はしがき

あえて「イマイチ」

なぜ「イマイチ」かと言われると困ってしまうが、とにかく今、数学で自分の立ち位置がヘンだと思っている諸君を何とかしよう という講座である．

次に聞かれるのは「レベルは？」ということだが、これも関係ない．私はそういう「切り口」で生徒を見たことがない．しかし、**やる気**だけは持ってきてもらいたい．

何がヘンなのかがわかればもうヘンではないのだ．こまごましたことはここには書かない．受けてもらえば自然にわかると思う．

この冊子の意味

街の本屋の棚を見てもらいたい．こう言ってははばかるが、問題集はヤマのようにあっても、**基本原理**をキッチリと書いた参考書らしいものはほとんど見かけない．そして受験生は問題集のことを参考書だと思っているらしい．

それに、困ったことに諸君は、問題をたくさん解いて練習すれば実力がつくと思っているようだ．しかし、それはちょっと当たっているが大きくまちがっている．

そこで、私としては自前で「それらしいモノ」を書くことにした．このテキストは私がパソコンを打ち、河合塾のスタッフに作ってもらったいわば**手作り**の**特注品**である．

実際、60 歳を過ぎてのパソコンは少々キツかった．夜中まで血圧を気にしながら人差し指でキーボードをつつく爺さんを想像できるか――正気の沙汰ではない．

まあ、それやこれやでとにかくできた．君たちがつかまっても沈没しない「べた書き筏 (いかだ)」は、ほぼ完成した．これには安心してしがみついてよい．

ここでハッキリ言っておくが、易しいことは易しいし、難しいことはやはり難しい．まして数学が微笑んで君に擦り寄ってくることなどは絶対にない．

だから、どうしても超えなければならないヤマならば、君が出かけて行って君の実力で打ち破るほかはないのだ．ここにはそのための道具がすべて揃っている．

筆者としては、大学に進もうとする若者が知っているべき最小限のことがらを、その将来を見据えて、なるべく順序だてて**「べた書き」**にしたつもりである．

若者には無限の可能性がある

この歳になって振り返ってみると「人生は意外に短いなあ」とつくづく思う．私にも君の年齢があった．何もわからずウロウロと極楽トンボをやっていたのであろう．

生きるということは次々に可能性を剥奪されることなのです．まず、やりたいことを決めなさい．そして、それに向かって全力で頑張れ．道は君の後にできるものだ．

ハラを括るのは今、先に延ばせばそれだけ困難になる．爺さんになったから言えることだが、君たち若者が本気になってやれないことなどあるわけがない．

才能？、そんなものはやっているうちに出てくるよ．何でもやってみなければわかるものか．自分では何も気がついていないだろうが、君の人生はまだ始まってもいない．すべては今から始まるのです．

2015 年 04 月 17 日　　　諸橋　実

＜追記＞

数学ってナンダ

まあ、いろいろな立場からいろいろな考え方があろうが、私はここで数学はキレイだとか、数学はすばらしい、などというつもりはサラサラない．しかし、とりあえず

数学とは**数と量**に関する**言語**である

ということは誰もが素朴に認める共通認識としてもよかろう．まず、ここからはじめよう．
その上でこの科目をサボルとどうなるか．結果、数と量に関する認識があいまいになり、それにかかわるコミュニケーションが破綻する——これは世界の半分を失うことではないか．

何も専門家になれというのではない．しかし、そのことから人々の「判断の信頼性」が失墜し、社会そのものの崩壊にもつながるハナシなのだ．だから本来、どうしてもこの科目を避けて通ることはできない．そういうことなら、いっそハラを据えて徹底的にやればよいではないか．

ヤルなら効率よく

私は「問題演習をドンドンやればデキルようになる」という信仰を否定するつもりはない．確かにそういう一面もある．しかし、去年の問題も、一昨年の問題も解いて、…… のようなことをしていたのでは「来年出るはずの問題」も練習をしなければならなくなるのではないか．
しかし、この科目はタダの暗記科目ではない．数学はその個々の概念が、「関係」として**体系的に構成されている**という特殊な性質がある．だから、何年の何大学の問題である、というような切り口からではその問題の核心に届かない——その問題の、数学としての根っこを捕まえてザックリやるしかない．たとえば確率の例でいうと、素人 (生徒) サンは

さいころの問題、くじ引きの問題、袋から球を出す問題、…………

のように、みんなちがうハナシに見えてしまう．しかし、数学としての立場はちがう．つまり

数学的確率の定義、加法定理、条件つき確率、乗法定理、…………

と数学の体系に沿って考える．要するに「さいころの問題」と「くじ引きの問題」は素材がちがっても、数学的確率という同じ体系のカケラなのだ．それは、去年の問題も一昨年の問題も、はたまた来年出る問題も、東大の問題も早稲田の問題も、結局は同じマナイタで調理されたモノなのである．そういうことなら、こちらとしても個々の知識をバラバラに覚えるのではいかにも非効率である．だったら、その体系ごとゴッソリとさらってしまえばよいではないか．

公式について

あるとき教室で「自分で証明できない公式は使うな！」と言ってみたのだが、そのときの反応がおもしろかった．どうやら、そういうことは考えてみたこともないらしいのである．
大体、自分で確かめてもいないことを振り回す根性も気に入らないが、それより、そういうことではその公式が正しく使えているとは思えない．公式というのは、それぞれの数理現象をとりまとめて数式などで簡潔に表したものだからうまく使えば便利なものではある．しかし、その背景を正しく把握していないと十分に使いこなせない．そういうものなのである．
つまり公式は、先に述べた「数学の体系」で言えば骨に当たるものであろう．しかし、タダの骨だけでは何の役にも立たない．君の手でその証明を確認し、その意味を探り、時には感動もし、そういうことを通して君にとって血の通った道具にしなければ意味はない．実際、使い物にもならない．それでこそ、その有難さもわかってくるというものだ．ラクをした分のツケは大きいぞ．

別人になろう

まず、「知る」と言うことはどういうことか．あるとき授業の後で、「今、言ったことを全て忘れてもらって、全くなかったことにしよう」と言ったら、「それはできない」と言う．
そうです．知るということはそういうことなのです．つまり、知る前の君と知ってからの君とは全くの**別人**なのだ．そして君はもとの君にはもどれない．つまり、育つしかないのです．
「知る」ことにより、そして**「考える」**ことにより、人は強くなる．生涯、人は強くなり続けるしかない．だから、君の闘う相手は他人ではなくて君自身であり、良くも悪しくも君のいま立っている所がつねに君の出発点 なのです．それが生きることの基本原理なのだと私は思います．

2013 年 07 月 04 日　　　　著者記す

目 次

第1章　有限数列

1.1　数列とは何か

数列とは何か．それは文字通り数を並べた数の列のことである．しかし，そうはいってもどう並べても数列だから，それは無限にあってわれわれの手に負えるものではない．

そこで，それらの中で**ある規則**にしたがって並んでいるものについてのみ注目する．ここで規則といってもピンとこないかも知れないが，たとえば並んでいる数の列にはじめから番号をつけてみる．すなわち

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , a_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ここで言葉の説明をしておくが，まずこれらの数の 1 つ 1 つを**項**といい，最初の項 a_1 を**初項**，第 2 番目の項 a_2 を第 2 項，以下それに倣って第 n 番目の項を**第 $\boldsymbol{n}$ 項**という．このとき，第 n 項は一般的な表現になるのでこれを**一般項**ともいう．また，上記の数列は中カッコをつけて $\{a_n\}$ のように表されることも知っておくとよい．

さて，このように並んだ数列の，その並び方の**規則性**を調べて記述するということはどういうことか．もし，第 n 項を項の番号を表す数値 n で表すことができれば，すなわち a_n を **$\boldsymbol{n}$ の関数**で表すことができれば，その n に 1, 2, 3, $\cdots\cdots\cdots\cdots$ を代入して a_1, a_2, a_3 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ の数値を求めることができる．

たとえば，奇数を並べた数列 $\{a_n\}$ は

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

だが，この数列の第 n 項 a_n が

$$a_n = 2n - 1 \ \longleftarrow\ \boldsymbol{n}\ \text{の 1 次関数 !!}$$

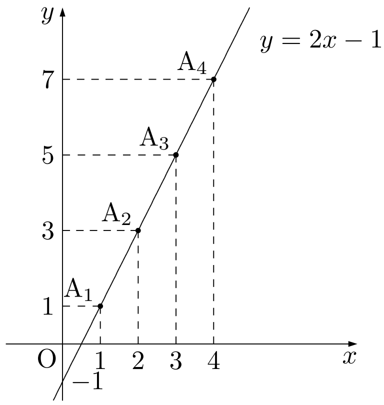
で表される．すなわち a_n は直線

$$y = 2x - 1$$

のグラフ上の $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\cdots$ に対する点列

$$\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_4,\ \cdots\cdots\cdots$$

の y 座標になっている．



数列での主なテーマは，与えられた条件から**第 $\boldsymbol{n}$ 項 $\boldsymbol{a_n}$ を $\boldsymbol{n}$ の関数**として表すことであると思ってもらえばよい．

しかし，実際にわれわれの扱える数列はそう多くはない．せいぜい隣どうしの差が一定である**等差数列**と，比が一定である**等比数列**，そしてそれらの**ファミリー**と，あとはごく限られた**特殊ないくつか**，あるいは**それらの組み合わせ**ということになろう．

なお，項の数が有限である数列を**有限数列**，無限である数列を**無限数列**という．有限数列では項の数を**項数**といい，最後の項を**末項**という．

以下，順を追って説明する．

1.1.1　数列入門

数の並び方の規則で最も素朴で親しみ易いものは，隣同士の項の差が一定である等差数列と，項の比が一定である等比数列であろう．

ここでは，この基本の形をした 2 つのタイプの数列の一般項とその和の公式について詳しく説明する．すべてはそれからだ．

1.1.1.1　等差数列とその和

等差数列は文字通り，連続する 2 項の差が一定であるような数列のことである．

このことは数式を用いて

$$\boldsymbol{a_{n+1} - a_n = d}\ (\textbf{一定}),\ \text{あるいは}\ \ a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots)$$

と表されるが，この一定値 d を公差という．

これに初項 $a_1 = a$ を与えて順次書き並べると，この数列の各項は

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

として確定する．

このことから等差数列の第 n 項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n は n の式として次のように公式化されている．

等差数列の第 n 項，初項から第 n 項までの和

初項 a，公差 d の等差数列の第 n 項 a_n，初項から第 n 項までの和 S_n は次の式で与えられる．

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d} \qquad \longleftarrow\ n\text{ の 1 次式！}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\ \}}\ \left(= \frac{n(a+a_n)}{2}\right) \qquad \longleftarrow\ n\text{ の 2 次式！}$$

（解説） (1) 各項の d の係数が項の番号より 1 小さいことに注目すれば

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

は，ほとんど明らかとしてもよかろう．

(2) 次に，初項から第 n 項までの和 S_n だが，各項に上記の公式を適用すれば

$$S_n = \ a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots\cdots + (a_n - d) + a_n \cdots\cdots\cdots ①$$

であるが，この加える順序を逆に書いてもその和は S_n に変わりはないから

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots\cdots\cdots + (a+d) + a \cdots\cdots\cdots ②$$

そこで ①,② を加えると

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_n + a) + (a_n + a) + \cdots\cdots\cdots + (a_n + a) + (a_n + a) \quad \longleftarrow\ n\text{ 個！} \\ &= n(a + a_n) \end{aligned}$$

だから両辺を 2 で割って

$$\begin{aligned} S_n &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(a+a_n)} = \frac{1}{2}n\{a+a+(n-1)d\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}} \end{aligned}$$

となる．

ちなみに，3 数 $a,\ b,\ c$ が**この順に**等差数列をなすとき

$$\boldsymbol{a+c=2b} \qquad \longleftarrow \quad b=a+d,\ c=a+2d \text{ を入れてみよ！}$$

の関係が成り立つ———何かのときにきっと役に立つから覚えておくとよい．

＜メモ＞

■ 等差数列について

　実際の入試で等差数列が，そのメインのテーマとして正面から出題されることはメッタにない．おおむねは本文に述べた公式の運用で間に合うと思ってよい．しかし，ひょんなことで引っかかることもあるので実例で説明しておこう．

＜ 例 1 ＞

　等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$a_7 = 8,\ S_{20} = -50$ である．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) S_n の最大値を求めよ．

(解) まず，公式

$$a_n = a + (n-1)d,\quad S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

を確認しておこう．その上で

(1) 数値を代入すると

$$\left.\begin{aligned} &a_7 = a + 6d = 8 \\ &S_{20} = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot(2a+19d) = -50 \qquad \therefore\ \ 2a + 19d = -5 \end{aligned}\right\} \qquad \therefore\ \ a = 26,\ d = -3$$

ゆえに求める一般項は

$$a_n = 26 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+29}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の公差 $d = -3 < 0$ より，a_n は $a_1 = 26 > 0$ から単調に減少する．

　したがって，S_n は $a_n \geqq 0$ を満たす n の範囲では増加し，$a_n < 0$ の n の範囲では減少する――その符号の変わり目を探せばよい．このことから

$$a_n = -3n + 29 \geqq 0 \qquad \therefore\ \ 3n \leqq 29 \qquad \therefore\ \ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$$

$$\therefore\ \ S_1 < S_2 < \cdots < S_9 > S_{10} > \cdots\cdots$$

ゆえに，S_n は $n = 9$ で最大値をとり，その値は

$$S_9 = \frac{9}{2}\{2\cdot 26 + 8\cdot(-3)\} = \mathbf{126}$$

であることがわかって**一件落着！**といきたいが，これを n の 2 次関数とみて**平方完成**に走りかねないのです．

　マジメにやれば

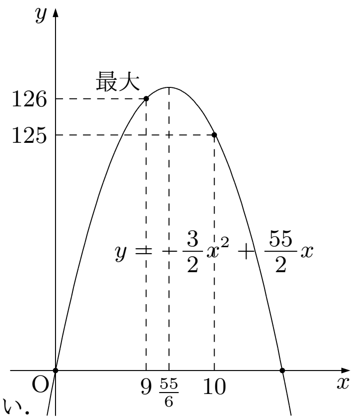
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{2\cdot 26 + (n-1)\cdot(-3)\} \\ &= -\frac{3}{2}n^2 + \frac{55}{2}n \\ &= -\frac{3}{2}\left(n - \frac{55}{6}\right)^2 + \frac{3025}{24} \end{aligned}$$

となる．まあ，ウソではないがチト辛い．

　その上，n は整数だから a_n の値は，放物線

$$y = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{55}{6}\right)^2 + \frac{671}{24}$$

上の**点列の $\boldsymbol{y}$ 座標**だから $x = \dfrac{55}{6}$ で最大値をとるわけではない．



　そうなると，いよいよ上に述べたやり方には絶対にかなわない――これは，**そういうことがあることも知っておけ**という問題なのです．

　右のグラフにしても，相当ゴマカシて描いているのです．

＜補足説明！＞

上記のように**等差数列**と堂々と項目を掲げる**といかにもリッパ**だが、この分野が単独で入試問題のテーマとして出題されることはメッタにないと思ってよい———これは等差数列が重要でないということではない．もっと根本的なところでそうなのではないか.

それは、おそらく人類がはじめて獲得した数列という数学的概念かも知れない．そしてシンプルで当然キレイだ．しかし、あまりにシンプルに過ぎて入試という立場で知識や思考を問いかけるにはタネが限られてしまうことも事実である.

また、和を求めるについても、あとで出てくる公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ に吸収されてしまうという一面もあるだろう．しかし、本当の理由は**自然現象**には等差数列よりもこのあとに述べることになる**等比数列**で記述されることがらが圧倒的に多いことによるのではないか.

ちなみに、数列 $\{a_n\}$ が等比数列であるとき、数列 $\{\log a_n\}$ は等差数列になる———このあとの等比数列を読んでから確認のこと！ ここで、人間の感性が指数現象を直線的に感じてしまう、などという事実に言及するつもりはないがおもしろい関係ではある.

いずれにせよ、**等差数列**は**数列という城砦**の入り口の**城門**である．そこから中は、多少毛色のちがうものもあるとはいえ、漸化式に至るまで、ほとんど**等比数列の大伽藍**で構成されている．そして道は、**無限数列**、**無限級数**を経て**微積分**へと続くわけである.

＜ end.＞

1.1.1.2　等比数列とその和

連続する 2 項の比が一定であるような数列を等比数列という．これを数式で表すと

$$\boldsymbol{a_{n+1} = ra_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots)$$

で，この比の値 r を**公比**という．

この数列の初項を a として順次書き並べるとこの数列は

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

として確定する．

等比数列の第 n 項，初項から第 n 項までの和

初項 a，公差 d の等比数列の第 n 項 a_n，初項から第 n 項までの和 S_n は次の式で与えられる．

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{S_n} = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}} & (r \fallingdotseq 1 \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{na} \quad (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

（解説） (1) 各項の r のカタの指数が項の番号より 1 だけ小さいことに注目すれば

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

は，ほとんど明らかである．

(2) 次に，初項から第 n 項までの和 S_n だが，各項で項の番号の増加にしたがって r の次数が 1 つずつ上がっていくことに注目する．すなわち

$$S_n = a + \underbrace{ar + ar^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + ar^{n-1}}_{A} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，両辺に r をかけると右辺では同じものが現れる———ズレた形になる．

$$rS_n = \qquad \underbrace{ar + ar^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + ar^{n-1}}_{A} + ar^n \cdots\cdots\cdots ②$$

① − ② を実行すると，消えるもの (上記の A) が消えて

$$(1-r)S_n = a - ar^n \qquad \therefore\ \boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (\boldsymbol{r \fallingdotseq 1} \text{ **のとき**})$$

$\boldsymbol{r = 1}$ **のとき**は ① にもどって，n 個の項がすべて a だから

$$\boldsymbol{S_n = na}$$

となる．ウッカリ r での**場合分け**を忘れないよう注意のこと！

また，3 数 $a,\ b.\ c$ が**この順に**等比数列をなすとき

$$\boldsymbol{ac = b^2} \qquad \longleftarrow\ b = ar,\ c = ar^2 \text{ を入れてみよ！}$$

が成り立つ———この関係も覚えておくとよい．

＜メモ＞

■ 等比数列について

この先，数列のいろいろなハナシを展開していくわけだが，この**等比数列**の登場する場面が**圧倒的に多い**ことに注目しておきたい．

特に**漸化式**などはほとんどが等比数列に帰着させることで解決することになり，その発想は他の範囲でも応用されたりすることが多い．それだけこの数列が**自然現象**に深く根ざしていて，それだけ多くのものを**数理現象**に反映しているということであろう．

ともあれ，冒頭に述べた等差数列など，等比数列の登場頻度に較べればゴミのような，カスのようなものと思えるほどである．ともかくここは，**リキ**を入れてしっかり勉強しておくべし．

＜ **例 1** ＞

公比が正の数で，第 3 項が 18，初項から第 3 項までの和が 26 である等比数列がある．

(1) 初項と公比を求めよ．

(2) 第 3 項から第 n 項までの和が 720 のとき，n の値を求めよ．

(解) 等比数列の公式

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}},\quad S_n = \underbrace{\boldsymbol{\frac{a(1-r^n)}{1-r}}}_{A} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{a(r^n-1)}{r-1}}}_{B}\ \boldsymbol{(r \fallingdotseq 1)} \cdots\cdots\cdots (*)$$

の確認問題である．

(1) 上記の公式に具体的な数値を入れて

$$a_3 = ar^2 = 18 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$S_3 = \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 26 \quad \therefore\ a(1+r+r^2) = 26 \cdots\cdots\cdots ②$$

まず ①② から a を消去して r を求め，その上で a を求める――要するに a と r の**連立方程式**とみればよい．すなわち

$$\frac{18}{r^2} = \frac{26}{1+r+r^2}\ (=a) \quad \therefore\ 18(1+r+r^2) = 26r^2$$

$$\therefore\ 4r^2 - 9r - 9 = 0 \quad \therefore\ (4r+3)(r-3) = 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r = 3}\ (>0),\quad \boldsymbol{a = 2}$$

(2) 条件を和の公式 S_n で表すと

$$S_n - S_2 = \frac{2(3^n-1)}{3-1} - \frac{2(3^2-1)}{3-1}$$

$$= 3^n - 9 = 720$$

$$\therefore\ 3^n = 729 = 3^6 \quad \therefore\ \boldsymbol{n = 6}$$

で**一件落着**だ！

ここで，初項から第 n 項までの和を求める**公式**として $(*)$ の (A) と (B) のどちらのカタチで覚えておけばよいか―― 一般的には (A) のようである．

その理由は**無限等比級数**の場合の，その収束条件 $|r| < 1$ に由来するものと思われる．本問ではタマタマ $r = 3\ (>1)$ なので (A) の形では不自然に思われて (B) の形で書いてみた．

基本的にはどちらでもよいが，ゴチャマゼに使うと符号のマチガイが起こるから，一般的に用いる (A) に統一するなどしておくほうがよいかも知れない．

1.1.2　いろいろな数列とその和

1.1.2.1　タス記号「シグマ」の導入

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_k + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

だが，この表現では長すぎて扱いにくい．それに中間の点線の部分はそのキブンはわかるが，何だか怪しげでキモチが悪い．もっとすっきりと簡潔に表す方法はないか．

そこは人々の知恵だ．数列 $\{a_n\}$ の**第 $\boldsymbol{k}$ 項**が a_k として **$\boldsymbol{k}$ の関数**で表されていることに注目すると $(*)$ の右辺はその k の値に $k = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$, $n-1$, n を代入したものをすべての k にわたって足したものではないか．そこで，このことを記号 $\sum$（シグマと読め！）を用いて

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_k + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

と書くことを思いついたものと思われる．

すなわち，$(*)$ は

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k} \longleftarrow (= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_k + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n \text{ のこと！})$$

あまりに簡潔に表されるので，あたかも 1 つの数のように錯覚しがちだから特に注意のこと．そのうち慣れると，この記号で，a_k の k の値に $k = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$, $n-1$, n を代入して加えている状況を思い浮かべられるようになる．

さて，この記号の**どこがありがたい**のか———それは，次のようにまとめられる．

和の記号 $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(\ \ )}$

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ については

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k} \longleftarrow \textbf{和の数列}\text{ の和は }\textbf{数列の和}\text{ の和！}$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k} \ (\boldsymbol{p}\text{ は実数！}) \longleftarrow \textbf{スカラー倍}\text{ は括って前に出す！}$$

が成り立つ．

（解説） 証明は左辺をバラバラに並べて書いて，改めて括りなおせば右辺をバラバラに書いたものになるからほとんど問題ナシとしてよかろう．

ありがたいのはこの 2 式から得られる次の関係なのです．

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} (pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k} \ \ (\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}\text{ は実数 !})$$

といっても，どこがありがたいのかピンとこないと思うから，改めて実例で説明します.

＜補足説明！＞

この”和”を表す記号 $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}(\ \ )$ を扱う上で注意しておくことは、まずナジミにくいということがあるが、その次にはこれがどうしても **1 カタマリ** に見えてしまうことにある.

クドイようだがこれは、たとえば

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

のような式は長ったらしくて扱いにくい．そこで、これを $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と表すわけで、あくまでもカタマリ ではないのだ．だから、 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と記述されたものを読むときは $(*)$ のバラバラに展開したカタチで認識していなければならないのである.

たとえば、上記は公式としていきなり使うわけだが、その意味している内容は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(pa_k + qb_k) &= (pa_1 + qb_1) + (pa_2 + qb_2) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (pa_n + qb_n)\\ &= p(a_1 + a_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n) + q(b_1 + b_2 + \cdots\cdots\cdots + b_n)\\ &\qquad \longleftarrow \text{たし算の順序を変えてカッコでくくった！}\\ &= p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

ということである．まあ、慣れるまでは多少モタモタするかも知れないがワケをわかってしまえば恐れるほどのことではない.

＜ **end.** ＞

<メモ>

■ $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} (pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k}$ **(p，q は実数！)**

実例で説明しよう．

＜ 例 1 ＞

次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

$1,\ 1+a,\ 1+a+a^2,\ 1+a+a^2+a^3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(解) さあ，困ったぞ．項の番号が増えると**その項**を構成している等比数列の項が増えていって収拾がつかない．こういうときは各項の下に番号を振って**その項**の項数との関係をにらんでみる．

$$\underbrace{1}_{1},\ \underbrace{1+a}_{2},\ \underbrace{1+a+a^2}_{3},\ \underbrace{1+a+a^2+a^3}_{4},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ここから何を読み取るか．第 1 項は 1 項，第 2 項は 2 項，第 3 項は 3 項，第 4 項は 4 項で構成されているから，この数列を $\boldsymbol{\{b_n\}}$ とすると，その**第 $\boldsymbol{n}$ 項 $\boldsymbol{b_n}$** は n 項の項で構成される，**初項が 1，公比が $\boldsymbol{a}$ の等比数列の和**になっていると読める．すなわち

$$b_n = 1+a+a^2+a^3+\cdots\cdots\cdots+a^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-a^n}{1-a}\ (a \fallingdotseq 1 \text{ のとき}) \\ n\ (a=1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これが与えられた数列の第 n 項であるが，題意はさらに，この数列の初項から第 n 項までの和を求めよということなのだ．そこで場合を分けて

(i) $a \fallingdotseq 1$ のとき：

$$\begin{aligned} S_n &= b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots+b_n \\ &= \left(\frac{1-a^1}{1-a}\right)+\left(\frac{1-a^2}{1-a}\right)+\left(\frac{1-a^3}{1-a}\right)+\left(\frac{1-a^4}{1-a}\right)+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-a}\right)(n-a-a^2-a^3-a^4-\cdots\cdots\cdots-a^n) \\ &= \left(\frac{1}{a-1}\right)(a+a^2+a^3+a^4+\cdots\cdots\cdots+a^n-n) \\ &= \boldsymbol{\left(\frac{1}{a-1}\right)\left\{\frac{a(a^n-1)}{a-1}-n\right\}} \end{aligned}$$

(ii) $a=1$ のとき：

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n \quad \longleftarrow \text{ 初項 1，公差 1 の等差数列！} \\ &= \frac{n}{2}\cdot\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1\} = \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

と，まあ本問については一応の**正解**は出せる．しかし，途中の**点線**が何とも悩ましい．

そこで，記号 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ を用いて書き直してみる．

まず，前半は b_n が等比数列 $\{a_n\}$ の和であることが見えれば

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-a^n}{1-a}\ (a \fallingdotseq 1 \text{ のとき}) \\ n\ (a=1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

はいきなり書けるだろう．

そこで (i) については

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-a^k}{1-a} \\
&= \frac{1}{1-a}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{1} - \frac{1}{1-a}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a^k} \quad \longleftarrow \quad \sum_{k=1}^{n} 1 = n \text{ に注意！} \\
&= \frac{n}{1-a} - \frac{1}{1-a}\cdot\frac{a(1-a^n)}{1-a} \quad \longleftarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a^k \text{ は初項 } a, \text{公比 } a \text{ の等比数列の和！} \\
&= \left(\frac{1}{a-1}\right)\left\{\frac{a(a^n-1)}{a-1} - n\right\}
\end{aligned}$$

この方が**スッキリしてよい**と思わないか.

また，(ii) の

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

は次の節で**発展的**にまとめて解説する.

■ 和 $\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$ から第 $\boldsymbol{n}$ 項 $\boldsymbol{a_n}$を求める

ハナシはこういうことだ.

いま，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が求まって，それが n の式で表されているとする，これを便宜上 S_n と簡単に表しておくとよい．このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるにはどうするか.

まずは，ベッタリ書いてみないとわからない.

つまり

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{n-1}}_{\text{この部分は } S_{n-1} \text{だ}} + a_n$$

だが上記の通り，その中にすでに S_{n-1} が現れるから，この部分を左辺に移項すればよい.

そうすれば**右端にある** $\boldsymbol{a_n}$ が求まるはずである.

すなわち

$$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

しかし，このとき $\boldsymbol{S_{n-1}}$ **が定義されなければならない**ので，$n =$ 2, 3, $\cdots\cdots\cdots$ となる．つまり，$(*)$ で求まる a_n は a_2, a_3, $\cdots\cdots\cdots$ で a_1 は入ってこないから，これは $\boldsymbol{a_1 = S_1}$ として別枠で定義しなければならないのだ——$(*)$ で $n=1$ としてこの値と一致すればよいのだが，そうでないときがあるから，結構ヤッカイだ.

結局

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} \ (n \geqq 2) \\ S_1 \ (n=1) \end{cases}}$$

としなければならない.

＜例 1 ＞

数列 a_n は
$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = n^4 - n^2 + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots)$$
を満たしている．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k a_k$ を求めよ．ただし，m は自然数とする．

(解) (1) 与えられた条件は
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} ka_k}_{S_n \text{とおく}} = n^4 - n^2 + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots)$$
だが，このままでは**カタマリ**に見えて仕方がない．**バラバラ**に書いてみよう．
$$\underbrace{1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \cdots + (n-1)\cdot a_{n-1}}_{S_{n-1}} + n\cdot a_n = n^4 - n^2 + 1 \quad (= S_n)\cdots\cdots①$$
$$\begin{aligned}\therefore\quad n\cdot a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2)\\ &= (n^4 - n^2 + 1) - \{(n-1)^4 - (n-1)^2 + 1\}\\ &= 4n^3 - 6n^2 + 2n\end{aligned}$$
$$\therefore\quad a_n = 4n^2 - 6n + 2 \quad (n \geqq 2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$
$n = 1$ のときは別枠だから ① で $n = 1$ とおいて
$$1\cdot a_1 = 1^4 - 1^2 + 1 \qquad \therefore\quad a_1 = 1 \longleftarrow$$ **②で $n = 1$ とおいても 1 にならない！**

つまり，a_n を，すべての項をまとめて ② で代表して一律に答えるわけには行かないのだ．

そこで，きちんと場合を分けて
$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 4n^2 - 6n + 2 & (n \geqq 2 \text{ のとき})\\ 1 & (n = 1 \text{ のとき})\end{cases}}$$

(2) この場合も**カタマリ**では手がつかないから，**バラバラ**に書いてみる．その際，$k = 1$〜$2m$ までの偶数項の和だから，おそらく 2 項ずつセットにして考えることになろうが，**a_1 だけが一律に行かないのだから**，**a_1 を含むセット**に注目しながら処理を進める．
$$\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k a_k = \underbrace{-a_1 + a_2}_{1\text{ セット目}}\underbrace{-a_3 + a_4}_{2\text{ セット目}} - \cdots\cdots\cdots\underbrace{-a_{2m-1} + a_{2m}}_{m\text{ セット目}} \quad \left(= \sum_{k=1}^{m}(-a_{2k-1} + a_{2k})\right)$$
と分けて書いてみると，**1 セット目だけが問題**で，2 セット目以降は一律に行くから問題のあるところだけを切り離して議論すればよい．
$$\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k a_k = (\underbrace{-a_1 + a_2}_{\text{ここが問題}}) + \sum_{k=2}^{m}(-a_{2k-1} + a_{2k})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$
ここで
$$-a_1 + a_2 = -1 + (\underbrace{4\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 2}_{6}) = 5$$
$$\begin{aligned}-a_{2k-1} + a_{2k} &= -\{4(2k-1)^2 - 6(2k-1) + 2\} + \{4(2k)^2 - 6\cdot(2k) + 2\}\\ &= 2(8k-5)\end{aligned}$$

これらを $(*)$ に適用すると

$$
\begin{aligned}
(*) &= 5 + \sum_{k=2}^{m} 2(8k-5) \quad (m \geqq 2) \\
&= 5 + 2 \underbrace{\sum_{k=2}^{m}(8k-5)}_{\text{公差 } 8 \text{ の等差数列}} \\
&= 5 + 2 \cdot \frac{m-1}{2}\{11 + (8m-5)\} \\
&= \boldsymbol{8m^2 - 2m - 5 \ (m = 1} \text{ **も満たす**} \boldsymbol{)}
\end{aligned}
$$

1.1.2.2　典型的な公式群，他

前節までは数列の入門篇として，最もシンプルな形をした**等差数列**，**等比数列**をモデルに**数列**とは何か，**数列の和**を求めるとはどういうことか，その記号と用い方などについて詳しく解説した．

ここでは，等差数列や等比数列ほどポピュラーではないが，和を求める**公式**としてすでに認められているもの，あるいは公式としていきなり用いることはムリでも和を求める**方法論**として確立しているものなどを紹介しながら，数列についての基本的な知識を整備します．

1.1.2.2.1　シグマで表される典型的な公式

本論に入る前に，少しくどいが，これらの記号 (シグマ) の意味するところは

$$\sum_{k=1}^{n} k \ = \ 1 \ +2 \ +3 \ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n^3$$

ということで，**1 つのカタマリのことではない**ことを，ダメ**押し**しておきます．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k,\quad \sum_{k=1}^{n} k^2,\quad \sum_{k=1}^{n} k^3$

次の 3 つは公式としていきなり使ってよい．

(1) $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

(2) $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

(3) $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

（解説） いきなり使ってよいが，そうは言っても**証明**もできてほしい．というわけは，その途中経緯の**おいしいところ**を学んでほしいのだ．

(1) は等差数列としてすでに証明したから (2) をやってみよう——この場合も同様にやれるが、あとで説明する．

さて、これには恒等式

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{(x+1)^3-x^3 = 3x^2+3x+1}\cdots\cdots\cdots①$$

を利用する—— 一体誰がこんなことを思いついたのだろう．

その**方法**は ① に $\boldsymbol{x = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots, n}$ を**入れて加える**のだ．すなわち

$$\begin{array}{llll}
2^3 & -1^3 = & 3\cdot 1^2 & +3\cdot 1+1 \\
3^3 & -2^3 = & 3\cdot 2^2 & +3\cdot 2+1 \\
4^3 & -3^3 = & 3\cdot 3^2 & +3\cdot 3+1 \\
\cdots\cdots\cdots & & & \\
\cdots\cdots\cdots & & & \\
n^3-(n-1)^3 = & & 3(n-1)^2 & +3(n-1)+1 \\
(n+1)^3 & -n^3 = & 3n^2 & +3n+1
\end{array}$$

と書き並べておいてタテに加えると，左辺はうまい具合に**パタパタ**斜めに消える．

右辺は 3 で括れるものは括って整理すると

$$(n+1)^3-1^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n \quad \longleftarrow \quad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\text{を代入して整理！}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

と，なかなか**キレイに**まとまった．

こんな具合にうまく行くワケは ① の恒等式で $\boldsymbol{x+1}$ **と** $\boldsymbol{x}$ **との差が** $\boldsymbol{1}$ になっているからだということに注目してもらいたい．そうすると

(1) は，恒等式　$\boldsymbol{(x+1)^2-x^2=2x+1}$

(3) は，恒等式　$\boldsymbol{(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1}$

を利用することで，**全く同様に証明される**ことがわかる———ここまで書けばもういいだろう．あとは君たちに任せよう．

<メモ>

■ 習うよりなれよ

この手の問題は山ほど出ている．まずは基本の問題から眺めてみよう．

＜ 例 **1** ＞

(1) 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

$$1\cdot 1,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 4\cdot 7,\ 5\cdot 9,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(2) 次の和を求めよ．

$$2\cdot n+5\cdot(n-1)+8\cdot(n-2)+\cdots\cdots\cdots+(3n-1)\cdot 1$$

(解) (1) まず，一般項を見つけなければならないが，これはそれぞれの項の下に番号を振ってみるとわかりやすい．つまり

$$\underbrace{1\cdot 1}_{1},\ \underbrace{2\cdot 3}_{2},\ \underbrace{3\cdot 5}_{3},\ \underbrace{4\cdot 7}_{4},\ \underbrace{5\cdot 9}_{5},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

各数と番号の関係をよくみると，数列の第 k 項が

$$a_k=k(2k-1)=2k^2-k$$

になっているから

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)\\&=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\\&=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\quad\longleftarrow\quad\text{まず，括れるものを前に出せ！}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}\end{aligned}$$

(2) これも項の数値と番号をつき合わせてみる．ただし，$\boldsymbol{n}$ **は定数**なのだからダマされるな．

$$\underbrace{2\cdot n}_{1}+\underbrace{5\cdot(n-1)}_{2}+\underbrace{8\cdot(n-2)}_{3}+\cdots\cdots\cdots+(3n-1)\cdot 1$$

第 k 項 a_k は

$$\begin{aligned}a_k&=(3k-1)\cdot\{n-(k-1)\}\\&=-3k^2+(3n+4)k-(n+1)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-3k^2+(3n+4)k-(n+1)\}\\&=-3\sum_{k=1}^{n}k^2+(3n+4)\sum_{k=1}^{n}k-n(n+1)\\&=-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(3n+4)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n(n+1)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)^2}\end{aligned}$$

まあ，こんなものです．

基本はこんなものだから，以下は少し面白いものをやろう．

＜例 2＞

数列 1, 2, 3, 4, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $,n$ から異なる 2 項をとってできる積の総和を求めよ．

(解) この問題の難しさは，この題意の**積の総和**をどうして作るかということにある———**式展開の基本**がわかっていないと手に負えない．さあ，どうする．

大体，n 個のサンプルでは規模が大きすぎて概要をつかみにくい．そういうときはサンプルの規模を小さくとって考えをまとめるとよい．

たとえば本問の内容を，3 つの数 a, b, c で考えれば $bc+ca+ab$ を求めよ，ということである．

これはどうしたら求まるか——— $(a+b+c)^2$ の展開公式を思い出せ．

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(\underbrace{bc+ca+ab}_{P})$$

求める 3 数の積の総和は上記の P のことではないか．これは

$$P = \frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$

で計算されることをナットクするのはそう面倒なハナシではない．

したがって，本問の場合も 2 項の積の総和 P は

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}
\end{aligned}$$

で**一件落着**となる．

さて，上記ではハナシを簡単にするために，3 項の展開公式を示してゴマカシタが，もう少し詳細に説明しておこう．

そもそも，数式の計算で**カッコをはずす**計算は

$$a\ (b+c) = ab+ac \longleftarrow \text{第 1 分配則！}$$

$$(a+b)\ c = ac+bc \longleftarrow \text{第 2 分配則！}$$

で約束されるものである

3 項の展開の例でいえば

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= (\underbrace{a+b+c}_{A\text{ とおく}})\cdot(\underbrace{a+b+c}_{B\text{ とおく}})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*) \\
&= Aa+Ab+Ac \longleftarrow \text{ 第 1 分配則！} \\
&= (a+b+c)a+(a+b+c)b+(a+b+c)c \longleftarrow \text{ これに 第 2 分配則を実行！} \\
&= a^2+ba+ca+ab+b^2+cb+ac+bc+c^2 \\
&= a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)
\end{aligned}$$

として導かれるものである．

その結果，$(*)$ で A, B とおいた 2 つの $(a+b+c)$ のそれぞれから a, b, c のどれかをとって作った積の，起こり得るすべての場合の総和として $(**)$ が得られたわけである

問題は，これを $(1+2+\cdots\cdots\cdots+n)^2$ でやろうというのだから大変だ．わかり易くするために表にしたので見てもらいたい．

	1	2	3	$\cdots$	n
1	1^2	$\mathbf{1\cdot 2}$	$\mathbf{1\cdot 3}$	$\boldsymbol{\cdots}$	$\boldsymbol{1\cdot n}$
2	$2\cdot 1$	2^2	$\mathbf{2\cdot 3}$	$\boldsymbol{\cdots}$	$\boldsymbol{2\cdot n}$
3	$3\cdot 1$	$3\cdot 2$	3^2	$\boldsymbol{\cdots}$	$\boldsymbol{3\cdot n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n-1$	$(n-1)\cdot 1$	$(n-1)\cdot 2$	$(n-1)\cdot 3$	$\cdots$	$\boldsymbol{(n-1)\cdot n}$
n	$n\cdot 1$	$n\cdot 2$	$n\cdot 3$	$\cdots$	n^2

求めるものは右上の**三角形 (太字) の部分の和**だが，これは左下の三角形の部分と同じだから，対角線上の $1^2+2^2+\cdots\cdot+n^2$ を引いて $\dfrac{1}{2}$ 倍すればよいことが一目瞭然である．

ところで，この表を見ていたら次のようなことを思いついた．**太字部分の $\boldsymbol{k}$ 段目の和**を $N(k)$ として

$$\begin{aligned}
N(k) &= k(k+1)+k(k+2)+\cdots\cdots+kn \\
&= k\left\{\ \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{k} i\ \right\} \\
&= k\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}k(k+1)\right\} = \frac{1}{2}\{n(n+1)k-k^3-k^2\}
\end{aligned}$$

ゆえに，求めるものは

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=1}^{n} N(k) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)
\end{aligned}$$

となり，トウゼンながら同じ結果を得る．

＜例 **3**＞

n を正の整数とするとき，直線 $y=nx$ と放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ とで囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる格子点の個数を求めよ．

(解) まず，題意の領域を確認したい．

$$y=nx,\quad y=\frac{1}{2}x^2$$

グラフの位置関係を調べる———これらを連立して x 座標を求めると

$$nx=\frac{1}{2}x^2 \qquad \therefore\ \ x(x-2n)=0 \qquad \therefore\ \ x=0,\ 2n$$

だから，題意の領域は次の図のようになる．

その上で，この領域内 (境界を含む) の格子点の個数を数える**考え方の基本**は

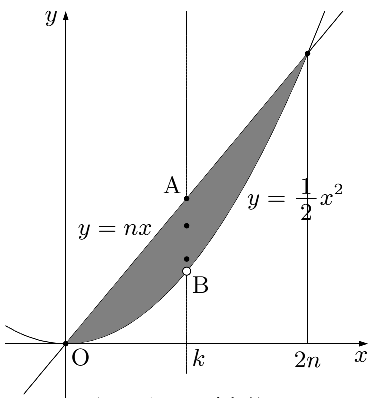
(I) 直線 $\boldsymbol{x=k}$ **上**の格子点の個数 $\boldsymbol{N(k)}$ を求める．

(II) $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=0}^{2n} N(k)}$ を計算する．

なのだが，ここに困ったことがある．

それは $\boldsymbol{k}$ **が奇数のとき**は点 B のような境界線上の y 座標は整数にならない——＜図 1＞．

そこで，次のように場合を分けて考える．



＜図 1＞ k が奇数のとき！

(i) $k=2m$ のとき：

$$N(k) = n\cdot(2m) - \frac{1}{2}\cdot(2m)^2 + 1$$

(⟵ 最後の (+1) は点 B を引きすぎた調整分！)

$$= 2nm - 2m^2 + 1 \text{ (個)}$$

(ii) $k=2m-1$ のとき：

$$\begin{aligned}N(k) &= n\cdot(2m-1) - \frac{1}{2}(2m-1)^2 + \frac{1}{2}\\ &= n(2m-1) - 2m^2 + 2m = 2(n+1)m - 2m^2 - n \text{ (個)}\end{aligned}$$

ゆえに，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{2n} N(k) = \sum_{m=0}^{n}(2nm - 2m^2 + 1) + \sum_{m=1}^{n}\{2(n+1)m - 2m^2 - n\}$$

$$\left(\longleftarrow \ 1 \text{ つの} \sum_{m=1}^{n} \text{にまとめる！} \right)$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{n}\{-4m^2 + 2(2n+1)m + 1 - n\} \longleftarrow \ m=0 \text{ のときは} \textbf{ 原点！}$$

$$= 1 - 4\sum_{m=1}^{n} m^2 + 2(2n+1)\sum_{m=1}^{n} m + n(1-n)$$

$$= 1 - 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2(2n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n - n^2$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}(2n^3 + 4n + 3)}$$

で**一件落着！**ちょっと難しいか．発想といい計算といい，充実した良い問題です．

1.1.2.2.2　部分分数分解の応用

これは公式というわけではないが，**和**を求める**方法論**として有効な例である．個々の問題の解決にとらわれず，都合よくパタパタ消えていくその根底の**精神**というか**思想**というか，そういう方法論に注目すべし――――他の場合にも適用できる．

その**基本原理**については改めて詳しく説明するとして，とりあえずは具体的な例でハナシをはじめよう．たとえば

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \longleftarrow \text{ 分母が連続 } \mathbf{2} \text{ 整数の積！}$$

などの**和**を求めるには，k の分数式を**部分分数の和に分解**するのである．

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \boldsymbol{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \longleftarrow \text{ 同じ形の } \mathbf{1} \text{ つ違い！}$$

こうしておいて $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots, n$ を入れてタスと面白いことが起こる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) \longleftarrow \text{ 以下,タテに書くと見通しがよい！} \\
&+ \ \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

という具合に斜めにパタパタ消えて，キレイな形にまとまる．

ゆえに，求める和は通分，整理して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

そして，最後の形は通分しておくべきだが，数 III の微積分で $n \to \infty$ の極限値を求めるときなどは，このままの方が都合がよい．

また，ここの例では，タマタマ分数に項の番号の $k\ (>0)$ が入っているので

$$\frac{1}{k}\text{が前，}\ \frac{1}{k+1}\text{があと！} \longleftarrow \ \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}\text{による！}$$

になっているが，本来は

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \longleftarrow \ \boldsymbol{f(k+1) - f(k)} \text{ のスタイル！}$$

のような形が自然で，実はこうありたいのです．

しかし，それにはそれなりの準備が要るので**階差数列**の解説のあと，それを用いて詳しく説明することにする．

＜メモ＞

■ 部分分数分解の定理

部分分数分解については，われわれ高校生には一般的な証明はできないがキチンとした**定理**があるのです．それは

分母が因数分解されるとき，それぞれの因数を分母とする真分数式の和に分解される．

というもので，数 III の積分などでもよく出てくるテーマなので，チョッとやっておくとしよう．

本文では

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

と簡単に変形したが，これは**目で見てワカル**，つまり右辺を通分すれば左辺になるという程度のカンジなのです．

しかし，**定理**によれば

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

になるということが約束されているわけだ——$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ **が具体的に求まれば**目的達成となる．

これが，つねに成り立つ条件を求めるわけだが，分母を払って整理をすると

$$1=A(x+1)+Bx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{1=(A+B)x+A}$$

これが**恒等式**であるから，両辺の**係数比較**をして

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\A=1\end{array}\right\}\qquad\therefore\ A=1,\ B=-1\qquad\therefore\ \boldsymbol{\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$$

で，冒頭の部分分数分解の**根拠**が保証されるわけである．

ここで 1 つ注意しておきたいことがある．それは $(**)$ で，これが x にかかわらず成り立つ恒等式だから

$x=0$ を代入 $\longrightarrow$ $A=1$

$x=-1$ を代入 $\longrightarrow$ $B=-1$

とやれば A, B の値は 1 パツで求まるが，これはよろしいか．という**ワケ**は，ここで代入した $x=0$, 1 という値は $(*)$ の分母を 0 にするのです．

結論から先に書こう．**代入してよい**．それは，ここで求めた条件は，$(**)$ がすべての x について成り立つ条件で，そういうことなら，$x=0$, 1 という 2 つの値を除いた他のどんな x に対しても成り立つのは当たり前ではないか．むしろ，分母を 0 にする値だから $(**)$ の A, B のどちらかがいきなり消えるという**おいしい**ところがあるのです．

ハナシを数列にもどします．いくつか練習をしておきたい．

＜例 1＞

次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k(k+1)(k+2)}$

(解) (1) こうなると本文の例のように暗算ではいかない——マジメに**部分分数分解**をやる．

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

分母を払って整理をすると

$$1=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)$$

これが**恒等式**だから展開して**係数比較**でもよいが，せっかく解説もしたのだからやってみよう．

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ を代入} \longrightarrow A=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \text{ を代入} \longrightarrow B=-1 \\ x=-2 \text{ を代入} \longrightarrow C=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$$

だから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

この右辺の $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ 以下に $k=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots,n$ を入れて加えればよい．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right) \longleftarrow \text{ 以下，タテに書く！} \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right) \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

さあ，よく見て**消えるもの**を探して下さい．結局，① は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}} \longleftarrow \text{ 通分して整理！} \end{aligned}$$

で，とにかくできるには**デキタ**が，これは大変だった．
しかし，もっと**ウマイ方法**があるのです．

それは $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ 以下の分数式をよく睨んで

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)} \longleftarrow \text{ 右辺を通分してみよ！}$$

と変形する．このハンパな部分分数分解は，その分母が $\boldsymbol{k(k+1)}$ と $\boldsymbol{(k+1)(k+2)}$ のように **1 つ違い**の連続整数の積になっていることに注目したわけだ．こうしておいて $k=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots,n$ を入れて加えればよい．

そうすると右辺は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)\cdot n}-\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)
\end{aligned}$$

となって，通分して整理すれば上記と同じ結果になる———なかなか面白いではないか．

さて，もう 1 つ言っておかなければならないことがある．

それは，このタイプの数列の和を求めるには，部分分数分解を利用することは上に述べた通りだが，**一般項が部分分数に分解できる数列**だからといって必ずしも**和が求まるとは限らない**ということである．たとえば

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$

などは

$$a_k=\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$

のように部分分数分解されるが $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots,n$ とおいて加えると

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

となるが，**打ち消されるものは 1 組もない**．このように，分母が 1 次式という最も簡単な部分分数に分解しても簡単にまとまらないものは，やっぱり**まとまらない**．

この意味では，先に述べた 1 次式を分母とする最も簡単な部分分数に分解する方法は最も基本的な考え方であるといってよい．

それにくらべると，後半で述べた**別解**は相当に**ズル**をしているということもできる．

(2) 大掛かりに見えるがこれは**付けたし**だと思ってもらえばよい．まあ，**基本の考え方**をマスターしたら，**あとは臨機応変**にあたってみることだ．この場合でいえば

$$\begin{aligned}
a_k&=\frac{k+3}{k(k+1)(k+2)}\quad\longleftarrow\quad k+3=(k+2)+1\\
&=\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

だから，求める和の計算は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k(k+1)(k+2)}&=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}}_{\text{本文}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}_{\text{本問 (1)}}\\
&=\frac{n}{n+1}+\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n(5n+11)}{4(n+1)(n+2)}}
\end{aligned}$$

となる．

1.1.2.3　融合的なテーマへの展開

ここまでは，**第 $\boldsymbol{n}$ 項までの和**が簡単な形で求められる**個々の数列**について言及してきた．ここからは，それらの数列に**共通して**保存される性質，あるいはそれらの数列が**融合された**ことによる様々な問題点を総合的な観点から解説する．

1.1.2.3.1　階差数列

ある数列 $\{a_n\}$ の**隣り合う項の差**を並べた数列 $\boldsymbol{\{b_n\}}$ を数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**という．

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots\cdots\cdots & a_{n-2} & & a_{n-1} & & a_n \\
 & b_1 & & b_2 & & b_3 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & b_{n-2} & & b_{n-1} &
\end{array}
$$

この関係を実際に数式で書き並べてみると

$$a_2 - a_1 = b_1$$
$$a_3 - a_2 = b_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{a_{k+1} - a_k = b_k} \ \longleftarrow \ \text{右辺 } \boldsymbol{b_k} \text{ の } k \text{ は左辺の } \boldsymbol{a_k} \text{ の } k \text{ に合っているぞ！}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

だから，これらを加えると左辺は**パタパタ消えて** $a_n - a_1$ が残る———これは**すばらしい**．

このことから，次の**重要な公式**が誘導される．

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \longleftarrow \ \text{右辺は } \boldsymbol{k=1} \text{ から } \boldsymbol{n-1} \text{ までの和！}$$

$$\therefore \quad a_n = \boldsymbol{a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \ (n \geqq 2)} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$= \boldsymbol{a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \ \ (n \geqq 2)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

このことは何を意味するか———階差数列 $\{b_n\}$ が何らかの方法で**その和**を求めることができれば，もとの数列 $\{a_n\}$ の**第 $\boldsymbol{n}$ 項**を求めることができるということである．

ただし，①② で求まる a_n は，$\boldsymbol{n \geqq 2}$，すなわち $\boldsymbol{a_2, a_3 \cdots\cdots, a_n}$ のことであり，$\boldsymbol{a_1}$ **の値は除かれている**ことに注意しなければならない．

それは ①，または② で $n=1$ とおくと $\displaystyle\sum_{k=1}^{0}$ となり，この記号の本来の意味を成さない表現が起こるからである．したがって a_1 については別途に定義しなければならないが，それが ①または② で得られた式で $n=1$ とおいたものと**一致する**ときもあるし**異なる**ときもある．その都度ウットオシイが，これもスジだからこれは仕方がない．

また，② は**この公式の逆読み**として思いもよらぬ展開となる———楽しみにしていてもらいたい．

＜メモ＞

■ 階差数列さらに

本文の例では，とりあえず階差数列の**意味**を解説しただけだが，正しく言うと本文の数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の**第 1 階差数列**という．そして，その数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ を考えることができて，これを数列 $\{a_n\}$ の**第 2 階差数列**という．

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots\cdots\cdots & a_{n-2} & & a_{n-1} & & a_n \\
& b_1 & & b_2 & & b_3 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & b_{n-2} & & b_{n-1} & \\
& & c_1 & & c_2 & & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & c_{n-2} & &
\end{array}
$$

つまり，数列 $\{c_n\}$ が**和の求まるタイプ**の数列なら，数列 $\{c_n\}$ から数列 $\{b_n\}$ を求める**基本原理**は本文に述べた数列 $\{b_n\}$ から数列 $\{a_n\}$ を求めるハナシと**同じ**である．

＜ **例 1** ＞

次の数列の第 n 項 $\{a_n\}$，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(1) $1^2,\ 3^2,\ 7^2,\ 15^2,\ 31^2,\ 63^2, \cdots\cdots\cdots\cdots$

(2) $4,\ 18,\ 48,\ 100,\ 180,\ 294,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

(解) (1) このままではわからないので，**階差**をとってみる．ただし，**平方**はあと**回し**にする．

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 3 & & 7 & & 15 & & 31 & & 63 & & \cdots \\
& 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 32 & & \cdots &
\end{array}
$$

まず，**第** 1 **階差数列** $\boldsymbol{b_n}$ が初項 2，公比 2 の**等比数列**であることがわかる．すなわち

$$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{a_n = ar^{n-1}} \text{ に当てはめた！}$$

$$\therefore \quad A_n = A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n \geqq 2) \quad \longleftarrow \quad \text{これは } A_2,\ A_3,\ \cdots\cdots\cdots, A_n \text{のこと！}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 2^{n-1} \quad \longleftarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1} \text{は初項から } \boldsymbol{n-1} \textbf{ 項まで} \text{ の和！}$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 1 \quad \boldsymbol{(n=1} \textbf{ も満たす}\boldsymbol{)} \quad \longleftarrow \quad 2^1 - 1 = 1 = a_1$$

$$\therefore \quad a_n = (A_n)^2 = (2^n-1)^2$$

$$\boldsymbol{= 4 \cdot 4^{n-1} - 4 \cdot 2^{n-1} + 1}$$

ゆえに，求める S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (4 \cdot 4^{k-1} - 4 \cdot 2^{k-1} + 1)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} - 4\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 4 \cdot \frac{4^n - 1}{4-1} - 4 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} + n$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{3}\{2^{2(n+1)} - 3 \cdot 2^{n+2} + 3n + 8\}}$$

(2) これも階差をとってみる．

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & & 18 & & 48 & & 100 & & 180 & & 294 & & \cdots \\
& 14 & & 30 & & 52 & & 80 & & 114 & & \cdots &
\end{array}
$$

第 1 階差をとってはみたが，簡単に和が求まりそうにない———**第 2 階差**をとってみるか.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & & 18 & & 48 & & 100 & & 180 & & 294 & & \cdots \\
& 14 & & 30 & & 52 & & 80 & & 114 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
& & 16 & & 22 & & 28 & & 34 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &
\end{array}
$$

どうも**これ**らしい．第 2 階差数列 $\{c_n\}$ は初項 16，公差 6 の**等差数列**のようだ.
ゆえに

$$
\begin{aligned}
c_n &= 16 + (n-1)\cdot 6 \ \longleftarrow\ \boldsymbol{a_n = a + (n-1)d} \text{ に当てはめた！} \\
&= 6n + 10
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \ \boldsymbol{(n \geqq 2)} \quad \longleftarrow \quad \text{これは } b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots\cdots, b_n \text{のこと！} \\
&= 14 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+10) \\
&= 14 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + 10(n-1) \\
&= 14 + 6\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + 10(n-1) \\
&= 3n^2 + 7n + 4 \ \ \boldsymbol{(n = 1} \textbf{ も満たす}\boldsymbol{)} \ \longleftarrow\ 3\cdot 1^2 + 7\cdot 1 + 4 = 14 = b_1
\end{aligned}
$$

やっと，a_n を求めることができる.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \boldsymbol{(n \geqq 2)} \quad \longleftarrow \quad \text{これは } a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots\cdots, a_n \text{のこと！} \\
&= 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2 + 7k + 4) \\
&= 4 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 7\sum_{k=1}^{n-1} k + 4(n-1) \\
&= 4 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 7\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + 4(n-1) \\
&= n^3 + 2n^2 + n = \boldsymbol{n(n+1)^2} \ \ \boldsymbol{(n = 1} \textbf{ も満たす}\boldsymbol{)} \ \longleftarrow\ 1\cdot(1+1)^2 = 4 = a_1
\end{aligned}
$$

やれやれ S_n だ．もう，カンベンよ.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 2k^2 + k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)}
\end{aligned}
$$

まあ，計算は大掛かりだが，**途中の経緯**も丁寧に書いたので，ぜひぜひ読み通して下さい.
　ここでよくある間違いを指摘しておくが，階差数列はもとの数列より項数が 1 つ少ないと思っている人がいる．それは誤解です.

ここまでに示した b_n，c_n などは**第 n 項 (一般項)** のことだから，項数とは関係ありません．改めて，これが第 $\boldsymbol{k}$ 項なら b_k，c_k などと書くわけで，その k に $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots, (n-1)$ を入れた $n-1$ 項をタスことを $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \boldsymbol{b_k}$ とか $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \boldsymbol{c_k}$ と表しているのです．

また，この (2) でいうと，第 2 階差数列 c_n が n の 1 次式だから，第 2 階差数列 b_n が n の 2 次式で，もとの数列 a_n が n の 3 次式だとキメ込んで

$$a_n = pn^3 + qn^2 + rn + s$$

これに条件として $a_1 = 4,\ a_2 = 18,\ a_3 = 48,\ a_4 = 100$ を入れて，4 本の連立方程式から $p,\ q,\ r,\ s$ を決めようとする人，これはそれなりの理由があってウソではないが，なるべくやめたほうがよい．まあ，もう十分でしょう．本問については，これにて**一件落着！**

■ 階差数列の逆読み

本文で解説した公式を改めて確認しておこう．それは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a_n} &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)\\ &= \boldsymbol{a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \quad (n \geqq 2)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)\end{aligned}$$

であった．この $(*)$ 印を付けた式を用いるのだ．

a_1 を移項すると

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1 \quad (n \geqq 2)$$

だが，この n を $n+1$ に置き換えると，n は $n = 1,\ 2,\ 3\ \cdots\cdots\cdots$ で成り立つから

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(a_{k+1} - a_k)}_{b_k} = a_{n+1} - a_1 \quad (n \geqq 1)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

この式は**何を意味するか**――数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求める場合，それが何か別の数列 $\{a_n\}$ の階差数列で与えられることがわかれば，いきなり $(**)$ の右辺がその求める和になっているのだ．これは**スゴイ**．といっても，どこがスゴイのかまだわかるまい．

まずは，今までに用いた実例で説明しよう．たとえば，部分分数分解のところでは

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

そのときは，この変形のあと $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ を具体的に代入して，この和を計算した．

改めて上の式を眺めてもらいたい．

この式で $\dfrac{1}{k} = -a_k$ とおくと $-\dfrac{1}{k+1} = a_{k+1}$ となるから $(***)$ は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)\\ &= \boldsymbol{a_{n+1} - a_1} \longleftarrow \textbf{ ここに使う！}\\ &= \left(-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

はアッタリマエというわけだ．まだ面白い例があるぞ．**1 つ違いの連続整数の積**を作って**その差**をとってみる——1 つ個数の少ない連続整数の積で括れるぞ．

$$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)$$
$$\therefore\quad k(k+1)=\underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}_{a_{k+1}}-\underbrace{\frac{(k-1)k(k+1)}{3}}_{a_k\text{とおく}}$$
$$=a_{k+1}-a_k$$

これはいいぞ．ワカルかね．

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k(k+1)}=a_{n+1}-a_1\ \longleftarrow\ a_1=0\text{ なのだ！}$$
$$=\boldsymbol{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(****)$$

という**公式**が導かれる．もちろんマジメに

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

とやってもトウゼン同じ結果になるし，$(****)$ が与えられれば，上記の計算を逆にたどって

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を簡単に導くこともできる．さらに

$$k(k+1)(k+2)=\underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}}_{a_{k+1}}-\underbrace{\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}}_{a_k\text{とおく}}$$

を用いると，全く同様にして

$$\sum_{k=1}^{n}\underbrace{k(k+1)(k+2)}_{\text{連続 3 整数の積}}=\frac{\overbrace{n(n+1)(n+2)(n+3)}^{\text{連続 4 整数の積}}}{4}$$

また

$$k(k+1)(k+2)(k+3)=\underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5}}_{a_{k+1}}-\underbrace{\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)}{5}}_{a_k\text{とおく}}$$

を用いると

$$\sum_{k=1}^{n}\underbrace{k(k+1)(k+2)(k+3)}_{\text{連続 4 整数の積}}=\frac{\overbrace{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}^{\text{連続 5 整数の積}}}{5}$$

も導くことができる．そして，以下**いくつでも**イケルのだ——ちょっと感動モノではないか．

1.1.2.3.2　ベキ数列とその和

ベキ (冪) という言葉の意味は**累乗**のことである．一般に**ベキ数列**というときは

$$\boldsymbol{a_n = nr^{n-1}}$$

であるような数列 $\{a_n\}$ をいい，その初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\boldsymbol{S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-2} + nr^{n-1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

だが，ワザワザこのために表題を設けているのは，これがもっと**簡単な形**に整理されて求められるところが**評価**されているらしい．

まずは，S_n を求めてみよう．次のようにやればよい——等比数列の**和の公式**の誘導を思い出してもらいたい．

① の両辺に r をかけて，右辺の次数を揃えて並べてみると

$$rS_n = \qquad r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \quad \cdots\cdots ②$$

だから，① − ② を実行すると

$$\begin{aligned}(1-r)S_n &= 1 + r + r^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + r^{n-1} - nr^n \\ &= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n \ (r \fallingdotseq 1) \quad \left(= \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{1-r}\right) \\ \therefore \quad S_n &= \boldsymbol{\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r} \ (r \fallingdotseq 1 \text{ のとき})} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

特に $\boldsymbol{r = 1}$ **のとき**は，① にもどって

$$\begin{aligned}S_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + n \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

となる．

ここで問題は，③ の形は本来は通分して答えるべきだが，数 III では**無限級数の和**を求める場面で用いる場合が多く，そこでは特に

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \ \ (\,|r| < 1\,), \qquad \lim_{n\to\infty} nr^n = 0 \ \ (\,|r| < 1\,)}$$

を使って極限値を求めるので，通分する前の ③ の形のほうがダンゼン使い勝手がよい．

まあ，問題の空気を読んで**適宜に対応**することが大切である．

<メモ>

■ ベキ数列とその和

ベキ数列の一般的なハナシは本文で述べたが，その一般項 $\boldsymbol{nr^{n-1}}$ をよくみてもらいたい．

$n = 1 + (n-1)\cdot 1 \longleftarrow$ 初項 1，公差 1 の **等差数列！**

$r^{n-1} = 1\cdot r^{n-1} \longleftarrow$ 初項 1，公比 r の **等比数列！**

であることがわかる．つまり，ベキ数列というのは，一般にはその第 n 項が**等差数列**の第 n 項と**等比数列**の第 n 項の**積**で構成されているもののことをいうのである．

一般の場合で説明しよう．等差数列と等比数列をそれぞれ

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d,\quad b_n = br^{n-1}}$$

とおくと

$$\boldsymbol{a_n \cdot b_n = \{a + (n-1)d\}\cdot br^{n-1}} \longleftarrow \text{これが本来のベキ数列の姿！}$$

$$= (a-d)br^{n-1} + dbnr^{n-1}$$

となるから，これらの初項から第 n 項間での和を求めると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (a-d)b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}}_{\text{等比数列の和}} + db \underbrace{\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}}}_{\text{ベキ数列の和}}$$

これらのことから，本文に述べたベキ数列は簡単に記述するために $a = b = d = 1$ とした，上記の数列の**特別な場合**のことであり，特に $d = 0$ のときは，タダの等比数列になって，これもその**特別な場合**であることがわかる———上記のハナシのほうが一般的なのだ．

以下，少し問題にあたっておこう．

＜例 1＞

(1) 初項 2，公差 -3 の等差数列の第 n 項を a_n，初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列の第 n 項を b_n とするとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

(2) 次の数列のはじめの n 項の和を求めよ．

(i) $1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(ii) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^5 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (ただし，$x \fallingdotseq 1$)

(解) (1) これはハナからマジメにやる．

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot(-3) \longleftarrow \boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

$$= -3n + 5$$

$$b_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \longleftarrow \boldsymbol{b_n = br^{n-1}}$$

ゆえに，2 つの数列の第 n 項どうしの積は

$$a_n b_n = (-3n+5)\cdot 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= -6n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 10\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \longleftarrow r^{n-1},\ nr^{n-1}\text{の形を意識せよ！}$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{-6k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 10\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= -6\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}_{A} + 10\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}_{B} \longleftarrow \text{定形に形を整える！}$$

A はベキ数列の和,Bは等比数列の和だがBの方が求め易いからB から行こう.

$$B=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

A は本文に述べたベキ数列の $r=\dfrac{1}{3}$ の場合だが，それを公式にして，そのまま代入するようなことではいけない———本文の結果は，あくまで**確認用**でしかないのです．ちゃんと書くべし！

$$A=1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

両辺に $\dfrac{1}{3}$ をかけると

$$\frac{1}{3}A=\qquad\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

この両辺の引き算を実行して

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}A&=\underbrace{1+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\text{等比数列の和}}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n\quad\longleftarrow\ \text{前半の等比数列の和は }\boldsymbol{B}\text{ で計算した ぞ！}\\\therefore\quad A&=\frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{3}{2}\cdot\ n\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

こうして得られた $A,\ B$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=-6\cdot\frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+6\cdot\frac{3}{2}\cdot\ n\left(\frac{1}{3}\right)^n+10\cdot\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}\end{aligned}$$

となる．まあ，まずはシコシコやることだ.

(2) (i) 見た目ではわかりにくいが，**等差数列**の部分が 1, 2, 3, $\cdots$ で，**等比数列**の公比にあたる数が -2 になっているだけで，さして難しい問題ではない———いつもの通りにやればよい.

$$S_n=1+2(-2)+3(-2)^2+\cdots\cdots\cdots+n(-2)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$
$$(-2)S_n=\qquad(-2)+2(-2)^2+\cdots\cdot+(n-1)(-2)^{n-1}+n(-2)^n\ \cdots\cdots②$$

ここで，①－② を計算すると

$$\begin{aligned}3S_n&=1+(-2)+(-2)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-2)^{n-1}-n(-2)^n\\&=\frac{1-(-2)^n}{1+2}-n(-2)^n\\&=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}-n(-2)^n\end{aligned}$$

ゆえに，求める和 S_n は

$$S_n=\boldsymbol{\frac{1-(3n+1)(-2)^n}{9}}$$

(ii) こうなると，ちょっとムードが違う．等比数列の部分は問題ないとして，等差数列であるはずのところが $\boldsymbol{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots}$ と**平方された数**になっている.

　とにかく書き並べてみよう.

$$S_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-1)^2x^{n-2}+n^2x^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

まあ，これを睨んでいるだけではハナシは始まらない———(i) に倣って x をかけて引いてみるか．

① の両辺に x をかけると

$$xS_n = \qquad 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + (n-1)^2x^{n-1} + n^2x^n \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

① − ② を計算すると，とにかくはじめの n 項は，各項の係数が連続した奇数になりそうだ．そういうことなら一般項の形を求めて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ で表せば見えてくるのではないか．すなわち

$$\begin{aligned}(1-x)S_n &= 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2n-1)x^{n-1} - n^2x^n \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1} - n^2x^n \ \longleftarrow \ \text{これなら 何とかなる！} \\ &= 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}}_{\text{ベキ数列の和}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}}_{\text{等比数列の和}} - n^2x^n \\ &= 2\left\{\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}\right\} - \frac{1-x^n}{1-x} - n^2x^n \\ &= \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{(2n-1)x^n+1}{1-x} - n^2x^n\end{aligned}$$

本来は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$ を求める経緯は答案には書くべきだが，ここではあまりにくどいので，冒頭に求めた結果をそのまま代入した———君たちはシッカリ書くべし．

ゆえに，求める和 S_n は

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^3} - \frac{(2n-1)x^n+1}{(1-x)^2} - \frac{n^2x^n}{1-x}}$$

となる———通分はサボることにする．

さて，ハナシは一段落したが，ここで面白い問題を紹介しよう．階差数列，その逆読みなどを思い出しながら読んでみて下さい．

＜ 例 **2** ＞

(1) 関数 $f(x) = 2^x(ax^2+bx+c)$ が，つねに

$$f(x+1) - f(x) = 2^x \cdot x^2$$

を満たすとき a, b, c の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k \cdot k^2$ を求めよ．　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k \cdot k$ を求めよ．

(解) (1) まず，与えられた条件の左辺を計算する．

$$\begin{aligned}f(x+1) - f(x) &= 2^{x+1}\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} - 2^x(ax^2+bx+c) \\ &= 2^x\{ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b + c\}\end{aligned}$$

これが，つねに $2^x \cdot x^2$ に等しいから

$$ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b + c = x^2 \ \longleftarrow \ \text{これが 恒等式！}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a=1}, \quad 4a+b=0, \quad 2a+2b+c=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{b=-4, \ \ c=6}$$

(2) (1) で得られた結果は

$$\boldsymbol{f(x) = 2^x(x^2-4x+6) \ \longrightarrow \ f(k+1) - f(k) = 2^kk^2}$$

つまり，階差数列が求まったのだ．そこで，その逆読みを思い出してもらいたい．

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2 = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\{f(k+1) - f(k)\}}$$
$$= \boldsymbol{f(n+1) - f(1)} \longleftarrow \text{これは，もう いきなり 書いてもよかろう！}$$
$$= 2^{n+1}\{(n+1)^2 - 4(n+1) + 6\} - 2^1(1^2 - 4 \cdot 1 + 6)$$
$$= \boldsymbol{2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6}$$

(3) これは，次数を下げて同じことのダメ押しだ．
$f(x+1) - f(x) = 2^x \cdot x$ となる条件は，全く同様にして

$$\boldsymbol{a = 0},\quad 4a + b = 1,\quad 2a + 2b + c = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{b = 1,\ \ c = -2}$$
$$\therefore \quad f(x) = 2^x(x-2)$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\{f(k+1) - f(k)\}}$$
$$= 2^{n+1}\{(n+1) - 2\} - 2^1(1-2)$$
$$= \boldsymbol{2^{n+1}(n-1) + 1}$$

となる．なかなか上手に作ってある．これにて一件落着！

1.1.2.3.3　群数列

ここでは，あえて**群数列**という言葉を用いたが，群数列という特別な数列があるわけではない．素材は今までに登場した数列であるから恐れるにはあたらない．

なぜ群数列という特別な表現をしているかというと，たとえば，ある数列 $\{a_n\}$ が与えられるとき，その数列を**ある規則**にしたがって**区切っていく**と，その数列がいくつかの**グループ** (**群**) に分けられるが，そのグループにもはじめから番号を付けておく．

そうすると，たとえばもとの数列 $\{a_n\}$ の第 100 項は何番目のグループの第何項目であるかとか，逆に第 20 群の第 15 項はもとの数列 $\{a_n\}$ の第何項目かとか，あるいはその数を具体的に求めよとか，そういう問題が生じてくるでしょう．

雑駁な説明だが，ここではそういう**数遊び**をしようというわけだ．まあ，そういうお遊びをしながら，われわれの**守備領域**として今までに出てきた数列全般の**復習をするのだ**，と思って読んでもらえばよい．

出題する方としても，数列に関する勉強の**総合的な成果**を問えるカッコウの分野でもあるのです．

＜補足説明！＞

要するに数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad a_5\quad a_6,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots, a_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

のように並んでいるとしよう．これに、次のように仕切りをつける．つまり、最初は 1 つ、次は 2 つ、その次は 3 つ、 $\cdots\cdots$ のように、以下これにしたがって数列 $\{a_n\}$ を**ある規則**にしたがう**カタマリ**に分けて番号をつけていく———このカタマリを**群** (ぐん) というのである．

たとえば

$$|\underbrace{a_1}_{G_1}|\underbrace{a_2,\quad a_3}_{G_2}|\underbrace{a_4,\quad a_5,\quad a_6}_{G_3}|\cdots\cdots\cdots|\underbrace{\cdots, a_n\cdots\cdots}_{G_p}|\cdots\cdots\cdots$$

のような按配だが、ここにつけた群の名前 $\boldsymbol{G_k}$(第 $\boldsymbol{k}$ 群) の $\boldsymbol{G}$ は、**群**、あるいは**グループ**の頭文字をとったつもりである———はじめは何にしようかと迷ったが私はこれに決めた．君たちもそのように決めておくとよい．

さて、ここでの主なテーマは、第 p 群の q 番目 の項がはじめの数列の第何項になるかとか、その逆にはじめの数列の 第 r 項 が第何群の何番目の項になるかとかいう問いかけになる．

まあ、ここは、もとの**数列の規則性**と、それを**群に分ける分け方の規則性**の**ダブル構造**を混乱するであろうことが出題者側の付け目である．それだけに、ここまで学んだことがらのよい復習になるのでそういう位置づけであたってみるのがよいだろう———ここをうまく乗り越えれば数列の前半は免許皆伝と思ってよい．

＜ end.＞

<メモ>

■ 群数列について

言葉や記号で説明してもピンと来ないと思うから，**実際の問題**にあたってその中でわかってもらうことにする．

＜例 **1**＞

分母が 2 の累乗である 1 より小さい既約分数を次のように並べて数列をつくる．

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(1) $\dfrac{25}{256}$ は第何項か．

(2) 初項から第 575 項までの総和を求めよ．

(解) (1) まず，与えられた数列を，**分母が同じもの**で区切って眺めてみる．すなわち

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{G_1}\ \Big|\ \underbrace{\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}}_{G_2}\ \Big|\ \underbrace{\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}}_{G_3}\ \Big|\ \underbrace{\frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16}}_{G_4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

だが，第 k 群 G_k は 2^{k-1} 項で構成され，その分子の第 l 項は $2l-1$ だから, 最後の項の分子は

$$2\cdot 2^{k-1}-1=2^k-1 \longleftarrow \boldsymbol{2l-1}\ \text{の}\ l\ \text{を}\ 2^{k-1}\text{とおいた！}$$

であるから，G_k をとり出して書いてみると

$$\boldsymbol{G_k=\left\{\frac{1}{2^k},\ \frac{3}{2^k},\cdots\cdots,\frac{2l-1}{2^k}\cdots\frac{2^k-1}{2^k}\right\}} \longleftarrow \boldsymbol{G_k}\textbf{がわかった！}$$

そこで，題意の分数は

$$\frac{25}{256}=\frac{2\cdot 13-1}{2^8} \longrightarrow G_8\text{の 13 項目}$$

であることがわかる．

したがって，もとの数列を $\{a_n\}$ として，この項が**第何項目か**を数えるには，**まず G_1から G_7 の終わりまでいくつか**を数え，**G_8 に入ってから**の 13 項の分を加えればよい．

ゆえに，もとめる数は

$$\sum_{k=1}^{7}2^{k-1}=\frac{2^7-1}{2-1}+13=\mathbf{140}\ \textbf{(項)}$$

である．

(2) a_{575} が第 n 群の数であるとすると

$$\underbrace{\boldsymbol{2^{n-1}-1}}_{\text{第 }\boldsymbol{n-1}\text{ 群まで}}\ \boldsymbol{<575\leqq}\ \underbrace{\boldsymbol{2^n-1}}_{\text{第 }\boldsymbol{n}\text{ 群まで}} \longleftarrow \textbf{これがポイント！}$$

$$\therefore\ \ 2^{n-1}<576\leqq 2^n \longleftarrow n\ \text{に適当な数値を代入して調べる！}$$

$$\therefore\ \ n=10$$

第 9 群の最後までの項数は $2^9-1=511$ だから a_{575} は第 10 群に入ってから

$$575-511=64\ (\text{項目})$$

であることがわかる．

求める総和は G_1から G_9 までの和に第 10 群の 64 項の和を加えればよい．

そこで，第 k 群内の分数の和を求めておくと

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}} \frac{2i-1}{2^k} = \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}(2i-1) \longleftarrow \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2} \text{ は覚えておけ！}$$
$$= \frac{1}{2^k}\left(2^{k-1}\right)^2 = 2^{k-2}$$

G_1から G_9 までの和を求めるには，これを使えばよいのだ．すなわち

$$S_{575} = \sum_{k=1}^{9} 2^{k-2} + \frac{1}{2^{10}}\sum_{i=1}^{64}(2i-1)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2^9-1}{2-1} + \frac{1}{2^{10}}\cdot(2^6)^2 = \boldsymbol{\frac{519}{2}}$$

で，**一件落着**だが， $2^6=64,\ 2^{10}=1024$ などは覚えておくと都合のよいときがある．

もう 1 つ，同じことなのだがちょっと違ったムードの問題も見ておこう．

＜例 **2**＞

自然数 1, 2, 3, $\cdots\cdots\cdots$ を図のように並べていく．

(1) 左から m 番目，上から m 番目の位置にある自然数を m で表せ．

(2) 90 は左から何番目，上から何番目の位置にあるか．また，115 ではどうか．

1	2	5	10	17	$\cdots$
4	3	6	11	18	$\cdots$
9	8	7	12	19	$\cdots$
16	15	14	13	20	$\cdots$
·	·	23	22	21	$\cdots$
·	·	·	·	·	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(解) (1) ちょっとカンジが違うから戸惑うかも知れないが，進む方向に**矢印**でも付けてみるとよい．

とにかく，まずは題意にしたがって数列を区切ってみよう．

$$\underbrace{1}_{G_1} \mid \underbrace{2,\ 3,\ 4}_{G_2} \mid \underbrace{5,\ 6\ ,\ 7,\ 8,\ 9}_{G_3} \mid \underbrace{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16}_{G_4} \mid 17,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

どうやら，G_k は $\boldsymbol{2k-1}$**(奇数) 個**の項で構成されている．そして，各群の真ん中の項が図の対角線上に並んでいることになる．まず，その辺はすぐにわかる．

その上で，題意の左から m 番目，上から m 番目の数は，G_1から G_{m-1} までの項数を数え，さらに G_m に入ってから m 項目ということだから求める数は

$$\sum_{k=1}^{m-1}(2k-1)+m = (m-1)^2+m \longleftarrow \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2} \text{ を使った！}$$
$$\boldsymbol{= m^2-m+1}$$

であることがわかる．

(2) まず第 90 項だが，これが**第何群の数か**を調べなければならない．

そこで，第 n 群の数であるとすると

$$\underbrace{1+3+5+\cdots\cdots\cdots+(2n-3)}_{\text{第 }(n-1)\text{ 群の終わりまでの項数}} < 90 \leqq \underbrace{1+3+5+\cdots\cdots\cdots+(2n-3)+(2n-1)}_{\text{第 }n\text{ 群の終わりまでの項数}}$$

$$\therefore\quad (n-1)^2 < 90 \leqq n^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

これを満たす n を探すのだが，適当な数値を入れてみるのがよい——$n=9$ では小さすぎ，$n=11$ では大きすぎて，適するものは $n=10$ しかない．すなわち．90 は**第 10 群の数**である．

そこで，第 9 群の終わりまでの項数は $(10-1)^2 = 9^2 = 81$ だから，90 は第 10 群に入って

$$90 - 81 = 9 \text{ (番目)} \leqq 10$$

の数であることがわかる．

したがって，90 はまず上から **9 番目**の数である．このことを用いて，左からは

$$\underbrace{(2 \cdot 10 - 1)}_{G_{10}\text{の項数}} - 9 = \mathbf{10} \textbf{ (番目)}$$

の数であることがわかる．

115 のときも**考え方は同様**で，① に倣って

$$(n-1)^2 < 115 \leqq n^2 \qquad \therefore \quad n = 11$$

すなわち，115 は**第 11 群の数**で，第 10 群の終わりまでの項数は $(11-1)^2 = 10^2 = 100$ だから，115 は第 11 群に入って

$$115 - 100 = 15 \text{ (番目)} \ > 11 \ \longrightarrow \ \text{上から } \mathbf{11} \textbf{ 番目！}$$

したがって左からは

$$\underbrace{(2 \cdot 11 - 1)}_{G_{11}\text{の項数}} - 15 + 1 = \mathbf{7} \textbf{ (番目)}$$

となり，**一件落着！**

それでもわかりにくければ，第 10 群，第 11 群だけをとり出して，**カギの手**に書き並べてみるとよい．本問では任意の群について，その前半と後半で事情が違うことがよくわかります．

1.2　数学的帰納法と漸化式

ここでの目的は，主に**漸化式**を理解してもらうことに尽きると言ってもよいかと思うが，その基本の考え方が**数学的帰納法**に支えられていることは，君たちにとってすでに了解済みと思ってよいだろうか．まあ，そうということなのです．

まずは，数学的帰納法の**意味**とその**使い方**，その**威力**から解説を始めることにする．

＜補足説明！＞

自ら ”数列が弱い ” という読者は、特に**漸化式** (ぜんかしき) のことを指しているのではないだろうか———筆者もそう思ったことがある．

まず、漸化式をキチンと理解するためにはその根拠となっている**数学的帰納法**をシッカリとマスターしておく必要がある．それは漸化式が、これに初項を与えることにより、数列を帰納的に記述する方法なのだから仕方がない———**数列の帰納的定義**という．

しかし、それはそれとして、**数学的帰納法**そのものがわれわれの道具として大きな意味と役割を持つこともここで強調しておきたい．特に **自然数 $\boldsymbol{n}$ に関する命題** の証明には**最後の切り札**としてきわめて有効のときもある———**背理法**とともに数学とつきあうための欠くことのできない強力な証明法であることは覚えておくとよい．

＜ **end.**＞

1.2.1 数学的帰納法

さて，問題の**数学的帰納法**だが，ここに使われている**帰納法**という言葉の意味はその反対語である**演繹法**という言葉とセットにして初めて**ワケ**がわかるようなところがあって，単独に使い方のみを解説するのはあまりにもったいない．

以下，せっかくの機会だからチョッとだけ付き合ってもらいたい．

1.2.1.1　帰納法と演繹法

帰納法も演繹法も自然科学で欠くことのできない証明の方法とされている．

まず，**帰納法**というのは，個別的，特殊的なことがらから一般的，普遍的な規則とか法則とかを見つけようとする推論の方法のことで，たとえば”物体が落下するとき，重いものが速く落ちるのがかつての常識であったが，これに対してガリレオ・ガリレイは，精密な実験から物体の落下速度はその質量に比例するものではないことを示したとか，まあ，こういう判断を**帰納的な判断**というわけである．ニュートンの万有引力の法則もそうです．よく考えるとみんなそうです．要するに**1つ1つのことがらを調べて正しい結果を結論付けること**だと思えばよい．

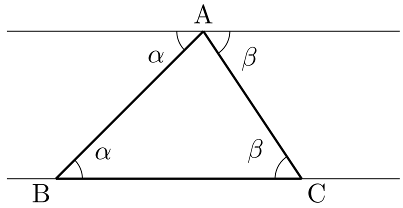
一方，**演繹法**というのは，はじめに**仮説**を立ててそれが正しければその結論が正しいと**推論**する証明の方法である．

よく使われる例でいうと

(i)　人は死ぬものである．　(大前提)

(ii)　ソクラテスは人である．(小前提)

(iii) だからソクラテスは必ず死ぬ．(結論)



という**三段論法**の例がある——この論法が、実は**数学的**なのだ．

われわれの身近の，数学に関係のある例を挙げてみよう．

　”**すべての三角形の内角の和は 180°である**”

ということを証明するのに１つ１つの三角形について調べるようなことはしない．

1 つだけ都合のよい三角形を描いて，錯角が等しい (上図！) ことから，三角形の内角の和が 180° であることを**仮説**として設定する—— そして，ある図形が三角形であることから、その内角の和が 180° であることをいうのである．

上記にしたがえば、任意の三角形について

(i)　三角形の内角の和は 180° である．　(大前提)

(ii)　これは三角形である．　(小前提)

(iii) だから、その内角の和は 180° である．(結論)

つまり、すべて三角形の内角の和は 180° だというのである．何だかサボっているかに見えるが，ちゃんと**推論**によって**すべての三角形**にツナガッテいるのである——要するに**数学**は**演繹的な学問**なのです．

1.2.1.2　数学的帰納法

将棋の駒が立てて並べてある．どのコマも倒れると次のコマに寄りかかって次も倒れるように並んでいるものとする．このとき最初の駒が倒れるとどうなるか．

文字通り将棋倒しになる．数学的帰納法を一言でいえばこういうことです．

数学的帰納法

> $P(n)$ が自然数 n に関する命題であるとき
> 　(i) $\boldsymbol{P(1)}$ **が正しい．**
> 　(ii) $\boldsymbol{P(k)}$ **が正しければ** $\boldsymbol{P(k+1)}$ **が正しい．** (ただし，k は任意の自然数)
> ということが証明されるならば，任意の自然数 n について $\boldsymbol{P(n)}$ **は正しい．**

（解説）将棋倒しの話はさておき，本当のところを，もう少し精密に検証してみよう．

自然数 n に関する命題 $P(n)$ とあるから，これを具体的に書き並べると

$$P(n):\quad \boldsymbol{P(1)},\ P(2),\ P(3),\cdots,\boldsymbol{P(k)},\ \boldsymbol{P(k+1)},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

だが，ここで主張していることは 1 つのことがらについてのハナシではない．

まず，(i) の $\boldsymbol{P(1)}$ **の成立**はいいだろう．ここではこれが**出発点**である．

次に，(ii) だが，これは $k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots$ で正しいことが保証されるのだから

$k=1$ のとき：　$P(1)\ \longrightarrow\ P(2)$ が正しい
$k=2$ のとき：　$P(2)\ \longrightarrow\ P(3)$ が正しい
$k=3$ のとき：　$P(3)\ \longrightarrow\ P(4)$ が正しい
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

と，果てしなく続く証明の**すべてを尽くしている**のである——いかにも 1 つ 1 つに言及して、つまり帰納的に説明しているかに見える．しかし、ちょっと待てよ．前ページの三段論法と比較してみてもらいたい．

大前提：人は死ぬものである　$\longleftrightarrow$　$\boldsymbol{P(k)}$ **が正しければ** $\boldsymbol{P(k+1)}$ **が正しい**
小前提：ソクラテスは人である $\longleftrightarrow$　$\boldsymbol{P(1)}$ **が正しい**
結論：　ソクラテスは死ぬ　　$\longleftrightarrow$　$\boldsymbol{P(n)}$ **は正しい**

と対応しているではないか——-ちゃんと**三段論法**になっている．

つまり，**数学的帰納法は演繹法**による証明そのものなのだ．1 つ 1 つが次々と証明される様子が，いかにも帰納法的に見えるのでいつの間にか数学的帰納法と呼ばれるようになってしまったのであろうが，その**正体**は，実は**演繹法**なのである．だからこそ，アタマに**数学的**という**冠** (**かんむり**) をかぶせているのであろう．

もう 1 つ，数学的帰納法の**意義**について触れておかなければならないことがある．それは上記の $k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots$ だが，どうもこれが怪しい．

この $k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots$ が，数の順番というか，1 つ 1 つの数に付けられた名前だと考えれば，この中に同じものはないとしてよかろう．そうすると，この証明の結果

は命題 $P(n)$ が自然数 n について，果てしなく限りなく成り立つことが保証されたことになる———ここがスゴイのだ.

つまり，人々は**有限**の世界で成り立つ議論をそのまま**無限**の世界に展開する**方法論**を獲得したということになる．いずれにしても，**整数論**や**集合論**が，**無限の概念**を包括して，こうした議論の中で生成してきたことを考えると，**将棋倒し**にも新たな感慨がわいてこないか.

(注) ペアノの公理

数学的帰納法の**起源**はここまでさかのぼるようだ．**G**. ペアノ (1858〜1932 イタリア) は，**1**，**後続**，**自然数** の 3 つを無定義概念として，次の (1)〜(5) を**自然数の公理**とした.

すなわち

(1) 1 は自然数である.
(2) 任意の自然数 x に対して，その後続 x' となる自然数 x' が 1 つある.
(3) $x' = y'$ ならば $x = y$ である.
(4) $x' = 1$ となる自然数 x は存在しない.
(5) 1 がある性質をもち，その性質をもつ自然数 x の後続 x' が，またその性質をもつとすれば，すべての自然数がその性質をもつ.

何やら難しい説明だが，**独断と偏見**を恐れずに私的な説明を加えると，ペアノ先生は，本来は個数とか量とかを表すはずの自然数が，その**属性**として持ちあわせてしまっている**序数 (順番) としての意味**の数学的な説明に困ったのではないか．その果ての公理だったのではないか.

それにしても，この切り口は**すごい！** 当たり前といえば当たり前だが，それをキチンとした言葉で記述していることに感動しませんか.

ともあれ，この (5) が**数学的帰納法の公理**とよばれ，自然数の数学的な解釈にとどまらず，数学の論証で重要な役割を担うべく，今日のカタチに整備されてきたのであろう.

ペアノ先生に**礼！**，そして，ありがたく使わせてもらいましょう.

ちなみに，高校数学で自然数というときは 1，2，3，$\cdots\cdots\cdots$ だが，一般的には 0 も入れて 0，1，2，3，$\cdots\cdots\cdots$ とするようである．われわれとしては，とりあえず高校数学に準拠して前者を採ることにします.

<メモ>

■ 数学的帰納法いろいろ

まず，**数学的帰納法は自然数 n に関する命題の証明**についてのみ**有効**であることは言うまでもないが，n に関する命題であっても，それ以外の方法で証明できる場合もあって，必ずしも帰納法なら簡単にいくとは限らない．問題を解く立場からすれば，まあ，数学的帰納法は**最後の手段**といえなくもないが，少なくとも**正しくやればできるはず**と信じて進むしかない．

一般にこの種の証明の手順は

(i) 結論を**推定**する．
(ii) それを**数学的帰納法**で証明する．

という 2 つの操作が**セット**になっていると考えるのが自然であろう．このとき，推定がすでに間違っていたりすると，目も当てられないことになってしまう．

そして，特に結論がすでに与えられているような場合は，絶対に**途中の説明**で手抜きをしてはならない――**キセル答案**になってしまうからだ．

それだけ前置きをして，いよいよ数学的帰納法の解説に入ろう．

★ まずは，**本文に述べたタイプ**だが

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\ \ \boldsymbol{P(1)}\ \text{を示す.}\\ \text{(ii)}\ \ \boldsymbol{P(k)}\ (\text{ただし}\ \boldsymbol{k \geqq 1})\ \longrightarrow\ \boldsymbol{P(k+1)}\ \text{を示す.}\end{array}\right\}\ \longrightarrow\ \boldsymbol{P(n)}\ \text{が成り立つ.}$$

これが，**圧倒的**である――まずはこのタイプを**徹底的にマスター**することだ．実際，数学的帰納法はこのタイプに始まりこのタイプに終わると言っても過言ではない，**基本中の基本**である．

ともあれ，次の問題を見てもらいたい．

＜例 1＞

数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ．ただし，n は自然数である．

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

(解) **典型的なカタチ**である．

(i) $n=1$ のときは

$$\text{左辺}=1,\quad \text{右辺}=2\ \longleftarrow\ \text{左辺は 1 つの項 しかなくてそれが 1 なのだ！}$$

で，この不等式は明らかに**成り立つ**．

(ii) 不等式が，$\boldsymbol{n=k}$ **のときに成り立つと仮定**すると――まず，ここをシッカリと書くべし．

そして，この仮定の不等式を**必ず使って証明する**ことが条件だ．

$$\boldsymbol{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，**示すべき不等式が何か**を考える――今から示す不等式だからカッコにしておこう．

$$\left(\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}}_{\text{この部分が①の左辺になっている}}+\overbrace{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{\text{①にタシたい}}<2\sqrt{k+1}\right)$$

左辺の状況を整えるべく，① の両辺に $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}}$ をタスと

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}<\underbrace{2\sqrt{k}+\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}}_{A}$$

A の部分がカッコの中の右辺 $2\sqrt{k+1}$ より小さいことをいえばよい――大小関係は**差をとれ！**

だから，ここで

$$\begin{aligned}
2\sqrt{k+1}-\left(2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)&=\frac{2(k+1)-2\sqrt{k(k+1)}-1}{\sqrt{k+1}}\\
&=\frac{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{k+1}} \longleftarrow \text{分子を有理化しよう！}\\
&=\frac{(2k+1)^2-4k(k+1)}{\{(2k+1)+2\sqrt{k(k+1)}\}\sqrt{k+1}}\\
&=\frac{1}{\{(2k+1)+2\sqrt{k(k+1)}\}\sqrt{k+1}}>0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{k+1}>2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\quad\left(>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

すなわち

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$$

が成り立ち，与えられた不等式が $\boldsymbol{n=k+1}$ **で成り立つ**ことが示された．

よって (i) (ii) より，題意の不等式は**正しい**———で，とりあえず**一件落着！**

1 つだけ注意しておくが，どのタイプもカッコのなかの k の説明は，**全体が切れ目なく** $\boldsymbol{P(1)}$ **とつながるように**とること———どこかでブチ切れてしまっては証明にならないぞ．

もう 1 つ，たとえば

$\boldsymbol{n=k}$ **のとき成り立つと仮定すると** ·········

という**決まり文句**で始まる**仮定**の条件は**必ず使う**こと———前提条件を使わないでもデキちゃった，などというのはおかしいのです．

さらにもう 1 つ，(i) の $\boldsymbol{k=1}$ **のときの説明**を忘れる人がいる．これを忘れると，将棋の駒で言えば最初の 1 枚が倒れないのだから，結局は**何も起こらない**ことになってしまう．実際の答案で 0 点になっても仕方がないほどの大失態なのです．

★ さて，次に説明する**タイプ**は

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\ \ \boldsymbol{P(1)},\ \boldsymbol{P(2)}\\ \text{(ii)}\ \boldsymbol{P(k)},\ \boldsymbol{P(k+1)}\ (\text{ただし}\ \boldsymbol{k\geqq 2})\ \longrightarrow\ \boldsymbol{P(k+2)}\end{array}\right\}\ \longrightarrow\ \boldsymbol{P(n)}$$

である．これを称して**オトトイ帰納法**と言った人がいた．これはウマイ．

確かに $P(k+2)$ が**今日 (きょう)** の出来事とすれば，$P(k+1)$ は**昨日 (きのう)**， $P(k)$ は**一昨日（おととい)** の話だから言い得て妙ではある．

まあ，教師も苦労しているのです．

＜ 例 **2** ＞

n を自然数として $x+y=X$, $xy=Y$ とおくとき，x^n+y^n は X と Y の整式として表されることを証明せよ．

(**解**) **いきなり**，こう来ると手が出しにくい．いくつかシコシコやって，手探りでその正体に迫るしかない．しかし，それではあまりに気の毒だから，先に**タネあかし**をしよう．

$x+y=X$, $xy=Y$ だから，2 次方程式の**解と係数の関係**から何か良い知恵は出ないか．

x, y は 2 次方程式

$$t^2-Xt+Y=0\qquad\therefore\quad t^2=Xt-Y$$

を満たす———代入してみよう．

$$x^2=Xx-Y\qquad\therefore\quad x^{k+2}=Xx^{k+1}-Yx^k\ \longleftarrow\ x^k\text{をカケた！}$$

$$y^2=Xy-Y\qquad\therefore\quad y^{k+2}=Xy^{k+1}-Yy^k\ \longleftarrow\ y^k\text{をカケた！}$$

この 2 式の両辺をそれぞれ加えると

$$\underbrace{x^{k+2}+y^{k+2}}_{\text{今日}}=X(\underbrace{x^{k+1}+y^{k+1}}_{\text{きのう}})-Y(\underbrace{x^k+y^k}_{\text{おととい}})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

要するに，$P(k+1)$ と $P(k)$ を仮定しておかないと $P(k+2)$ にならない———これを**オトトイ帰納法**というのです．したがって答案は $P(1)$ と $P(2)$ が成り立つところから書きはじめなければならない．では，さっそくやってみよう．

(i) $\boldsymbol{n=1,\ 2}$ のとき

$$x^1+y^1=X=X+0\cdot Y\ \longrightarrow\ \text{成立！}$$
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=X^2-2Y\ \longrightarrow\ \text{成立！}$$

(ii) $\boldsymbol{n=k,\ k+1}$ **のとき成立すると仮定すれば**———ここで上記，$(*)$ の議論となるのだ．

しかし，上記の説明には気がつくまい．大体，**このタイプの帰納法**であることに気がつくだけでも大仕事だと思う．

それでもとにかく，**帰納法のカタチ**に気がつけば，とにかく**強引**に**腕力**ででも $(*)$ を示さなければならない．やり方はいろいろあるだろうが手っ取り早く

$$\underbrace{(x+y)}_{X}(x^{k+1}+y^{k+1})=x^{k+2}+xy^{k+1}+x^{k+1}y+y^{k+2}$$
$$\begin{aligned}\therefore\quad x^{k+2}+y^{k+2}&=(x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})-xy^{k+1}-x^{k+1}y\\&=X(x^{k+1}+y^{k+1})-Y(x^k+y^k)\end{aligned}$$

などして上記の $(*)$ を誘導する．その上で，$x^{k+1}+y^{k+1}$ と x^k+y^k とが，ともに X と Y の整式であることを仮定して $x^{k+2}+y^{k+2}$ が X と Y の整式であることをいえばよい．

ともあれ，このタイプの扱いはそういうことです．

★ さらに，もっと**すごいの**がある———まあ，メッタにはない．

それは，こういうことです

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\ \ \boldsymbol{P(1)}\\ \text{(ii)}\ \boldsymbol{P(m)}\ \textbf{(ただし}\ \boldsymbol{m=1,\ 2,\cdots,k)}\ \longrightarrow\ \boldsymbol{P(k+1)}\end{array}\right\}\longrightarrow\ \boldsymbol{P(n)}$$

これを，誰が言ったか**人生帰納法**という．

確かに，$P(k+1)$ を今日の出来事とすればずっとずっと人生を振り返って，しかも生まれたところまでさかのぼって，今日はよかったなあ，という話だから何だかしみじみとしないことはない．しかし，さすがにこうなると笑ってしまうが，説明だけはしておこう．

次の問題で，人生をしみじみ振り返っみて下さい．

＜ 例 **3** ＞

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，そして任意の自然数 n に対して $a_n>0$，および

$$6\sum_{k=1}^{n}a_k^2=a_na_{n+1}(2a_{n+1}-1)$$

を満たしているものとする．

(1) a_2，a_3 の値を求めよ．

(2) 一般項 a_n の値を推測し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

(解) 見かけは難しそうだが，やって見ればそうでもない．とりあえず，見た目では**どのタイプの帰納法か**はわからない．

条件は $a_1=1,\ a_n>0$ のもとに

$$6\sum_{k=1}^{n}a_k^2=a_na_{n+1}(2a_{n+1}-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

(1) これは言われた通りに $n=1,\ 2$ を代入して確認すればよい．
　① で $\boldsymbol{n=1}$ とすると

$$6\underbrace{\sum_{k=1}^{1}a_k^2}_{a_1^2}=a_1a_2(2a_2-1)\qquad\therefore\quad 6\cdot 1^2=1\cdot a_2(2a_2-1)$$

$$\therefore\quad 2a_2^2-a_2-6=0\qquad\therefore\quad (2a_2+3)(a_2-2)=0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{a_2=2}\ (>0)$$

同様に ① で $\boldsymbol{n=2}$ とすると

$$6\sum_{k=1}^{2}a_k^2=a_2a_3(2a_3-1)\qquad\therefore\quad 6\cdot(a_1^2+a_2^2)=a_2a_3(2a_3-1)$$

$$\therefore\quad 6\cdot(1^2+2^2)=2a_3(2a_3-1)\qquad\therefore\quad 2a_3^2-a_3-15=0$$

$$\therefore\quad (2a_3+5)(a_3-3)=0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{a_3=3}\ (>0)$$

(2) (1) は (2) のためのヒントになっている———$\boldsymbol{a_n=n}$ と**推定**する．
　あとは，これを **数学的帰納法** で証明すればよい．
(i) $n=1,\ 2$ で成り立つことは，すでに (1) で示した．
(ii) **$\boldsymbol{n=m}$ ($\geqq 2$) のとき成り立つと仮定すると**———ツナガルように m を設定する．

$$\boldsymbol{a_m=m}\ \longleftarrow\ \text{混乱を避けて①の左辺の}\ \sum_{k=1}^{n}a_k^2\ \text{の}\ k\ \text{とはちがう文字}\ m\ \text{を使った！}$$

a_m と a_{m+1} とをつなぐ関係式は ① で $n=m$ とおけばよいから

$$6\sum_{k=1}^{m}a_k^2=a_ma_{m+1}(2a_{m+1}-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

だが，調べる対象の a_{m+1} は右辺にあって，これは問題ない．
　ところが，左辺は

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=6\sum_{k=1}^{m}a_k^2\\&=6\ (\underbrace{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots\cdots+a_{m-1}^2}_{\text{これらはわからない}}+\underbrace{a_m^2}_{m^2})\end{aligned}$$

つまり，昨日の正義だけを振りかざして善人ぶっても**今日の正義**の保証にはならない，それを，ずっと生まれたときまでさかのぼって示さないと認めてもらえないのだ———**人生帰納法**である．
　そこで**解答**としては

$$\boldsymbol{n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots,(m-1),\ m}\ \longleftarrow\ m=1\ \text{から書く方が気持ちがよかろう！}$$

のすべてについて成立すると仮定すれば———と，こうやるのだ．
　そうすると ② は

$$6\cdot(\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+m^2}_{\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)})=m\cdot a_{m+1}\cdot(2a_{m+1}-1)$$

これを整理すると

$$2a_{m+1}^2-a_{m+1}-(m+1)(2m+1)=0$$

$$\therefore\quad \{2a_{m+1}+(2m+1)\}\{a_{m+1}-(m+1)\}=0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{a_{m+1}=m+1}\ (>0)$$

すなわち $n=m+1$ のときも成立する．

(i), (ii) の考察から**推定は正しい**———まあ，ざっとこんな具合です．

1.2.2　漸化式の基本

数学的帰納法というのは，**自然数 n に関する命題**を証明するための**証明の方法**の 1 つであった．まず，このことを確認しておこう．その上で改めて，**数列**とは何かということである．たとえば，**奇数**を並べてできる数列は第 n 項が

$$\boldsymbol{a_n = 2n - 1} \ (\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられるから，その各項は上記の $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して**すべての項が確定**するので，これは**数列 $\{a_n\}$ の定義**そのものである．

しかし一方，隣同士の項の差をとってみると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \{\ 2(n+1) - 1\ \} - (2n-1) \\ &= 2\ (\text{一定})\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \longleftarrow \textbf{等差数列}\ \text{の語源！} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1} = a_n + 2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

つまり，a_1 が与えられれば 2 を加えて a_2 が決まる．a_2 が決まれば同様に 2 を加えて a_3 が決まる．以下，同様に繰り返して数列 $\{a_n\}$ の**すべての項が確定**する．これも**数列 $\{a_n\}$ の定義**とみることができる．このとき，② のような，隣同士の項の間の関係を記述する関係式を**漸化式** (**ぜんかしき**) といい，このような数列の定義を**数列の帰納的定義**という．すなわち，初項 a_1 と漸化式が与えられれば数列は確定する．確定はするが，① のような第 n 項 が n の関数で示される**一般項**のような直接的な表現ではない．

そこで，ここでは **第 n 項 を n で 表すことが主な仕事**となる．この作業を**漸化式を解く**などということもある．しかしそれも，何でも解けるわけではなく，われわれの解くことのできる漸化式のカタチはいくつかに限られる．

そして，そのほとんどが**等比数列**

$$\boldsymbol{a_{n+1} = ra_n \ \longrightarrow\ a_n = ar^{n-1}}$$

に帰着させて，この**カタチ**を利用する――これには**注目**すべし！

要するに，等比数列の基本ができていれば何とかなる．それは，等差数列などは**シンプル**に過ぎメンドウが起こらないのだろうし，それ以外のものは，**複雑**に過ぎて，第 n 項を一般的に求める方法論が構成しにくいのだ．ともあれ，<u>これがわれわれの**守備範囲のすべて**と思ってよい</u>．まあ，がんばって読んでみて下さい．

＜補足説明！＞

本文にも書いたように、**漸化式** と **初項 (初期条件)** が与えられると数列 $\{a_n\}$ は確定する．しかし、この数列の **一般項 (第 n 項)** を n の式で表すのはそう簡単ではない．

まあ、いくつかシンプルなものについては

(i) a_2, a_3 などを計算して a_n を推定する．
(ii) 推定が正しいことを**数学的帰納法**で証明する．

などの方法で解決する――これが基本的な姿勢ではある．しかし、それには限界がある．

そして、<u>いくつかの**典型的なタイプ**には **a_nを求める方法が開発されている** ので、ここではそのすべてを紹介する</u>――せいぜい**堪能**してください．

＜ **end.**＞

1.2.2.1　2 項間漸化式の基本形

ここで，あえて**基本形**と書いたのは**等比数列**を表す漸化式，$\boldsymbol{a_{n+1} = ra_n}$ とよく似た形をしていて，一目で**そのファミリー**であることがわかるタイプ，というほどの意味と理解してもらえばよい．具体的にそのカタチを示すと

$$\boldsymbol{a_{n+1} = ra_n + (\ \ )} \longleftarrow (\ \ ) \text{内は} n \text{の関数！}$$

のタイプの漸化式だが，これとても何でも解けるわけではなく，( ) の中は最もシンプルな例として，これが**定数**のとき，あるいは **$\boldsymbol{n}$ の 1 次式**のとき，そしてせいぜい**定数の累乗**になるときくらいしかわれわれの手には負ない．

そこで，( ) が**定数**である場合を，改めて **2 項間漸化式の基本形**と名づけて，まずはこのタイプのものをキッチリと説明する．そして，( ) の中が **$\boldsymbol{n}$ の 1 次式**，**定数の累乗**の場合は，河岸を変えて具体的な問題の中で解説する——そのとき効いてくるからこの**切り口**をよく見極めておいてもらいたい．

さて，**その基本形**だが

$$\boldsymbol{a_{n+1} = ra_n + q} \longleftarrow q \text{は定数！} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，もし $q = 0$ ならば，数列 $\{a_n\}$ はタダの等比数列で，第 n 項 a_n はすぐに求まるからハナシは簡単だ——要するに **$\boldsymbol{q}$ がジャマ**なのだ．

この $q\ (\fallingdotseq 0)$ を消してしまいたいが，どうすればよいか——<u>このジャマな q を**両辺に振り分けて**等比数列の中に吸収してしまえばよい</u> ではないか．

つまり，① を変形して

$$\boldsymbol{a_{n+1} - t = r(a_n - t)} \quad \longleftarrow \text{ 数列 } \boldsymbol{\{a_n - t\}} \text{ が等比数列 になっている！}$$

のカタチになれば**いいなあ**——<u>そのような t が求まればそうデキル</u> ということだ！

そこで，この式を整理して ① と同じ形にしてみると

$$a_{n+1} = ra_n + \underbrace{t(1-r)}_{\text{これが } q \text{ だ！}}$$

$$\therefore\ \ t(1-r) = q \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{t = \frac{q}{1-r}}\ (r \fallingdotseq 1) \longleftarrow \textbf{あった！}$$

すなわち，① は次のように変形される．

$$\boldsymbol{a_{n+1} - \frac{q}{1-r} = r\left(a_n - \frac{q}{1-r}\right)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

このことは何を意味するか．

数列 $\boldsymbol{\left\{a_n - \dfrac{q}{1-r}\right\}}$ **が初項** $\boldsymbol{a_1 - \dfrac{q}{1-r}}$，**公比** $\boldsymbol{r}$ **の等比数列**なのだ．

すなわち，第 n 項は

$$a_n - \frac{q}{1-r} = \left(a_1 - \frac{q}{1-r}\right) r^{n-1} \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{a_n = \frac{q}{1-r} + \left(a_1 - \frac{q}{1-r}\right) r^{n-1}}$$

と，まあこんなハナシなのです．

ところが，① で $\boldsymbol{a_n}$，$\boldsymbol{a_{n+1}}$ を $\boldsymbol{t}$ とおくと

$\boldsymbol{t = rt + q}$ $\longleftarrow$ **特性方程式** などともいう！$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $(*)$

$$\therefore \quad t(1-t) = q \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t = \frac{q}{1-r}}$$

と，いきなり t の値が求まってしまうのです———① が与えられたトタンに ② までの変形ができてしまう．これはなかなか**おいしいハナシ**ではあるのです．

この方法は筆者が受験生のときは，まだ普及していなかった．教師になったあとで知った説明だから特に印象的なのだが，これがこのタイプの漸化式を扱う上での**正論**なのだと思う———まず，ここまではよろしいか．

ところが最近，といってもかなり前から，**記述の方法**が**進化**して少し様子が違ってきたのです．

つまり，a_n，a_{n+1} を t でおいて作った**特性方程式**をいきなり用いて

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & ra_n & + \ q \\ -) & \boldsymbol{t} & = & \boldsymbol{rt} & + \ \boldsymbol{q} \\ \hline & \boldsymbol{a_{n+1} - t} & = & \boldsymbol{r(a_n - t)} & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{t = \frac{q}{1-r}}$$

(この値を **固有値** ともいう)

そこで，これに求めた t の値を代入して

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+1} - \frac{q}{1-r} = r\left(a_n - \frac{q}{1-r}\right)}$$

とやってしまうのだ———こういうことができるのは，上記の $\boldsymbol{t = rt + q}$ が $\boldsymbol{t = \dfrac{q}{1-r}}$ に対してのみ成り立つからなのです．

<u>こうなると，**洗練しすぎた**というか，答は簡単に出るのだが，何をやっているのかさっぱりわからない</u>———それでは困る．

やったことは ① から**特性方程式** $(*)$ を引いて $\boldsymbol{q}$ **を消した**のだが，その内容は，<u>冒頭の $\boldsymbol{q}$ **を両辺に振り分ける方法**を簡潔にまとめただけ</u> なのです．

ところが，生徒さんの方は，特性方程式を作るとき，a_n と a_{n+1} を同じ値の t でおいたことがアタマから離れないから，いよいよわからない．でも答はカンタンに出る．

しかし，そういうことでは**ダメ**で、q のところが定数ではなくて n の 1 次式 $an+b$ や累乗の形 $k \cdot \alpha^n$ だったりすると、似たようなことをしてひどい目にあったりする．

結局これは，$\boldsymbol{q}$ **を両辺に振り分ける**という**基本原理**までもどらないとちゃんとは説明できないハナシなのだ．もし，君がこの書き方で行くなら，それはそれでよいが，チャンとわけをわかった上で，<u>くれぐれもやっていることの意味をなぞって意識的に書く</u> ように心がけてもらいたい．

それにしてもこんな記述の仕方を，一体誰が思いついたのだろう．もともとが何だったかわからないくらい，オシャレに進化してしまった———**ウマイものだ**と思う．

さて，ここで昔話をします．筆者の記憶では，昔はこういうやり方をしなかった．どうやったかというと，とにかく q を消したいから，① が隣同士の項の間の関係を表していることに注目して，n を $n+1$ とおいた関係式をもう 1 本つくる．そして引き算をすると q が消えてくれる．

すなわち

$$\begin{array}{rrr} & a_{n+2}=ra_{n+1} & +q \\ -) & a_{n+1}=ra_n & \boldsymbol{+q} \\ \hline & \boldsymbol{a_{n+2}-a_{n+1}=r(a_{n+1}-a_n)} & \end{array}$$

何と数列 $\{a_n\}$ の**第 1 階差数列** $\{a_{n+1}-a_n\}$ が，初項 a_2-a_1，公比 r の等比数列になっていることを表しているではないか．そこで

$$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)r^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \boldsymbol{a_n} &\boldsymbol{= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\ (n \geqq 2)} \\ &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)r^{k-1} \\ &= a_1+\frac{(a_2-a_1)r^{n-1}}{1-r}\ (n=1\text{ も満たす})\end{aligned}$$

ここに $a_2=ra_1+q$ を入れて整理すれば，当然のことながら同じ結果になる．

何もここで別解を紹介したわけではありません．まあ，入試数学といえども時代とともに変わってきた，その**変遷の証拠**を見てもらいたかったのです．

それは，日本中の受験生と，それを取り巻く教師，業者などの血道をあげた**研究，開発**の成果ということでしょうか．

＜補足説明！＞

なにやら難しそうな数式が並んでいて、気の弱い人は気絶するのではないかと心配になってきた．そこで、ちょっとおもしろいハナシをしよう．

昔、何かの折にラジオのスイッチを入れたらタマタマ数学の講座をやっていた．そこで聞くともなしに聞いていたのだがその老教師の言によれば ”文字というものは便利のよいものだ．たとえば $a+b$ と書けば、その $a,\ b$ が 1 でも 2 でも 3 でも 5 でも、その他のどんな数の場合をも代行して表すことができる ” というのである――まあ、ここまでは賛成しよう．

その次がスゴイ．”これは**ニュートン**が発明したものだ ” ときた．当時の私は若かったから、なるほど、ニュートンという人はとんでもなく偉い人なんだとイタク**感動した**記憶がある．

今になって思うと、そんなことは**ウソ**に決まっている――ニュートン以外の人だって、数学や科学につながる当時の人たちはみんなそう思って数式を扱っていたに違いないのである．

それにしても、あの先生はずいぶん自信タップリだったなあ――あるいはすべて承知でダマしたのかも知れない．そう思うとなんだか愉快で、今となっては思わずニヤリとしてしまう．

ともあれ、あのときから私は $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ ,z$ などで表された数式をそのような目で見るようになったことは確かである．

改めて、ここの解説でも 文字を使った数式で書いてあるからよい のだ．どんな数値がきた場合でも通用する**基本原理**を一般的な形で述べることができる――数学というものはそういう言語だと思ってもらえばよい．だから、慣れるまでは辛いかもしれないが、慣れてしまえばその基本原理は君のものです――世界の 1 カケラが**ざっくりと**君のものになります．少し元気になりましたかね．

＜ end.＞

＜メモ＞

■ 漸化式を目で見る

本文で 2 項間漸化式の**基本形**として述べた

$$\boldsymbol{a_{n+1} = ra_n + q} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

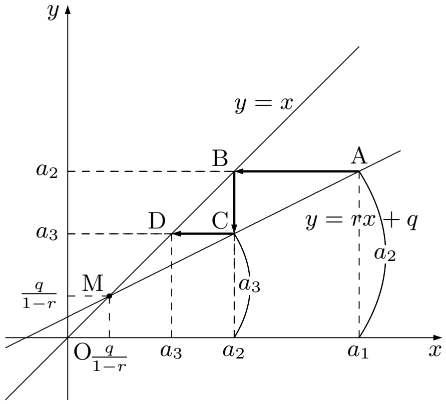
を，改めてよく**観察**してもらいたい．

これは，直線

$$l:\quad y = rx + q$$

の **x 座標に a_n を入れると y 座標に a_{n+1} が出てくる**と読めるではないか．

これを次々に**繰り返して実行する**にはどうすればよいかを工夫すればよいわけだ．以下，$n=1$ から順次やってみよう．ただし，ハナシを簡単にするために $0<r<1$ としておく．



まず，$x=a_1$ をとると，これに対する y 座標は $y=ra_1+q$ で，これが a_2 の値である．ここまでが図の点 A が決まるハナシである．まあ，ここまでは当たり前だが問題は次なのです．

次の a_3 の値を得るためには**この a_2 の値を x 軸上に**とらなければならない．そのためにはちょっとした工夫が必要なのです．さあ，どうするか．

それには，y 座標の値が a_2 である点 A を通り，x 軸に平行な直線を引いて，直線 $\boldsymbol{y=x}$ との交点を B とする．点 B ではトウゼン x 座標と y 座標の値が等しいから，B の x 座標は a_2 である．したがって図の点 C の y 座標が a_3 として得られることになる———もういいだろう．

以下，これを繰り返して作図すれば，**数列 $\{a_n\}$ の振る舞い**を**視覚的**に捉えることができる．そして，この考え方はこの先有効な場面もあるので，ぜひともマスターすべし．

さて，a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots\cdots$ はどこに行くのか．どうも図で見る限り，直線 l と直線 $y=x$ との交点 M の真下に向かって進むようである．このことは何を意味するか．

そこで M の座標を求めてみるか．これは l と $y=x$ との交点だから連立すると

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = rx + q \end{array}\right\} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{x = rx + q}$$

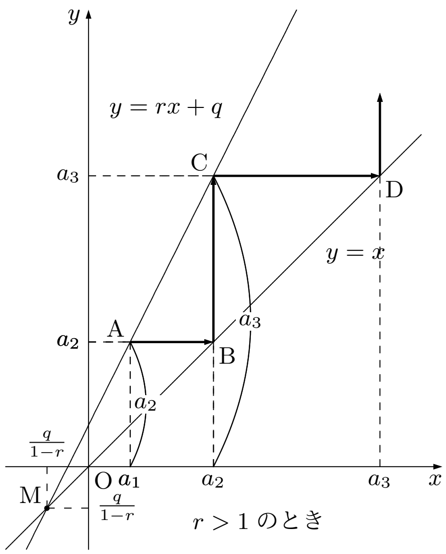
これは **特性方程式** に他ならない．

ゆえに、交点 M の座標はこれを解いて

$$x = y = \frac{q}{1-r} \quad \longleftarrow \quad \textbf{固有値！}$$

$$\therefore\quad \mathrm{M}\left(\frac{q}{1-r},\ \frac{q}{1-r}\right)$$

つまり，もし $q=0$ ならば数列 $\{a_n\}$ は等比数列で，この場合の点 M は原点に重なるであろうことは説明するまでもない———図を描いて確かめてみよ．つまり，本文に述べたこの漸化式の扱いは，普段の等比数列で原点を基準に考えることがらを，点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{q}{1-r},\ \dfrac{q}{1-r}\right)$ を基準に考えているということになる．



むしろ，この場合が一般的で，等比数列がその特別な場合と考えればよい

さて，もう 1 つ説明しておかなければならないことがある．それは，この $t=\dfrac{q}{1-r}$ という値を数列 $\{a_n\}$ が収束する**極限値と混同するな**ということ！ 確かに $0<r<1$ の場合は極限値だが，$r>1$ のときはそうは行かない———これも図をで確認すべし．

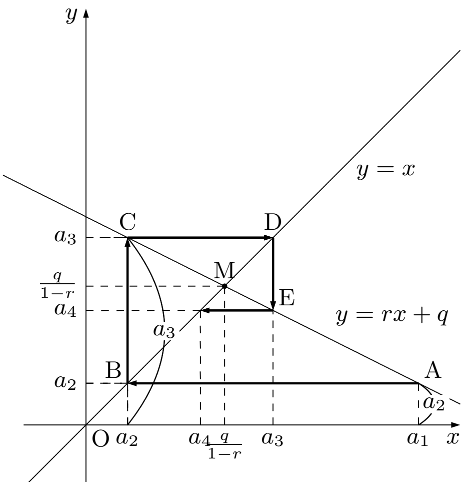
図の描き方とその意味については全く同じである．ただ、この場合は点 M $\left(\dfrac{q}{1-r},\ \dfrac{q}{1-r}\right)$ が，集まりの基準ではなくて広がりの基準になっている．

この場合，きっと n を $0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots\cdots$ にとって行けば M に向かって進むだろうが，それは数列の約束違反である．

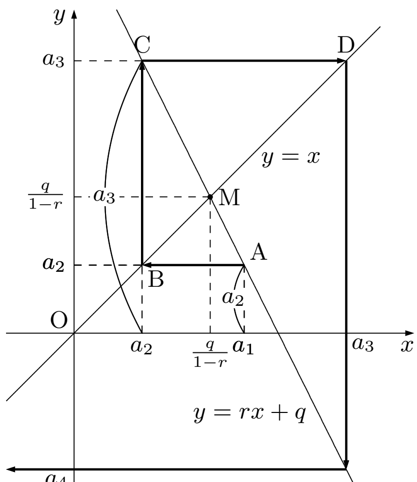
要するにこの場合は**収束しない** (**発散する**という) から $t=\dfrac{q}{1-r}$ は極限値ではない．だから，極限値という言葉は使えないので，**固有値**とか**均衡値**などという言葉を使うようである．

ともあれ，**漸化式をこの目で見た**というキブンにはなれたでしょう．とはいえ，これらは $r>0$ のときのハナシである．しからば、$r<0$ のときはどうなるか．

もう説明も要らないだろうが，勉強にもなって面白いので，図だけ描いておこう．目で追いながら**数列 $\{a_n\}$ の振る舞い**を確認しておいて下さい．



$-1<r<0$ のとき



$r<-1$ のとき

なかなか**キレイ**な図ができました．特に $r=0,\ \pm1$ のときは，別ワクで考えて下さい．

以上まとめると，数列 $\{a_n\}$ にとって点 M は，$\boldsymbol{|r|<1}$ のときは**集まりの中心**，$\boldsymbol{|r|>1}$ のときは**広がりの中心**の役割をしていることがわかります．

■ 基本形とそのファミリー

まあ，いろいろ説明はしたが，実際に具体的な問題に当たってみないことにはピンとこないだろう———以下，実例で解説する．

＜ 例 **1** ＞

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_{n+1}=2a_n+1,\quad a_1=1$

(2) $a_{n+1}=2a_n+3n-2,\quad a_1=0$

(3) $a_{n+1}=3a_n+2^n,\quad a_1=5$

(**解**) 本来，漸化式を扱う**基本的な態度**は，まず具体的に $n=1,\ 2,\ 3,$ を 1 つ 1 つ代入して第 n 項を**推定**し，それを**数学的帰納法**で**証明する**ということである———高校ではこうやったはずだし，これが科学というものの基本的な姿勢でもあるのです．

しかし，中にはそれなりの方法論が開発されているものもあり，われわれとしては，できればその**恩恵**に浴したい．ここは，それゆえの解説であることをユメユメ忘れてはならない．

(1) これは本文に述べた典型的な**基本形**そのものである———例の**オシャレなやり方**で行くか．

題意の漸化式は

$$a_{n+1}=2a_n+1,\quad a_1=1$$

であるから，a_n，a_{n+1} を t とおいて**特性方程式**をつくり，これを利用する．

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & 2a_n & +\ 1 \\ -) & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{=} & \boldsymbol{2t} & \boldsymbol{+\ 1} \quad \longrightarrow\ \boldsymbol{t=-1} \\ \hline & \boldsymbol{a_{n+1}-t} & \boldsymbol{=} & \boldsymbol{2(a_n-t)} & \end{array}$$

この t を -1 とおいて

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1) \quad \longleftarrow \quad \text{数列 } \{a_n+1\} \text{ は公比 } 2 \text{ の } \textbf{等比数列！}$$

$$\therefore\quad a_n+1=2^{n-1}\underbrace{(a_1+1)}_{2}=2^n \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a_n=2^n-1}$$

あっという間に解けてしまった．

階差数列を用いる方法については説明しなくてもよかろう———あまり効果的でもない．

(2) 今度は定数ではなくて **1 次式**が引っ付いている．

$$a_{n+1}=2a_n+\underbrace{3n-2}_{n\text{ の }1\text{ 次式}},\quad a_1=0$$

この手の問題で a_n，a_{n+1} を t とおいて出発しようとする人がいるが，何の意味もありません．論外です．まずは初心に帰れ———**1 次式を両辺に振り分ける**のだ．

つまり，与えられた漸化式を

$$\underbrace{a_{n+1}+A(n+1)+B}_{f(n+1)}=2(\underbrace{a_n+An+B}_{f(n)})$$

と変形できる定数 A，B は存在するか，ということだ———整理して係数比較をしてみる！

すなわち

$$a_{n+1}=2a_n+\underbrace{A}_{3}n+\underbrace{B-A}_{-2}$$

だから，題意の漸化式と係数を較べると

$$\left.\begin{array}{l} A=3 \\ B-A=-2 \end{array}\right\} \qquad \therefore\quad A=3,\quad B=1 \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{A,\ B}\ \textbf{が求まった！}$$

すなわち，題意の漸化式は

$$\boldsymbol{a_{n+1}+3(n+1)+1=2(a_n+3n+1)}$$

と変形され，数列 $\{a_n+3n+1\}$ は公比 2 の等比数列をなすことがわかる．

よって

$$a_n+3n+1=2^{n-1}\underbrace{(a_1+3\cdot 1+1)}_{4}=2^{n+1} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a_n=2^{n+1}-3n-1}$$

のカタチで a_n が求まる———これもそうヤッカイな話ではない．筆者としては，この問題の最も**それらしい**解答と考えている．

しかし，ここでもう 1 つ説明しておきたいことがある．それは，古式床しい**階差数列**の応用だが，それがまた説明の**し甲斐**があるのです．

方法としては，まず例によって与えられた漸化式の n を $n+1$ においた等式をつくり，引き算を実行する．

$$
\begin{array}{rrcll}
 & a_{n+2} & = & 2a_{n+1} & +\ 3(n+1)-2 \\
-) & a_{n+1} & = & 2a_n & +\ 3n-2 \\ \hline
 & \boldsymbol{a_{n+2}-a_{n+1}} & = & \boldsymbol{2(a_{n+1}-a_n)} & +\ 3
\end{array}
$$

ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+3} \longleftarrow \text{ これは 基本形 だ！}$$

だから，(1) の要領で b_n が求まる．

そうすれば，階差数列の公式を用いて機械的に

$$\boldsymbol{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k} \ \left(=\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\right)\ (n \geqq 2)$$

を計算すればよいわけだ．ただし，$n=1$ のときの確認を忘れてはならない．

もう 1 つおいしいハナシがある———これは発展的だ．それは，もしこの問題で，1 次式のところが **2 次式**になっていたらどうするかという問題です．

これも階差数列を利用する———簡単な例として n^2 などとしてみるか．全く同じ要領でやればよい．

$$
\begin{array}{rrcll}
 & a_{n+2} & = & 2a_{n+1} & +\ (n+1)^2 \\
-) & a_{n+1} & = & 2a_n & +\ n^2 \\ \hline
 & \boldsymbol{a_{n+2}-a_{n+1}} & = & \boldsymbol{2(a_{n+1}-a_n)} & +\ 2n+1
\end{array}
$$

全く同様に $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+2n+1} \longleftarrow \textbf{ 1 次式になった！}$$

だから，上記の要領で b_n が求まる．

b_n が求まれば，あとは同じに

$$\boldsymbol{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k} \ \left(=\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\right)\ (n \geqq 2)$$

を計算すればよい．ただし，$n=1$ のときもちゃんと確認のこと．

これで，理屈の上ではもう何次であろうと怖くない．この操作を 1 回やれば次数が 1 つ下がったカタチの処理になるのだ．といっても，入試で 2 次以上のものが出たのは見たことがないから，おそらく出ないだろう．しかし，可能性を広げておくことはよいことだ．

どうですか．時代モノにみえる階差数列も捨てたものではないでしょう．もう少し違う展開もあるから, 次の (3) でやってみせます.

(3) これは累乗が引っ付いている例だである．

$$a_{n+1}=3a_n+2^n,\ \ a_1=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

しかし，基本の考え方は同じです．つまり，$\boldsymbol{2^n}$ を素朴に両辺に振り分けて等比数列に帰着させるのだ．おそらく，これが最も簡単で速いと思う．さっそくやってみよう．

つまり，題意の漸化式を

$$\underbrace{a_{n+1}+A\cdot 2^{n+1}}_{f(n+1)}=3(\underbrace{a_n+A\cdot 2^n}_{f(n)})$$

と変形できるような定数 A はないか．そこでカタチを整えて ① と較べてみる．

$$a_{n+1}=3a_n+\underbrace{3\cdot 2^nA-2^{n+1}A}_{2^n}$$

$$\therefore\ \ 3\cdot 2^nA-2^{n+1}A=2^n \qquad \therefore\ \ A=1 \longleftarrow \text{ あった！}$$

すなわち ① は

$$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n) \longleftarrow \text{ 数列 } \boldsymbol{\{a_n+2^n\}} \text{ が公比 } \mathbf{3} \text{ の等比数列！}$$

$$\therefore\quad a_n+2^n=3^{n-1}\underbrace{(a_1+2^1)}_{7}=7\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a_n=7\cdot 3^{n-1}-2^n}$$

と簡単の解けてしまった．

と，**一応の解決**を見たが，もう少し突っ込んでおきたい．それは入試ではどういう立場で誘導がついてくるかわからないので，できる限り見るべきものは見ておきたいと思うのだ．

改めて ① を眺めてもらいたい．何か浮かんでこないか．どうも右辺の 2^n が気に入らない．せめてこれを定数に変えることができないか———a_{n+1} と a_n の項の番号に注目して**両辺を $\boldsymbol{2^{n+1}}$ で割る**とよい．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}&=\frac{3a_n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2} \longleftarrow \text{ 右辺の第 1 項に 細工！}\\&=\frac{3}{2}\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{\dfrac{a_n}{2^n}=b_n}$ とおくと

$$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}} \longleftarrow \text{ 基本形だ！}$$

これなら，(1) で説明したやり方で b_n が求まる．そして分母を払えば a_n が求まる．

もう 1 つやっておこう．それは，われらがクラシックスタイルの**階差数列**だが，これがなかなかツカエルのです．

それは ① の右辺の係数 3 に注目して，**両辺を $\boldsymbol{3^{n+1}}$ で割る**のだ．

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

そのまま**階差数列**の公式を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\frac{a_n}{3^n}}&\boldsymbol{=\frac{a_1}{3^1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{3^{k+1}}-\frac{a_k}{3^k}\right)\ (n\geqq 2)}\\&=\frac{5}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\&=\frac{5}{3}+\frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \longleftarrow \text{ 等比数列の初項が 1 となるように調整！}\\&=\frac{5}{3}+\frac{2}{9}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\ (n=1 \text{ のときも満たす})\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=7\cdot 3^{n-1}-2^n}$$

となり決着する．これもなかなか味わい深いものがあると思うのだがいかが．

まあ，基本形の**ファミリー**といってもこんなものです．このあたりで**一件落着**とします．

さて，もう 1 題やっておこう．これは，S_n から a_n を求めて漸化式を構成する例だが，この用例はかなり多く，1 度はやっておきたい問題の 1 つではある．

＜例 2＞

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき

$$a_{n+1}=S_n+n^2-n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots),\ a_1=1$$

である．

(1) a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) この数列の一般項を求めよ．

(解) まあ，よく睨んでみよう．

$$a_{n+1} = S_n + n^2 - n + 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

われわれとしては，この式から漸化式として $\boldsymbol{a_n}$，$\boldsymbol{a_{n+1}}$ **の関係式**を誘導したい．

ここでは，前に述べた

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} \ (n \geqq 2 \text{ のとき}) \\ S_1 \ \ (n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}}$$

が効いてくる———① で n を $n-1$ とおいて引けばよい．

$$\begin{array}{lrcll} & a_{n+1} & = & S_n & + \ n^2 - n + 1 \\ -) & a_n & = & S_{n-1} & + \ (n-1)^2 - (n-1) + 1 \\ \hline & a_{n+1} - a_n & = & \underbrace{(\boldsymbol{S_n - S_{n-1}})}_{a_n} & + \ 2n - 2 \ \ (n \geqq 2) \end{array}$$

整理すると

$$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n - 2 \ \ (n \geqq 2)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

しかし，これは $a_3 = 2a_2 + 3$, $a_4 = 2a_3 + 5$, $\cdots\cdots\cdots$ の関係を与える関係式で，$\boldsymbol{a_2}$ **と** $\boldsymbol{a_1}$ **はまだ関係付けられていない**———そこをつなげなければならないのだ．

$$a_2 = \underbrace{S_1}_{a_1} + 1^2 - 1 + 1 \qquad \therefore \ \ a_2 = \underbrace{a_1}_{1} + 1 = 2$$

ここで，② の右辺で $n = 1$ とおくと

$$2\underbrace{a_1}_{1} + 2 \cdot 1 - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$$

となって $\boldsymbol{a_2 = 2a_1 + 2 \cdot 1 - 1}$，すなわち ② は $\boldsymbol{n = 1}$ **のときも成り立つ．**

よって，$\boldsymbol{a_{n+1}}$ **と** $\boldsymbol{a_n}$ **の関係式は**

$$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n - 2 \ (n \geqq 1)} \longleftarrow \text{ やっとハナシがつながった！}$$

(2) さて，この漸化式を解くのだが，その方法は<例 **1** > (2) で詳しく説明したのでここでは省略する———君たちはやるべし．

かくして漸化式は

$$a_{n+1} + 2(n+1) = 2(a_n + 2n)$$

と変形され，数列 $\{a_n + 2n\}$ が公比 2 の等比数列であることから

$$a_n + 2n = 2^{n-1}(a_1 + 2 \cdot 1) = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \ \ \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2n}$$

まあ，これで**一件落着**だが，漸化式そのものの扱いもさることながら，**スミズミ**までよくわかってキチンと説明しないとハナシがつながらないことがわかる———用心！用心！

1.2.2.2　3 項間漸化式の基本形

3 項間漸化式の基本形は

$$\boldsymbol{a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のカタチをした漸化式で，a_1と a_2 を与えると a_3 が決まり，その a_3 と a_2 で a_4 が決まるという具合に次々と数列 $\{a_n\}$ の各項が決まり，結局，**数学的帰納法**の**オトトイ帰納法**によって数列 $\{a_n\}$ が確定するその根拠を与える式である．

ここでも，与えられた漸化式と a_1と a_2 から数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を直接n の式で表すことが目的となる．

ところで，身近なところで 3 項間の等式というと**階差数列が等比数列**になる場合があった．これなら階差数列の**公式**にしたがって，古式床しく第 n 項が求められた．

すなわち

$$\boldsymbol{a_{n+2} - a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - a_n)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\longrightarrow\ a_{n+1} - a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - a_1)$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{k-1}(a_2 - a_1)$$

とやれるということはわかっている――まず，① を ② のカタチに変形できないか．

そういうことなら ② を ① の形に変形して

$$a_{n+2} = (\alpha + 1)a_{n+1} - \alpha a_n$$

これを ① と較べて

$$\begin{cases} p = \alpha + 1 \\ q = -\alpha \end{cases} \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{p + q = 1} \ \longleftarrow\ \ \alpha\text{を消去！}$$

すなわち，① を階差数列を利用して解決できる条件として，① の係数 p，q の間に $\boldsymbol{p + q = 1}$ という関係がなくてはならない．

余談ではあるが昔の問題は，受験生が何とかがんばって，階差数列が等比数列であることを見抜いて解答できるように，たとえば

$$a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n,\ \ \text{とか}\ \ a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$$

のように，条件として $\boldsymbol{p + q = 1}$ を満たす作りになっていたものである．

ところが，昨今ではそういう**仁義**も**思いやり**も廃れ果てて，無神経な**野暮**な出題になってしまった，といったら筆者の言い過ぎか．

そういうことなら，こちらも**そういう手**でのぞまなければなるまい．

そこで，いま $\boldsymbol{p + q \fallingdotseq 1}$ であるとする．

改めて ② を見てもらいたい．キッチリと数列 $\{a_n\}$ の第 1 階差数列が公比 α の等比数列になっている――少しカタチを崩すのだ．

つまり，②に もう 1 文字 $\boldsymbol{\beta}$ を導入して，変則的に

$$\underbrace{\boldsymbol{a_{n+2} - \beta a_{n+1}}}_{f(n+1)} = \boldsymbol{\alpha}(\underbrace{\boldsymbol{a_{n+1} - \beta a_n}}_{f(n)}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

としてみてはどうか．そうすると ① は ③ で，β を $\beta = 1$ とした特別な場合であることがわかる———③ は，この β を $\beta = 1$ に固定せず，開放して**可能性を広げた**ものである．その上で，$p,\ q$ との関係を調べるために ③ を整理すると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

と変形されるから，① と較べて

$$\begin{cases} p = \alpha + \beta \\ q = -\alpha\beta \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha\beta = -q \end{cases} \qquad \longleftarrow \ \textbf{解と係数の関係}\ \text{がツカエルぞ！}$$

すなわち，$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式

$$t^2 - pt - q = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t^2 = pt + q} \ \longleftarrow \ \text{これを}\ \textbf{特性方程式}\ \text{などという！}$$

の 2 実解であることがわかる———この $\alpha,\ \beta$ を**固有値**などというときもある．

しかも，有難いことにこの**特性方程式**は，① で $\boldsymbol{a_{n+2},\ a_{n+1},\ a_n}$ を全く**機械的に**，それぞれ $\boldsymbol{t^2,\ t,\ 1}$ と置き換えたものになっている———まずは，ここまでの経緯をシッカリとわかってもらいたい．．

そういうわけだから，いきなり ① から**特性方程式**を作り，解いて固有値 $\alpha,\ \beta$ を求めれば，あっと言う間に ③ ができてしまう．さらに有難いことに ③ で αとβ を入れ替えても ④ になるから，結局 ① は **2 通りの変形**ができる———これが有難い．

すなわち

$$\underbrace{a_{n+2} - \beta a_{n+1}}_{f(n+1)} = \alpha(\underbrace{a_{n+1} - \beta a_n}_{f(n)})$$

$$\underbrace{a_{n+2} - \alpha a_{n+1}}_{g(n+1)} = \beta(\underbrace{a_{n+1} - \alpha a_n}_{g(n)})$$

これは，数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\},\ \{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ が，それぞれ公比が $\alpha,\ \beta$ の等比数列であることを表している．そこで，これらの第 n 項を求めると

$$\begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \\ a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

だから，引き算をすると a_{n+1} が消えて

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)$$

ここで $\alpha = \beta$ のときはマズイから，それはあとで説明するとして，とりあえず $\alpha \risingdotseq \beta$ としておくと第 n 項 a_n が求まる．すなわち

$$\boldsymbol{a_n = \frac{\beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)}{\beta - \alpha}} \quad \longleftarrow \ \textbf{解けた！}$$

である．なお，これは途中の ⑤ で 2 本の式を使ったので，いかにもキレイに行ったが，どちらか 1 本だけでも解くことができる．

たとえば

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1) \longrightarrow \boldsymbol{a_{n+1}=\alpha a_n+\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)}$$

と変形すれば，これは **2 項間漸化式の基本形のファミリー**だからすでに解説した形である．さらっておくとよい．

さて，$\alpha=\beta$ のときはどうするか．このとき，⑤ の 2 本の式は同じになってしまうから，実は 1 本である——1 本でやるなら，上記の **2 項間のファミリー**だ．

⑤ は 2 本とも

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

だから，両辺を α^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha^2}\quad(=\text{一定})$$

すなわち，数列 $\{\frac{a_n}{\alpha^n}\}$ は**等差数列**になってしまった．

したがって

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_1}{\alpha^1}+(n-1)\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha^2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\alpha^n\left\{\frac{a_1}{\alpha^1}+(n-1)\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha^2}\right\}} \longleftarrow \textbf{解けた！}$$

ここまでやればもういいだろう．あとは整理の計算をするだけだ．

まあ，いろいろ書いたがこんなものです．

ちなみに，3 項間漸化式が**階差数列の公式**を利用して解けるのは，**特性方程式**が，その解として**固有値 1** をもつ場合のことであることも改めて**ダメ押し**をしておきます．

<メモ>

■ **3 項間漸化式の基本形**

まあ，問題をやってみないことにはキブンがでない．まずは最も基本的な問題から始めよう．

＜例 1＞

数列 $\{a_n\}$ が次の関係を満たすとき，第 n 項 a_n を求めよ．

(1) $a_1=1,\ a_2=4,\ \ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(2) $a_1=1,\ a_2=3,\ \ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

(解) いずれも典型的な 3 項間の漸化式である．

(1) 変形してみると

$$a_{n+2}=\underbrace{5}_{p}\,a_{n+1}\underbrace{-6}_{q}\,a_n \ \longrightarrow\ p+q=5+(-6)=-1\fallingdotseq 1$$

だから，与えられた漸化式を，数列 $\{a_n\}$ の**第 1 階差数列**が**等比数列**になる形に帰着させる望みは断たれた——これは一応確認してから先に進もう．

仕方がないから，a_{n+2}，a_{n+1}，a_n をそれぞれ t^2，t，1 とおいて**特性方程式**を作ると

$$t^2-5t+6=0 \quad \therefore\ (t-2)(t-3)=0 \quad \therefore\ t=2,\ 3$$

ゆえに，与えられた漸化式は次の 2 通りに変形される．

すなわち

$$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) \end{cases}$$

そうすると，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$，$\{a_{n+1}-3a_n\}$ は，それぞれ初項が $a_2-2a_1=2$ で公比が 3，初項が $a_2-3a_1=1$ で 公比が 2 の等比数列だから

$$\begin{cases} a_{n+1}-2a_n=3^{n-1}(a_2-2a_1)=2\cdot 3^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}(a_2-3a_1)=2^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② を計算して

$$\boldsymbol{a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}}$$

と，やり方さえ覚えればそう面倒なハナシではない．また，①または② の一方のみが与えられた場合の扱い方についてはすでに述べたから，ここでは説明しない．

場合によっては漸化式がイジ悪く，たとえば

$$x_{n+1}x_n-5x_{n+2}x_n+6x_{n+2}x_{n+1}=0$$

のように，いかにも難しそうに出されてもダマされてはならない．

両辺を $x_nx_{n+1}x_{n+2}$ で割れば

$$\frac{1}{x_{n+2}}-5\frac{1}{x_{n+1}}+6\frac{1}{x_n}=0$$

だから，$\dfrac{1}{x_n}=a_n$ とおけば上記の漸化式で解決する．要は知恵比べだ——恐れることはない．

(2) これも (1) と同じ理由で階差数列の公式は利用できない．

そこで**特性方程式**だが

$$t^2-4t+4=0 \quad \therefore\ (t-2)^2=0 \quad \therefore\ t=2\ (\text{重解！})$$

こうなると (1) とはちょっとムードが違う．

2 本でてくるはずの等式が **1 本しかでてこない**———仕方がないから **1 本でやる**.

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$
$$\therefore\quad a_{n+1}-2a_n=2^{n-1}(a_2-2a_1)=2^{n-1}\ \longleftarrow\ a_2-2a_1=1$$

そこで左辺の第 1 項の $\boldsymbol{n+1}$ と第 2 項の $\boldsymbol{2}$ に注目して $\boldsymbol{2^{n+1}}$ で両辺を割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{4}\ (\text{一定！})$$

すなわち，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a^1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{4}$ の等差数列である．

ゆえに

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{n+1}{4}\qquad\therefore\quad a_n=\boldsymbol{(n+1)\cdot 2^{n-2}}$$

ともあれ，**3 項間漸化式**はこのように解く———まずは**一件落着**とする．

さて，このタイプの漸化式の**解き方**はわかってもらったとして，問題はその**手前のハナシ**である．つまり，日常会話のレベルのハナシをどうすればこの漸化式に載せられるか———きっとここのところが難しいのだ．

それは**センス**というか**洞察力**，まあもっと砕いていえば**生活の知恵**のようなもので，ここのところをどうやって乗り越えればよいか．

まずは，落ち着いて次の問題を見てもらいたい．

＜例 2＞

同じ大きさの正方形のタイルが白と黒の 2 種類が用意されている．これらを用いて n 枚のタイルを横 1 列に並べるとき，起こり得る場合の数を a_n とする．

ただし，左端のタイルは白で，かつ黒のタイル同士は隣り合わないこととする．

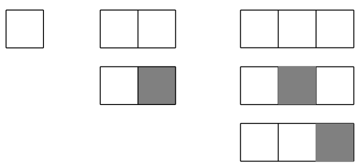
(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1}，a_n で表せ．

(3) a_n を n の式で表せ．

(解) (1) まあ，**最右端のタイルの色**に注意して描き並べてみるとよい．

$a_1=1$　$a_2=2$　$a_3=3$



だが，これをヒントにして (2) を考える．

(2) これは (1) を一般化するハナシだが，考える**ポイント**は最右端のタイルの色だ———このタイルの色は**白か黒**で，それ以外の場合はない．以下，白いタイルを $\boxed{\mathrm{W}}$，黒いタイルを $\boxed{\mathrm{B}}$ として，a_{n+2} を調べるために $n+2$ 枚のタイルを並べてみる．

そうすると a_{n+2} は，最右端のタイルが**白ならば**そのすぐ左のタイルの色は白でも黒でもよいから，これを含む $n+1$ 枚で a_{n+1} 通り，もし**黒ならば**そのすぐ左のタイルに黒はこないから白に確定し，その左は白でも黒でもよいから，これを含むが n 枚で a_n 通りとなる．つまり

$$\text{(i)}\quad \underbrace{\boxed{\mathrm{W}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{a_{n+1}}\boxed{\mathrm{W}}\ \longleftarrow\ \text{右端を除いた } n+1 \text{ 枚で } a_{n+1}\text{通り！}$$

$$\text{(ii)}\quad \underbrace{\boxed{\mathrm{W}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\boxed{\mathrm{W}}}_{a_n}\boxed{\mathrm{B}}\ \longleftarrow\ \text{右から 2 枚を除いた } n \text{ 枚で } a_n\text{通り！}$$

で，これですべてが尽くされるから，求める関係式は

$$\boldsymbol{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n} \cdots\cdots ①$$

(3) **特性方程式**は a_{n+2}, a_{n+1}, a_n をそれぞれ t^2, t, 1 とおいて

$$t^2 = t + 1 \quad \therefore \quad t^2 - t - 1 = 0 \quad \therefore \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\longrightarrow \text{以下，} \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \alpha, \ \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \beta \text{とおく！}$$

この α, β を用いて (1) の漸化式を変形する．

数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$, $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ が，それぞれ公比 β, α の等比数列であるから

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \longrightarrow a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \longrightarrow a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) \end{cases}$$

両辺引いて a_{n+1} を消去すると

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{\beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)}{\beta - \alpha} \cdots\cdots ②$$

ここで

$$\begin{aligned} a_2 - \alpha a_1 &= 2 - \alpha \\ &= 1 + \beta \longleftarrow \alpha + \beta = 1 \\ &= \beta^2 \\ a_2 - \beta a_1 &= 2 - \beta \\ &= 1 + \alpha \longleftarrow \alpha + \beta = 1 \\ &= \alpha^2 \end{aligned}$$

これらを ② に入れると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta^{n-1} \cdot \beta^2 - \alpha^{n-1} \cdot \alpha^2}{\beta - \alpha} \\ &= \boldsymbol{\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}} \quad \longleftarrow \text{ただし，} \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{である！} \end{aligned}$$

まずは**一件落着**としよう．

しかし，この ① の漸化式で定まる数列は，実は**フィボナッチの数列**といって昔から有名な数列なのです．ちょっとだけ説明しておきましょう．

フィボナッチ (=Leonardo da Pisa) (1180〜1250 イタリア) という人はアラビア記数法をヨーロッパに導入した人らしい．また分数を現在のような形に表した人とも言われている．

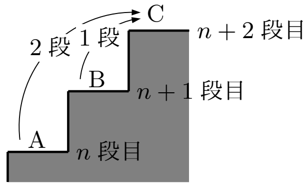
一般に，フィボナッチの数列は次のように与えられる．

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \ a_1 = 1$$

これは，階段を上る上り方を 1 段または 2 段で上るとするとき，n 段にいたる上り方の個数 a_n の漸化式といわれている———どうもこれが出発点らしい．

さて，これを解くのだが，はじめから書くのはあまりにクドイから，数列 $\{a_n\}$ が a_0 から始まるとして ② を流用すると

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{\beta^n(a_1-\alpha a_0)-\alpha^n(a_1-\beta a_0)}{\beta-\alpha} \quad \longleftarrow \quad a_0=0,\ a_1=1\\
&= \frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}
\end{aligned}
$$



A から C と，B から C

ここまで砕いてみると，本問はこの数列の a_2 以降のハナシであることがわかる．

この辺でやめておこうと思ったが，せっかくの素材だからもう 1 つがんばってみるか———問題を作るほうのキブンを覗いておくのも勉強だ．

それは、ある入試問題で

$$
f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}
$$

が整数であることを証明させる問題があった———オニのようなこの形を見る限り大騒ぎだ．n に関する命題だから**数学的帰納法**で行くとしても，このままでは何とも見苦しい．

そこで**漸化式を作る**ことを考える．

$$
\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\alpha,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}=\beta \ \longrightarrow\ \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1
$$

だから**解と係数の関係**から**特性方程式**は

$$
t^2-t-1=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{t^2=t+1}
$$

$\alpha,\ \beta$ はこの解だから代入して

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\alpha^2=\alpha+1} \ \longrightarrow\ \alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n \cdots\cdots\cdots\cdots (*)\\
\boldsymbol{\beta^2=\beta+1} \ \longrightarrow\ \beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n \cdots\cdots\cdots\cdots (**)
\end{cases}
$$

両辺の引き算から

$$
\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}+\beta^n-\alpha^n
$$

両辺を $\sqrt{5}\ (=\beta-\alpha)$ で割ると

$$
\frac{\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}}{\sqrt{5}}=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}+\frac{\beta^n-\alpha^n}{\sqrt{5}} \ \longrightarrow\ \boldsymbol{f(n+2)=f(n+1)+f(n)}
$$

こうなれば**オトトイ帰納法**が使えるではないか．すなわち

(i) $n=0,\ 1$ のとき

$$
f(0)=\frac{\beta^0-\alpha^0}{\sqrt{5}}=0
$$

$$
f(1)=\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{5}}=1
$$

これは整数だから，明らかに条件は成り立つ．

(ii) $n=k,\ k+1\ (k \geqq 0)$ のとき成り立つと仮定すると

$$
f(k+2)=\underbrace{f(k+1)}_{\text{整数}}+\underbrace{f(k)}_{\text{整数}} \ \longrightarrow\ \boldsymbol{f(k+2)} \text{ は整数！}
$$

ゆえに，条件は $n=k+2$ のときにも成り立ち，$f(n)$ は整数である．ともかくも証明はできた．

また，$(**)\times B-(*)\times A$ を作ると

$$
\underbrace{B\beta^{n+2}-A\alpha^{n+2}}_{g(n+2)}=\underbrace{B\beta^{n+1}-A\alpha^{n+1}}_{g(n+1)}+\underbrace{B\beta^n-A\alpha^n}_{g(n)}
$$

このことは何を意味するか．

つまり，$\boldsymbol{g(n) = B\beta^n - A\alpha^n}$ で表される数列 $\{g(n)\}$ は，すべて漸化式

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \longleftarrow \quad g(n) = x_n \text{とおいた！}$$

で表される，ということである．

しからば，係数 $A,\ B$ はどのようにして決まるのか．この場合，$x_0 = 0,\ x_1 = 1$ であったからこれらを代入すると

$$\begin{cases} x_0 = B\beta^0 - A\alpha^0 = 0 & \therefore \quad A = B \\ x_1 = B\beta^1 - A\alpha^1 = 1 & \therefore \quad B\beta - A\alpha = 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad A = B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

と確定する———結局，そういうことなのだ．これは知っておいてもよいハナシだ．

さて，漸化式といえば**確率**を素材にしたものも見ておきたい．その基本の考え方は**乗法定理**と**加法定理**だが，ここでは深くは立ち入らない———この機会にさらっておくべし．

まあ，ダマッテ次の問題を見てもらおう．

＜例 3＞

袋の中に a 個の球が入っている．いま，サイコロを振って 1 の目が出れば袋から球を 1 個とり出し，他の目が出れば袋の中に球を 1 個入れる．袋の球がなくなるか，または N 個になるまでこの操作を続けるものとする．袋の中に最初 a 個の球が入っているとき，ついに袋の中の球がなくなってしまう確率を P_a で表す． ただし， $P_N = 0,\ P_0 = 1$ とする．

(1) $1 \leqq a \leqq N-1$ に対して，$P_a = \dfrac{1}{6}P_{a-1} + \dfrac{5}{6}P_{a+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) のとき，P_a を N と a で表せ．

(解) (1) まず，袋の中に a 個の球が入っている状態でサイコロを振ると

(i) 確率 $\dfrac{1}{6}$ で $a-1$ 個になり，以下球がなくなる確率は P_{a-1} である

(ii) 確率 $\dfrac{5}{6}$ で $a+1$ 個になり，以下球がなくなる確率は P_{a+1} である

で，これらは**背反**だから，P_a をこれらで尽くせばよい．すなわち

$$\begin{aligned} P_a &= \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{1 つ取り出す}} \times \underbrace{P_{a-1}}_{\text{なくなる確率}} + \underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{1 つ入れる}} \times \underbrace{P_{a+1}}_{\text{なくなる確率}} \quad \longleftarrow \text{乗法定理と加法定理！} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}P_{a-1} + \frac{5}{6}P_{a+1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

(2) **特性方程式**は $P_{a+1},\ P_a,\ P_{a-1}$ を $t^2,\ t,\ 1$ とおいて

$$t = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}t^2 \qquad \therefore \quad 5t^2 - 6t + 1 = 0 \qquad \therefore \quad (5t-1)(t-1) = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{5},\ 1$$

したがって漸化式 ① は次の 2 通りに変形される．

すなわち

$$\begin{cases} P_{a+1} - \dfrac{1}{5}P_a = 1 \cdot \left(P_a - \dfrac{1}{5}P_{a-1}\right) \\ P_{a+1} - P_a = \dfrac{1}{5} \cdot (P_a - P_{a-1}) \end{cases}$$

であるから，数列 $\left\{P_{a+1} - \dfrac{1}{5}P_a\right\}, \{P_{a+1} - P_a\}$ は，それぞれ公比 $1,\ \dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$\begin{cases} P_{a+1} - \dfrac{1}{5}P_a = 1^a \cdot \left(P_1 - \dfrac{1}{5}P_0\right) = P_1 - \dfrac{1}{5} \\ P_{a+1} - P_a = \left(\dfrac{1}{5}\right)^a \cdot (P_1 - P_0) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^a (P_1 - 1) \end{cases}$$

両辺の引き算を実行して P_{a+1} を消去すると

$$\frac{4}{5}P_a = \underbrace{P_1 - \frac{1}{5}}_{P_1-1+\frac{4}{5}\text{と変形！}} - \left(\frac{1}{5}\right)^a (P_1 - 1)$$

$$= P_1 - 1 + \frac{4}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^a (P_1 - 1) = \left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^a\right\}(P_1 - 1) + \frac{4}{5} \cdots\cdots ②$$

だが，ここで $a = N$ とおくと

$$\frac{4}{5}P_N = \left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^N\right\}(P_1 - 1) + \frac{4}{5} = 0 \qquad \therefore\ P_1 - 1 = -\frac{\frac{4}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^N}$$

これを ② に代入すると

$$\frac{4}{5}P_a = -\left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^a\right\} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^N} + \frac{4}{5}$$

ウマイ具合に両辺の $\dfrac{4}{5}$ が約分できる．その上で整理すると

$$P_a = -\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^a}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^N} + 1 = \boldsymbol{\frac{5^{N-a} - 1}{5^N - 1}}$$

計算にちょっと工夫がいるが，まあデキタ.

本来は P_0，P_1 が与えられるはずのところ，本問では P_0，P_N が与えられている——$P_N = 0$ の条件を与えて P_1 を求める構造だ．これも**アリ**なのだ．知っておいてもよいことではある．

ともかくメデタク**一件落着**としよう.

1.2.2.3　連立漸化式

とりあえず，ハナシの筋道をつけるために簡単な例から入ろう．たとえば，数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が，次の 2 式で与えられているとする．

すなわち

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

ただし, 初期条件として　$x_1 = 4,\ y_1 = 1$ としておく．

さて，この**連立漸化式**から第 n 項 x_n，y_n を求めるにはどうするか——それには ① ± ② を作ってみるとよい．

$$\begin{cases} ① + ②: \quad x_{n+1} + y_{n+1} = 4 \cdot (x_n + y_n) \\ ① - ②: \quad x_{n+1} - y_{n+1} = 2 \cdot (x_n - y_n) \end{cases}$$

このことは何を意味するか——数列 $\{x_n + y_n\}$，$\{x_n - y_n\}$ はそれぞれ公比 4，2 の**等比数列**ではないか．

したがって

$$\begin{cases} x_n + y_n = 4^{n-1}(x_1 + y_1) = 5 \cdot 4^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ x_n - y_n = 2^{n-1}(x_1 - y_1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

ここで ③ ± ④ を計算すると

$$\begin{cases} ③ + ④: \quad 2x_n = 5 \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} \qquad \therefore \ \boldsymbol{x_n = \dfrac{5 \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}}{2}} \\ ③ - ④: \quad 2y_n = 5 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} \qquad \therefore \ \boldsymbol{y_n = \dfrac{5 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}}{2}} \end{cases}$$

となり，ともあれ x_n，y_n が求められる．

しかし，一般の場合はこうウマクはいかない——これを上記と類似の扱いにするにはちょっとした**工夫**が必要になる．それらについて詳細に説明するのだが，混乱を避けるために河岸を変えたい．とりあえず，ここでは**等比数列に帰着**させて解決する例を紹介するにとどめる．この例に注目して先に読み進めてもらいたい．

<メモ>

■ **連立漸化式**

本文の例では ① + ②，① − ② が，ともに等比数列になってくれたのでうまくいったが，これではハナシがうますぎる．**実際はそうならない**と思ってよい———そのときはどうするか．

たとえば，次の問題を見てもらいたい．

＜例 1 ＞

次の漸化式を満たす数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の第 n 項を n で表せ．

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

(解) さあ，こうなるとヤッカイだ．足しても引いてもうまくない．そこで無理やりハナシを本文に示したカタチの**等比数列の利用**に持ち込むのだ———ここがチト知能犯か．

結論からいうと，$x_{n+1} + ky_{n+1}$ の形で文字 k を導入し，**k の値を調整する**ことで等比数列を構成することができるということ，つまり

$$\begin{aligned} x_{n+1} + ky_{n+1} &= (2x_n + 3y_n) + k(x_n + 2y_n) \\ &= (2+k)x_n + (3+2k)y_n \\ &= (2+k)(x_n + \underbrace{\frac{3+2k}{2+k}}_{k\text{ にしたい！}} y_n) \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

そういうわけで、等比数列を利用するには $x_{n+1} + ky_{n+1}$ をにらんで $x_n + ky_n$ の形を予想して

$$\frac{3+2k}{2+k} = k \qquad \therefore \quad k^2 = 3 \qquad \therefore \quad k = \pm\sqrt{3}$$

この数値を ① に代入すると ① は次の 2 通りに変形される．すなわち

$$\begin{cases} x_{n+1} + \sqrt{3}y_{n+1} = (2+\sqrt{3})(x_n + \sqrt{3}y_n) \\ x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} = (2-\sqrt{3})(x_n - \sqrt{3}y_n) \end{cases}$$

このことは何を意味するか———数列 $\{x_n+\sqrt{3}y_n\}$，$\{x_n-\sqrt{3}y_n\}$ はそれぞれ公比 $2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$ の**等比数列**である．ゆえに，$x_0 = 1$，$y_0 = 0$ を考えて

$$\begin{cases} x_n + \sqrt{3}y_n = (2+\sqrt{3})^n(x_0 + y_0) = (2+\sqrt{3})^n \cdots\cdots ② \\ x_n - \sqrt{3}y_n = (2-\sqrt{3})^n(x_0 - y_0) = (2-\sqrt{3})^n \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② ± ③ を計算して

$$\begin{cases} ② + ③ : \quad 2x_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}} \\ ② - ③ : \; 2\sqrt{3}y_n = (2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \quad \therefore \quad \boldsymbol{y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}} \end{cases}$$

で，とにかく**解けた**———まあ，これが**もっともそれらしい方法**と考えて下さい．

しかし，ナリフリかまわずやるなら，他に手がないわけでもない．たとえば，与えられた 2 本の漸化式の第 1 式から

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \longrightarrow y_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n}{3} \qquad \therefore \quad y_{n+1} = \frac{x_{n+2} - 2x_{n+1}}{3}$$

こうしておいて，これらを第 2 式に入れると

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1}}{3} = x_n + 2 \cdot \frac{x_{n+1} - 2x_n}{3} \qquad \therefore \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$$

これは，すでに説明した **3 項間漸化式の基本形**ではないか———**解ける**よ．やってみてもらいたい．

ただしこの場合，初期条件は $x_0=1$，$x_1=2x_0+3y_0=2$ で与えられることになる．
ちなみに，この 3 項間漸化式の特性方程式は

$$t^2-4t+1=0 \quad \therefore \quad t=2\pm\sqrt{3} \quad \longleftarrow \quad \text{固有値！}$$

ここで，この数値を見て**オヤッ**と思わないか．上記の説明のどこにあるか，探してもらいたい．
まずは**一件落着**としよう．

■ **連立漸化式の行列表現**

さて，次の話題に進んでよろしいか．
＜例 1 ＞で与えられた漸化式は次のように行列を用いて表されることは改めて説明するまでもなかろう．すなわち

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{cases} x_{n+1}=2x_n+3y_n \\ y_{n+1}=x_n+2y_n \end{cases}$$

一般的なハナシをしたいので $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=A$ とおくと

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{等比数列 } \boldsymbol{a_n = ar^{n-1}} \text{と類似！}$$

要は，本問は行列 A に対する A^n を求めるハナシに他ならない．しかし，実際にはストレートに行列で n 乗を計算するのはかなり難しい———特に行列で扱う指示がなければ**数列でやるのが賢い**ということは知っておくとよい．
ここで行列に深入りするつもりはないが，1 つだけ面白いハナシをしておこう．上記の行列 A の**固有方程式**を求めてみると

$$t^2-(2+2)t+(2\cdot 2-3\cdot 1)=0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{t^2-4t+1=0}$$

あれっ，同じになっちゃった———実は，そういうことだったのです．
改めて，**3 項間漸化式の基本形**は

$$x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n \quad \therefore \quad x_{n+1}=px_n+qx_{n-1}$$

と書けるから，$x_{n-1}=y_n$ とおくと $y_{n+1}=x_n$ で，これを連立漸化式の形で表すと

$$\begin{cases} x_{n+1}=px_n+qy_n \\ y_{n+1}=0\cdot x_n+1\cdot y_n \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B\text{ とおく}} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 B の固有方程式は

$$t^2-(p+1)t+(p\cdot 1-q\cdot 0)=0 \quad \therefore \quad t^2=pt+q$$

である．だから 3 項間漸化式の基本形で特性方程式とよんでいた 2 次方程式が**固有方程式**とよばれ，その解が**固有値**とよばれるのも故なきことではないのです．
まあ，ここまで書けばもういいだろう．あとは勝手に研究して下さい．

1.2.2.4　1 次分数形の漸化式

ここでいう 1 次分数形の漸化式というのは，たとえば

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のような形のものを総称していると思ってもらいたい．そして，① は a_n を与えると a_{n+1} が求まる関係式で，ここまでは基本形と同じである．

そういうことなら，その基本形の場合と同様に

$$\begin{cases} y=\dfrac{px+q}{rx+s}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ y=x \longleftarrow \text{この上の点は常に } x \text{ 座標と } y \text{ 座標が等しい！} \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

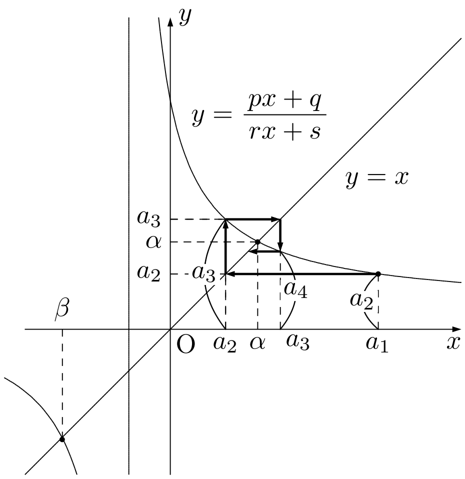
の関係で処理することはできないか．

右図を見てもらいたい．

x 軸上に現れる数列 $\{a_n\}$ の各項

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots$$

は，どうやら ②, ③ の交点の x 座標に向かって並んでいるように見える．



そこで，① の a_n，a_{n+1} を t とおいて，数列 $\{a_n\}$ の特性方程式を作ると

$$t=\frac{pt+q}{rt+s}$$

$$\therefore\ \ rt^2-(p-s)t-q=0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

となるが，これが 2 次方程式だからヤッカイだ．それは，基本的に解が α, β の 2 つであるからだが，この α, β をどう使うか．

結論を書いてしまおう．それは数列 $\left\{\boldsymbol{\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}}\right\}$ が等比数列になることに注目するものだが，こんなことを一体誰が思いついたのか．ともあれ，$\alpha \fallingdotseq \beta$ としてやってみる．

以下は，なんとも見苦しいアクロバットな変形だがガマンして読んで下さい．

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta}=\frac{(p-r\alpha)a_n-(s\alpha-q)}{(p-r\beta)a_n-(s\beta-q)}$$

$$=\frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n-\dfrac{s\alpha-q}{p-r\alpha}}{a_n-\dfrac{s\beta-q}{p-r\beta}} \longleftarrow \frac{s\alpha-q}{p-r\alpha}=\alpha,\ \frac{s\beta-q}{p-r\beta}=\beta\text{か？}$$

ここで α, β が特性方程式 ④ の解であることに注目すると，たとえば α については

$$r\alpha^2-(p-s)\alpha-q=0 \qquad \therefore\ \ s\alpha-q=\alpha(p-r\alpha)$$

$$\therefore\ \ \frac{s\alpha-q}{p-r\alpha}=\alpha,\ \ \frac{s\beta-q}{p-r\beta}=\beta \longleftarrow \beta\text{についても同様！}$$

がいえて，$\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}=k$ とおくと上記は

$$\boldsymbol{\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=k\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}}$$

すなわち，数列 $\left\{\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$ が公比 k の等比数列であるから

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=k^{n-1}\cdot\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$$

あとは分母を払って a_n についてとけばよい———デキタ！

　雑駁な説明だが，まあ，おおむねこんなところです．それでも，まだ $\alpha=\beta$ のときの問題が残っているが，これは実例で説明することにしよう．

＜メモ＞

■ 1 次分数形の漸化式

そうは言っても**具体的な問題**を解いてみないことにはピンとこないと思うので例題を挙げて解説するが，そのあとで本文を読み返してキッチリとさらっておいてもらいたい．

＜ 例 1 ＞

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n で表せ．

(1) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+6}{a_n+1}$, $a_1=2$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$, $a_1=1$

(解) (1) まずは，a_{n+1}，a_n を t とおいて**特性方程式**を作ると

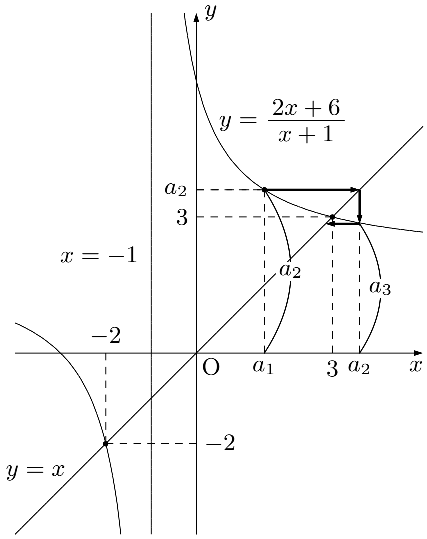
$$\boldsymbol{t=\frac{2t+6}{t+1}} \quad \therefore\ t^2-t-6=0 \quad \therefore\ (t+2)(t-3)=0 \quad \therefore\ \boldsymbol{t=-2,\ 3}$$

そこで，この 2 つの解 $-2,3$ を用いて

$$\boldsymbol{\frac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}-3}}=\frac{\dfrac{2a_n+6}{a_n+1}+2}{\dfrac{2a_n+6}{a_n+1}-3}$$

$$=\frac{4a_n+8}{-a_n+3}$$

$$=\boldsymbol{(-4)\cdot\frac{a_n+2}{a_n-3}}\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



すなわち，数列 $\left\{\dfrac{a_n+2}{a_n-3}\right\}$ は公比 -4 の等比数列

であるから

$$\frac{a_n+2}{a_n-3}=(-4)^{n-1}\cdot\frac{a_1+2}{a_1-3}$$

$$=(-4)^n \longleftarrow \frac{a_1+2}{a_1-3}=-4 \text{ だ！}$$

そこで，この分母を払って a_n を求めればよい．

$$a_n+2=(-4)^n(a_n-3) \quad \therefore\ \{(-4)^n-1\}a_n=3\cdot(-4)^n+2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{3\cdot(-4)^n+2}{(-4)^n-1}}$$

と，一応の決着をみる．

ちなみに，① で分母と分子を逆にとると

$$\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+2}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{a_n-3}{a_n+2} \quad \therefore\ \frac{a_n-3}{a_n+2}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{a_1-3}{a_1+2}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

分母を払って a_n を求めると

$$a_n-3=\left(-\frac{1}{4}\right)^n(a_n+2) \quad \therefore\ a_n=\frac{3+2\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n}$$

となり，形は違うが整理すると上記と同じ結果になる――**極限を調べるときなど**は，その状況が $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\to 0\ (n\to\infty)$ として目に見えるのでこの方がよさそうだ．もちろん正しく計算できればどちらでもよい．

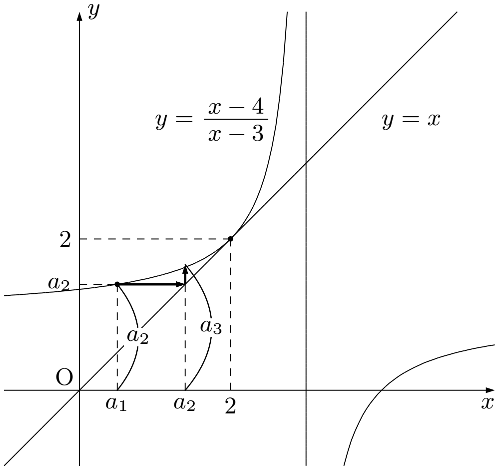
(2) これも (1) と同様に a_{n+1}，a_n を t とおいて**特性方程式**を作ると

$$t=\frac{t-4}{t-3} \quad \therefore\ t^2-4t+4=0 \quad \therefore\ (t-2)^2=0 \quad \therefore\ t=2 \text{ (重解)}$$

だが，さあ困ったぞ．これでは (1) のように分数の形が構成できない．

仕方がないから 1 本だけで行く．

$$\begin{aligned} a_{n+1}-2 &= \frac{a_n-4}{a_n-3}-2 \\ &= \frac{-a_n+2}{a_n-3} \\ &= -\frac{a_n-2}{a_n-3} \end{aligned}$$



さて，この式をどう見るか．

この左辺の $a_{n+1}-2$ をよく見ると，右辺の分子の a_n-2 と同じカタチだ．

これに注目して**分母と分子をひっくり返す**のはどうだ．

$$\underbrace{\frac{1}{a_{n+1}-2}}_{b_{n+1}} = -\frac{a_n-3}{a_n-2}$$

$$= -\left(1-\frac{1}{a_n-2}\right) = \underbrace{\frac{1}{a_n-2}}_{b_n} -1 \longrightarrow b_{n+1}-b_n=-1$$

よく見てもらいたい．数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-2}\right\}$ は

公差 -1 の**等差数列**になっている．

ゆえに

$$\frac{1}{a_n-2} = \frac{1}{a_1-2}+(n-1)(-1) = -n$$

$$\therefore\quad a_n-2=-\frac{1}{n} \qquad \therefore\quad a_n = 2-\frac{1}{n} = \boldsymbol{\frac{2n-1}{n}}$$

どうやら 1 本の式だけでもイケルようだ．

そういうことなら (1) の例ではどうか．分母と分子の 2 本のうち，どちらか 1 本でイケルのではないか———やってみるか．たとえば (1) の分子の計算では

$$\begin{aligned} a_{n+1}+2 &= \frac{2a_n+6}{a_n+1}+2 \\ &= \frac{2a_n+6+2(a_n+1)}{a_n+1} = \frac{4(a_n+2)}{a_n+1} \end{aligned}$$

ここで左辺の $a_{n+1}+2$ と右辺の分子の a_n+2 に注目しながら分母と分子をひっくり返すと

$$\underbrace{\frac{1}{a_{n+1}+2}}_{b_{n+1}} = \frac{a_n+1}{4(a_n+2)}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(a_n+2)-1}{a_n+2} = -\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{a_n+2}}_{b_n}+\frac{1}{4}$$

すなわち，**2 項間漸化式の基本形**の問題になった———そういうことなのだ．しかし，これは解いて見せなくてもよいだろう．

$$\boldsymbol{b_{n+1} = -\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}} \longrightarrow b_n = \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{ただし，} b_1 = \frac{1}{a_1+2} = \frac{1}{4}$$

の過程を省略して a_n を求めると

$$a_n+2=\frac{1}{b_n}=\frac{5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}-2$$

$$=\frac{3+2\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{3\cdot(-4)^n+2}{(-4)^n-1}$$

となり，先に求めた結果と一致する．

また，分母の $a_{n+1}-3$ からはじめても同じ結果となるが，くどいからここではやらない．君たちは練習を兼ねてやってみるとよい．まずは**一件落着！**

■ 1 次分数形の漸化式の行列表現

本論に入る前に，この **1 次分数形の漸化式**の意味をしっかりと確認しておきたい．たとえば，上記**＜例 1 ＞** (1) を例に，となり同士の項の関係を次々と書き並べてみると

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+6}{a_n+1},\ a_n=\frac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1},\ \ a_{n-1}=\frac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1},\ \cdots\quad\cdots\cdots(*)$$

だが，この構造が**分数関数** $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}}$ **の合成**になっている———これはよろしいか．

改めて，分数関数

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\quad g(x)=\frac{px+q}{rx+s}$$

とおいて，実際に合成の計算 $f(g(x))$ を実行してみよう．

$$f(g(x))=\frac{a\cdot g(x)+b}{c\cdot g(x)+d}=\frac{a\cdot\dfrac{px+q}{rx+s}+b}{c\cdot\dfrac{px+q}{rx+s}+d}$$

$$=\frac{a(px+q)+b(rx+s)}{c(px+q)+d(rx+s)}=\frac{(\boldsymbol{ap+br})x+\boldsymbol{aq+bs}}{(\boldsymbol{cp+dr})x+\boldsymbol{cq+ds}}\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．まあ，これはいいだろう．そこで，ハナシは変わるが次の**行列の計算**を見てもらいたい．

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{ap+br} & \boldsymbol{aq+bs}\\ \boldsymbol{cp+dr} & \boldsymbol{cq+ds}\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

さて，この ① の分母子の係数と ② の右辺の行列の成分を**対応させて**眺めてみてもらいたい．

なかなかよくデキていると思わないか———だったら**分数関数の合成の係数決定**は**行列の積の計算でイケル**ではないか．ただし，① は関数の合成だから分母と分子の間で約分してもよいが，② は行列の積のハナシだから約分するわけには行かない．

さて，このハナシをどのようにして (∗) の **1 次分数形の漸化式**に反映させるか———(∗) を次のように書くことに問題はあるか．

すなわち

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ 1\end{pmatrix},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{以下同様！}$$

簡略に書くために $\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}=A$ とおくと (∗) は

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ 1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ 1\end{pmatrix},\ \ \begin{pmatrix}a_n\\ 1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ 1\end{pmatrix},\ \ \begin{pmatrix}a_{n-1}\\ 1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-2}\\ 1\end{pmatrix},\ \ \cdots\cdots$$

そういうことなら順次代入して

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= A^2\begin{pmatrix} a_{n-2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad A \text{ の次数が 1 つあがり，項番号が 1 つ下がる！} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= A^r\begin{pmatrix} a_{n-r} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \text{つねに } \boldsymbol{(A \text{ の次数 } r) + (\text{項番号 } n - r) = n} \text{ なのだ！} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad a_1 = 2
\end{aligned}
$$

まあ，なかなか面白い．だからどうということもないが，こういう見方のあることは知っておいてもよいハナシではある．

第2章　無限数列

2.1 数列の極限

何はともあれ，のっけから無限という難しい概念が登場する．特に記号 ∞(無限大）が $\mathbf{lim}$（リミットと読む）という巧妙な記号とあわせて使われるので，いかにも難しく見えるが，人々がどんな形で ”無限 ”に迫る方法を獲得したかを知るよい機会でもある．

ちょっとガンバッテみる価値はありそうだ．われわれの学び方としては，本当に知りたいのは無限級数であるということ，そして数列の極限はそのための基礎工事というぐあいに，構造的に考えるとよい．

ちなみに ”∞(無限大）”は限りなく大きくなっていく状況のことであって，ある特定な数値のことではないから誤解のないよう，特に注意しなければならない．

2.1.1　数列の収束と発散

無限数列 $\{a_n\}$ において n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α(有限確定値) に限りなく近づくならば

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n = \alpha} \quad \text{あるいは}$$

$$\boldsymbol{a_n \longrightarrow \alpha\ (n \to \infty)}$$

と書き数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**といい，$\boldsymbol{\alpha}$ を **極限値**という．

収束しない場合を**発散する**といい，極限値は存在しない———**∞，$-\infty$，振動する**の 3 つの場合が考えられる．

<メモ>————————————————————————————————

■ **$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の意味**

本文の ”**限りなく大きくする**”，”**限りなく近づく**”という表現が**クセモノ**なのだ．

これは a_n が限りなく α に近づくが α に**ナル**，とか α に**等しい**とかということではない．

$\boldsymbol{\alpha}$ は，あくまでも $\boldsymbol{a_n}$ **が近づいていく目標**であって $\boldsymbol{a_n}$ **と** $\boldsymbol{\alpha}$ **とは基本的にはちがうもの**と考えなければならない———もし同じなら $\lim\limits_{n\to\infty}$ はいらないではないか．

極端なハナシだが，横浜を通過して東京に向かう新幹線で考えて見るか．この列車のカンバンには ”**東京行き**”と書いてあるとしよう．**横浜通過**の状態が $\boldsymbol{a_n}$ で，”**君はどこ行き？** ”ときかれれば**東京**と答えるだろう．これが $\boldsymbol{\alpha}$ なのだ．もちろんハナから東京駅に停車している場合も含まれる．これが記号 **lim** のズルイというかウマイというか**絶妙な表現**なのだ．

そして上記の $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n = \alpha}$ だが，よく考えてみるとその意味はなかなか深い．

たとえば

すべての n に対して，$\boldsymbol{a_n > 0}$ であったとしても $\boldsymbol{\alpha > 0}$ **とは限らない**．

これはワカルかな．

つまり α は**目標**なのだから**終着駅となりうる数には** 0 **も入る**はず．したがって α はその ”**想定の範囲**”を広げて $\boldsymbol{\alpha \geqq 0}$ で考えなければならないのだ．

一般の場合でいうと

$$\text{つねに } \boldsymbol{a_n < b_n} \ \longrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b_n}$$

のように等号をつけなければならない———このハナシはさらに**うれしい展開**をする．

■ **はさみうちの原理**

うれしい展開とは次のようなことだ．

$$\text{つねに } \boldsymbol{a_n < x_n < b_n} \ \longrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b_n}$$

ここで最右辺で，$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{b_n = \alpha}$ としよう．そうすると

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \longrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n = \alpha} \quad \longleftarrow \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} \text{ が仕方なく求まった！}$$

となる———これを**はさみうちの原理**という．

上の説明では**あえて条件の不等式で等号をはずしたが**，等号つきの場合は ”想定の範囲 ”をすでにクリアしているのでさらにトウゼンである———一般には，次のように表される．

$$\text{つねに，} \boldsymbol{a_n} \leqq \boldsymbol{x_n} \leqq \boldsymbol{b_n} \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b_n}$$

————————————————————————————————

2.1.2　極限値の四則計算

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，次の関係式が成立する———いずれかが発散するときは論外！

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta \cdots\cdots ①$$

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta \cdots\cdots ②$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}\ (\text{ ただし}, b_n \fallingdotseq 0, \beta \fallingdotseq 0\ ) \cdots\cdots ③$$

また，つねに $a_n \leqq x_n \leqq b_n$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdots\cdots ④$$

が成立する．これを**はさみうちの原理**という．

上記 $maru1$,②,③ は直感的にはすぐに認めるところだが，これは ”左辺を右辺に変形デキル ” というだけの単純なハナシではない．

実際に，極限を調べる現場カンカクとしては与えられた複雑な n の式をよくながめて

(i)　α なり β なりに収束する $\boldsymbol{a_n, b_n}$ の形をさがして組み立てる．

(ii) 残りのものをさらに調整して収束するならそのように再構成する．

という実務的な作業を実行する根拠を与える公式になっている．

以下，具体的な例を引いて詳しく解説する．

<メモ>————————————————————————————-

■ 収束するときの基本の形——— $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0\ (\ |r| < 1\ )$

極限に関するいろいろな問題を扱ってみると結局は上記２つの極限を利用することにたどり着く———まずは道具の整備から始めることにする．

(I)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ これは無条件に認めよう．

これは一般の場合にまでハナシを拡張して，” 分母が ∞ で分子が定数ならば分数本体は 0 に収束する ” ということである．

(II) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0\ (\ |r| < 1\ )$ これはそのまま認めるわけには行くまい．

たとえば，r が $\dfrac{1}{2}$ とか $\dfrac{1}{3}$ のように具体的な数値で示されると，n が大きくなるにつれて r^n がゴミのようにカスのように小さくなって，きっと限りなく 0 に近づいていくであろう様子が容易に想像できる．

しかし，r が $0.99999\cdots$ のような 1 に近い数値となるとホントに 0 に収束するかどうかについて怪しげな気分になってこないか．

一般には次のように証明する———(I) で無条件に認めた $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ に帰着 させる．

まず，$|r| < 1$ であるから

$$|r| = \frac{1}{1+k}\ (\ k > 0\ )\quad \therefore\ |r^n| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+k}\right)^n = \frac{1}{(1+k)^n}$$

ここで２項定理を用いると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(1+k)^n} &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 k + {}_n\mathrm{C}_2 k^2 + {}_n\mathrm{C}_3 k^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_p k^p + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n k^n \\ &> {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 k \longleftarrow \text{第３項以下を切り捨てた！} \\ &= 1 + nk > nk \quad (\ k > 0)\end{aligned}$$

これを用いると

$$0 < |r^n| < \frac{1}{nk} \quad \longleftarrow \text{上記の不等式を } \boldsymbol{|r^n|} \text{ の分母 に適用！}$$

$$\therefore\ 0 \leqq \lim_{n\to\infty} |r^n| \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \quad \longleftarrow \text{不等号に 等号がつく！}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\boldsymbol{n}k} = \frac{1}{k} \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 0 \longleftarrow n \text{ に対して } k \text{ は定数！}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} |r^n| = 0 \quad \longleftarrow \text{はさみうち！}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 0} \quad \longleftarrow \text{さらに } -|r^n| < r^n < |r^n| \text{ による はさみうち！}$$

ココマデ説明したから**チョイと背伸び**して $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} nr^n = 0\ (\ |r| < 1\ )}$ も証明しておく．

結果もさることながら，その**経緯**に注目すべし———上記**２項定理**の展開で**第３項まで**を使うハナシに拡張するのだのだ．

$$\begin{aligned}(1+k)^n &> {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 k + {}_n\mathrm{C}_2 k^2 \quad \longleftarrow \text{第４項以下を切り捨てた！} \\ &= 1 + nk + \frac{n(n-1)}{2}k^2 > \frac{n(n-1)}{2}k^2\end{aligned}$$

これを用いると

$$0 < |r^n| = \frac{1}{(1+k)^n} < \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\therefore\ 0 < |nr^n| < \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{n-1} \quad \longleftarrow n \text{ をかけても，まだ分母に } \boldsymbol{n-1} \text{ が残っている！}$$

$$\therefore\ 0 \leqq \lim_{n\to\infty} |nr^n| \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{n-1}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{2}{k^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} |nr^n| = 0 \quad \longleftarrow \text{はさみうち！}$$

$$\therefore \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} nr^n = 0} \quad \longleftarrow \quad -|nr^n| < nr^n < |nr^n| \text{ の はさみうち！}$$

一般に $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^p r^n = 0\ (\ |r| < 1\ ,\ p}$ **は負でない整数)** が成り立つことが証明できる．

■ 不定形について

a_n（n の関数) で $n \to \infty$ としたとき無限数列 $\{a_n\}$ の**収束**，**発散**が見た目でワカル場合はまあいい———**そうでない場合**が問題なのだ．

たとえば

$$\boldsymbol{\frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty}$$

のような**ワケのわからないもの**になってしまうときがある．これでは**収束**，**発散**がわからない．

このような形を**不定形**というのだが，そういう場合は，**分母子を $\boldsymbol{n}$ で割る**とか，**有理化する**などして上記の (I), (II) が使えるように，つまり**見える形**に**同値変形**をして考える．

これは**実例**で示そう．

―＜ 例 1 ＞―

(1) 次の極限を調べよ．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2+1}$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{2^{n-1}+3^{n+1}}$, $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots\cdots+2^n}{3^n}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=3$ を満たすとき、次の数列の極限を調べよ．

(i) $\{(n+1)a_n\}$ (ii) $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$

(解) (1) それぞれの特徴に注意してシッカリさらうべし．

(i) まず，$n\to\infty$ のとき，$\boldsymbol{\dfrac{\infty}{\infty}}$ **の不定形** であることがわかる．

そこで**記述の方法**だが，マジメに書こうとすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ をいくつも等号でつなぐので何とも**見苦しい**．スッキリ書きたいので、以下 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ をサボって**最後に矢印でつなぐことにする**―――もちろん答案に書くときもこれでよい．

$$\frac{n^2+n-1}{2n^2+1}=\frac{1+\boldsymbol{\dfrac{1}{n}}-\boldsymbol{\dfrac{1}{n^2}}}{2+\boldsymbol{\dfrac{1}{n^2}}} \longleftarrow \textbf{分母子を } \boldsymbol{n^2}\textbf{で割る}\ \text{(同値変形)！}$$

$$\to\frac{1+0-0}{2+0}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\ (n\to\infty)$$

(ii) これは $\boldsymbol{\infty-\infty}$ の**不定形**である．

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}=\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\frac{(n^2+n+1)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} \longleftarrow \textbf{有理化}\text{（同値変形）！}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} \longleftarrow \text{分母も } n \text{ の 1 次式とみなす！}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} \longleftarrow \textbf{分母子を } \boldsymbol{n} \textbf{ で割る}\text{（同値変形）！}$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\ (n\to\infty)$$

(iii) まず前半の問題だが、形としては $\boldsymbol{\dfrac{\infty-\infty}{\infty+\infty}}$ で，なんとなく 0 になりそうにも見える．しかし、見えるだけで、これはやってみなければわからない―――メチャメチャな**不定形**である．

だいたい $\boldsymbol{2^n}$**の** $\boldsymbol{\infty}$ と $\boldsymbol{3^n}$**の** $\boldsymbol{\infty}$ とは、記号は同じでも**ちがう** $\boldsymbol{\infty}$ なのだ．そして、分母にも分子にも，アチコチに別様に変化する要素があって、このままでは手が出せない．

そこで、**変化する部分**がなるべく**少なくなる**ように工夫して変形する．そして同じ形のものができるなら、これもなるべく**揃えた方がよい**．その上で

$$\lim_{n\to\infty}r^n=0\ (\ |r|<1)$$

が使えるかということだ．

まあ、やってみよう.

$$\frac{3^n-2^n}{2^{n-1}+3^{n+1}}=\frac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+3} \longleftarrow \textbf{分母子を } \boldsymbol{3^n}\textbf{で割る！}$$

$$\to\frac{1-0}{\dfrac{1}{3}\cdot 0+3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\ (n\to\infty)$$

後半の問題では、分子がこのままではマズかろう———初項 1、公比 2、項数 $n+1$ の等比数列だから、**和の公式**でキッチリしたカタマリにまとめてからでないとハナシが始まらない.

その上で、またまた $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ ($|r|<1$) が使えるかということだ.

$$\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots\cdots+2^n}{3^n}=\frac{\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}}{3^n}$$

$$=2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\to\ 2\cdot 0-0=0\ \ (n\to\infty)\ \longleftarrow\ \textbf{イケタ！}$$

ということになる.

(2) 題意の $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} na_n=3}$ が何となく**クワセモノ**に見える———これをどう読むか.

$n\to\infty$ だから a_n が 3 とか 5 とかの有限確定値に収束したら、左辺は ∞ になって右辺に与えてある数値の 3 にはならない.

だから、a_n は 0 に収束しなければならない———**必要条件！** ゆえに

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=0}$$

しかし、これは必要条件でしかない———**十分性はない.**

つまり、こうだからといって $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} na_n=3}$ とは限らないのだ———本問ではそこまで求めていないが、こういうことはシッカリと確認しておかなくてはならない.

たとえば

$$a_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$

だが

$$na_n=n\cdot\frac{1}{n}=1\to 1\ (n\to\infty)\ \fallingdotseq 3$$

ではないか———そういう反例はいくつでも考えられるだろう.

つまり、与えられた条件は $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ ということであったワケだ. ともかく本題に入ろう.

(i) まあ、これはカンタンだ.

$$(n+1)a_n=\underbrace{na_n}_{3}+\underbrace{a_n}_{0}\to 3+0=3\ (n\to\infty)$$

(ii) しかし、次はそうはいかない.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\boldsymbol{\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{n+1}}}{\boldsymbol{\dfrac{na_n}{n}}}\ \longleftarrow\ \textbf{収束するカタチを先に構成する！}$$

$$=\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}\times\frac{1}{\boldsymbol{1+\dfrac{1}{n}}}\ \longleftarrow\ \textbf{残りの部分を調整！}$$

$$\to\frac{3}{3}\times 1=1\ (n\to\infty)$$

＜例 2＞

$a_1 = 1$ として、漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し、その極限値を求めよ.

(解) 初項と漸化式から 第 n 項 が求められる場合ならハナシは簡単だが、本問はそうはいかない.
まず、数列 $\{a_n\}$ が収束して極限値 α をもつなら $n \to \infty$ のとき

$$a_n \to \alpha, \quad a_{n+1} \to \alpha$$

だから、a_n, a_{n+1} を α とおいて

$$\boldsymbol{\alpha = \sqrt{\alpha + 2}} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad \alpha^2 - \alpha - 2 = (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = 2 \ (> 0)$$

この数値を用いて $a_{n+1} - 2$ を計算して、$a_n - 2$ との関係を調べる———ここで**なぜか**と言われても困るが、まあ見ていてもらいたい.

$$\boldsymbol{a_{n+1} - 2} = \sqrt{a_n + 2} - 2 \ \longleftarrow \ \text{有理化する！} \cdots\cdots ②$$

$$= \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} = \frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2}(a_n - 2)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{|a_{n+1} - 2|} = \left| \frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2}(a_n - 2) \right| \cdots\cdots ③$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2}|a_n - 2| \boldsymbol{< \frac{1}{2}|a_n - 2|} \cdots\cdots ④$$

$$\longleftarrow \ \sqrt{a_n + 2} > 0$$

つまり、$|a_{n+1} - 2|$ と $|a_n - 2|$ との関係が見えてきた———これはすべての n で成り立つ.
そこで

$$0 < |a_n - 2| < \frac{1}{2}|a_{n-1} - 2|$$

$$\longleftarrow \ \textbf{ここで } \boldsymbol{|a_{n-1} - 2| < \frac{1}{2}|a_{n-2} - 2|} \textbf{ ！}$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-2} - 2|$$

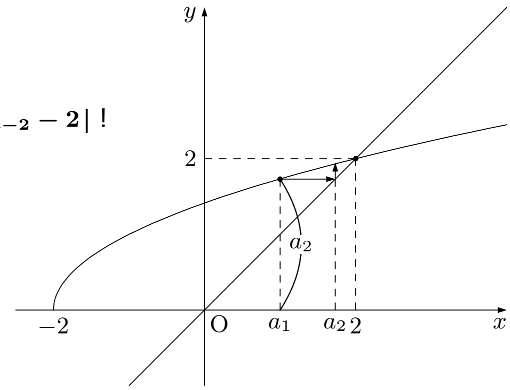
$$< \left(\frac{1}{2}\right)^3 |a_{n-3} - 2|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^r |a_{n-r} - 2|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \longleftarrow \ a_1 = 1$$



ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - 2| = 0 \ \ (\textbf{はさみうち！})$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2} \ \longleftarrow \ -|X| \leqq X \leqq |X| \text{ だから、} |X| \to 0 \text{ のとき } X \to 0 \text{ だ！}$$

すなわち数列 $\{a_n\}$ は収束してその極限値は 2 である.

＜補足説明！＞

＜ **例 2** ＞については、少し説明しておかなければなるまい．それは、まず、② でどうして $\boldsymbol{a_{n+1} - 2}$ を計算してみる気になったかということ———確かに**デキあがった解答**を読む限り、これを計算すれば ④ の不等式が導けて、したがっては**さみうち**で解決する．しかし、”いきなりこれを思いつけと言われたってなあ”などとは思わないか———筆者は昔、よく思ったものだ．

この数学という科目ではよくあることだが、トートツに”$a > 1$ のとき”などの場合分けから始まって最後は**さも得意気に**つじつまがあっていたりするような解答があったりする．

まあ、仕上げがキレイなことも大切だが、**発想の流れに沿う議論の展開**が自然ではないかと思うがいかがなものだろう．

本問について言えば、まず ① から極限値らしい $\alpha = 2$ が求まって、不等式 ④ を導くという**強力な意思**がないとこういう走り方はできない．

たとえば ③ で $\dfrac{1}{\sqrt{a_n+2}+2} > 0$ で括り出す、また $\sqrt{a_n+2} > 0$ から $\dfrac{1}{\sqrt{a_n+2}+2} < \dfrac{1}{2}$ を利用して不等式

$$\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}|\,a_n - 2\,| < \frac{1}{2}|\,a_n - 2\,|$$

を導くところとか、さらに後半で 第 n 項と第 $(n+1)$ 項 との不等関係

$$|\,a_{n+1} - 2\,| < \frac{1}{2}|\,a_n - 2\,|$$

を次々に用いて

$$|\,a_n - 2\,| < \left(\frac{1}{2}\right)^r |\,a_{n-r} - 2\,| \longleftarrow \underbrace{r}_{\text{累乗}} + \underbrace{(n-r)}_{\text{添え字}} = n\ (\text{一定})\ \text{に注意！}$$

のように数列 $\{a_n\}$ の**添え字** (サフィックス) が 1 つずつ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の**累乗**に繰り上がっていく様子の記述などはおよそ初見で思いつくようなものではない．一度キッチリと、その**根底から**から叩き込んでおかないとちゃんとした答案は覚束ないと思う．

さて本題だが、それでもこの問題が上記のようにスマートに行くワケは、極限値が $\alpha = 2$ と具体的な数値で求まるタイプの問題であるからである．

もしこれが、$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cos a_n$ のような漸化式で与えられていたらもう手に負えない———その場合は**平均値の定理**を使うことになる．これは数 III 微積分で詳しく述べたのでここでは触れないことにする．本問についても平均値の定理でやれないことはないが、何だかブルドーザーか戦車で畑を耕すような妙なとりあわせになってしまう———参考までにやってみるとよい．

＜ **end.**＞

2.2　無限級数

簡単に説明すると無限数列 $\{a_n\}$ に対して

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を無限級数というのだがここでキッチリと注意しておかなければならないことがある．

それは上記の $(*)$ を言葉で表現する場合に，”加える”とか”たす”とかそういう類の表現をしないということ———このことは何を意味するか．

それは足し算の順序を変えてはならないということである———無限はオソロシイ．したがって $(*)$ は無限数列 $\{a_n\}$ を $+$ の記号でつないだものと表現する．これは十分わかっている人でもついウッカリ間違えるから特に注意しなければならない．

1 つ例を挙げておこう．たとえば

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots\cdots + (a_n + b_n) + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots (**)$$

の足し算の順序を変えて

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots) \qquad \cdots\cdots (***)$$

などとしてはならないのだ．

それは $(**)$ では無限数列 $\{a_n\}$ と無限数列 $\{b_n\}$ の個数は同じに見えるが $(***)$ のように書いた場合はそれらが同じとは限らない———記号で書けば同じ ∞ でも同じ数値を表しているのではないことを肝に銘じておいてもらいたい．

それともう 1 つ，無限級数の和というまぎらわしい言葉がある．これはあとでで詳しく解説することになるのでここでは注目してもらうにとどめるが，これにも”加える”とか”たす”とかの意味は一切ない．

この例でもわかるが数学では日常言語を使いながらまったくちがうことを意味する場合があるので特に注意して読み込む必要がある．

くどいようだが念には念を入れて厳重注意をした上で解説に入ることにする．

2.2.1 無限級数の和

無限数列 $\{a_n\}$ の $\underline{\text{各項を形式的に+の記号でつないだもの}}$，すなわち

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を無限級数という．

さて，① をどうしたら具体的に求めることができるか———限りなくつないでいくのだから，これをイッキに求める方法はない．

そこでいよいよ無限という概念に斬りこむ方法論の問題になる———人々は次の手順を開発した．すなわち

(i) 第 $\boldsymbol{n}$（有限）部分和 $\boldsymbol{S_n}$ を求める．

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \ \longleftarrow \boldsymbol{n} \text{ の式でまとめる！}$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{S_n}$ を計算する．

とやる．このとき，無限数列 $\{\boldsymbol{S_n}\}$ は

$$\{S_n\}: \ S_1,\ S_2,\ S_3,\cdots\cdots\ ,S_n,\ \cdots\cdots\cdots$$

であるが，これが収束して

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{S}$$

であるとき、無限級数 ① は ”$\boldsymbol{S}$ に収束する ” または ”① の和は $\boldsymbol{S}$ である ” といい，無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき ① は発散するという———このとき和は存在しない．

＜補足説明！＞

以下、無限級数についての解説を進めるが、このあとに出てくる無限級数を表す記号、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots)$ についてチョッと説明をしておきたい———これはなかなか巧妙にできていておもしろい．

これをキチンと書けば

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N}(\cdots)}_{\text{第 } N \text{ 部分和}}$$

ということで、上記の (i)，(ii) をシッカリ取り込んでいるのである———まずは記号の意味と内容をキッチリと把握することが大切である..

＜ **end.**＞

＜メモ＞

■ 無限級数では ” タス ” とか ” 加える ” というコトバはつかわない．

本文①の説明で ” 形式的に＋の記号でつないだもの ” というなんとなくイミシンな言い回しをしていることに注目してもらいたい——これでもチャンとした数学の言葉なのだ．

なぜこのような怪しげな言い回しをするかは，あとで例をあげて説明すると，よりハッキリとワカルが，それは☒では ” たしざん ” の順序を変えてはいけないという大原則がある からである——キモに銘じておくべし．

その上で

(i) **第 n 部分和**を n の式で表す．

(ii) $\boldsymbol{n \to \infty}$ とする．

という **2 段構え**になっている——これがなかなか**ウマイ手法**なのだ．

つまり，**無限数列 $\{S_n\}$** を持ち出した段階で**タス**，とか**加える**というイメージはすでに**置き去り**にされてしまい，その**極限値** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ にいたってはカゲもカタチもない．

要するに，**無限級数の和**とは**極限値**のことであるから**存在する**か，**しない**かだけのことである．ここでは ” 和 ” という言葉の持つ一般常識的な ” **タス**という意味 ” に振り回されてはならない．

上に述べたことがらを実例で確認しておこう．

＜ 例 1 ＞

次の無限級数の収束，発散を調べよ．

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots\cdots$

(2) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5} + \cdots\cdots$

(3) $(1 - \dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}) + (\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4}) + \cdots\cdots$

(解) (1) 無限級数の**最も基本の形**だと思ってもらいたい．

まず**第 1 段階**として**第 n 部分和 S_n** を求める．

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \longleftarrow \ \textbf{部分分数に分解する！} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

次に**第 2 段階**として $\boldsymbol{n \to \infty}$ を実行する——$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求める

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \qquad \longleftarrow \ \boldsymbol{n \to \infty}\ \textbf{だから}\ \boldsymbol{n+1 \to \infty}\ \textbf{でよかろう！} \\
&= 1
\end{aligned}$$

かくして与えられた無限級数は**収束**して，**その和は 1** である．

(2) こうなるとチョッと様子がちがう——このままではナンダカわからない．

最初の 1 を除いて考えるとあとは**パタパタ消える**——そんなことをしてもよいのか．単純に考えて、偶数番目で終わるときと奇数番目で終わるときでちがうことは上の例でもわかる．

そこで、マニュアル通りに**第 n 部分和 S_n** を求めるのだが，**n の偶奇でハナシがちがう**から n の偶奇で場合を分けて説明しなければならない．具体的には **第 n 部分和** を $n = 2m+1,\ 2m$ のときに分けて求める——これですべての場合を尽くしている．

(i) $\boldsymbol{n=2m+1}$ のとき———最初の 1 以外の残りを 2 つずつ m 個のカッコでくくってみよ．
　これは、**カッコに番号**を振るとわかりやすい．

$$S_{2m+1}=1+\underbrace{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}_{1\text{ 番目}}+\underbrace{(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3})}_{2\text{ 番目}}+\cdots\cdots+\underbrace{(-\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+1})}_{m\text{ 番目}}$$

$$=1\to 1\ (m\to\infty)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

(ii) $\boldsymbol{n=2m}$ のとき

$$S_{2m}=S_{2m+1}-\boldsymbol{a_{2m+1}}\ \longleftarrow\ \text{(i) の } S_{2m+1}\text{から 最後の項 を引く！}$$

$$=1-\frac{m}{m+1}$$

$$=1-\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\to 1-\frac{1}{1}=0\ (m\to\infty)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

① と ② で結果がちがうのでこの無限級数は**発散する**．すなわち，この無限級数の**和はない！**

(3) これは (2) をカッコでくくっただけだが**全くちがうハナシ**になる．
　まずは**第 $\boldsymbol{n}$ 部分和 $\boldsymbol{S_n}$** を求めよう———有限個だからカッコを組み替えることができる．

$$S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3}-\frac{3}{4})+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)-\frac{n}{n+1}$$

$$=1-\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to\ 1-\frac{1}{1}=0\ \ (n\to\infty)$$

ゆえに与えられた無限級数は**収束**し，**その和は 0** である．

＜ 例 2 ＞

次の無限級数の収束，発散を調べよ．

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin^2\frac{n\pi}{2}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

(2) 初項が 1，偶数番号はすぐ前の項の $\dfrac{1}{5}$ 倍，奇数番号の項はすぐ前の項の 3 倍であるような無限級数がある．この無限級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

(解) (1) **基本のサホウ**の通り**第 $\boldsymbol{N}$ 部分和 $\boldsymbol{S_N}$** を求めて $\boldsymbol{N\to\infty}$ とするのだが

$$\sin^2\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}1\ (\ n=2k-1\ )\\0\ (\ n=2k\ )\end{cases}$$

であるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}$ を**バラして**書き並べてみる．

(i) $N=2m$ のとき

$$S_{2m}=\underbrace{\frac{1}{2}+0}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2^3}+0}_{2}+\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots+0+\underbrace{\frac{1}{2^{2m-1}}+0}_{m}\ \longleftarrow\ \text{2 個ずつカッコでくくる！}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{4}}\to\frac{2}{3}\ \ (N=2m\to\infty)$$

(ii) $N=2m-1$ のとき

$$S_{2m-1}=S_{2m}-0=S_{2m}\to\frac{2}{3}\quad(N=2m-1\to\infty)$$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{2}{3}$ である.

(2) これも**第 N 部分和 S_N** を求めて $\boldsymbol{N\to\infty}$ とする.

(i) $N=2m$ のとき

$$\begin{aligned}S_{2m}&=1+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\cdots\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\\&=\left\{1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\right\}+\frac{1}{5}\left\{1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\right\}\\&=\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^m}{1-\frac{3}{5}}\to\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{\frac{2}{5}}=3\quad(N=2m\to\infty)\end{aligned}$$

(ii) $N=2m-1$ のとき

$$S_{2m-1}=S_{2m}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\to3\quad(N=2m-1\to\infty)$$

これよりこの無限級数は収束し，その和は 3 である.

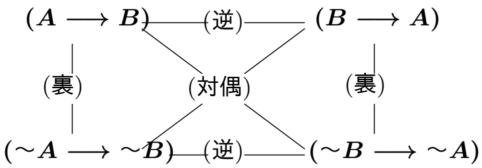
■ $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S}$ **ならば** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0}$ **である.**

これは**重要な定理**で証明は次のようにやる.
すなわち

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S$$

だから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a_n}&\boldsymbol{=S_n-S_{n-1}}\\&\boldsymbol{\to S-S=0}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$



$\sim A$: A でない (否定)

ここで "重要" と書いたが，この定理がこのままの形で重要であることはメッタにない.
実はこの**対偶命題**が**重要**，かつ**実用的**なのだ. すなわち

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n}\neq0 \text{ ならば } \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}S_n}\text{は存在しない（発散する）.}$$

これは**便利**だ——無限級数 $\{a_n\}$ の**一般項** $\boldsymbol{a_n}$ が 0 **に収束しなければ, もとの無限級数は収束しない**ということがすぐにワカル.

ここで**上記の定理**の確認問題を入れようと思ったが、せっかくのことだから、ここまでの復習もできるチョッとおもしろい問題にした——筆者が若いころ "**なかなかよくデキている**" と思ってカンゲキした問題である.

＜例＞

次の無限級数の収束，発散を調べよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(2+\frac{1}{n}\right)$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ が発散することを示せ.

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$ が収束することを示し，その級数の和を求めよ.

(解) これらのちがいをよく見きわめてもらいたい．

(1) 第 n 項を a_n とおくと

$$a_n = \log\left(2+\frac{1}{n}\right) \to \mathbf{\log 2 \risingdotseq 0} \ \ (n\to\infty) \quad \longleftarrow \text{ 上記の定理 を使う！}$$

ゆえにこの無限級数は発散する———第 n 部分和 を求めることもなくデキちゃった．

上記の定理の有難さがおわかりいただけたかな———脱帽！

(2) 同様に第 n 項を a_n とおいて

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0 \ \ (n\to\infty)$$

からこの無限級数は収束するとやりたいがそうはいかない———定理の逆は成り立たないのだ．

この場合はキッチリやるしかない．そこでカタ通り第 N 部分和を求めると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\{\log(n+1)-\log n\} \\
&= (\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)+\cdots\cdots+\{\log(N+1)-\log N\} \\
&= \log(N+1) \to \infty \ \ (N\to\infty)
\end{aligned}$$

で、発散することがわかる．

(3) この場合も第 N 部分和を求めて $N\to\infty$ とする．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N}\log\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) &= \sum_{n=2}^{N}\log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N}\log\left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right) = \sum_{n=2}^{N}\log\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n-1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N}\left(\log\frac{n}{n+1}-\log\frac{n-1}{n}\right) \\
&= \left(\log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{2}\right)+\left(\log\frac{3}{4}-\log\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(\log\frac{N}{N+1}-\log\frac{N-1}{N}\right) \\
&= -\log\frac{1}{2}+\log\frac{N}{N+1} \\
&= \log 2+\log\frac{1}{1+\frac{1}{N}} \to \log 2 \ \ (N\to\infty)
\end{aligned}$$

ゆえに，この無限級数は収束しその和は $\log 2$ である．

■ ”ピカイチ ”になろう

さて、基本のハナシはおおむね述べたが、それでも無限級数は難しい．そのワケは、そもそも ”無限 (∞)”という概念が難しいのだが

(i) 記号 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ があまりに巧妙にできていて、その真意を正確に読み込めない．

(ii) 他の分野、たとえば図形、論理、積分などとの融合問題でゴチャゴチャになる．

などがあるかと思う．そこで、ここでは無限級数そのものの扱いに関する例題を 1 つ、図形との融合問題を 1 つ挙げておくことにする．

＜例１＞

$a_1=a$ のとき、2 つの無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}na_n$ が収束してその和がそれぞれ $\alpha,\ \beta$ である.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n+a_{n+1})$ が収束することを示し、その和を $\alpha,\ \beta,a$ を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2a_n=0$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(a_n-a_{n+1})$ が収束することを示し、その和を $\alpha,\ \beta,a$ を用いて表せ.

(解) こうなると何のことやらさっぱりわからない．相当な手錬れでもパニックになりかねない．
しかし、**うろたえるな！**———1 つ 1 つ意味を解きほぐして行けばよいのだ.
(1) まずは小手調べだが、これを

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n+a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}na_n+\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}$$

それは、右辺の第 1 項の上にノッカッテイル ∞ と第 2 項の上にノッカッテイル ∞ とが同じ数値を表しているとは限らない．つまり、それぞれが収束して和をもったとしても、それは左辺の収束とは何のかかわりもないのである.

そういうときはどうするか．まず、などと、カッコをほどくような感覚で計算してもらっては困る———無限級数の場合は**たしざんの順序**を変えてはならないのだ．左辺にノッカッテイル ∞ を、たとえば $\boldsymbol{N}$**(有限)** に置き換える．そうすればたしざんの順序はどうやってもよいからそれで計算を進める．その上で $N\to\infty$ とするのである．つまり、まず N を有限として.

$$\sum_{n=1}^{N}n(a_n+a_{n+1})=\underbrace{\sum_{n=1}^{N}na_n}_{A}+\underbrace{\sum_{n=1}^{N}na_{n+1}}_{B}$$

ここで $N\to\infty$ とすれば $A\to\alpha$ は条件に与えられている.
問題は B の部分だが、これは**展開**して書いてみないとわからない.

$$\begin{aligned}B&=1\cdot a_2+2\cdot a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(N-1)a_N+Na_{N+1}\\&=(2-1)\cdot a_2+(3-1)\cdot a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(N-1)a_N+Na_{N+1}\\&=\sum_{n=2}^{N+1}(n-1)a_n\quad\longleftarrow\quad n=1\text{ のときは }\ (1-1)a_1=0\text{ だからこれを付け足す！}\\&=\sum_{n=1}^{N+1}(n-1)a_n\quad\longleftarrow\quad\text{ここでやっとバラせる！}\\&=\sum_{n=1}^{N+1}na_n-\sum_{n=1}^{N+1}a_n\to\beta-\alpha\ (N\to\infty)\end{aligned}$$

やっと正体が見えたではないか．すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n+a_{n+1})=\beta+(\beta-\alpha)=2\beta-\alpha$$

ということになる.

(2) これも同様に左辺にノッカッテイル ∞ を N(有限) に置き換えて計算を進める．その上で $N\to\infty$ とするのである．

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2a_n-\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2a_{n+1}\\
&\quad=\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2a_n-\sum_{n=2}^{N+1}n^2a_n\\
&\quad=\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2a_n-\left\{\sum_{n=1}^{N}n^2a_n+(N+1)^2a_{N+1}-1^2\cdot a_1\right\}\\
&\quad=\sum_{n=1}^{N}\left\{(n+1)^2a_n-n^2a_n\right\}-(N+1)^2a_{N+1}+a_1\\
&\quad=2\sum_{n=1}^{N}na_n+\sum_{n=1}^{N}a_n-(N+1)^2a_{N+1}+a_1\\
&\quad\to 2\beta+\alpha-0+a=2\beta+\alpha+a\ (N\to\infty)
\end{aligned}$$

と、まあこんな具合である．

＜例 2＞

直線 l の同じ側にあって，l に接し互いに外接する同じ半径 r_1 の 2 つの円 K_0, K_1 がある．l に接し K_0, K_1 に外接する円を K_2 とする．次に l に接し K_0, K_2 に外接し，K_1 とは異なる円を K_3 とする．以下，このように順次つづけて，l に接し K_0, K_n $(n\geqq 3)$ に外接し，K_{n-1} とは異なる円を K_{n+1} とする．K_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の半径を r_n とするとき

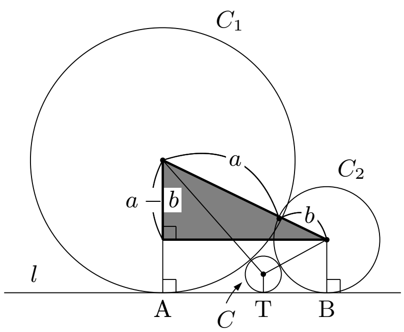
(1) r_2, r_3 を r_1 で表せ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}r_n$ の和を求めよ．

(解) 本題に入る前に，接する円とその接線についての**図形的な関係**について説明しておきたい．

右図で 3 つの円 C_1, C_2, C の半径をそれぞれ a, b, x とおくと

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=2\sqrt{ab}$$



この関係を 2 円 C_1と C, 2 円 C_2と C に用いると

$$\underbrace{2\sqrt{ax}}_{\mathrm{AT}}+\underbrace{2\sqrt{bx}}_{\mathrm{BT}}=\underbrace{2\sqrt{ab}}_{\mathrm{AB}}$$

$$\therefore\ \ \sqrt{x}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．その上で

(1) まず最初は $a=b=r_1$ とおいて次々に入れていく．

$$\sqrt{r_2}=\frac{r_1}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_1}}=\frac{\sqrt{r_1}}{2}\qquad\therefore\ \ r_2=\frac{r_1}{2^2}$$

$$\sqrt{r_3}=\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}=\frac{\frac{r_1}{2}}{\sqrt{r_1}+\frac{\sqrt{r_1}}{2}}=\frac{\sqrt{r_1}}{3}\qquad\therefore\ \ r_3=\frac{r_1}{3^2}$$

(2) r_n を求めなければならないが，どうやら (1) の結果から $\boldsymbol{r_n=\dfrac{r_1}{n^2}}$ が**推定**される．

そこで ① で $a=r_1,\ b=r_n$ とおいて得られる**漸化式**

$$\boldsymbol{\sqrt{r_{n+1}}=\frac{\sqrt{r_1 r_n}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_n}}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

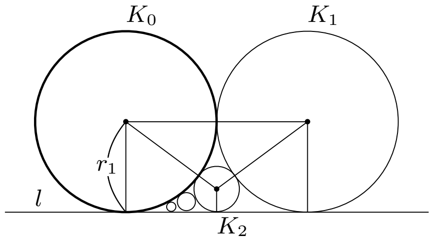
を用いて**数学的帰納法**という流れになるようである——もちろんそれでよい．
しかし，② をながめて何か思いつかないか——分母と分子をひっくり返すのだ．

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}}$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$ ，公差 $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$ の**等差数列**である．
すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+(n-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{n}{\sqrt{r_1}}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r_n=\frac{r_1}{n^2}}$$



かくして求める無限級数の和は

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n+1}r_n}_{\text{第 } N \text{ 部分和}}=r_1\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=r_1\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=r_1\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\to r_1\quad (N\to\infty)$$

＜補足説明！＞

ピカイチになるための 2 題は**チョッ**と**ハゲシ**かったか．しかし、ヒマラヤに登るには、まず山を眺め地図を調べるところから始まるだろう．

だから、今はトウゼン自力で解けなくてよい．それができるくらいなら私の出番がないではないか．しかし、よく見ておかなければならない．地図はおろか気象条件まで知っておかなければならないのだ．とりあえずは耳学問、目学問でよい．そのうち、君の現実になるときがくる．

ここで思いついたから入試対策を書いておこう．

(i) 入試の**全分野**を漏れなく体系的に見ておくこと．
(ii) 自力で解けなくてもよいから、**素性のよい超難問**を見ておくこと．

が大切である——まあ、すべての**刺激**は君が育つための**肥料**なのだ．

＜ **end.**＞

2.2.2 無限等比級数———和の公式

無限等比級数は無限級数の特別な場合である．

初項 a, 公比 r の無限等比級数は $a_n = ar^{n-1}$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表される．

第 $\boldsymbol{n}$ 部分和 $\boldsymbol{S_n}$ は”等比数列の和の公式”によれば

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \ (r \fallingdotseq 1)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であった——— $r = 1$ のときは $S_n = na$ で $a = 0$ のときは収束するが，これは ② の収束条件に含まれる．これで $a = 0$ のときのカタはつく．

”収束条件にのみ興味をもつ”われわれとしては，あとは ② で一般のハナシとして $\boldsymbol{a \fallingdotseq 0}$ のときのみに的を絞って考えればよい．

$\boldsymbol{r \fallingdotseq 1}$ のときは ② の収束条件は $\boldsymbol{r^n}$ の収束条件で，それは $\boldsymbol{-1 < r < 1}$ で，このとき

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 0}$$

であるから無限等比級数 ① は収束して和が存在する．

すなわち ① の和 S は

$$\boldsymbol{S =} (\lim_{n\to\infty} S_n =) \boldsymbol{\frac{a}{1-r} \ (-1 < r < 1)}$$

である———これを”無限等比級数の和の公式”といい，収束条件 $\boldsymbol{|r| < 1}$ のもとにいきなり使ってもよい．

$\boldsymbol{r \leqq -1}$**, または** $\boldsymbol{r \geqq 1}$ のとき，S_n は発散し，無限等比級数 ① の和は存在しない．

＜メモ＞

■ 無限等比級数の和の公式

　これは上述のように

$$\boldsymbol{S = \frac{a}{1-r}\ (-1 < r < 1)}$$

これはトウアンを書くときも第 n 部分和から $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 0\ (-1 < r < 1)}$ の説明をスキップできるので大変便利な公式である．ただし，この公式を使うには，**無限等比級数**であること，$\boldsymbol{-1 < r < 1}$ であること，そしてこれらのことから**収束して和が存在する**という**決まり文句**を必ず添えなければならない．

＜ 例 **1** ＞

無限級数

$$x + x(3-x) + x(3-x)^2 + \cdots\cdots + x(3-x)^{n-1} + \cdots\cdots$$

が収束する x の範囲を求め，その和を求めよ．

（解） 与えられた無限級数は初項 x，公比 $(3-x)$ の**無限等比級数**である．

　$x = 0$ のときは明らかに収束し，その和は 0 である．

　$x \fallingdotseq 0$ のときの収束条件は公比 $(3-x)$ に注目して

$$\boldsymbol{-1 < 3 - x < 1} \qquad \therefore\ -1 < x - 3 < 1 \qquad \therefore\ 2 < x < 4$$

このとき題意の無限級数は収束しその和は

$$S = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{1-(3-x)}} \left(= \frac{a}{1-r}\right) = \frac{x}{x-2}$$

ゆえに求める条件は

$$x = 0,\ \text{または}\ 2 < \mathrm{x} < 4\ \text{で，和は}\ \frac{x}{2-x}\ (x = 0\ \text{のときも含む})$$

である．

＜ 例 **2** ＞

循環小数 $3.1\dot{4}1\dot{6}$ を分数になおせ．

（解） 2 つのドットのついた部分が循環するから

$$\begin{aligned} 3.1\dot{4}1\dot{6} &= 3.1 + 0.0416 + 0.0000416 + \cdots\cdots \\ &= 3.1 + \frac{416}{10^4} + \frac{416}{10^4 \cdot 10^3} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

第 2 項以下は，初項 $\frac{416}{10^4}$，**公比** $\boldsymbol{0 < \frac{1}{10^3}} < 1$ の**無限等比級数**であるから，**収束して和が存在する**―――**和の公式！**

　ゆえに

$$3.1\dot{4}1\dot{6} = 3.1 + \frac{\frac{416}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 3.1 + \frac{416}{9990} = \boldsymbol{\frac{6277}{1998}}$$

＜ 例 **3** ＞

$|\,r\,| < 1$ として無限級数

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots\cdots + nr^{n-1} + \cdots\cdots$$

の収束，発散を調べよ．

（解）第 n 部分和 S_n は

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots\cdots + nr^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$
$$rS_n = \quad r + 2r^2 + 3r^3 + + \cdots\cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

①−② を計算すると

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \cdots\cdots + r^{n-1} - nr^n$$
$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$
$$\therefore \quad S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r} \to \frac{1}{(1-r)^2} \ (n \to \infty) \quad \longleftarrow \ \boldsymbol{(\ r^n \to 0,\ nr^n \to 0\ )}$$

■ ピカピカイチを目指して

無限等比級数に関する基礎知識は、おおむねここまでに述べたことで間に合うかと思う．ヤッカイなのは他の分野のあれこれとの融合問題の場合である．

ここでは、論理に関する知識がほんの少しあるだけで説明がかなり明快に進む問題を 2 題と空間図形の問題を 1 題挙げておく――タマにこういうものも見ておくことはよいことではある．

＜例 1＞

無限数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3} \cdots\cdots,\ \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots\cdots$ がある．このとき次の問に答えよ．

(1) いま，この無限数列の項をとり出して，初項 $\frac{1}{2^m}$ の無限等比数列を作るとき，この無限等比級数の和はどんな範囲にあるか．

(2) 次に，与えられた無限数列の項をとり出して無限等比数列を作ったら，その和が $\frac{1}{13}$ より小さく，$\frac{4}{61}$ より大きかったという．この無限等比級数の和を求めよ．

(解) (1) 公比は $0 < \frac{1}{2^r} < 1$ とおけるから，無限等比級数の和の公式を用いて

$$S(r) = \frac{\frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2^r}} \quad \longleftarrow \quad S \text{ は } r \text{ の増加に対して減少！}$$

ゆえに $S(r)$ のとり得る範囲は

$$\lim_{n\to\infty} S_n < S(r) \leqq S(1) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{1}{2^m} < S(r) \leqq \frac{1}{2^{m-1}}}$$

(2) まず，(1) の無限級数の和 $S(r)$ が $\frac{4}{61} < S < \frac{1}{13}$ を満たす場合がなくてはならない．

$$\frac{1}{2^m} < S(r) \leqq \frac{1}{2^{m-1}}, \qquad \frac{4}{61} < S < \frac{1}{13}$$

が共通範囲をもつということである――これをストレートに求めるのはチョッと難しい．

そこで，共通範囲がない場合の条件を求め，求める条件をその否定としてとらえるとわかりやすい――こういう見方を学んでほしいのだ．

そうすると共有範囲がない場合は、$S(r)$ 全体が S 全体の左側にある場合と右側にある場合があってそれですべてだから、この否定をとらえればよいわけだ．

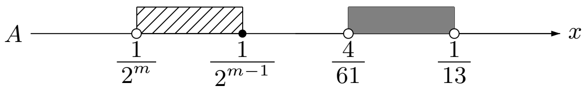
それぞれの場合を $A,\ B$ とおくと

$$\boldsymbol{\sim(A \cup B) = \sim A \ \cap \sim B}$$

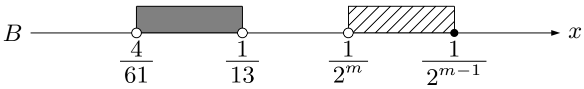
を利用する――これでかなりスッキリする

以下、数直線で確認する．

A は $\dfrac{1}{2^{m-1}} \leqq \dfrac{4}{61}$ だから，$\sim A$ は $\dfrac{1}{2^{m-1}} > \dfrac{4}{61}$　$\therefore\ m < 5$



B は $\dfrac{1}{13} \leqq \dfrac{1}{2^m}$ だから,$\sim B$ は $\dfrac{1}{13} > \dfrac{1}{2^m}$　$\therefore\ m > 3$



これらを同時に満たす m は $\boldsymbol{m = 4}$ でなければならない———これは**必要条件！　このとき条件を満たす** r は存在するか.

$$\frac{4}{61} < S(r) = \frac{\dfrac{1}{2^4}}{1-\dfrac{1}{2^r}} < \frac{1}{13} \quad \therefore\ \frac{3}{64} < \frac{1}{2^r} < \frac{3}{16} \quad \therefore\ \frac{16}{3} < 2^r < \frac{64}{3}$$

これを満たす r は $\boldsymbol{r = 3,\ 4}$ だが，それぞれについて $S(r)$ を求めると

$$S(3) = \frac{\dfrac{1}{2^4}}{1-\dfrac{1}{2^3}} = \boldsymbol{\frac{1}{14}}, \quad S(4) = \frac{\dfrac{1}{2^4}}{1-\dfrac{1}{2^4}} = \boldsymbol{\frac{1}{15}}$$（**十分！**）

＜ **例 2** ＞

$a,\ b$ は実数とする．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^n)$ が収束するとき点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を求め，これを図示せよ.

(解) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n) \fallingdotseq 0$ とすると与えられた無限級数は発散してしまうするから，これが収束するためには $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n) = 0}$ でなくてはならない———**必要条件！**

この必要条件をさらに具体的に追いつめ，**十分性を確認する**のだが，次のように場合を分けて考えるとよい.

(i) $\boldsymbol{|a| < 1}$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ だから，これを利用して b について**必要条件**を求める.

$$\lim_{n\to\infty} b^n = \lim_{n\to\infty}\{a^n - (a^n - b^n)\}$$

$$\longleftarrow \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta} \text{ **のとき** } \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} a^n}_{0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n)}_{0} = 0$$

$\therefore\ \boldsymbol{|b| < 1}$　$\longleftarrow$ でなければならない！

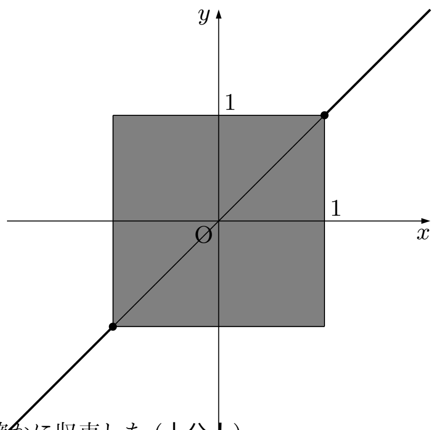
逆にこのとき，与えられた無限級数は収束するか———十分性の確認！

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N}(a^n-b^n)}_{\text{第 }N\text{ 部分和}}=\sum_{n=1}^{N}a\cdot a^{n-1}-\sum_{n=1}^{N}b\cdot b^{n-1}$$

$$=\frac{a(1-a^N)}{1-a}-\frac{b(1-b^N)}{1-b}$$

$$\to\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}\ (N\to\infty)\quad\longleftarrow\ \text{確かに収束した (十分！)}$$

(ii) $\boldsymbol{|a|\geqq 1}$ のとき $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=0}$ でなければならないから



$$\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=\lim_{n\to\infty}a^n\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}=0$$

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$ だから求める**必要条件**は

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=1$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=1\qquad\therefore\ \boldsymbol{b=a}$$

逆にこのとき $b=a$ だから

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N}(a^n-b^n)}_{\text{第 }N\text{ 部分和}}=\sum_{n=1}^{N}0\to 0\ (N\to\infty)\quad\longleftarrow\ \text{確かに収束した (十分！)}$$

以上 (i) (ii) をまとめると求める $a,\ b$ の条件は

$(\ |a|<1,$ かつ $|b|<1),$ または $(\ a=b\ )$

＜ 例 3 ＞

空間において，xy 平面上に 1 辺の長さが a の正三角形 ABC をおき，この $\triangle$ABC を底面とする正四面体 ABCD を作るものとする．ただし，頂点 D の z 座標は正とする．

(1) 頂点 D の z 座標を求めよ．

(2) いま，点 A から出発してつねに底面 ABC と一定の角度 θ をなして面 ABD 上を登る道を考える．この道と辺 BD との交点を A_1 とするとき，線分 AA_1 の長さ l_1 を求めよ．ただし，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ とする．

(3) 次に A_1 を出発し，面 BCD 上を (2) と同様に底面 ABC と角度 θ をなして登る道を考え，辺 CD との交点を A_2，線分 A_1A_2 の長さ l_2 とする．

以下，つぎつぎに隣の面にうつって同様なことを繰り返し，数列 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots$ が得られるものとする．

このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ の和を求めよ．

(解) (1) 各面は正三角形で頂点 D から底面の正三角形 ABC に下ろした垂線の足 O は $\triangle$ABC の重心だから

$$\mathrm{OD}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

(2) $\triangle \mathrm{DAA_1} \backsim \triangle \mathrm{DA_1A_2}$ だから $\mathrm{DA_1}=x$ とおいて $\triangle \mathrm{DAA_1}$ に余弦定理を用いると

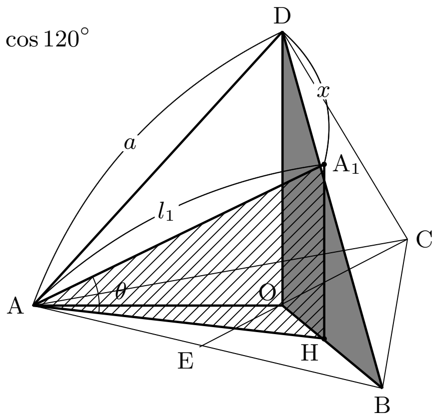
$$l_1^2=a^2+x^2-2ax\cos 60^\circ=a^2+x^2-ax \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

だから，この l_1 を a,x で表す上記とは別の方法があれば **a と x との関係**に持ち込める．

そこで，$\mathrm{A_1}$ から底面 ABC に垂線 AH を下ろすと H は線分 OB 上で，$\angle \mathrm{A_1AH}=\theta$ だから

$$\mathbf{AH}=\mathbf{AA_1}\cos\boldsymbol{\theta}=\frac{\sqrt{7}}{3}l_1 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

また，$\mathrm{OA}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ だが，**平行線と比例**の関係で $\mathrm{OH}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$，さらに $\triangle \mathrm{OAH}$ に余弦定理が使えて



$$\mathrm{AH}^2=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120^\circ$$

$$=\frac{a^2+x^2+ax}{3}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AH}=\sqrt{\frac{a^2+x^2+ax}{3}}$$

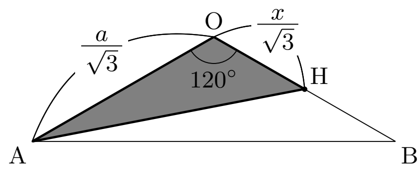
これを ② に入れると

$$\frac{\sqrt{7}}{3}l_1=\sqrt{\frac{a^2+x^2+ax}{3}}$$

$$\therefore\quad l_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{a^2+x^2+ax}$$

これを ① に入れて

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{a^2+x^2+ax}\right)^2=a^2+x^2-ax$$



整理して $0<x<a$ を考慮すると

$$2x^2-5ax+2a^2=0$$

$$\therefore\ (2x-a)(x-2a)=0 \qquad \therefore\ x=\frac{a}{2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AA_1}=l_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

(3) 求める無限級数は初項 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 公比 $\mathbf{0}<\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}<\mathbf{1}$ の無限等比級数だから**収束して和が存在することがわかり**

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}a$$

＜補足説明！＞

ピカピカイチという言葉は筆者の作った言葉ではない．あるとき 1 人の生徒がやってきて ”ぼくはまだ**イマイマイチ**なんです ”と言ったことがある．私は思わず噴出してしまった．

私は ”そんなオシャレなジョークが言えるなら君は大丈夫だよ ”と言っておいたが、何だか私が癒されてしまったようだ．本当に生徒は面白いことを考えるものである．

この**イマイチ**というイベントの名称は 2001 年、この試みの発足にあたり、担当のスタッフと私とで決めたような気がするが、今となるとそれも定かではない．

ともあれ、生徒の**自己診断**の印象としてはとしては

イマイマイチ < **イマイチ** < **ピカイチ** < ピカピカイチ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・(∗)

になるようである．しかし、そんなことは関係がない．いつも言うことだが「現在ただいまの君がいつも出発点」であるという現実を認めなさい．ハナシはそこから始まるのです．

アンケートを読むと、たまに ”もっと**問題演習**をやってほしい ”というのがある———やりたければ自分でやればよいではないか．おそらく君たちの手元には、買ったばかりで手もつけていない問題集などが数冊はあるはずである．また、本屋にはその手のものがヤマのようにある．

そういうことより、問題演習を云々する前にやっておくべきことがある．それは、自分の立ち向かっている数学という科目がどういう科目かということに対する**おぼろげな理解**とでも言っておこうか．この冊子はそのために、私から君たちに**ある水準**を提示したものと思ってもらえばよい．

これに足りている人は結構だし、足りないと思う人はこれを**踏み台**にして乗り越えていけばよい．ここには**それらを粉砕するためのノウハウのすべて**を系統的にツメ込んである．

まずは、これをシッカリと読んでもらいたい．そうすれば、この方法論ならどの問題集にもテキストにも、実際の入試問題にも対応できることをナットクしてもらえるだろう．

要は、入試問題を**君の力で、君の知恵で、解きほぐし、叩きのめす**のだ．それを私がやって見せたのでは私の実力がついて君が空転してしまう———それでは仕方がない．結果として君の実力がつかないことには何にもならないではないか．

その意味でもこの冊子は上記の (∗) のすべての諸君に適合しているのである———安心してしがみついてよいことを書き添えておきます．

< end.>