{OB}}\right|^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathbf{OA}}\right|^{\mathbf{2}}\\&=(\sqrt{3})^2-2\cdot\frac{1}{3}+1^2\\&=\frac{10}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$$

(2) H は線分 AB 上の点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

これが線分 AB と垂直だから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ で $\boldsymbol{t}$ がキマルはず———t の方程式だ！

そこで $(*)$ を用いて垂直条件を構成すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\{(1-t)-t\}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(1-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0\end{aligned}$$

として t を求めるのだが，これでは $\boldsymbol{t}$ が式全体に**散らばり**収拾がつかない．まして結局最後にまとめるのだから二重手間になる———$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ にこだわりすぎたためだ．

どうやら求める t は式全体に**散らさない**ほうがよい．
そこで $(*)$ を整備する——t でくくり直す．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\end{aligned}$$

としておけば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \longleftarrow \textbf{第 2 分配則！} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)\end{aligned}$$

となるから t は全体に**散らさない**ですむ．
そうすれば (1) で $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$ は求まっているから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \longleftarrow \textbf{第 1 分配則！} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{3} - 1^2 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

を計算して，これらを $(**)$ に入れると

$$-\frac{2}{3} + t \cdot \left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right)^2 = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

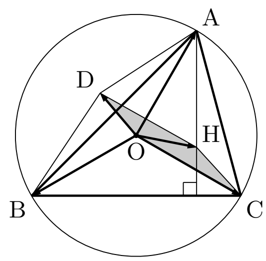
で，ずっと**カンタン**にいく——というより**見通し**がよい．

＜例 2＞

三角形 ABC でその外接円の半径を r，外心を O とする．
このとき線分 OA,OB を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の第 4 頂点を D，線分 OC,OD を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の第 4 頂点を H とする．
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表し，AH⊥BC を示せ．
(2) $\angle\mathrm{A}=60^\circ$, $\angle\mathrm{B}=45^\circ$ のとき線分 OH を r で表せ．

(解) (1) 内積を学ぶと**初等幾何**の古典的テーマである三角形の**垂心**をベクトルで扱うことができる———これで三角形の五心のうち傍心の外は出揃ったことになる．

平行四辺形を利用して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を求めると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}} \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{OH}}\text{は対角線！}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\overrightarrow{\mathrm{OC}} \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{OD}}\text{は対角線！}\\&=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

そこで，**垂直条件**を内積で計算する．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b}) \longleftarrow \textbf{交換則，分配則}\text{ を実行！}\\&=\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=r^2-r^2=0\end{aligned}$$

すなわち AH⊥BC が示された．

このことは何を意味するか———同様に BH⊥CA，CH⊥AB だから H は 3 つの垂線の交点，すなわち三角形 ABC の**垂心**であることがわかる．

さらに，**もう 1 つ**注目しておきたいことがある———$(*)$ をよくみてもらいたい．

三角形 ABC の重心の位置ベクトルのハナシから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \longleftarrow (*)\text{ を入れた！}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}}$$

すなわち G は線分 OH 上にあり，これを $1:2$ に内分している———**外心，重心，垂心**の位置関係もわかったことになる．

(2) これは 3 **項**の 2 乗展開となる———実際は内積だが**形式的には**数式と同じにやれる！

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2&=\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2\\&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \longleftarrow \textbf{交換則，分配則}\text{ を実行！}\\&=\boldsymbol{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2(\,\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}\,)}\cdots\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

ここで $\angle\mathrm{A}=60^\circ$, $\angle\mathrm{B}=45^\circ$ だから $\angle\mathrm{C}=75^\circ$ だから**円周角の定理**より

$$\angle\mathrm{BOC}=\mathbf{120^\circ},\ \angle\mathrm{COA}=\mathbf{90^\circ},\ \angle\mathrm{AOB}=\mathbf{150^\circ}$$

これより上記 $(**)$ の内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}r^2$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 90^\circ=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

これらを $(**)$ に入れると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2 = r^2 + r^2 + r^2 + 2\,(-\frac{1}{2}r^2 + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2) = (2-\sqrt{3})r^2$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \sqrt{2-\sqrt{3}}\ \ r$$

というわけで本問の**テーマ**は一応の**決着**をみた———しかし，この 2 **重根号**をはずす**手**はないか.

もし 2 重根号がとれて $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ になるような数は $x \geqq y \geqq 0$ として

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x+y-2\sqrt{xy}$$

だから，$\boldsymbol{x+y=A,\ xy=B}$ とおいてこれを逆にたどると

$$\begin{aligned}\sqrt{\boldsymbol{A-2\sqrt{B}}} &= \sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}\\ &= \boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\ (\geqq 0)\end{aligned}$$

だから，**たして** $\boldsymbol{A}$**，かけて** $\boldsymbol{B}$ となる 2 数 x , y を探せばよい.

だが，上記の $2-\sqrt{3}$ には $\sqrt{3}$ の前に**係数の 2** がないので，これを調整して作り出す作業をしなくてはならない———分母が 2 である分数になおして分子に 2 倍を作る.

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} \longleftarrow x+y=4,\ xy=3 \text{ だから 符号 を考えて } x=3,\ y=1\\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \longleftarrow \text{有理化 も忘れずに！}\end{aligned}$$

となる———できればここまでは**やっておきたい**なあ.

＜例 3＞

3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間に

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=-1,\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

の関係がある．このとき

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の長さを求めよ．　　(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ．

(解) キレイな形をしているから図形的な切り口がありそうだが実は**あまりうまくない**———これは幼い日の筆者が**内積計算**の**威力**を思い知らされた問題なのです.

(1) まず，与えられた条件は

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

$(*)$ の両辺に $\vec{a}$ を**カケル** (内積を作る) のだ———これは教わっていなければ思いつくまい．つまり

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{0}}\longleftarrow$$ **交換則，分配則** を実行！

$$\therefore\quad |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

これに $(**)$ を用いると

$$|\vec{a}|^2+(-1)+(-1)=0\quad\therefore\ |\vec{a}|^2=2\quad\therefore\ |\vec{a}|=\sqrt{2}$$

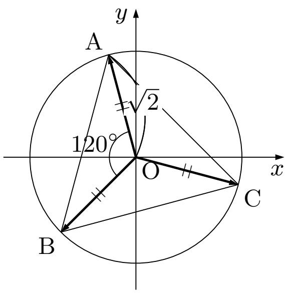
他の場合も同様だから

$$|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}\ (=|\vec{a}|)$$

まあ，いろいろなアプローチの仕方があるだろうが，これが最も**簡単**で**自然**に見える.

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta$$
$$=2\cos\theta=-1$$
$$\therefore\quad \cos\theta=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad \theta=120^\circ$$



で，**一件落着！**

結局，他の場合も同様だから本問は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円に内接する**正三角形**についての問題であることがわかる———トウゼン**外心，重心，垂心，内心**は点 O に**一致**する.

見えてしまえば**ナーンダ**ということだが，ここから題意の条件を説明する (十分性) のは簡単だが、正面からこの結論の図形的な説明をする (必要性) には何か**歯がゆい**カンジがまとわりついてキモチが悪い．その点，上記のように**内積計算**でやれば**一刀両断**だ———内積に**敬礼！**

＜例 **4**＞

座標空間に 4 点 A(3, 0, 4), B(−3, 0, −4) C(0, 10, 0), D(−8, 5, 6) がある.

(1) 点 D から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ.

(解) (1) H は三角形 ABC を含む**平面上**の点だから

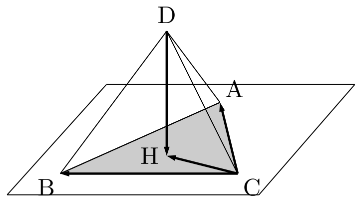
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}}\longleftarrow \text{この 1 行が すべてをキメル！}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\text{ただし，}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\begin{pmatrix}3\\-10\\4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}}=\begin{pmatrix}-3\\-10\\-4\end{pmatrix}\longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{CA}},\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}\text{はこの平面上で } \mathbf{1} \text{ 次独立！}$$

と表すことができるからこの $\boldsymbol{s}$**,** $\boldsymbol{t}$ を決めればよい. ショセンこの 2 文字 s, t は**等式 2 本**でキマルはずだから，**自分の都合のよい図を描く**と**垂直条件** (内積=0) は **2** **つ**あるはず———**垂線の方向** $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DH}}}$ がこの**平面上**の 2 つのベクトル $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}$ の両方に対して**垂直**であることが見えてくる.

これらの関係を**成分表示**して**内積**で表せばよい. あとは**タダの計算**だ.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DH}}&=\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\\&=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=s\begin{pmatrix}3\\-10\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-10\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\-5\\6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3s-3t+8\\-10s-10t+5\\4s-4t-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$



ゆえに上記の**垂直条件**を**内積**で表すと

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DH}}}\cdot\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}=(3s-3t+8)\cdot 3+(-10s-10t+5)\cdot(-10)+(4s-4t-6)\cdot 4=\mathbf{0}$$

$$\therefore\quad 125s+75t-50=0\qquad\therefore\quad 5s+3t=2$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DH}}}\cdot\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}=(3s-3t+8)\cdot(-3)+(-10s-10t+5)\cdot(-10)+(4s-4t-6)\cdot(-4)=\mathbf{0}$$

$$\therefore\quad 75s+125t-50=0\qquad\therefore\quad 3s+5t=2$$

これらを解くと $s=t=\dfrac{1}{4}$ だから $(*)$ に入れて

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\-10\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3\\-10\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$$

ゆえに H の座標は $\mathrm{H}(0,5,0)$ である.

(2) 四面体 ABCD の体積を V とおくと

$$\boldsymbol{V=\frac{1}{3}Sh}\ \longleftarrow S=(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}),\ h=\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right| \text{ を求めて代入！}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

まず，S はいきなり**面積公式**から書きはじめてよいだろう.

$$\begin{aligned}S&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})^2}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\{3^2+(-10)^2+4^2\}\{(-3)^2+(-10)^2+(-4)^2\}-\{(3(-3)+(-10)^2+4(-4)\}^2}\\&=\frac{1}{2}\cdot 100=50\end{aligned}$$

h は，まず $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ を求めて絶対値をとればよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ h = \overrightarrow{\mathrm{DH}} = \sqrt{8^2 + 0^2 + (-6)^2} = 10$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 10 = \frac{500}{3}$$

(注) 実はこの (1) のような問題は本来は空間座標の**平面の方程式**を用いて解くはずの問題である．とはいえ，現行の高校のカリキュラムでは平面の方程式は除かれているのでそれ以外の方法でやろうとすれば上記のようにやるしかない———詳しくは後述の**空間座標**を参照されたい．

1.3.3.2　正射影と正射影ベクトル

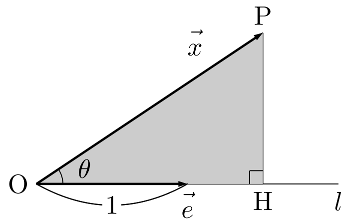
さて，いよいよあのトートツに見えた内積の図形的定義の意味を説明するところに来た. 問題の定義は

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}} = |\boldsymbol{\vec{a}}||\boldsymbol{\vec{b}}|\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

だが、これをどう読むか———右辺の $\cos\theta$ の前に $|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の 2 つの量があるのが気に入らない.

何とかこれを 1 つにする方法はないか．それには、$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ のどちらか 1 つを単位ベクトルにとればよさそうだ！

そこで，$(*)$ で $\boldsymbol{\vec{a}=\vec{e}}$ (単位ベクトル) とおき，さらに一般化したいので $\vec{b}=\vec{x}$ とおくと



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\vec{e}\cdot\vec{x}} &= |\boldsymbol{\vec{e}}||\boldsymbol{\vec{x}}|\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} \quad\longleftarrow\quad |\vec{e}|=1\\ &= |\vec{x}|\cos\theta = \mathbf{OH}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

これは $\vec{x}$ の，$\vec{e}$ 方向へ正射影したベクトルの長さに他ならない.

ただし，θ が 90° を越えるときは $\cos\theta<0$ だから $(**)$ は負の値をとる．つまり $(**)$ は $\vec{x}$ の $\vec{e}$ を含む直線 l 上への正射影の長さ (符号つき) である.

正射影という言葉は文字通り垂直に影が射すということだが，具体的には図の点 P から直線 l へ下ろした垂線の足 H が P の l 上への正射影である．したがって，線分 OH は線分 PH の正射影，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の正射影になる.

そういうことなら、$(**)$ の $\vec{e}\cdot\vec{x}$ が OH の長さで、$\vec{e}$ はその方向を与えるから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は

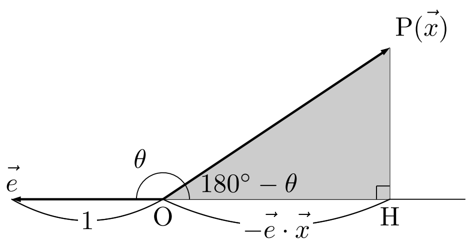
$$\overrightarrow{\mathbf{OH}} = (\boldsymbol{\vec{e}\cdot\vec{x}})\,\boldsymbol{\vec{e}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

$\longleftarrow$ $\vec{e}\cdot\vec{x}$ は スカラー で $\vec{e}$ は ベクトル(向き)！

を計算すればよい．しかも，おもしろいことに，もし θ が 90° を越えて $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$ が負のときは単位ベクトル $\vec{e}$ の係数 $\vec{e}\cdot\vec{x}$ も負だからこれを $\vec{e}$ にかけるとベクトルが逆向きになるのだ．つまり，つねに $(***)$ の右辺の終点がシッカリ，というか勝手に $\vec{x}$ の終点から l への垂線の足 **H** に一致してくれるのである.

実際，図を描いて線分 OH の長さをマジメに計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{OH} &= |\vec{x}|\cos(180^\circ-\theta)\\ &= -|\vec{x}|\cos\theta\\ &= -\vec{e}\cdot\vec{x}\\ \therefore\ \vec{e}\cdot\vec{x} &= -\mathrm{OH}\end{aligned}$$



で，上記の $(**)$ に符号を認めると $(***)$ はこれを自動的にやってくれていることになる———チョッと感動的モノではないか.

それでも **(∗)** や **(∗∗)** に天下り的な違和感を覚える向きは実際に計算してみればよい．以下、H は直線 l 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{e}$ とおいて垂直条件から k の値を求めてみる．

すなわち

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}) \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{e} \\
&= \left|k\vec{e}\right|^2-(k\vec{e})\cdot\vec{x} \\
&= k\{k-(\vec{e}\cdot\vec{x})\}=0 \\
&\therefore\quad k=(\vec{e}\cdot\vec{x}) \longleftarrow k=0 \text{ はこれに含まれる！}
\end{aligned}
$$

で，(∗∗∗) が計算で説明される．

＜補足説明！＞

そこで、改めて内積の図形的定義を与える

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{(∗)}$$

をながめると、これは $\vec{b}$ を $\vec{a}$ 方向へ**正射影**したベクトルの**長さ**を $\left|\overrightarrow{a}\right|$ 倍したものになっている———何だか回りくどい．

図形的に意味を持った定義としてなら

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\vec{e}\cdot\vec{x}} &= \boldsymbol{|\vec{e}||\vec{x}|\cos\theta} \quad\longleftarrow\quad |\vec{e}|=1 \\
&= |\vec{x}|\cos\theta=\mathbf{OH}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{(∗∗)}
\end{aligned}
$$

の方がずっとわかり易い．

そうであるにもかかわらず (∗) を内積の図形的定義としているのはなぜか．そうしないと**内積の公理**として定義された

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

の満たす条件に合わないからである———図形的に定義される (∗) はそれに合わすために調整したもの なのだと思ってもらいたい．

初学者にとって内積は何だかとても**難しい**ものに見えてしまうのは，その**ズレ**を心理的にうまく受け入れられないことにあるのではないか．

まあ、仕方がないから、**正装**をした図形的定義が **(∗)**，その**上着の下の実体** (ホンネ) が **(∗∗)** で，その上着を脱いだ形ではじめて**図形的意味**が**実現**されるとでも理解しておけばよい．

＜ end.＞

＜メモ＞

■ 正射影と単位ベクトル

本文の $\overrightarrow{\boldsymbol{e}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ は正射影の長さ (符号付) で，これはスカラー量 (実数値) である．

一方この数値が単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ にかかった $(\vec{\boldsymbol{e}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}})\,\vec{\boldsymbol{e}}$ が正射影ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ でこれは当然ベクトル量である――特に初学者はここがわかりにくい．

＜例 1＞

次の 3 つのベクトルについて設問に答えよ．

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のいずれにも垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

(2) (1) の $\vec{e}$ を含む直線を l とするとき，$\vec{c}$ の l 上への正射影の長さを求めよ．

(解) (1) 求める単位ベクトル $\vec{e}$ の成分を x, y, z として条件を数式で表すと

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}} = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 4 \cdot z = \mathbf{0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}} = 2 \cdot x + 3 \cdot y + (-4) \cdot z = \mathbf{0} \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

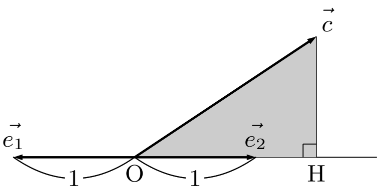
$$\left|\vec{\boldsymbol{e}}\right|^{\mathbf{2}} = x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{1^2} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

①, ② より $x = -4z$, $y = 4z$ だから，これらを ③ に代入すると

$$(-4z)^2 + (4z)^2 + z^2 = 1 \qquad \therefore\ z^2 = \frac{1}{33} \qquad \therefore\ z = \pm\frac{1}{\sqrt{33}}$$

ゆえに求める単位ベクトルは

$$\vec{e} = \pm\frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



(2) 符号つき正射影の長さは

$$\vec{e} \cdot \vec{c} = \pm\frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \pm\frac{(-4) \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{\sqrt{33}} = \mp\frac{1}{\sqrt{33}} \quad \text{(複合同順！)}$$

ゆえに求める正射影の長さは符号を無視して

$$\left|\vec{e} \cdot \vec{c}\right| = \frac{1}{\sqrt{33}}$$

とすれば，ともかくも正射影の長さは求まる．しかし符号の意味はどうなるか――図を見てもらいたい．上記の計算で符号の対応関係を追いかけてみると，(1) で求めた単位ベクトルが $\vec{c}$ に対してどちらを向いているかがわかる．すなわち

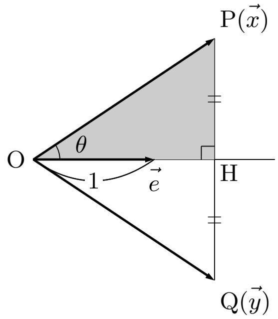
$$-\frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1}, \quad \frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_2}$$

になっていることに注目してもらいたい．

■ 対称ベクトルと反射

さらに本文の $(***)$ を用いると，直線 l に関する x の**対称ベクトル**などはすぐに求まる．これは**鏡面の反射**の問題などのときには重宝である———参考までに以下に求めておく．

求める対称なベクトルを $\vec{y}$ とおくと，$\mathbf{H}$ は両ベクトルの端点 P, Q の**中点**だから



$$\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{e}\cdot\vec{x})\,\vec{e}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\vec{y} = 2(\vec{e}\cdot\vec{x})\,\vec{e} - \vec{x}}$$

上記では l 上 (あるいはそれと平行) のベクトルを単位ベクトル $\vec{e}$ にとって説明したが，たとえば一般のベクトル $\vec{a}$ のときは**この向きの単位ベクトル** $\vec{e}$ を作って上記を実行すればよい．

手順としては、$\vec{a}$ と同方向の単位ベクトルは $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ だから大マジメにこれを代入する代入するだけのことだ．

すなわち

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{OH}} &= \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{x}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \longleftarrow \boldsymbol{\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}} \text{ を代入！} \\
&= \frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \\
&= \boldsymbol{\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a}} \quad \longleftarrow \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} \text{ は スカラー, } \vec{a} \text{は ベクトル(向き)！}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\vec{y} = 2\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a} - \vec{x}} \quad \longleftarrow \text{上記の}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\text{をそのまま代入する！}$$

いやはや 2 階建ての，何だか複雑に見える式だが，**スカラー (実数) 部分**と**ベクトル部分**の見極めがつけばそうメンドウなハナシではない．

＜例 1 ＞

垂直方向のベクトルが $\vec{a}$ である平面に，ある光線がベクトル $\vec{b}$ の方向で入射している．
このとき反射光線の方向の単位ベクトルを求めよ．
ただし

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

とする．

(解) まず，$\vec{a}$ に関して $-\vec{b}$ と**対称なベクトル**を求め，改めてその方向の**単位ベクトル**を計算すればよい———上記の説明で**公式の誘導**を詳しく解説したので，ここではそれを用いて実際に**計算**をしてみることにする．

要するにあらかじめベクトルで表しておいて、ここでやっと成分計算をするわけである———その方がずっと見通しがよい．

求めた**公式**は

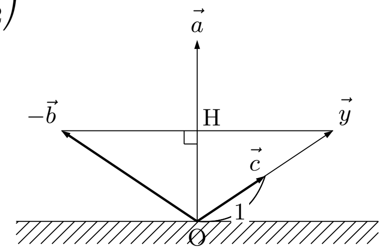
$$\boldsymbol{\vec{y} = 2\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a} - \vec{x}}$$

であったから**反射光線**の方向は $\vec{a}$ はそのままにして $\vec{x}$ を $-\vec{b}$ とおけばよいはずである．

その上で $\vec{y}$ 方向の単位ベクトルを求める．

$$\vec{y} = 2\ \frac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot(-2)}{(-1)^2+2^2+1^2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix} \longrightarrow \text{方向 は } \vec{c} = \begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$$



ゆえに，この方向の**単位ベクトル**は

$$\vec{e} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{4^2+1^2+8^2}}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$$

とすればよい．と，まあ一応の結果は出る．

しかしまだ工夫の余地はありそうだ．特に求めるものが**単位ベクトル**と指定されているのもナントナク**思わせぶり**にみえる．

そこでよくながめてみると垂直方向のベクトル $\boldsymbol{\vec{a}}$ と入射光線方向 $\boldsymbol{\vec{b}}$ で作られる平面は反射面に垂直で，反射光線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{\vec{e}}$ は**この平面上**にある．そしてその平面上で $\vec{a}$ は $-\vec{b}$ と $\vec{e}$ とのなす角を **2 等分**している．すなわち

$$\boldsymbol{\frac{-\vec{b}}{|-\vec{b}|} + \vec{e} = t\vec{a}} \longleftarrow \frac{-\vec{b}}{|-\vec{b}|},\ \vec{e} \text{ は } \textbf{単位ベクトル！}$$

$$\therefore\quad \vec{e} = t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

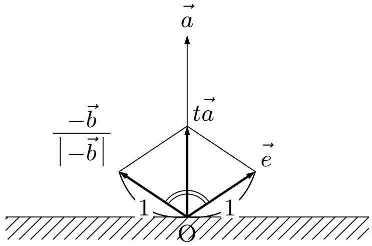
$$= \begin{pmatrix}-t+\dfrac{2}{3}\\[4pt] 2t-\dfrac{1}{3}\\[4pt] t+\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$\vec{e}$ は**単位ベクトル**だから

$$|\vec{e}|^2 = (-t+\frac{2}{3})^2 + (2t-\frac{1}{3})^2 + (t+\frac{2}{3})^2\ (=1)$$

$$\therefore\quad 6t^2 - \frac{4}{3}t = 0 \qquad \therefore\ 6\ t\ (t-\frac{2}{9}) = 0$$

$$\therefore\ t = \frac{2}{9}\ (\fallingdotseq 0)$$



これを代入して

$$\vec{e} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$$

で同じ結果を得る――――**どちらもマスター**のこと．

1.3.3.3　直線の方程式と内積

xy 平面上の直線 l が x, y の 1 次方程式

$$l:\quad ax+by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

で表されることはいまさら説明するまでもないが，この左辺に注目してもらいたい．

左辺の $\boldsymbol{ax+by}$ は**積の和**の形になっている———これは**内積**そのものである．そこで $(*)$ をベクトルを用いた形に書きかえてみよう．

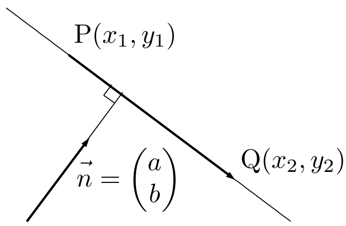
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{-c} \quad\longleftarrow\quad \text{以下,}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\vec{n}\text{とおく！}\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

このとき，おもしろいことに $\vec{n}$ はもとの直線 l に**垂直**になっているのである．

そのために $\vec{n}$ を直線 l の**法線ベクトル**と呼ぶときもある．まずは，それを**確認**することから始めよう．

直線 l 上に 2 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ をとると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\vec{n}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{PQ}}&=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{pmatrix}\\&=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)\\&=(ax_2+by_2)-(ax_1+by_1)\\&=(-c)-(-c)=\mathbf{0}\end{aligned}$$



ともあれ**垂直条件**は確認できた．

次に，$(**)$ の両辺を $\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}}$ で**割る**!

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ここで左辺の**左側**のベクトルが**単位ベクトル**であることに注目すると

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\vec{e}\longleftarrow \textbf{単位ベクトル！}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\longleftarrow \mathrm{P}(x,y)\ \text{は}\ \boldsymbol{l}\ \textbf{上の点！}$$

だから、これはさらに書き換えられて

$$\boldsymbol{\vec{e}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\boldsymbol{\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}}\ (=p\ \text{とおく})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

このとき，この**右辺**が負とならないように $(*)$ の段階で調整しておくとよい．

さて，このことは**何を意味するか**———右辺の数値は原点 O から直線 l への**距離**そのものに他ならない———$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は**正射影の (符号つき) 長さなのだ！**

したがって**符号を無視した長さ**は

$$\begin{aligned}\mathbf{OH}&=\left|\boldsymbol{\vec{e}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OP}}\right|\\&=\left|\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\boldsymbol{\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}\end{aligned}$$

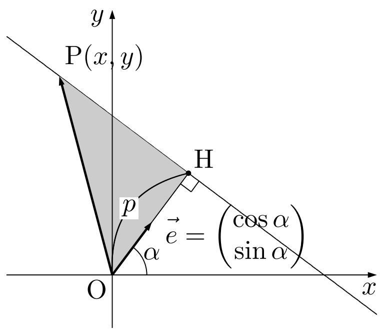
また，$(***)$ の単位ベクトルの成分は

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$$

とおくことができるから $(***)$ は

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=p$$

$$\longrightarrow\ \boldsymbol{x\cos\alpha+\sin\alpha=p}$$



と表される．

このように右辺を**原点からの距離** $\boldsymbol{p}$ で表した直線の形を **Hesse**(ヘッセ) **の標準形**という——上記の p の値が内積 (左辺) で表されるところがおもしろい．

ここまでわかると、**垂線の足 H の座標**を求めるには

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}}=(\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}})\ \vec{\boldsymbol{e}}$$

$$=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{e}=p\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

を計算すればよいことはもう説明するまでもないだろう．

この考え方は次に示す**オナジミの定理**として展開する．

<補足説明！>

上記を実際に具体的な数値で説明しておこう．たとえば

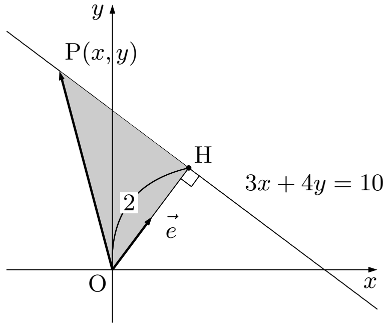
$$l\ :\ \ 3x+4y=10\quad\longleftarrow\quad\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=10 \text{ と読め！}$$

として両辺を $\sqrt{3^2+4^2}=5$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=2}\ \longleftarrow\ \text{これが } l \text{ の } \textbf{Hesse} \text{ の標準形！}$$

ベクトルを用いて表すと

$$\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}}_{\vec{e}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}=2$$



ゆえに左辺は

$$\left|\vec{e}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cos\phi=\mathrm{OH}$$

だから、このことから $\mathrm{OH}=2$ で、H の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=2\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ \mathrm{H}\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$$

となる．また、これが一般の点、たとえば A(2, 3) からの垂線などというときは、点 A を上記の原点 O に見立てて同様に考えればよい．

< **end.**>

＜メモ＞

■ 距離の公式

＜例 1 ＞

平面上の点 $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ から直線 l : $ax + by + c = 0$ に下ろした垂線の距離 h は

$$\boldsymbol{h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

で求められる．これを証明せよ

(解) さあ，このヤマを越えればいよいよ免許皆伝だ．

第 1 の方法として，まず初学者は点 $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ を通り l と垂直な直線を作り，l との交点 H を求め，2 **点間の距離公式**にしたがって線分 AH を素朴に計算しようとするだろう．

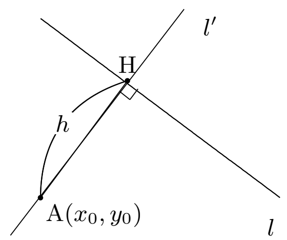
そのときだって上記の**法線ベクトル**が役に立つ——これは知っておいたほうがよい．

すなわち，l の法線ベクトル $\vec{n}$ の第 1，第 2 成分を**取り替えて**そのどちらかに**マイナス**をつけて $\vec{n'}$ とする——$\vec{n'}$ は $\vec{n}$ との内積が 0 だからこれはトウゼン $\vec{n}$ と垂直である．

そこでこれを l と**垂直**な直線 l' の法線ベクトルとして採用する．

そうすると

$$l\ :\quad \boldsymbol{ax + by + c = 0}$$
$$l' :\quad \boldsymbol{bx + (-a)\ y + c' = 0}$$



だが，直線 l' が点 (x_0, y_0) を通るから代入して

$$bx_0 + (-a)\ y_0 + c' = 0$$
$$\therefore\ c' = -bx_0 - (-a)y_0$$

これを代入して c' を消去すると

$$l' :\quad \boldsymbol{b\ (x - x_0) + (-a)\ (y - y_0) = 0}$$

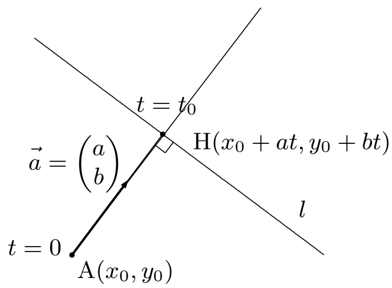
これは**公式**としていきなり用いてよい——幼き日の著者は突然のこの式に戸惑ったことがある．

あとはこれを整理して l の方程式と**連立**して **H** の座標を求め，線分 **AH** を計算すればよい．

これはおまかせする．多少モタモタするが大したことはない！**第 2 の方法**としてはやはり**ベクトル**だ！

点 $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ を通り，l と垂直な直線 $\boldsymbol{l'}$ 上の点 $\mathrm{H}\ (x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \end{pmatrix}$$



これは $\boldsymbol{l}$ 上の点でもあるから代入して

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$$
$$\therefore\ t = \frac{\boldsymbol{-(ax_0 + by_0 + c)}}{\boldsymbol{a^2 + b^2}}\quad (= \boldsymbol{t_0}\ とおく)$$

$t = t_0$ に対して $\mathrm{H}\ (x_0 + at_0,\ y_0 + bt_0)$ がキマルから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$= \begin{pmatrix} x_0 + at_0 \\ y_0 + bt_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at_0 \\ bt_0 \end{pmatrix}$$

そこで $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathbf{AH}}\right| &= \sqrt{(at_0)^2+(bt_0)^2} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\ |t_0| \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\ \left|\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right| \\
&= \boldsymbol{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}\ (=h) \longleftarrow \textbf{デキタ！}
\end{aligned}$$

スッキリした**ベクトルらしい**良い方法ではある．

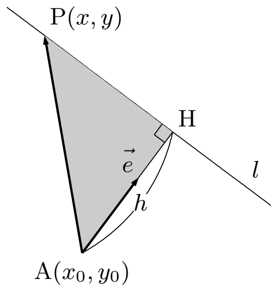
さて，**第 3 の方法**を説明しよう———**本命**である**正射影**の登場である．

直線上の点を $\mathrm{P}(x,y)$，法線方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AP}} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{-(ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}}
\end{aligned}$$

絶対値をとれば

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathbf{AH}}\right| &= \left|\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AP}}\right| \\
&= \left|\frac{-(ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \\
&= \boldsymbol{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}\ (=h)
\end{aligned}$$



で，カンタンにいく．

ちなみに**垂線の足 H** の**座標**を求めるには

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}} \\
&= \overrightarrow{\mathbf{OA}}+(\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AP}})\vec{\boldsymbol{e}} \\
&= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\frac{-(ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

を計算すればよい———まあ，ここまでやれば**カンペキ**である．

第2章　空間座標とベクトル

空間で直交する座標軸，x, y, z 軸を定めることにより空間における点 P は，たとえば点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ のようにその**成分**を用いて表すことができる———これを**座標**という．

xy 平面上の直線，または曲線は x と y の方程式で記述された．空間図形についても基本的にはほぼ同様であるが，空間図形の方程式として x, y, z の関係式をいきなり導くのはかなり困難である．しかし，その**図形的性質**を**ベクトル**を利用して**記述**することによりかなりの部分が救済される———特に**直線図形**はベクトルの得意科目である．

以下，空間座標で**点**，**直線**，**平面**の諸問題を解決するのだが，まあ基本的には**図形と方程式**の**点と直線**に対応する**空間座標篇**であると思えばよい．ただ，扱い方の要領として，この場合は成分が 3 つであるからその成分をバラバラに計算するのではタイヘンだ———これらの数値を**セットにしたまま**議論を進められるところがベクトルの**醍醐味**である．そういう理由でここの議論の展開は**ベクトルの独壇場**となる．

そう考えて平面図形の**図形と方程式**を眺めると**ベクトル**を使うと有効な場面が多々ある———使えるところでは**積極的に使う**とよい．

＜注意！＞

高校の教科書を調べてみた．確かに**空間座標**という項目はある．x, y, z の座標についての説明も書いてある．しかしそのあと，いきなり**球面の方程式**になるのだ———それは**ナイ**だろう．

教わる君たちにはわかるまいが教師の目で見ると道路が途切れて**橋が落ちている**カンジなのだ．

本来はその途中に**直線の方程式**，**平面の方程式**があり，**球面の方程式**とあわせてそれらの間の**関係**が議論されなくてはならないはずである———カリキュラムはその平面の方程式とその周辺の諸問題をゴッソリ間引いてしまったようにみえる．

もっとも直線の方程式はおおむねベクトルで間に合わせることはできるし，平面についても 51 ページの＜**例 4**＞のような形で触れることはできる．しかし，それでは効率も悪いが平面というものを正面から扱うというハナシにはならない———あまり健康的なアプローチではない．

そういうことならいっそ空間座標そのものを**削除**してしまえばよいものをいろいろな立場のいろいろな**ご意見**を尊重した結果こんなことになってしまったのであろうが，学ぶ者の都合を配慮した結果とは思えない———ほとんど大人たちの無責任に起因する**公害**にさえみえてくる．

結果，受験生としてはどこまでが試験範囲かわからない不安からつねに**学び足りない**という**ストレス**に付きまとわれることになる．筆者としては君たちのそのストレスを**払拭**することが第 1 と考えてこの章を書いた．

そういう事情だから本稿は落ちた橋の**修復工事**になってしまった．したがってそう深入りすることはないが，本稿の内容くらいは読んでおいてソンはしないと思う———正規の**空間座標**とはこういう扱いのことである．

ただし，**入試対策**という点で言えばそこまでやることはなさそうだ———よりによって落ちた橋の残骸から入試問題を作るとも思えないではないか．

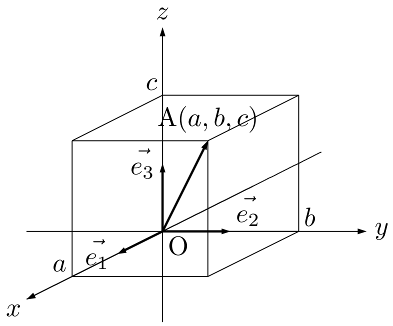
積分で体積を求める場合など，要は**空間がイメージ**できて**座標のカンジ**がつかめればよいというあたりに照準を決めてこうなってしまったのかもしれない———筆者にはそう見える．

2.1　点，直線，平面

2.1.1　点

空間の点だが，まずはこれを**位置ベクトル**で表す．その上で**ベクトルの計算**に乗せる，というのがこれから展開しようとするハナシの**あらすじ**である．

2.1.1.1　点の座標表示と基本ベクトル



たとえば空間座標 (a,b,c) で表される点 A は，原点を始点とする**位置ベクトル**を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

と表されるが，これは

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a\ \vec{e_1} + b\ \vec{e_2} + c\ \vec{e_3} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = a\ \vec{e_1} + b\ \vec{e_2} + c\ \vec{e_3} \ \longleftarrow\ \boldsymbol{\vec{e_1}}, \boldsymbol{\vec{e_2}}, \boldsymbol{\vec{e_3}}\ \text{は基本ベクトル！}$$

したがって，座標表示の**成分**はそれぞれ x,y,z 方向の**基本ベクトル**にかかる**実数値**を表している．

ここで $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ は互いに直交するからトウゼン 1 **次独立**で，したがって上記の表現が**一意的**であることは説明するまでもない——すべてはここから展開する．

2.1.1.2 分点の座標，2 点間の距離

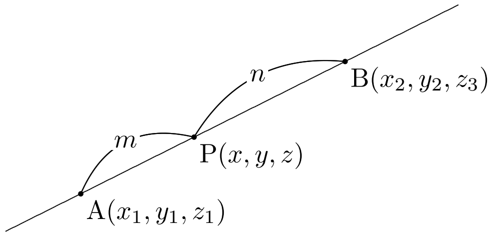
空間の 2 点を $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ とするとき，線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とすると，この**分点の座標**はベクトルの**分点の公式**を利用してカンタンに求めることができる．

分点の公式と 2 点 A，B の**位置ベクトル** $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}},\quad \text{ただし，}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

だからそのまま**成分計算**を実行すればよい．
点 P の座標を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{n}{m+n}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \frac{m}{m+n}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} nx_1 + mx_2 \\ ny_1 + my_2 \\ nz_1 + mz_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



すなわち分点 P の**座標**は

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{ny_1 + my_2}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{nz_1 + mz_2}{m+n}}\right)$$

となるがこれを公式として覚えたりする必要は全くない．ただし，いつでも**ベクトル**を用いて**誘導**できるようにしておくことが大切である．

また，**2 点 A，B 間の距離**は

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \\ \therefore\quad &\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &\qquad\quad = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ \therefore\quad &\left|\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\right| = \boldsymbol{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\end{aligned}$$

であるが，これらを上手に計算する**要領**は

(i) まずは**ベクトル**で記述すること．

(ii) 最後に**成分**を代入する．

ように心がけるとよい——なるべく 3 次元にバラさないで**セット**のまま扱うことが肝要である．

2.1.2　直線

xy 平面上の直線は

$$y = mx + n,\quad \text{あるいは}\quad ax + by + c = 0$$

のように x と y の 1 次方程式で表されたが空間ではいきなりそうはいかない．

そこで改めて，空間 (または平面) 上で**直線を決定**する**要件**は何かという**素朴**なところまで立ちもどって考えることにする．

それはその**方向**と**通過点**である——ベクトルの出番である．

まず，求める直線上の点 P を**位置ベクトル**で表し，それを**成分表示**する——x, y, z の関係式で表すかどうかはそのあとのハナシである．

2.1.2.1　直線の方程式

位置ベクトルが $\vec{a}$ で与えられる定点 A を通り**方向ベクトル** が $\vec{m}$ $(\fallingdotseq \vec{0})$ である直線 l 上の点 P の位置ベクトルが $\vec{x}$ であるとすると

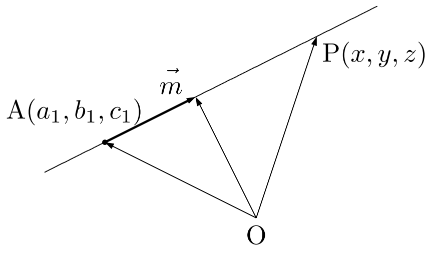
$$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{m}}\ (t \text{ は実数})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

で表される——実数 t を変化させると点 P は直線 l 上を動く．

このとき，実数 t を**変数**にとり，実数全体を変化させると点 P は直線全体を動く——$(*)$ は直線 l 全体を表す．このことから $(*)$ を直線 l の**ベクトル方程式**という．

さて，直線 l の具体的な条件として，各点の座標 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と方向ベクトル $\vec{m}$ の成分を与えると $(*)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$



で，ここまではベクトル方程式である．

このとき点 P の x, y, z 成分は t を用いて

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a_1 + m_1 t} \\ \boldsymbol{y = a_2 + m_2 t} \\ \boldsymbol{z = a_2 + m_3 t} \end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

と表される——$\boldsymbol{t}$ を**パラメーター (媒介変数)** とする**パラメーター表示**という．

すなわち点 P は t をパラメーターとするパラメーター表示で

$$\mathrm{P}\ (\ a_1 + m_1 t,\ a_2 + m_2 t,\ a_2 + m_3 t\ )$$

と表される——3 つの成分を 1 文字で表せてなかなか便利な表記方法である．

さらに $(***)$ の 3 式から t を消去すると

$$\boldsymbol{\frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y - a_2}{m_2} = \frac{z - a_3}{m_3}}\ (= t)$$

が得られる———これを**直線の標準形**といい，ともあれ $\boldsymbol{x, y, z}$ の**関係式**が求まった．

これはなかなか**キレイ**な形をした式だがこのままでは役に立たない．結局，各等号について分母を払い a_1, a_2, a_3 を移項して $(***)$ の形に直してはじめて実力を発揮する．

また，分母が 0 のときは分子も 0 ときめておけば $(***)$ に矛盾しないが，**使い勝手，見通し**の点では $(***)$ の方がずっと**エライ**のだ！

(注) 上記の**直線の標準形**に違和感はないか———2 つの等号を分けて考える．

2 式の分母を払うと

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-a_2}{m_2} \longrightarrow m_2 x - m_1 y + 0 \cdot z + m_1 a_2 - m_2 a_1 = 0$$
$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{z-a_3}{m_3} \longrightarrow m_3 x + 0 \cdot y - m_1 z + m_1 a_3 - a_1 m_3 = 0$$

で，これらはいずれも $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ の **1 次方程式**である———後述するが x，y，z の 1 次方程式は**平面**を表す方程式である．すなわち上記の標準形はこれら 2 つの等式を同時に満たすからこの **2 平面の交線**である直線であることがわかる．

＜メモ＞

■ パラメータ表示が有効！

＜例 **1** ＞

次の条件を満たす直線を求めよ．

(1) 2 点 A(1, 2, 3), B(−1, 0, 4) を通る．　(2) A(1, 2 ,3) を通り，y 軸に平行．

(3) 点 B(−1, 0, 4) を通り，x 軸，y 軸とのなす角が 60°.

(解) (1) 方向ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\\4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

だから求める直線の方程式を**標準形**で表すと

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1},\quad \left(\text{あるいは}\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}\right)$$

となる．

ベクトル方程式で表せば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

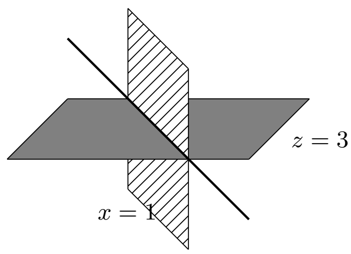
$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t+1\\2t+2\\-t+3\end{pmatrix}\longrightarrow \mathrm{P}(2t+1,\ 2t+2,\ -t+3)$$

と**パラメーター表示**される．

どちらで示してもよいが，使うときはパラメーラー表示で使う場合が多いが設問の前後の**指示**に従うことになる．

(2) 方向ベクトルの成分に 0 が混入しているから**カタチ**通りに標準形で表すと

$$\left(\ \frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0}\ \right)\longleftarrow \text{こうは書かない！}$$



となるが，分母が 0 のところは約束に従って分子も 0 とする．

$$x=1,\ z=3$$

この結果はよく空間の 1 点と誤解されがちだが実はそうではない——— 等式 2 本が**同時に満たされる**から $x=1$ という平面と $z=3$ という平面との**交線**であることを意味している．

このとき y は任意となるのだが，こうなると標準形は**点の動きに関心がない**表現なので何だか**わかりにくい**．いっそ**ベクトル方程式**の方が**自然**だ．

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2+t\\3\end{pmatrix}\longrightarrow \mathrm{P}(\ 1,\ 2+t,\ 3\ )$$

この y 成分 $y=2+t$ だが，これは t がすべての実数をとって変化すれば y もすべての実数をとって変化することを示している．

このことからも，標準形より**ベクトル方程式**，**パラメーター表示**の方が状況の把握という点で**精度が高い**ことがわかる———標準形の**存在価値**についてはあとで説明する．

(3) まず，方向ベクトル $\vec{m}$ を決めたいが，これと z 軸とのなす角が与えられていない．仕方がないのでこの角を θ とおく．その上で**方向ベクトル**を**単位ベクトル**にとるのだ．

そうすると

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \cos 60^\circ \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \cos\theta \end{pmatrix} \longrightarrow (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \ (= |\vec{m}|^2)$$

$$\therefore \quad \cos^2\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

これを代入すると $\vec{m}$ が決まり， B$(-1,\ 0,\ 4)$ を通ることから直線の方程式が決まる．すなわち

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{\pm\sqrt{2}}$$

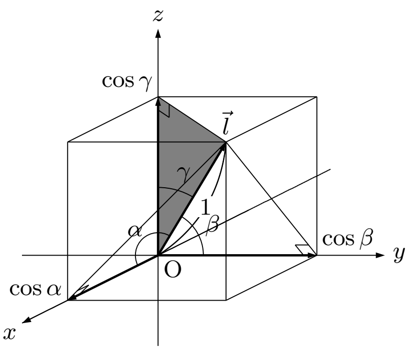
で，**一件落着！**

■ 方向余弦について

方向ベクトル $\vec{l}$ が**単位ベクトル**で、これと x, y, z 軸の正方向とのなす角がそれぞれ $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$ であるならば、この**成分** $l_1,\ l_2,\ l_3$ は x, y, z 軸方向への**正射影の長さ** (符号付) で与えられる．

すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e_1}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e_2}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e_3}$$



として内積を用いて表すと

$$\boldsymbol{l_1} = \vec{e_1} \cdot \vec{l} = |\vec{e_1}|\ |\ \vec{l}\ |\ \cos\alpha = \boldsymbol{\cos\alpha}$$
$$\boldsymbol{l_2} = \vec{e_1} \cdot \vec{l} = |\vec{e_2}|\ |\ \vec{l}\ |\ \cos\beta = \boldsymbol{\cos\beta}$$
$$\boldsymbol{l_3} = \vec{e_3} \cdot \vec{l} = |\vec{e_3}|\ |\ \vec{l}\ |\ \cos\gamma = \boldsymbol{\cos\gamma}$$

である．このとき、これら 3 つの成分を**方向余弦**といい

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1} \quad (= |\ \vec{l}\ |^2)$$

が成り立つ———何が**ありがたい**のか.

$\vec{l}$ と角 θ をなす**もう 1 つの単位ベクトル**を $\vec{m}$ の**方向余弦** (成分) を $m_1,\ m_2,\ m_3$ とすると

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3$$

だが，この左辺は

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = |\vec{l}||\vec{m}|\cos\theta = \cos\theta \longleftarrow |\vec{l}| = |\vec{m}| = 1$$

だから，**いきなり** $\boldsymbol{\cos\theta}$ **の値** (すなわち θ) が求まってしまう.

結局

$$\boldsymbol{\cos\theta = l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3}$$

を計算すればよい———これは**単位ベクトル**が**成分表示**されているときはかなり**有効**である.

2.1.2.2　点と直線

点と直線の位置関係で数式に乗せられる特徴的な関係といえば，まずはその点から直線に下ろした垂線ということになろう．

しかし，これは公式で 1 パツというわけにはいかない———マジメに直線 l 上に垂線の足 H をパラメーター表示し，垂直条件 (内積＝ 0) を利用して H の座標を確定するしかない．以下，実例で説明する．

＜メモ＞————————————————————————————————

■ 垂線の足の座標

＜例 1 ＞

点 A(1, -2, 3) から直線

$$x-2=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$$

に下ろした垂線の足を H とするとき，線分 AH の長さ，および H の座標を求めよ．

(解) 与えられた点は A(1, -2, 3) で，直線 l の方程式は

$$l:\quad x-2=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}\ (=t\ \text{とおく})$$

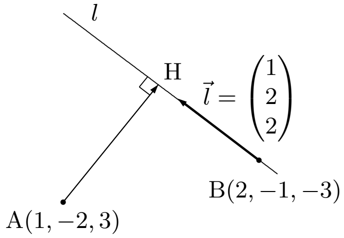
このとき垂線の足 H はこの上にあるから次のようにパラメーター表示される．

$$\mathrm{H}\ (\ t+2,\ 2t-1,\ 2t-3\ )$$

$$\text{方向ベクトルは}\ \vec{l}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\begin{pmatrix}t+2\\2t-1\\2t-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1\\2t+1\\2t-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$



これと直線 l との垂直条件を内積で表すと

$$\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=1\cdot(t+1)+2\cdot(2t+1)+2\cdot(2t-6)=0$$

$$\therefore\quad t=1\quad\longrightarrow\quad \mathrm{H}\ (\ 3,\ 1,\ -1\ )$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|&=\sqrt{(3-1)^2+(1+2)^2+(-1-3)^2}\\&=\sqrt{29}\end{aligned}$$

一件落着！

また，これは直線 l 上の点に P($t+2$, $2t-1$, $2t-3$) をとるとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ が最小になるとき，点 P が上記 H に一致するはず———調べてみよう．

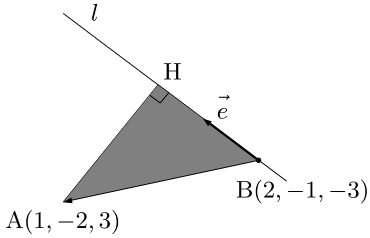
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 = (t+2-1)^2 + (2t-1+2)^2 + (2t-3-3)^2$$
$$= 9(t-1)^2 + 29 \geqq 29$$
$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| \text{ の最小値：}\quad \sqrt{29}$$

となり，上記の結果と一致する．

もう 1 つある．これはあまり実用的ではないが**勉強**にはなるだろう———正射影の**復習**だ！

まず，直線 l は点 $\mathrm{B}(2,-1,-3)$ を通るから $\vec{l}$ と同じ向きの**単位ベクトル**を求めて $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の直線 l 上への**正射影の長さ**を計算する．

すなわち



$$\boldsymbol{\vec{e}} = \frac{\boldsymbol{\vec{l}}}{|\,\boldsymbol{\vec{l}}\,|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\vec{e}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BA}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1\cdot(-1)+2\cdot(-1)+2\cdot 6}{3} = 3$$

ゆえに**ピタゴラスの定理**を用いると上記と同じ結果が得られる．すなわち

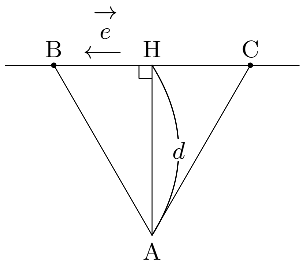
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2}$$
$$= \sqrt{\{(-1)^2+(-1)^2+6^2\} - (1^2+2^2+2^2)}$$
$$= \sqrt{29}$$

＜例 2＞

直線

$$l:\quad x=y=z$$

定点 A(3, 0, 0) がある．このとき，l 上に 2 点 B, C をとり，△ABC が正三角形になるようにしたい．B, C の座標を求めよ．



(解) まず，点 A から直線 l に垂線 AH を下ろす．
H は (t, t, t) とパラメータ表示されるから

$$\begin{aligned}\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t-3\\t\\t\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot(t-3)+1\cdot t+1\cdot t=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad t=1 \longrightarrow \mathrm{H}(1,\ 1,\ 1)$$

ゆえに $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|$ が計算できて

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \sqrt{(1-3)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{6}\quad (= d \text{ とおく})$$

だから $\vec{l}$ 方向の**単位ベクトル**を $\vec{e}$ とすると B, C の座標は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\pm\frac{d}{\sqrt{3}}\vec{e} &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \longleftarrow \vec{e}=\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}\\ &= \frac{3\pm\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \longleftarrow \text{一方が B，他方が C}\end{aligned}$$

である———**単位ベクトル**のこの用い方はなかなかは**ツカエル**ぞ！

2.1.2.3　2 直線の位置関係

2 直線の位置関係としては，まず**共有点があるかないか**だが，共有点が **2 点以上**あればその 2 直線は**一致**し，**1 点のみ**共有するなら 2 直線はその点で**交わる**という．

共有点がない場合は**平行**か，**平行でない**かで考えればよい．

平行でない場合をねじれの位置にあるという———ヤッカイなのはこの場合と考えてよい．

以下，実例で説明するが，おおむね次の 2 題で**基本のハナシ**は間に合うと思う．

<メモ>————————————————————————————————

■ **2 直線———その位置関係**

＜例 **1** ＞

空間における 2 直線が次のように与えられている．

$$l_1:\ \ \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{2}=1-z,\qquad l_2:\ \ x-3=\frac{y-1}{4}=z-5$$

(1)　l_1，l_2 は交わるか．　　　　(2)　l_1，l_2 のなす角 ϕ を求めよ．

(解) (1) まず，l_1 の最後の項 $1-z$ が気に入らない———これを $\dfrac{z-1}{-1}$ と変形しておかないとつまらない**ミス**を犯す恐れがある．

その上で

$$l_1:\ \ \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}=s$$
$$l_2:\ \ x-3=\frac{y-1}{4}=\frac{z-5}{1}=t$$

とおいて l_1 上の点を P，l_2 上の点を Q としてこれらを**パラメーター表示**すると

$$\mathrm{P}\ (2s+2, 2s-2, -s+1),\quad \mathrm{Q}\ (t+3, 4t+1, t+5)$$

l_1，l_2 が交わるとすると上記の 2 点 P と Q とが一致するときがある．すなわち

$$\begin{cases} 2s+2=t+3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2s-2=4t+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ -s+1=t+5\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，③ から $s=-1,\ t=-3$ が得られるがこれが **② を満たすか**———代入して調べる．

これらの数値に対して

$$左辺 = 2\cdot(-1)-2=\mathbf{-4}$$
$$右辺 = 4\cdot(-3)+1=\mathbf{-11}$$

となり等号は成り立たない———数値で示すこと！

要するにこれら 3 つの等式を満たす**実数 $\boldsymbol{s,t}$ は存在しない**から l_1，l_2 は**交わらない**．

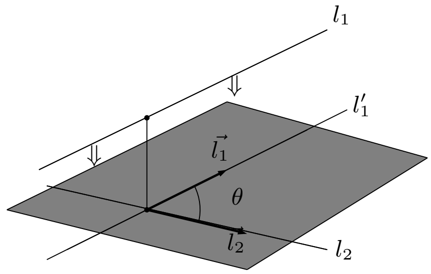
(2) 2 直線 l_1，l_2 は交わらない———どうやって角を測るのか．

こういう場合は，たとえば，まず直線 l_1 を直線 l_2 と交わるところまで**平行移動**して l_1' を作り，**直線 $\boldsymbol{l_1'}$ と直線 $\boldsymbol{l_2}$ のなす角**をもって求める角とするのが**定義**である．

結局，2 直線 l_1' と直線 l_2 の**交点を始点**とする**幾何ベクトル** $\vec{l_1}$，$\vec{l_2}$ を**代表ベクトル**としてこれらの関係を調べてばよい———ここがベクトルの**スゴイ**ところだ．

ヘタに方向余弦で扱うより $\vec{l_1}$，$\vec{l_2}$ のままで行こう．

$$\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



だから，そのなす角を θ とすると

$$\vec{l_1} \cdot \vec{l_2} = \left|\vec{l_1}\right|\left|\vec{l_2}\right| \cos\theta$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{\vec{l_1} \cdot l_2}{\left|\vec{l_1}\right|\left|\vec{l_2}\right|}}$$

$$= \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}}$$

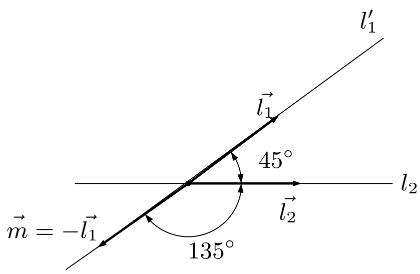
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \theta = 45^\circ$$

ともあれ **2 直線のなす角**は 45° としてハナシは一応の**落着**をみるが、少し念を入れて**補足説明**をしておこう．たとえば，上記の直線 l_1 の方向ベクトルがタマタマ**逆向き**のときはどうなるか．

これを $\vec{m}$ とおくと

$$\vec{m} = -\vec{l_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



この $\vec{m}$ と $\vec{l_2}$ とのなす角を θ' とすると

$$\vec{m} \cdot \vec{l_2} = \left|\vec{m}\right|\left|\vec{l_2}\right| \cos\theta'$$

$$\therefore \quad \cos\theta' = \frac{\vec{m} \cdot \vec{l_2}}{\left|\vec{m}\right|\left|l_2\right|}$$

$$= \frac{(-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \theta' = 135^\circ$$

となり**方向ベクトル**のなす角は 135° であるが，2 直線 l_1, l_2 のなす角は 135° とはいわない．

交角の**小さい方**をとってやはり 45° という――これが 2 直線のなす角の**定義**である．

つまり，ベクトルには**向き**があるが直線にあるのは向きではなくて**方向**である――普段は何気なく使っているが本来はキチンと区別して使い分けなくてはならない．

したがって，2 直線のなす角というときは **0° から 90°** である．

これをスッキリ説明するにはどうするか――**絶対値**を使う．

すなわち，上記の例でいえば **2 直線のなす角**を ϕ，**方向ベクトルのなす角**を θ とすると

$$\boldsymbol{\cos\phi} = \left|\cos\theta\right| \longleftarrow \text{ θが 90°を越えても $\boldsymbol{\phi}$ は $\mathbf{0^\circ}$から $\mathbf{90^\circ}$ の角でとる！}$$

$$= \left| \frac{\vec{l_1} \cdot \vec{l_2}}{\left|\vec{l_1}\right|\left|\vec{l_2}\right|} \right| \longleftarrow \text{ 実際はこの計算！}$$

を実行すればよい――上記の例はたまたま正の値になったが一般にはこのようにする．

＜例 2＞

空間における 2 直線を

$$l_1:\ \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1},\qquad l_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-2}=z-2$$

とする．ただし $l_1,\ l_2$ は交わらない．
このとき，直線 l_1 上に点 A, l_2 上に点 B をとると線分 AB がこの 2 直線に垂直であるという．
2 点 A, B の座標と直線 AB の方程式を求めよ．

(解) 2 直線

$$l_1:\ \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}=s,\qquad l_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-2}=z-2=t$$

とおいて 2 点 A, B をパラメーター表示すると

$$\mathrm{A}\ (3s+4,\ 2s+3,\ -s),\quad \mathrm{B}\ (2t-1,\ -2t+4,\ t+2) \longleftarrow s,t \text{ は 方程式 の 未知数！}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2t-1\\-2t+4\\t+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3s+4\\2s+3\\-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-3s-5\\-2t-2s+1\\t+s+2\end{pmatrix}$$

だから 2 直線 $l_1,\ l_2$ の方向ベクトル

$$\vec{l_1}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{l_2}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

との**垂直条件** (**内積**=0) を利用して実行する．すなわち

$$\vec{l_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\cdot(2t-3s-5)+2\cdot(-2t-3s+1)+(-1)\cdot(t+s+2)=0$$

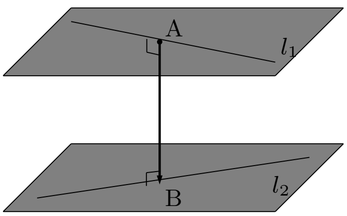
$$\therefore\quad 14s-t+15=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

$$\vec{l_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\cdot(2t-3s-5)+(-2)\cdot(-2t-3s+1)+1\cdot(t+s+2)=0$$

$$\therefore\quad s-9t+10=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (**)$$

$(*),(**)$ は s,t の**連立方程式**だからこれを解いて

$$s=-1,\ t=1\quad\longrightarrow\quad \mathrm{A}(1,\ 1,\ 1),\ \ \mathrm{B}(1,\ 2,\ 3)$$



ここで，方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めて直線 AB の方程式を**標準形**で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ x=1,\ \ y-1=\frac{z-1}{2}$$

で**落着**———直線 AB を 2 直線 l_1,l_2 の**共通垂線**という．

実は上記の 2 点 A，B は 2 直線 $l_1,\ l_2$ 上に動点 P，Q をとってそれぞれの直線上を**スライド**させるとき，線分 PQ の長さが**最小**になる点になっている———このような切り口から出題されるときもある．やってみるか．

2 点 P，Q を s,t を変数として

$$\mathrm{P}\ (3s+4,\ 2s+3,\ -s),\quad \mathrm{Q}\ (2t-1,\ -2t+4,\ t+2)$$

のようにパラメーター表示すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= \{(2t-1)-(3s+4)\}^2+\{(-2t+4)-(2s+3)\}^2+\{(t+2)-(-s)\}^2 \\
&= (2t-3s-5)^2+(-2t-2s+1)^2+(t+s+2)^2 \\
&= (2t-3s)^2-10(2t-3s)+25+4(t+s)^2-4(t+s)+1+(t+s)^2+4(t+s)+4 \\
&= 9t^2-2st+14s^2-20t+30s+30 \ \longleftarrow \boldsymbol{s, t}\ \text{の}\ \mathbf{2}\ \text{変数関数！} \\
&= 9t^2-2(s+10)t+14s^2+30s+30 \ \longleftarrow s\ \text{をトメルと}\ \boldsymbol{t}\ \text{の}\ \mathbf{2}\ \text{次関数！} \\
&= 9\left(t-\frac{s+10}{9}\right)^2-\frac{(s+10)^2}{9}+14s^2+30s+30 \ \longleftarrow t\ \text{について 平方完成！} \\
&= 9\left(t-\frac{s+10}{9}\right)^2+\frac{125}{9}s^2+\frac{250}{9}s+\frac{170}{9} \longleftarrow \ \text{まず，最小値は}\ \boldsymbol{s}\ \text{の}\ \mathbf{2}\ \text{次関数！} \\
&= 9\left(t-\frac{s+10}{9}\right)^2+\frac{125}{9}(s+1)^2+5 \longleftarrow \ \text{最小値の 最小値 を求める (また 平方完成)！}
\end{aligned}
$$

ここで全体をながめて

$$
\left(t-\frac{s+10}{9}\right)^2 \geqq 0,\ (s+1)^2 \geqq 0 \longrightarrow \boldsymbol{s=-1,\ t=1}\ \text{のとき PQ は最小！}
$$

となり，上記の結果と一致する———それにしても結構な計算だった.

2.1.3　平面

空間における**平面**は，ちがって見える切り口はいくつかあるが基本的にはその**通過点**とそれに垂直な**法線ベクトル**で決定するといってよかろう．

以下，上記の条件から，まずは空間における**平面の方程式**を導き，**点と平面**の関係，**直線と平面**の関係，**平面と平面**の関係など, 球面を除くその他の図形との関係について解説する―――直線図形についてはおおむね決着する．

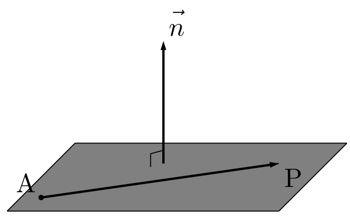
2.1.3.1　平面の方程式

点 A を通り**法線ベクトル**が $\vec{n}\ (\fallingdotseq \vec{0})$ である平面上の**任意の点**を P とすれば $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は**常に** $\vec{n}$ に**垂直**だからこれをベクトルで表すと

$$\boldsymbol{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

これを空間座標で表す―――点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \ \vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$



のように表されるから上記の (∗) を成分で表すと

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_1\\y-y_1\\z-z_1\end{pmatrix}=0$$

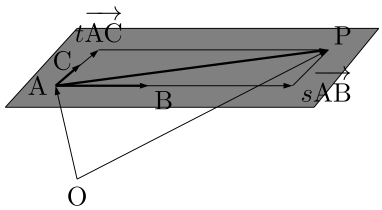
$$\therefore\quad \boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{ax+by+cz+d=0}\ \ \text{ただし，}d=-(ax_1+by_1+cz_1)\cdots\cdots\cdots(**)$$

つまり，**平面の方程式**は点 P の**座標** x, y, z の **1 次方程式**で表される．

まあ，これが**妥当な入り方**だが，しからば**ベクトル**でがんばったあの**平面の表現**との関係はどうなるのか―――実はその関係はトウゼン**大あり**なのだ．たとえば平面上の 3 点 A,B,C が与えられるような場合，この平面上の**任意の点**を P として

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$



で表されることは問題ない．

さらに (∗∗∗) は

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

$\longleftarrow\ \ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を (∗∗∗) に代入！

これらに 3 点 A,B,C と点 P の座標

$\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1),\ \mathrm{B}(x_2, y_2, z_2),\ \mathrm{C}(x_3, y_3, z_3),\ \mathrm{P}(x, y, z)$

を与えて上記のベクトルの関係を成分で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ y = \ y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \\ z = \ z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

だから，たとえば ①, ② を s, t についての連立方程式とみて s, t を求め ③ に入れる．そうすると、3 本の等式から $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ **を消去**すれば上記の $(**)$ が得られるはずである．

しかし，**理屈**はそうだがこの計算はチョッと**過酷**なのです——状況にもよるが場合によってはやめたほうがよい．

そこで $(***)$ にもどる．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の**両方に垂直**なベクトル $\vec{n}$ (法線ベクトル) が求まったとして $(**)$ に**カケル**，すなわち内積を作ると

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AP}} &= \vec{n} \cdot (s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= s\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + t\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \mathbf{0} \ \longleftarrow \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,\ \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \end{aligned}$$

すなわち **(∗) そのもの**である．

要するに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との**垂直条件**を用いて**法線ベクトル** $\vec{n}$ を先に求めればいきなり $(*)$, あるいは $(**)$ が使える——特にパラメーター表示にこだわる理由がなければこのアプローチがよい．

＜メモ＞

■ 平面の方程式を求める

＜例 **1**＞

3 点 A $(0, -1,\ 0)$, B $(1,\ 1,\ 1)$, C $(3,\ 3,\ 0)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(解) 切り口はいろいろある.

＜第 **1** の方法＞ 平面の方程式は $x,\ y,\ z$ の **1 次方程式**で，この場合は**通過点**もわかっている.
まず， A $(0,\ -1,\ 0)$ を通るからいきなり

$$a(x-0)+b(y+1)+c(z-0)=0 \quad \therefore\ \ ax+b(y+1)+cz=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

さらに B$(1,\ 1,\ 1)$, C$(3,\ 3,\ 0)$ を通るから代入すると

$$a\cdot 1+b\cdot 2+c\cdot 1=0 \ \longrightarrow\ a+2b+c=0$$
$$a\cdot 3+b\cdot 4+c\cdot 0=0 \ \longrightarrow\ 3a+4b=0$$

これらを $a,\ b$ についての連立方程式とみて

$$a=2c,\ b=-\frac{3}{2}c$$

① に入れると

$$(2c)\ x+(-\frac{3}{2}c)\ (y+1)+c\ z=0\ (c\fallingdotseq 0) \qquad \therefore\ \ 4x-3y+2z-3=0$$

＜第 **2** の方法＞ $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から**法線ベクトル**を先に求めれば 1 パツ！

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\ \ \vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

で $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ がともに $\vec{n}$ に**垂直**だから，これを**内積**で表すと

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a\cdot 1+b\cdot 2+c\cdot 1=0 \longrightarrow a+2b+c=0$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=a\cdot 3+b\cdot 4+c\cdot 0=0 \longrightarrow 3a+4b=0$$

あとは＜第 1 の方法＞と同様に $a,\ b$ を c で表して**比を求める**と

$$a\ :\ b\ :\ c=4\ :\ (-3)\ :\ 2$$

で，これが点 A$(0,\ -1,\ 0)$ を通るから求める**平面の方程式**は

$$4(x-0)+(-3)(y+1)+2(z-0)=0 \ \longrightarrow\ 4x-3y+2z-3=0$$

＜第 **3** の方法＞ やはり**ベクトル**からのアプローチも説明しておこう.
点 P の条件をベクトルで表すと

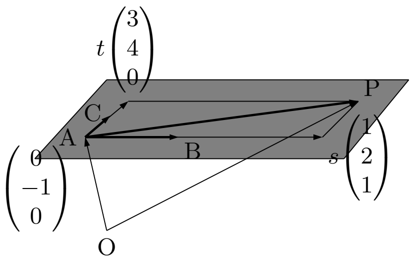
$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}+s\overrightarrow{\mathbf{AB}}+t\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

だからこれを成分で表すと

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+3t\\-1+2s+4t\\s\end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = s + 3t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y = -1 + 2s + 3t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ z = s \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$



③ を ① に入れて

$$x = z + 3t \qquad \therefore \quad t = \frac{x-z}{3}$$

だからこの $s,\ t$ を ② に入れて整理すると

$$4x - 3y + 2z - 3 = 0$$

となりトウゼン同様の結果が得られる———このくらいならガマンできるだろう.

2.1.3.2　Hesse の標準形と距離の公式

＜1＞ Hesse の標準形

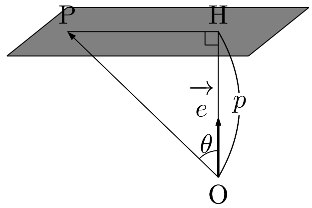
平面の方程式が

$$\pi: \ \boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のように $x, \ y, \ z$ の **1 次方程式**で表されることから，これをベクトルの**内積**を用いて表すことで平面をより具体的に記述することができる.

すなわち、①の定数項 d を右辺に移項する. ただし、① の段階で $-d > 0$ となるように調整しておく———ワケはあとでわかる.

そうすると



$$①: \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -d \ (> 0)$$

さらに両辺を $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

この式をよく見てもらいたい.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \overrightarrow{e}$$

はこの平面の**法線方向の単位ベクトル**である———このことは何を意味するか.

平面上の点を $\mathrm{P}(x, \ y, \ z)$ とすると ② は

$$②: \quad \overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ \ (= p \text{ とおく}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

だが，この左辺は

$$\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left|\overrightarrow{e}\right| \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \cos\theta = \mathrm{OH}$$

だから上記の $\boldsymbol{p}$ は原点から平面 π に下ろした**垂線の距離**に他ならない.

そこで ②, ③，あるいはこれらを正直に成分で

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

のように表したものを特に平面 π の **Hesse の標準形**と呼んでいる.

この表現で注目すべきは右辺の数値がいきなり原点からの距離を表していることでこのことから H の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}})\overrightarrow{e} = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\overrightarrow{e} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を成分計算すれば簡単に求められる.

(注 **1**) ちなみに $\overrightarrow{e}$ と x 軸，y 軸，z 軸とのなす角をそれぞれ α, β, γ とすると $\overrightarrow{e}$ の成分

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

はそれぞれ $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ に等しいのでこれらの数値を平面 π の**方向余弦**と呼ぶこともある．

(注 **2**) ③ の値は一般には**そのように**最初に調整しておかなければ正とは限らない．そこで原点からこの平面への距離を求めるだけなら絶対値をとって

$$\frac{|-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

を計算すればよい———いきなり公式として用いてよい．

＜**2**＞ 垂線の距離公式

以下，公式として次のように展開する．

点と平面の距離

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 $\boldsymbol{\pi:\ ax+by+cz+d=0}$ との距離 h は

$$\boldsymbol{h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

で与えられる．

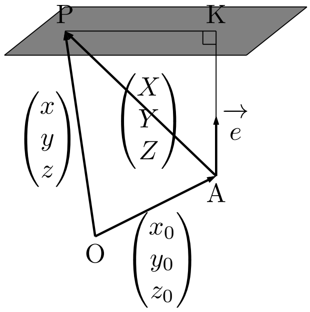
（解説） 平面の方程式は

$$\pi:\ ax+by+cz+d=0$$

だが，前掲の **Hesse** の標準形で原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と読みかえて，点 A を新しい原点と見ると

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$

$$\longleftarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$



この関係を上記の π の式に入れると

$$a(x_0+X)+b(y_0+Y)+c(z_0+Z)+d=0$$

$$\therefore\quad aX+bY+cZ+(ax_0+by_0+cz_0+d)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

そうすると前傾の ① ～ ④ の d を、⑤ の $ax_0+by_0+cz_0+d$ に置き換えればよいからソックリそのまま読み換えると

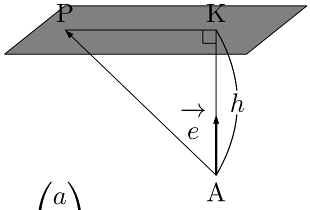
$$\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であるから絶対値をとって

$$h=\left|\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\boldsymbol{\frac{|-(ax_0+by_0+cz_0+d)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

また垂線の足 K の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\overrightarrow{e}$$



を用いてベクトルで表すと次のように計算される．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OK}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AK}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})\overrightarrow{e}\\ &= \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + \frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\\ &= \boldsymbol{\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + \frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

結局，これは**正射影，正射影ベクトル**の応用である．

マジメにやるにはチョッと素朴だが点 A(x_0, y_0, z_0) を通る π に**垂直**な直線上の点は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

だから，この直線上の点 P を**パラメーター表示**して π の方程式⊠に入れると

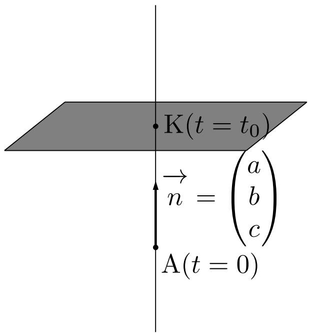
$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$$

$$\therefore\quad t = \frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\ (\boldsymbol{= t_0}\text{ とおく})$$

この $t=t_0$ に対してまず垂線の足 **K** $\boldsymbol{(x_0+at_0,\ y_0+bt_0,\ z_0+ct_0)}$ がキマル．

次に**垂線の距離**を求めるには

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$



を成分計算して

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right| &= |t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ &= \left|\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ &= \boldsymbol{\frac{|-(ax_0+by_0+cz_0+d)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}\end{aligned}$$

で，ともあれ上記の公式は**証明される**．

＜メモ＞

■ **Hesse の標準形，垂線の距離の公式**

＜例 **1** ＞

平面 π が次のように与えられている．すなわち

$$\pi:\ 2x+3y+6z=14$$

(1) 原点 O から平面 π に下ろした垂線 OH の長さ ($=h$) と垂線の足 H の座標を求めよ．
(2) 点 A(1, 1, 1) から平面 π に下ろした垂線 OK の長さ ($=d$) と垂線の足 K の座標を求めよ．

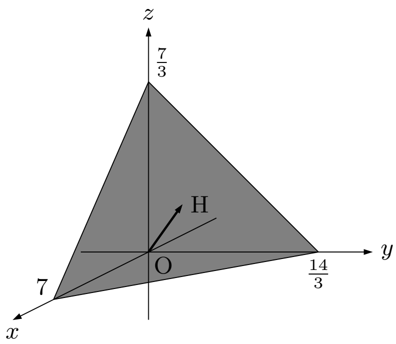
(**解**) (1) 上記の π の方程式の両辺を

$$\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$$

で割ると

$$\boldsymbol{\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z=2}\quad(=h)\cdots\cdots\cdots①$$

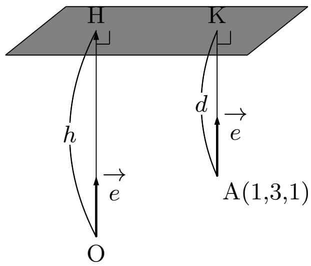
$\longleftarrow$ **Hesse の標準形！**



また垂線の足 H の座標は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=2\,\vec{e}\\&=2\,\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ \mathrm{H}\left(\frac{4}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{12}{7}\right)\end{aligned}$$

(2) d はいきなり**公式**を用いてよいだろう．



$$\begin{aligned}d&=\frac{|-(2\cdot1+3\cdot1+6\cdot1-14)|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

K の座標も本文に述べた公式を使えば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OK}}&=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{-(2\cdot1+3\cdot1+6\cdot1-14)}{2^2+3^2+6^2}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}55\\58\\67\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と **1 パツ**でいくが，これはチト気が引ける．せめてアタマに

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})\ \vec{e}$$

など付けて**ちゃんと知ってるぜ**と自己アッピールするくらいの気配りはしたいものではある．

しかし，**平面の方程式**が☒の形の**内積表現**で与えられることくらいは知っておいてもソンはしない———***xy* 平面上の直線の方程式**にも当てはまることでありきっとイイコトがありそうだ．

xy 平面上の**図形と方程式**でも使えるところではおおいにベクトルでやってよい．

＜例 **2** ＞

空間に平面

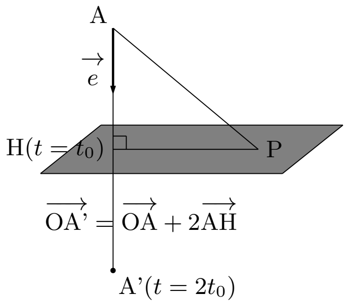
$$\alpha:\ x+2y+z=5$$

と 2 点 A(0, 0, 2), B(2, 1, 0) がある．
(1) α に関する点 A の対称点 A' の座標を求めよ．
(2) 線分 AB は α と交わらないことを示せ．
(3) 点 P が α 上を動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$ の最小値を求めよ．

(解) (1) アプローチの仕方はいろいろあるが，ここではせっかくのことだから **Hesse** の標準形をにらんで**正射影**，**正射影ベクトル**に徹底的にこだわってみる．

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ \vec{e}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

そこで A' を求めるのだが図の点 H は線分 AA' の中点だから



$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA'}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

分母を払って整理すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}})-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\left(\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)\vec{e}\\&=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+2\ \frac{-(0+2\cdot 0+2-5)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ \mathrm{A}'(1,\ 2,\ 3)\end{aligned}$$

素朴な発想から A を通る直線上の点は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\2t\\2+t\end{pmatrix}$$

と表されるから α の方程式に代入すると

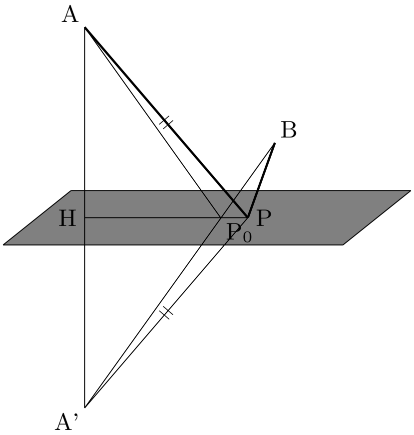
$$t+2(2t)+(2+t)=5\qquad\therefore\ \ t=\frac{1}{2}\ (=t_0)$$

だが，この t_0 は垂線の足 H を与える t の値だから A ' を与える t はこれを 2 倍して

$$t=2t_0=1\ \longrightarrow\ \mathrm{A}'(1,\ 2,\ 3)$$

としてもよい．

(2) 線分 AB 上の点を P とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$$= (1-t)\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\t\\2(1-t)\end{pmatrix}$$

だが，これを α の方程式に代入すると

$$2t + 2t + 2(1-t) = 5 \qquad \therefore \quad t = \frac{3}{2} > 1$$

となり条件を満たさない———この平面は線分 AB と交わらない.

(3) A' は α に関する A の対称点であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{A'P}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right| \longleftarrow \ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{A'P}}\right|$$

$$\geqq \left|\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{11} \longleftarrow \ \text{最小値！}$$

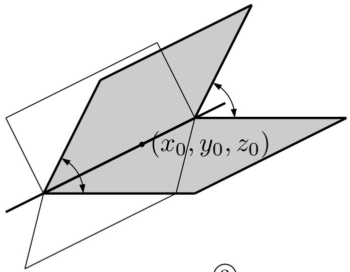
2.1.3.3　平面束，他

平面束の考え方は xy 平面上でいえば図形と方程式の直線束の考え方に対応するものである．この考え方は後述の球面の方程式の場合にも一般化され，なかなか面白いのでぜひともマスターしてもらいたい．

まず，2 つの平面

$f(x,y,z)=0$ ………………①

$g(x,y,z)=0$ ………………②



が交わるものとする———まず，これが条件だ．

このとき

$$\boldsymbol{\lambda f(x,y,z)+\mu g(x,y,z)=0}$$

$$\text{(ただし,}\boldsymbol{\lambda\ \mu}\text{は実数で }\boldsymbol{\lambda^2+\mu^2 \fallingdotseq 0}\text{)} \cdots\cdots ③$$

は何を意味するか———①, ② の交点（同時に満たす点）の座標を (x_0,y_0,z_0) としてこれを ③ に代入すると ③ はこれを満たす．すなわち

$$\lambda \underbrace{f(x_0,y_0,z_0)}_{0}+\mu \underbrace{g(x_0,y_0,z_0)}_{0}=0$$

このことから，もし ①, ② が平面の方程式であるなら ③ はその 2 平面の交線を通る平面の方程式を表していることがわかる．

しかし、上記の表現では λ,μ の 2 文字を扱うことになってわずらわしい．そこでチョイと工夫をする．ちなみに, ③ の $\lambda^2+\mu^2 \fallingdotseq 0$ は λとμ とが同時には 0 にならないことを表している条件で，たとえば $\lambda=0$ ならば μ は 0 ではない，というぐあいに使うのだがこのハナシを簡略に表すのに都合がよい———以下，注意して読み進めてもらいたい．

まず，$\lambda \fallingdotseq 0$ のときは ③ の両辺を λ で割ると

$$f(x,y,z)+\frac{\mu}{\lambda}g(x,y,z)=0 \longrightarrow f(x,y,z)+kg(x,y,z)=0\ (k\text{ は実数})$$

だから 1 文字 k で表される———あとは $\lambda=0$ のときの確認だ．

$\lambda=0$ のときは $\mu \fallingdotseq 0$ だから $g(x,y,z)=0$ だから結局 ③ は

$$\boldsymbol{f(x,y,z)+kg(x,y,z)=0\ (k\ \text{は実数}),}$$

$$\text{または } \boldsymbol{g(x,y,z)=0} \cdots\cdots ④$$

と表される———このほうがダンゼン扱いやすい．

ただし，④ の等式 2 本で ③ の等式 1 本分を表していることにはつねに注意しなければならない———ユメユメ忘れるな．

そこで，交線上の点が ④ すなわち ③ を満たすことは上に示したが，④ で表される平面が ①, ② の交線を通るすべての平面を尽くしているかどうかの問題が残る．

そこで，この空間の任意の点を，たとえば $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ とするとこの点が $g(x,y,z)=0$ 上にあるなら明らかにこの点を通る平面が $g(x,y,z)=0$ として存在する．

もしこの平面上にないなら、$g(x_1,y_1,z_1)\fallingdotseq 0$ だから☒の前半の方程式に入れると

$$f(x_1,y_1,z_1)+kg(x_1,y_1,z_1)=0 \qquad \therefore\ \ k=-\frac{f(x_1,y_1,z_1)}{g(x_1,y_1,z_1)}(=k_0)$$

として実数 k が存在するからその $k=k_0$ の値を⊠の前半の方程式に代入すれば

$$f(x,y,z)+k_0\ g(x,y,z)=0$$

として存在する———⊠は交線を通る**すべての平面**を表していることがわかる．

(注) 本文 ④ の 1 本

$$f(x,y,z)+kg(x,y,z)=0\ (k\text{ は実数})$$

は ③ のすべてを表しきってはいないのだ———実際，どんな実数 k の値を入れてもこの式から $g(x,y,z)=0$ を作る事ができない．つまり，$g(x,y,z)=0$ の適合性を確認しておかないと，実際に適するものを**とりこぼす**恐れがあるからである．

＜メモ＞

■ 直線，平面，それらの関係

これらの相互の関係を説明するには字面からいえば”平面と直線”，”平面と平面”のようにそれぞれについてキッチリと分けて説明できそうだが，平面と平面との交わりが直線であるようにそれらの関係がゴチャゴチャと絡みついていてそう簡単にはいかない．

とりわけ本文に述べた平面束の考え方などは便利でなかなか面白いがかなり敷居が高い．そうかと思うと答えを出すだけなら素朴なアプローチの方が効果的な場合もある———ここは具体的な実例で総合的に説明するしかなさそうだ．以下，そういうキブンで読んでもらいたい．

＜例 1＞

点 A(1, 2, 3) と直線

$$l:\quad x-2=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{-2}$$

がある．点 A を通り l を含む平面の方程式を求めよ．

(解) まずは平面束の考え方から行こう———l の式の 2 つの等号ををよくにらんでもらいたい．

$$x-2=\frac{y-1}{4}\quad\therefore\ 4x-y-7=0\ \longrightarrow\ 4x-y+0\cdot z-7=0$$

$$x-2=\frac{z+2}{-2}\quad\therefore\ 2x+z-2=0\ \longrightarrow\ 2x-0\cdot y+z-2=0$$

ともに x, y, z の 1 次方程式である———これら 2 平面の交線が l になっている．

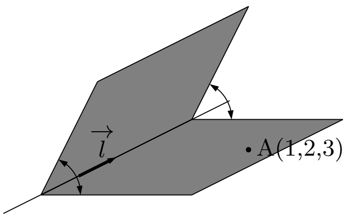
A(1, 2, 3) は第 2 式を満たさないからまずこれを除くと求める平面の方程式は

$$(4x-y-7)+k(2x+z-2)=0$$

これが点 A を含むから代入すると

$$(4\cdot 1-2-7)+k(2\cdot 1+3-2)=0$$

$$\therefore\ k=\frac{5}{3}$$



ゆえに求める平面の方程式は

$$(4x-y-7)+\frac{5}{3}(2x+z-2)=0$$

$$\therefore\ 22x-3y+5z-31=0$$

となり，一応の決着を見る．

次に素朴なアプローチも考えてみよう．それはまず，A(1, 2, 3) を含む平面の方程式を先にキメておくのだ．すなわち

$$a(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

その上で l 上の点をパラメータ表示すると $(t+2,\ 4t+1,\ -2t-2)$ だが，これが t の値にかかわらず $(*)$ 上にある———満たす．

$$a(t+2-1)+b(4t+1-2)+c(-2t-2-3)=0$$

$$(\underbrace{a+4b-2c}_{0})t+(\underbrace{a-b-5c}_{0})=0\ \longleftarrow\ \boldsymbol{t}\text{ についての恒等式！}$$

$$\therefore\ \ a+4b-2c=0,\ \ a-b-5c=0\ \ \longrightarrow\ \ a:b:c=22:(-3):5$$

となる———あとは $a=22k,\ b=-3k,\ c=5k$ とおいて $(*)$ に代入すればよい．

もっと素朴な方法もある．l 上に適当な定点 B をとる———たとえば上記パラメータ表示で $t=0$ とすれば B(2, 1, −2) だから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，直線 l の方向ベクトル $\overrightarrow{l}$，平面の法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix},\quad\overrightarrow{l}=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix},\quad\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

で，$\overrightarrow{n}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{l}$ の両方に垂直である．すなわち

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\cdot(-1)+b\cdot 1+c\cdot 5=0 \qquad \therefore\quad a-b-5c=0$$

$$\overrightarrow{n}\cdot\vec{l} = a\cdot 1+b\cdot 4+c\cdot(-2)=0 \qquad \therefore\quad a+4b-2c=0$$

これらから a, b, c の比は簡単に求まるからあとは説明するまでもなかろう．

まあ，いろいろあるがどれが良いか悪いかではない――それぞれ賞味してもらたい．

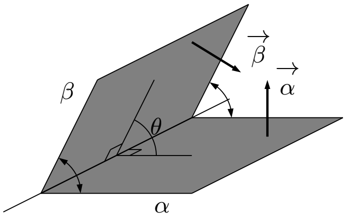
＜例 2＞

2 平面 α, β が次のように与えられている．

$$\alpha:\ \ 3x-2y-z-4=0, \qquad \beta:\ x+3y+z+5=0$$

(1) この 2 平面のなす角を θ とするとき $\cos\theta$ の値を求めよ．
(2) この 2 平面の交線の方程式を標準形で表せ．

(解) (1) 2 平面の法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ とすると



$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\beta}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

だからこれらのベクトルのなす角を ϕ $(0 \leqq \phi \leqq \pi)$ とすると

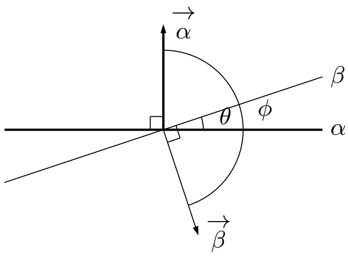
$$\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\cos\phi$$

$$\therefore\quad \cos\phi=\frac{\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}}{\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|}$$

$$=\frac{3\cdot1+(-2)\cdot3+(-1)\cdot1}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}\ \sqrt{1^2+3^2+1^2}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{154}}{77}$$

だが，2 平面のなす角 $\cos\theta$ は上記の法線ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ を含む**直線のなす角**をとればよいから



$$\boldsymbol{\cos\theta=|\cos\phi|} \longleftarrow\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$

$$=\left|-\frac{2\sqrt{154}}{77}\right|$$

$$=\frac{2\sqrt{154}}{77}$$

(2) 今度は 2 平面の交線を求めるハナシだ———普通は次のようにやる．
　2 平面の方程式を次のように変形する．

$$\begin{cases}3x-2y=z+4\\ x+3y=-z-5\end{cases}$$

　z を定数と見ればこれは x, y についての連立方程式だから解いて

$$x=\frac{z+2}{11},\ \ y=-\frac{4z+19}{11}\quad \longleftarrow\ \ z\text{ をパラメータと見よ！}$$

さらにこれらを z についてときなおすと

$$11x-2=\frac{-11y-19}{4}=z \qquad \therefore\quad x-\frac{2}{11}=\frac{y+\dfrac{19}{11}}{-4}=\frac{z}{11}$$

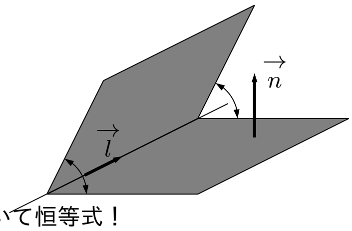
で，2 式を同時に満たす点 $(x,\ y,\ z)$ の座標の関係を直線の標準形で表すことができた．
　せっかくだから**平面束**のハナシでやってみるか．
　2 平面 α, β の交線を含む平面の方程式は

$$(3x-2y-z-4)+k(x+3y+z+5)=0,\ \text{または}\ x+3y+z+5=0$$

$$\therefore\quad (k+3)x+(3k-2)y+(k-1)z=0,\ \text{または}\ x+3y+z+5=0$$

だが，求める直線の方向ベクトルは上記の**すべての平面の法線ベクトルと直交**する．
　まず，前半の形で表される平面との関係は

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} k+3 \\ 3k-2 \\ k-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{l} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$



として内積をとれば

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{l} = (k+3)\cdot l + (3k-2)\cdot m + (k-1)\cdot n = 0$$

$$\therefore\ \ (\underbrace{l+3m+n}_{0})k + (\underbrace{3l-2m-n}_{0}) = 0 \longleftarrow$$ **$\boldsymbol{k}$ について恒等式！**

$$\therefore\ \ l+3m+n=0,\ \ 3l-2m-n=0 \ \longrightarrow\ l:m:n = 1:(-4):11$$

ゆえに前半の平面の方程式から得られる直線 l の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

だが，これは後半の $x+3y+z+5=0$ の法線ベクトルと直交する———**方向**は決まった．

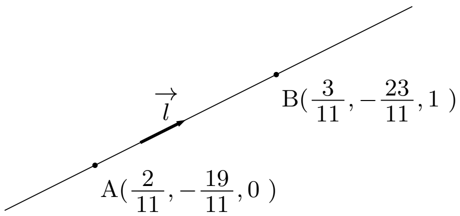
通過点 A は 2 平面の方程式で z に簡単な数値，たとえば $z=0$ を入れると

$$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+3y=-5 \end{cases}$$

これを解いて

$$x = \frac{2}{11},\ y = -\frac{19}{11}$$

$$\longrightarrow\ \mathrm{A}(\frac{2}{11},\ -\frac{19}{11},\ 0)$$



このとき，たとえば $z=1$ などとすると

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=-6 \end{cases}$$

これを解くと $\mathrm{B}(\frac{3}{11}, -\frac{23}{11},\ 1)$ が得られるが，これを通過点に指定すれば l は上記と**同じ直線**だが**違った形**で記述されることになる．

そういうことならいっそ**素朴な方法**として先に上記の 2 点 A，B を求めてしまえば直線は簡単に決まる———実はこれがもっとも**簡単**で**早い**．

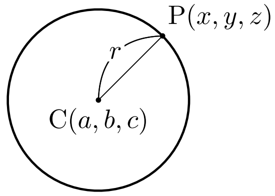
簡単で早ければそれが最も結構なことだがここに述べたそれぞれの方法にはそれなりの思想があるわけで，ここはすべて**総ぐるみ**わかって感動してもらわないと筆者の立場がない———いずれ別のハナシの展開としてナルホドと思うときがくる．

2.2　球面

2.2.1　球面の方程式

点 C($\overrightarrow{c}$) からの距離が一定値 r である点 P($\overrightarrow{x}$) の集合は，平面上では円周，空間では**球面**になる．

ここでは球面について研究する．上記の条件はベクトルを用いて次のように表される．



すなわち

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r \qquad \therefore \quad \left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{c}\right| = r$$

これを成分で表すには上記の関係式を先に 2 乗しておくとよい．

すなわち, 2 点の座標を C$(a,\ b,\ c)$，P$(x,\ y,\ z)$ として上記に代入すると**球面の方程式**

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2 = r^2 \ \longrightarrow\ \boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

が得られる．

＜メモ＞

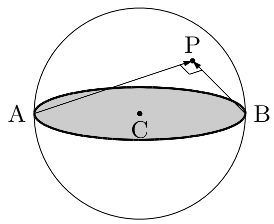
■ 円周と球面

ここでの興味の対象は球面についての諸問題だが，円について成り立ついろいろな性質がそのまま球面についても成り立つ場合が多い———以下，復習をかねてあたってみるとよい．

＜例 1 ＞

空間に 3 定点 O(0, 0, 0), A(0, 0, 1), B(1, 1, 1) がある．
このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ を満たす点 P$(x,\ y,\ z)$ について次の問に答えよ．
(1) 動点 P の描く図形を求めよ．
(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の長さの最大値を求めよ．またそのときの点 P の座標を求めよ．

(解) (1) P$(x,\ y,\ z)$, A(0, 0, 1), B(1, 1, 1) であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$$
$$=x(x-1)+y(y-1)+(z-1)^2=0$$
$$\therefore\quad (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-1)^2=\frac{1}{2}$$

ゆえに点 P は C$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1)$ を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の球面を描く．

すなわち $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ だから AB を直径とする球面である．

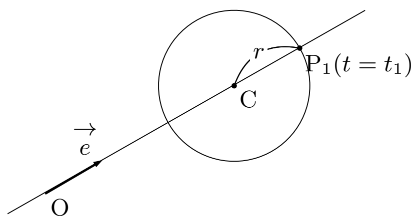
(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最大になるのは点 P が，直線 OC と (1) で求めた球面との交点のうち O から遠い点と一致するときである．

そこで $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ が球の半径より大きい (O が球の外) であることに注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ \mathrm{P}(\frac{t}{2},\ \frac{t}{2},\ t)\ \ (\text{ただし } t>1 \text{ とする})$$

これを (1) で求めた球面の方程式に入れると

$$(\frac{t}{2}-\frac{1}{2})^2+(\frac{t}{2}-\frac{1}{2})^2+(t-1)^2=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad (t-1)^2=\frac{1}{3}$$
$$\therefore\quad t=\frac{1}{\sqrt{3}}+1=\frac{3+\sqrt{3}}{3}(=t_1\text{とおく})$$



ゆえに最大値を与える座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\ \frac{3+\sqrt{3}}{6},\ \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$$

で最大値は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+1^2}\ \ |t_1|$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

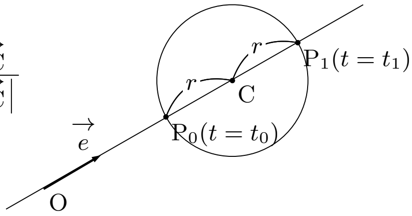
と，まあ答えは一応求まるがわかりきった計算が**クドイ**———**図形の特徴**に注目すると**最大値**は簡単に求まる．

すなわち

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathbf{OC}}\right| + \boldsymbol{r} &= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + 1^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

そしてそのときの P の座標を求めるには $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 方向の**単位ベクトル**を利用するとよい.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{OP_1}} &= \overrightarrow{\mathbf{OC}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{e}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \quad \overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|} \\
&= \frac{3+\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$



ちなみにこの方法でいくと，原点 O が球の外側にあることを確認した上で**最小値**は $\left|\overrightarrow{\mathbf{OC}}\right| - \boldsymbol{r}$，それを与える点 P の座標 $\mathbf{P_0}$ は $\overrightarrow{\mathbf{OC}} - \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}$ を計算すればよい．これも**単位ベクトル**を用いると簡単にいく———マトモにやると結構タイヘンだぞ！

＜例 2＞

xyz 空間で 2 点 A$(1,\ 2,\ 3)$, B$(-2,\ 4,\ -1)$ からの距離の比が $2:1$ であるような点 P はどんな図形を描くか.

(解) これは平面上ではアポロニウスの円としてよく知られたハナシである.
　条件に適する点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right| = 2:1 \qquad \therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$$

2 乗すると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 = 4\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2$$
$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 4\{(x+2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2\}$$
$$\therefore\quad 3(x^2+y^2+z^2)+2(9x-14y+7z)+70=0$$
$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2+6x-\frac{28}{3}y+\frac{14}{3}z+\frac{70}{3}=0$$
$$\therefore\quad (x+3)^2+(y-\frac{14}{3})^2+(z+\frac{7}{3})^2=\frac{116}{9}$$

ゆえに求める図形は，中心 $(-3,\ \frac{14}{3},\ -\frac{7}{3})$, 半径 $\frac{\sqrt{116}}{3}$ の球面である.

2.2.2　球面と他の図形との関係

2.2.2.1　球面と直線

球面と直線の位置関係は**接するか，交わるか，共有点がないか**の 3 つの場合が考えられる———直線をパラメータ表示して**方程式の問題**に持ち込む．

＜メモ＞———————————————————————————————

■ 交点と実数解

＜例 **1**＞

空間に次の球面 C と直線 l がある．

$$C:\ (x-1)^2+y^2+z^2=9$$

$$l:\ \frac{x+1}{2}=y-a=z-2a\ (a\ \text{は定数とする})$$

(1) S と l が異なる 2 点で交わるような a の範囲を求めよ．

(2) (1) のとき l が C に切りとられる部分の長さを求めよ．

(解) (1) l と C との交点はは l 上，かつ C 上である．

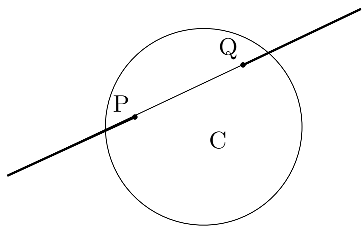
まず，l 上の点 P はパラメータ t を用いて

$$\frac{x+1}{2}=y-a=z-2a=t\ \longrightarrow\ \mathrm{P}(2t-1,\ t+a,\ t+2a)$$

と表されるが，これが C 上にあるから C の式に代入して

$$(2t-2)^2+(t+a)^2+(t+2a)^2=9$$

$$\therefore\ \ 6t^2+2(3a-4)t+5a^2-5=0\cdots\cdots\cdots(*)$$



条件よりこれが異なる 2 実解を持つから

$$\frac{D}{4}=(3a-4)^2-6(5a^2-5)>0$$

$$\therefore\ \ 21a^2+24a-46<0$$

$$\therefore\ \ \frac{-12-\sqrt{1110}}{21}<a<\frac{-12+\sqrt{1110}}{21}$$

(2) (1) の解を $\alpha,\ \beta$ とすると求める線分の長さ d は

$$\begin{aligned} d&=\sqrt{2^2+1^2+1^2}\ |\beta-\alpha| \\ &=\sqrt{6}\ \sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{3a-4}{3},\ \ \alpha\beta=\frac{5a^2-5}{6}$$

だからこれを $(**)$ に入れると

$$\begin{aligned} d&=\sqrt{6}\ \sqrt{\left(-\frac{3a-4}{3}\right)^2-4\cdot\frac{5a^2-5}{6}} \\ &=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{-21a^2-24a+46} \\ &=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \sqrt{-21\left(a+\frac{4}{7}\right)^2+\frac{370}{7}}\end{aligned}$$

ゆえに $a = -\dfrac{4}{7}$ のとき d は最大で最大値は次の値となる．

すなわち

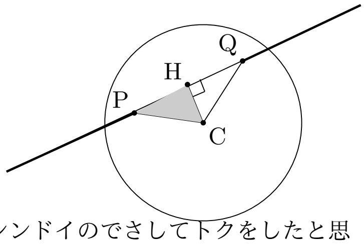
$$\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\frac{370}{7}} = \frac{2\sqrt{3885}}{21}$$

なお，本問は交わる場合 $\boldsymbol{D > 0}$ の例だが，$\boldsymbol{D = 0}$ なら接し，$\boldsymbol{D < 0}$ なら共有点はない．

また本問への図形的なアプローチもないことはない．

つまり，(1) は図で $\mathrm{CH} < R$ (球の半径) となる a の条件を求めればよいし，(2) は

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} &= 2\mathrm{PH} \\ &= 2\sqrt{R^2 - \mathrm{CH}^2} \end{aligned}$$



を計算すればよいのだがこの CH を求める計算がそれなりにシンドイのでさして下クをしたと思えるほどうまいハナシにはならない———特に直線の場合は上記の方法がまあ自然であろう．

2.2.2.2　球面と平面

球面と平面の位置関係も**接する**か，**交わる**か，**共有点がない**かの 3 つの場合が考えられるが，この場合は平面上の点が直線の場合のように 1 つのパラメータで表されないので単純に**方程式の問題**として扱うことができない．

そこで仕方なく**図形的手法**をとることになる———まずは**接する場合**を考察し，その上で**球面と平面の位置関係**について言及する．

(1) 接平面

まず平面上で円 C の半径を CT とし，T においてこの円に引いた接線を TP とすると CT⊥TP である———これは円の**基本的性質**として認めてよいだろう．

そこで，曲線の接線の一般的な定義はともかく円に限っていうと

円周上の 1 点 T において半径 CT に垂直な直線 l を T における接線という

と**定義**することができる———ここから出発しよう．

すなわち**接平面**を上記にならって

球面上の 1 点 T において半径 CT に垂直な平面 π を T における接平面という

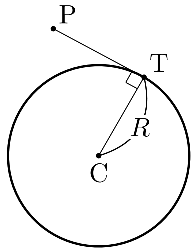
と**定義**する．これをベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad (\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CT}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CT}}\right|^2=R^2$$

(ただし R は球面の半径！)



ここで $\mathrm{C}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$, $\mathrm{T}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とすると上記の関係は

$$\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0-\alpha \\ y_0-\beta \\ z_0-\gamma \end{pmatrix}=0$$

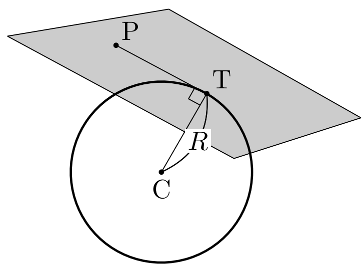
$$\therefore\quad \boldsymbol{(x-\alpha)(x_0-\alpha)+(y-\beta)(y_0-\beta)+(z-\gamma)(z_0-\gamma)=R^2}$$

となりこれが**接平面の方程式**である．

特に点 C が原点のときは $\alpha=\beta=\gamma=0$ で

$$x_0x+y_0y+z_0z=R^2$$

となる．



(注 **1**) 以上の説明で第 3 成分を除けば平面上の円と接線の関係になる．

(注 **2**) 上記 $(*)$ を成分で表すと

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0-\alpha \\ y_0-\beta \\ z_0-\gamma \end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\quad (x-x_0)(x_0-\alpha)+(y-y_0)(y_0-\beta)+(z-z_0)(z_0-\gamma)=0$$

で，この方が接平面として使いやすいときもある．

また，この式で $\mathrm{T}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が球面上にある条件

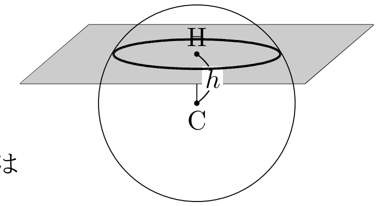
$$(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+(z_0-\gamma)^2=R^2$$

を用いて $x_0^2,\ t_0^2,\ z_0^2$ を消去すれば上記の接平面の方程式が得られる．

(2) 球面と平面との位置関係

以上の考察をもとに球面と平面の位置関係を説明する．

すなわち，球面 C と平面 π の方程式を



$$C:\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$
$$\pi:\ \ ax+by+cz+d=0$$

とすると，球面 C の中心 C から平面 π への距離 h は

$$h=\frac{|\,a\alpha+b\beta+c\gamma+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

だから

$\boldsymbol{h=R}$ のとき： π は C に接する

$\boldsymbol{h<R}$ のとき： π は C と交わり, 交線は空間の円になる

$\boldsymbol{h>R}$ のとき： π と C の共有点はない

のようにまとめられる．

<メモ>

■ 接平面，他

接平面は文字通り球面に接する平面のハナシである．これには接点に関心のある立場とそうでない立場がある．

＜例 1 ＞

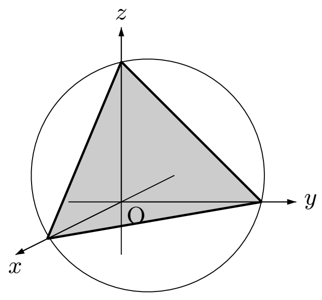
球面

$$x^2+y^2+z^2=1$$

の接平面で，点 A(1, 1, 1) を通るものの全体は円になる．この円の含まれる平面の方程式を求めよ．またこの円の中心 C の座標と半径 r を求めよ．

(解) 接点の座標を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とする．

この点における接平面の方程式は



$$\boldsymbol{x_0x+y_0y+z_0z=1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

これが点 A(1, 1, 1) を通るから $(*)$ を満たす．

$$x_0+y_0+z_0=1 \longrightarrow \text{点 P は } x+y+z=1 \text{ 上！}$$

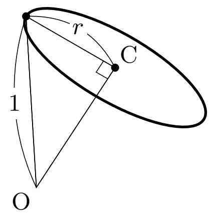
ゆえに求める平面の方程式は

$$x+y+z=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

である．

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はこの平面に垂直だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$$



だがこの円の中心 C は平面 $(**)$ 上にあるから代入すると

$$t+t+t=1 \quad \therefore\ t=\frac{1}{3} \longrightarrow \mathrm{C}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

. ゆえに求める円の半径 r は

$$r^2=1^2-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

＜例 2＞

直線 g と球面 C が次の式で与えられている．

$$g:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$$
$$C:\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=2$$

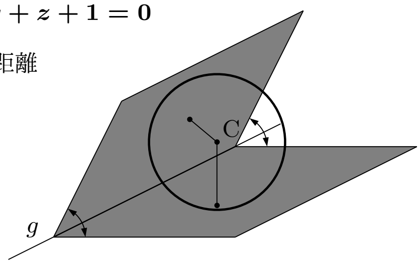
このとき，g を含み，かつ C に接する平面の方程式を求めよ．

(解) 接点に注目しないタイプの接平面の問題である．
g は 2 平面

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}\ \longrightarrow\ x+3y-2=0$$
$$\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}\ \longrightarrow\ y+z+1=0$$

の交線だから g を含む平面の方程式は平面束の考え方を用いて

$$\boldsymbol{(x+3y-2)+k(y+z+1)=0},\ \text{または}\ \boldsymbol{y+z+1=0}$$



だが，第 2 式については C の中心 C(1, -1, -2) からの距離を求めると

$$\frac{|\,1+3(-1)-2\,|}{1^2+3^2+0^2}=\frac{4}{\sqrt{10}}\neq\sqrt{2}$$

で，これが球面 C に接することはない．
そこで第 1 式が球面 C に接する条件を求める．

$$x+(3+k)y+kz-2+k=0$$
$$\therefore\quad \frac{|\,1+(3+k)\cdot(-1)+k\cdot(-2)-2+k\,|}{\sqrt{1^2+(3+k)^2+k^2}}=\sqrt{2}$$
$$\therefore\quad |-4-2k\,|=2\sqrt{k^2+3k+5}\qquad \therefore\quad |\,2+k\,|=\sqrt{k^2+3k+5}$$

2 乗して k の値を求めると $k=1$ だから求める平面の方程式は

$$(x+3y-2)+1\cdot(y+z+1)=0\qquad \therefore\quad x+4y+z-1=0$$

2.2.2.3　球面と球面

(1) 球面と球面との位置関係

2 つの球面の場合も方程式の問題としては手に負えない．やはり図形的考察によらざるを得ないが，これは平面上の 2 つの円の位置関係とほぼ同じと考えてよい．

平面上の 2 円 C_1，C_2 の半径を r_1，r_2，中心間の距離を d とする．このとき $r_1 \geqq r_2$ としても一般性は失わない――― $r_1 < r_2$ のときは裏返して透かして見ればよい．

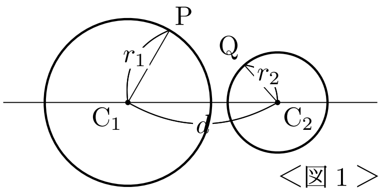
さて本論だが，これは共有点のない場合の考察から斬り込むとわかりやすい．

(i) 共有点のないとき

共有点のない場合は図の 2 つの場合がある．

＜図 1 ＞のとき

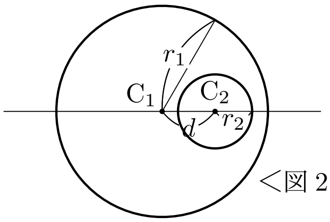
$$d > r_1 + r_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$



＜図 1 ＞

＜図 2 ＞のとき

$$r_1 > d + r_2$$
$$\therefore \quad d < r_1 - r_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$



＜図 2 ＞

(ii) 共有点をもつとき

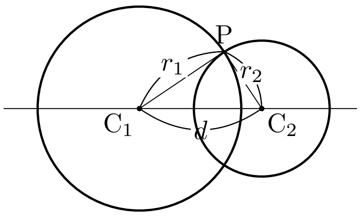
これは (i) の否定としてとらえればよいから $(*)(**)$ の不等式を逆向きにすればよい．

したがってこのときの条件は

$$r_1 - r_2 \leqq d \leqq r_1 + r_2$$

だが，左側の等号は内接，右側の等号は外接の場合だからこれらを除けば $r_1 < r_2$ のときもまとめて表すには

$$\boldsymbol{|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2}$$



とすればよい．

特に 2 球面の場合，共有点の集合は空間の円になり，したがってある平面にノッカッテいることは直感的に認めてよいだろう．

(2) 球面群

一般に 2 つの球面

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$C_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

が交わるとき

$$\boldsymbol{\lambda(x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1)}$$
$$\boldsymbol{+\mu(x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0} \ (\lambda^2 + \mu^2 \fallingdotseq 0) \ \cdots ⊠$$

は 2 球面の交線を含む**球面群**を表す.

特に $\mu = 1,\ \lambda = -1$ のときは $x^2,\ y^2,\ z^2$ が消えて $x,\ y,\ z$ の 1 次方程式

$$\boldsymbol{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + d_1 - d_2 = 0} \cdots\cdots\cdots\cdots ⊠$$

となるが，これは 2 球面の交線である**円を含む平面の方程式**を表していることはもう説明するまでもない.

なおこの場合も⊠で $\lambda \neq 0,\ \lambda = 0$ に分けることにより

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ & \qquad\qquad + k(x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \\ & \qquad ,\ \text{または}\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}$$

と 2 本の等式だが 1 文字 k で表すことにより，いくらか使い勝手のよい形で記述することができる.

(注 **1**) 上記で，**平面束**のときのように $f(x,\ y,\ z),\ g(x,\ y,\ z)$ で説明しても同じことだが $x^2,\ y^2, z^2$ が消去されて交線がノッカッテいる**平面の方程式**が⊠で示されるところを強調したかったのであえて $x^2,\ y^2, z^2$ が見える形で書いてみた．先に述べた平面束も広い意味でこの球面群の 1 つの表現と考えてよい———基本の考え方は同じでありゴチャマゼに使うときもある.

(注 **2**) **空間の円**をベクトルで表す方法もあるがハナシが込み入ってくるので機会を改める.

＜メモ＞

■ 球面群，他

＜例 1 ＞

2 つの球面

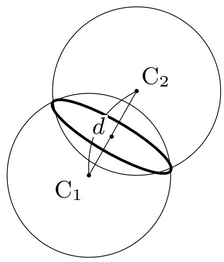
$$C_1:\ \ x^2+y^2+z^2-2x-8=0$$
$$C_2:\ \ x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+a=0$$

がある．
(1) C_1, C_2 が交わるように a の値の範囲を定めよ．
(2) (1) のとき，2 つの球面の交わりである円の中心 C の座標，および半径 r を求めよ．

(解) (1) 与えられた球面は

$$C_1:\ (x-1)^2+y^2+z^2=9$$
$$C_2:\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6-a\quad (a<6)$$

C_1, C_2 の中心間の距離 d は



$$d=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}$$
$$=\sqrt{3}$$

半径は 3, $\sqrt{6-a}$ だから C_1, C_2 が交わるための条件は

$$\boldsymbol{\left|\sqrt{6-a}-3\right|<\sqrt{3}<\sqrt{6-a}+3}$$

だが $\sqrt{6-a}>0$ より右側の不等式は明らかに成り立つ．
　そこで左側の不等式は

$$-\sqrt{3}<\sqrt{6-a}-3<\sqrt{3}\qquad \therefore\ \ 3-\sqrt{3}<\sqrt{6-a}<3+\sqrt{3}$$

この 2 つの不等式を別々に解くと a の値の範囲は

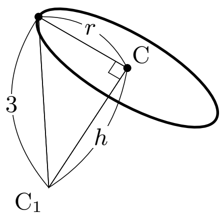
$$-6-6\sqrt{3}<a<-6+6\sqrt{3}\qquad (a<6\ \text{を満たす})$$

(2) 2 球面の交線の円を含む平面の方程式は 2 式の両辺を引いて

$$\pi:\ 2x+2y+2z-(a+8)=0$$

だから求める円の中心は直線 $\mathrm{C_1C_2}$ とこの平面 π との交点である．
　そこで

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{C_1C_2}}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ \longrightarrow\ \mathrm{C}(1+t,\ t,\ t)$$



上記の平面の式に入れて

$$2(1+t)+2t+2t=a+8$$
$$\therefore\ \ t=\frac{a+6}{6}\ \longrightarrow\ \mathrm{C}\left(\frac{a+12}{6},\ \frac{a+6}{6},\ \frac{a+6}{6}\right)$$

また $\mathrm{C_1}$ から π までの距離は

$$h=\frac{|2\cdot1+2\cdot0+2\cdot0-(a+8)|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{|a+6|}{2\sqrt{3}}$$

だから円 C の半径 r は

$$r=\sqrt{3^2-\left(\frac{|\,a+6\,|}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{-a^2-12a+72}{12}}$$

となる．

(注) 上記の球面 C_1，C_2 の**交線**の円を含む**球面群**の方程式を本文☒にならってマジメに表すと

$$\lambda\left\{(x-1)^2+y^2+z^2-9\right\}+\mu\left\{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(6-a)\right\}=0$$

だが **2 文字**　λ,μ　を扱うのでメンドウだ．そこで **1 文字**　k だけう用いた表現で

$$\left\{(x-1)^2+y^2+z^2-9\right\}+k\left\{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(6-a)\right\}=0$$

とやりたいがそうすると $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(6-a)=0$ の**吟味**を忘れたりする．
　そういうときは**交線**の円がノッカッテいる**平面の方程式**を用いて

$$\left\{(x-1)^2+y^2+z^2-9\right\}+k\{2x+2y+2z-(a+8)\}=0$$

とすれば計算もラクだが，それよりも k 以下が x,y の 1 次式なので球面の方程式がとり残されることもなく，したがって**吟味**の必要もない———このまま通過点の座標を代入したりすれば k の値が決まりその条件を満たす**球面の方程式**が**確定**する．こういうことは**生活の知恵**のようなささやかな心配りだが知っておいてもジャマにはならない．
