はしがき

あえて「イマイチ」

なぜ「イマイチ」かと言われると困ってしまうが、とにかく今、数学で自分の立ち位置がヘンだと思っている諸君を何とかしよう という講座である．

次に聞かれるのは「レベルは？」ということだが、これも関係ない．私はそういう「切り口」で生徒を見たことがない．しかし、**やる気**だけは持ってきてもらいたい．

何がヘンなのかがわかればもうヘンではないのだ．こまごまとしたことはここには書かない．受けてもらえば自然にわかると思う．

この冊子の意味

街の本屋の棚を見てもらいたい．こう言ってははばかるが、問題集はヤマのようにあっても、**基本原理**をキッチリと書いた参考書らしいものはほとんど見かけない．そして受験生は問題集のことを参考書だと思っているらしい．

それに、困ったことに諸君は、問題をたくさん解いて練習すれば実力がつくと思っているようだ．しかし、それはちょっと当たっているが大きくまちがっている．

そこで、私としては自前で「それらしいモノ」を書くことにした．このテキストは私がパソコンを打ち、河合塾のスタッフに作ってもらったいわば**手作り**の**特注品**である．

実際、60 歳を過ぎてのパソコンは少々キツかった．夜中まで血圧を気にしながら人差し指でキーボードをつつく爺さんを想像できるか———正気の沙汰ではない．

まあ、それやこれやでとにかくできた．君たちがつかまっても沈没しない「**べた書き筏(いかだ)**」は、ほぼ完成した．これには安心してしがみついてよい．

ここでハッキリ言っておくが、易しいことは易しいし、難しいことはやはり難しい．これは仕方がない．まして数学が君に擦り寄ってくることなどあろうはずがない．

だから、どうしても超えなければならないヤマならば、君が出かけて行って君の実力で打ち破るほかはないのである．ここにはそのための道具がすべてつまっている．

筆者としては、大学に進もうとする若者が知っているべき最小限のことがらを、その将来を見据えて、なるべく順序だてて「**べた書き**」にしたつもりである．

若者には無限の可能性がある

この歳になって振り返ってみると「人生は意外に短いなあ」とつくづく思う．私にも君の年齢があった．何もわからずウロウロと極楽トンボをやっていたのであろう．

生きるということは次々に可能性を剥奪されることなのです．まず、やりたいことを決めなさい．そして、それに向かって全力で頑張れ．道は君の後にできるものだ．

ハラを括るのは今、先に延ばせばそれだけ困難になる．爺さんになったから言えることだが、君たち若者が本気になってやれないことなどあるわけがない．

才能？、そんなものはやっているうちに出てくるよ．何でもやってみなければわかるものか．自分では何も気がついていないだろうが、君の人生はまだ始まってもいない．すべては今から始まるのです．

2015 年 4 月 17 日　　諸橋　実

＜追記＞

数学ってナンダ

まあ、いろいろな立場からいろいろな考え方があろうが、私はここで数学はキレイだとか、数学はすばらしい、などというつもりはサラサラない．しかし、とりあえず

数学とは**数と量**に関する**言語**である

ということは誰もが素朴に認める共通認識としてもよかろう．まず、ここからはじめよう．

その上でこの科目をサボルとどうなるか．結果、数と量に関する認識があいまいになり、それにかかわるコミニュケーションが破綻する———これは世界の半分を失うことではないか．

何も専門家になれというのではない．しかし、そのことから人々の「判断の信頼性」が失墜し、社会そのものの崩壊にもつながるハナシなのだ．だから本来、どうしてもこの科目を避けて通ることはできない．そういうことなら、いっそハラを据えて徹底的にやればよいではないか．

ヤルなら効率よく

私は「問題演習をドンドンやればデキルようになる」という信仰を否定するつもりはない．確かにそういう一面もある．しかし、去年の問題も、一昨年の問題も解いて、····· のようなことをしていたのでは「来年出るはずの問題」も練習をしなければならなくなるのではないか．

しかし、この科目はタダの暗記科目ではない．数学はその個々の概念が、「関係」として**体系的に構成されている**という特殊な性質がある．だから、何年の何大学の問題である、というような切り口からではその問題の核心に届かない———その問題の、数学としての根っこを捕まえてザックリやるしかない．たとえば確率の例でいうと、素人 (生徒) サンは

さいころの問題、くじ引きに問題、袋から球を出す問題、·····

のように、みんなちがうハナシに見えてしまう．しかし、数学としての立場はちがう．つまり

数学的確率の定義、加法定理、条件つき確率、乗法定理、·····

と数学の体系に沿って考える．要するに「さいころの問題」と「くじ引きの問題」は素材がちがっても、数学的確率という同じ体系のカケラなのだ．それは、去年の問題も一昨年の問題も、はたまた来年出る問題も、東大の問題も早稲田の問題も、結局は同じマナイタで調理さたモノなのである．そういうことなら、こちらとしても個々の知識をバラバラに覚えるのではいかにも非効率である．だったら、その体系ごとゴッソリとさらってしまえばよいではないか．

公式について

あるとき教室で「自分で証明できない公式は使うな！」と言ってみたのだが、そのときの反応がおもしろかった．どうやら、そういうことは考えてみたこともないらしいのである．

大体、自分で確かめてもいないことを振り回す根性も気に入らないが、それより、そういうことではその公式が正しく使えているとは思えない．公式というのは、それぞれの数理現象をとりまとめて数式などで簡潔に表したものだからうまく使えば便利なものではある．しかし、その背景を正しく把握していないと十分に使いこなせない．そういうものなのである．

つまり公式は、先に述べた「数学の体系」で言えば骨に当たるものであろう．しかし、タダの骨だけでは何の役にも立たない．君の手でその証明を確認し、その意味を探り、時には感動もし、そういうことを通して君にとって血の通った道具にしなければ意味はない．実際、使い物にもならない．それでこそ、その有難さもわかってくるというものだ．ラクをした分のツケは大きいぞ．

別人になろう

まず、「知る」と言うことはどういうことか．あるとき授業の後で、「今、言ったことを全て忘れてもらって、全くなかったことにしよう」と言ったら、「それはできない」と言う．

そうです．知るということはそういうことなのです．つまり、知る前の君と知ってからの君とは全くの**別人**なのです．一旦知ってしまったことを忘れてもとの君にはもどれない．

「知る」ことにより、そして**「考える」**ことにより、人は強くなる．生涯、人は強くなり続けるしかない．だから、君の闘う相手は他人ではなくて君自身であり、良くも悪しくも君のいま立っている所がつねに君の出発点 なのです．それが生きることの基本原理なのだと私は思います．

2015 年 6 月 20 日　　著者記す

目 次

第 1 章　微分法とその応用 **7**
1.1　関数の極限，連続 8
1.1.1　関数の極限 9
1.1.1.1　極限を表す記号 9
1.1.1.2　極限値の四則計算 10
1.1.1.3　極限と論理———分数関数の極限と不定形 14
1.1.2　関数の連続 16
1.1.2.1　連続の定義 16
1.1.2.2　連続関数 17
1.2　微分係数と導関数 19
1.2.1　微分係数 20
1.2.1.1　平均変化率 20
1.2.1.2　微分係数 21
1.2.2　導関数 24
1.2.2.1　導関数の定義 24
1.2.2.2　導関数についての基本の公式 25
1.2.2.3　合成関数の微分とその応用 28
1.3　三角関数, 指数関数と対数関数 の微分 31
1.3.1　三角関数の微分 32
1.3.1.1　三角関数の極限 32
1.3.1.2　三角関数の微分 36
1.3.2　指数関数，対数関数 の微分 38
1.3.2.1　e の導入 38
1.3.2.2　指数関数，対数関数の微分 42
1.4　関数の増減と導関数の符号，平均値の定理 46
1.4.1　ロルの定理から平均値の定理へ 47
1.4.1.1　ロルの定理 47
1.4.1.2　平均値の定理 49
1.4.2　関数の増減と導関数の符号 53
1.4.2.1　単調増加の定義 53
1.4.2.2　導関数が ” 正 ” の区間では単調増加である 54
1.5　関数のグラフ 57

1.5.1 関数のグラフ 58
1.5.1.1 増減と極値 59
1.5.1.2 凹凸と変曲点 60
1.5.1.3 漸近線 62
1.5.2 最大 · 最小 65
1.5.3 方程式，不等式への応用 66

第 2 章 積分法とその応用 69
2.1 不定積分 70
2.1.1 不定積分とは何か 71
2.1.1.1 不定積分の定義 71
2.1.1.2 不定積分の基本的性質 72
2.1.1.3 不定積分の基本公式 73
2.1.2 置換積分 74
2.1.2.1 置換積分の基本原理 74
2.1.2.2 典型的な置換積分 76
2.1.3 部分積分 79
2.1.3.1 部分積分の基本原理 79
2.1.3.2 典型的な部分積分 81
2.2 定積分 83
2.2.1 定積分とは何か 84
2.2.1.1 定積分の定義 84
2.2.1.2 定積分の基本的性質 85
2.2.2 置換定積分 88
2.2.2.1 置換定積分の基本公式 88
2.2.2.2 置換定積分の応用例 91
2.2.3 部分定積分 93
2.2.3.1 部分定積分の基本公式 93
2.2.3.2 部分定積分の応用例 94
2.2.4 周辺の諸問題 96
2.2.4.1 周期関数と積分 97
2.2.4.2 積分と不等式 103
2.3 微積分学の基本定理 110
2.3.1 面積と無限級数の和 111
2.3.2 微積分学の基本定理 114
2.3.2.1 積分に関する平均値の定理 114
2.3.2.2 微積分学の基本定理 117
2.3.2.3 無限級数の和と原始関数の増分 120
2.4 面積，体積，他 123

2.4.1 面積を求める基本原理 124
2.4.2 定積分と体積 127
2.4.2.1 体積を求める基本原理 127
2.4.2.2 回転体の体積 128
2.4.2.3 体積の計算と体積変化率 132
2.4.3 曲線の長さ 135
2.4.3.1 定積分と連続変量の総和 135
2.4.3.2 曲線の長さの計算 136

第 3 章 さらなる展開のために 137
3.1 サイクロイドとそのファミリー 138
3.1.1 コモンサイクロイド 138
3.1.2 ハイポ (内側) サイクロイドからアステロイドへ 139
3.1.3 エピ (外側) サイクロイドからカージオイドへ 143
3.2 その他の曲線 147
3.2.1 カテナリー (懸垂曲線) 147
3.2.2 等角うずまき線 150
3.2.3 レムニスケート (連珠形) 152

第1章　微分法とその応用

1.1　関数の極限，連続

筆者の独断と偏見でハナシにメリハリをつけよう．

ホントウにやりたいことは微分係数から導関数，そして増減を調べてグラフを描いたり，最大値，最小値を求めたりすることなのだ. その意味では関数の極限，連続などはそのための基礎工事である．しかし，この部分のスッタモンダが長すぎるので初学者がへたばってしまう．教師である筆者でさえイイカゲンニセエ！と思うほどである．

さりとてここをサボルと建物はゆがむか，またはヘタをすると倒壊する．ここのところはなんとも悩ましい事情にあるのだ．

したがってここを初めて読む人は決して急ぐことはない．頂上を目指すクライマーのように足元に注意して，時には周辺の景色を眺めながら 1 歩ずつ確実に進むことが大切である．筆者としても読者の状況を思い浮かべながら必要最小限のことを，なるべく効率よく, そして説明の飛躍がないよう，前後の取り違えや欠落がないよう最善の注意を払いながら書き進めることにする．

それでは，記号の説明からソロリと入ることにしよう．

1.1.1　関数の極限

1.1.1.1　極限を表す記号

まず記号 **lim** だが，**数列の極限**のときと同様**リミット**と読み，以下を意味している．

x の関数 $f(x)$ において $\boldsymbol{x}$ **が限りなく定数** $\boldsymbol{a}$ **に近づく** とき **関数** $\boldsymbol{f(x)}$ **の値が定数** $\boldsymbol{b}$ **に限りなく近づくならば，** $\boldsymbol{f(x)}$ **は** $\boldsymbol{b}$ **に収束する** といい, この状況を記号で

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \text{ あるいは } \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \boxtimes$$

$$f(x) \to b \ (x \to a) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \boxtimes$$

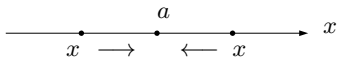
と表す．そして $\boldsymbol{b}$ をこのときの**極限値**という．

また，収束しない場合を**発散する**といい，トウゼン極限値は存在しない．

＜メモ＞

■ $\lim_{x\to a} f(x)$ について．

”x が a に限りなく近づく”場合，単純に考えて**大きい方から近づく**場合と**小さい方から近づく**場合がある．



そこでそれらを区別するときは次のようにその区別が一目でワカル記号を用いて表す．

数列の極限では「 $\lim_{n\to\infty}$ 」**1 本ヤリ**であったが**関数の極限**ではそうはいかないのだ——**同じところとちがうところ**を確かめながら読み進めるとよい．

これを記号で区別して表すには

(1) $\lim_{x\to a-0} f(x) \longleftarrow$ $\boldsymbol{x}$ **が小さい方から** $\boldsymbol{a}$ **に近づく**（**左方極限** という！）

(2) $\lim_{x\to a+0} f(x) \longleftarrow$ $\boldsymbol{x}$ **が大きい方から** $\boldsymbol{a}$ **に近づく**（**右方極限** という！）

のようにする．そして $\lim_{x\to a} f(x) = b$ は，この (1) と (2) が**ともに収束**し，かつそれが $\boldsymbol{b}$ **に等しい**ことを意味している．すなわち

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = b \ \left(\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b \text{ のこと！} \right)$$

であることを意味している．

発散する場合は，∞，$-\infty$，**振動する**，という 3 つの場合が考えられるが前 2 者は

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$$

などのように表す．

”**振動する**”**状況**を一括して表現する記述はない．

■ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ について．

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ の扱いは**数列の極限**の場合とほぼ同じと考えてよい．

また「 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$」のときは $x = -t$ とおいて $t \to \infty$ とすれば上記と同様に扱うことができる——置き換えないと**必ずマチガエル** ぞ．

1.1.1.2　極限値の四則計算

実際の極限の問題では，まず与えられた $\boldsymbol{x}$ の関数に $\boldsymbol{x \to a}$ を実行（$\boldsymbol{a}$ を代入）するのだが，1 パツで**有限確定値**になるならハナシは簡単だ．そもそも問題にもならない．

それが

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty \times \mathbf{0},\ \infty - \infty \longleftarrow \text{不定形という．}$$

の**カタチ**になったりする問題がある——見た目では**収束，発散が見えない**のだ．

このような場合は**数列の極限**のときと同様に，**見える形に同値変形**（因数分解，分母子を x で割る，有理化など）をして考えるが，そのためには**計算に関する約束事**をまとめて**整備**しておく必要がある．以下，列記する．

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき, 次の関係式が成立する——いずれかが**発散**するときは**論外！**

$$\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta \text{ (複合同順)}$$
$$\lim_{x \to a} \{kf(x)\} = k\alpha$$
$$\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ (ただし, } g(x) \neq 0, \beta \neq 0 \text{)}$$

また，つねに $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ のとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \text{ ならば } \lim_{x \to a} h(x) = \alpha \longleftarrow \text{はさみうちの原理！}$$

が成立する．

＜メモ＞

■ 計算実行の方向性

上記の公式は，見ただけでは”左辺を計算すれば右辺になる”というだけのことでしかないが，実際に極限を調べる**現場カンカク**で言うと，まず与えられた x の関数を眺めて $\boldsymbol{\alpha}$ **に収束する** $\boldsymbol{f(x)}$，$\boldsymbol{\beta}$ **に収束する** $\boldsymbol{g(x)}$ **を予測して，その方向を目指して式を組み立てていく**という実務的な**作業**になる．

これは、現段階（微分のごく入り口）では**分母子を因数分解して 0 に収束する要素を排除する**，あるいは**有理化して分母子の次数を揃えて** $\boldsymbol{x}$ **の最高次数のもので割る**という程度のことでしかないが，三角関数や指数・対数関数の極限になると

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,\quad \lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1, \cdots\cdots$$

などを目がけて式変形を進めるなくてはならない．

そして、その計算だが

（i）まず，**上記の公式**にしたがって**収束する形ものを先に**組み立てる．
（ii）あとは**残り部分を整理**して**収束する形**をさがす．

の要領で進めばよい．

はさみうちの原理を利用するタイプでは，両端の関数 $f(x)$, $g(x)$ が同じ値に収束することが条件だからそれを目指して式変形を実行すればよい．

■ 記号「$\lim_{x \to a}$」をサボル書き方

数列の極限の場合と同様に，ここでも「$\boldsymbol{\lim_{x\to a}}$」をサボって簡略に表そう．

＜例 **1**＞

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ を求めよ．

（解）まず,「$\displaystyle\lim_{x\to 1}$」以下をながめると，これは $\boldsymbol{\frac{0}{0}}$ の不定形である．

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x^2+x-2} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \quad \longleftarrow \text{因数分解して } \mathbf{0} \text{ にナル因数を約分してなくす！}\\ &= \frac{x+1}{x+2}\\ &\to \frac{2}{3}\ (x\to 1) \quad \longleftarrow (\ \boldsymbol{x\to 1} \text{ だから } \boldsymbol{x=1} \text{ とおく！})\end{aligned}$$

で，ちょっと**トク**をした気がする———同じ意味だから「lim」をつけるかつけないかは場合によって**使い分ける**とよい．

＜例 **2**＞

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ．

（解）$\boldsymbol{x\to -\infty}$ のときは**必ず** $\boldsymbol{x=-t\ (t\to\infty)}$ とおけ！

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{-t-2}{\sqrt{(-t)^2-1}} = -\frac{t+2}{\sqrt{t^2-1}} \longleftarrow -\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ の不定形！}\\ &= -\frac{1+\frac{2}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} \quad \longleftarrow \quad \sqrt{t^2-1} \text{を 1 次式とみて 分母子を } \boldsymbol{t} \text{ で割ると見える！}\\ &\to -\frac{1}{1} = -1\ (t\to\infty,\ x\to -\infty)\end{aligned}$$

となり**これが正しい**．

これをいきなり，もとの式の分母子を x で割ると

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \quad \longleftarrow \quad \text{分母子を } x \text{ で割った，ここが間違い！}\\ &\to \frac{1}{1} = 1\ (x\to -\infty)\end{aligned}$$

とやりかねない———なぜ間違いか．

それはまず，$x\to -\infty$ だから $\boldsymbol{x<0}$ である．

一方，**平方根号の規約**により $\sqrt{\cdots}\geqq \mathbf{0}$ である．だから，これを $x<0$ で割るときは**前にマイナスの符号**をつけて

$$-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \quad \longleftarrow \quad \text{このマイナスを忘れる のだ！}$$

としなければならないのだ———**置き換えれば絶対に間違えない！**

＜例 3＞

$\lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2-4})$ を求めよ．

（解）このままの形では $\infty\cdot(\infty-\infty)$――これではナンダカわからない．

有理化などの同値変形をしながら収束する形に組み立てる．

$$
\begin{aligned}
x(x-\sqrt{x^2-4}) &= x\cdot\frac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}} \longleftarrow \text{分母子 (分母 1) に } \boldsymbol{x+\sqrt{x^2-4}}\text{をカケル！}\\
&= \frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4}} \longleftarrow \frac{\infty}{\infty}\text{の不定形，分母子を } \boldsymbol{x} \text{ で割る！}\\
&= \frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \longleftarrow \text{やっと見えた！}\\
&\to \frac{4}{1+1} = 2\ (x\to\infty)
\end{aligned}
$$

■ あらためて記号「$\lim_{x\to a}$」の真髄（シンズイ）

上記の＜例 1＞を用いて説明するが，問題の核心にストレートに迫るために置き換えをする．

条件は $x\to 1$ だから x と 1 との差が 0 に近くなる．そこで $x-1=h$ とおくと，$x=h+1$ であるからハナシは $h\to 0$ に置き換わる．すなわち

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2} &= \lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^2-1}{(h+1)^2+(h+1)-2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h^2+3h} \quad \longleftarrow h\neq 0 \text{ だから約分する！}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h+2}{h+3} = \frac{2}{3} \quad \longleftarrow (\ h\to 0 \text{ だから } h=0 \text{ とおく！})
\end{aligned}
$$

となるが，どこがヘンではないか．先に $h\neq 0$ と言ったすぐあとで $h=0$ としている――それはおかしい．ここを，何らかの形でクリアしないと極限の議論は乗り越えられない．

大体が”h が 0 にナル”，とか”$\frac{h+2}{h+3}$ が $\frac{2}{3}$ にナル”とかの言い方は正しいか――そこにこの記号「lim」のズルイというかウマイというか，なかなかの巧妙さがある．

この議論で，まず $h\neq 0$ は正しい．このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{h+2}{h+3} = \frac{2}{3}$$

この式で，あくまで $\frac{h+2}{h+3}\neq\frac{2}{3}$ なのだ．これが等しいなら記号「$\lim_{x\to 1}$」はいらないではないか．$\frac{2}{3}$ は $\frac{h+2}{h+3}$ が，目指して永久にたどり着くことのできない目標なのだ――ヘンではない！ 一般の場合でいえば

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \longleftarrow f(x) \text{ と } b \text{ とは”ちがうもの”なのだ！}$$

したがって，すべての x に対して $f(x)>0$ であったとしても $b>0$ とは限らない．$b=0$ も想定の範囲に入れて $b\geqq 0$ で扱わなければならない．このことから

$$\text{つねに，} f(x)<g(x) \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$$

のように等号をつけて答えなければならない．

■ はさみうちの原理———ダメ押し！

上述の不等関係から

$$\text{つねに，}\boldsymbol{f(x) < h(x) < g(x) \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} h(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)}$$

が成り立つ．ここで，不等式の両端に注目すると

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b \longrightarrow \text{仕方なく} \lim_{x\to a} h(x) = b}$$

である———これを**はさみうちの原理**という．

一般には条件の不等式に**等号**を入れて”$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ のとき”と説明されるようである———想定のところがハナから満たされているのだからトウゼン成り立つ！

これは**実例**で説明しておこう．なかなかよい例がある．

＜例＞

$[\,x\,]$ を x を超えない最大整数として $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\,\frac{x}{3}\,\right]}{x}$ を求めよ．

(解) まず，**ガウス記号** $[\,\boldsymbol{x}\,]$ から説明しよう．

$[\,\boldsymbol{x}\,]$ は $\boldsymbol{x}$ **を越えない最大整数** (x の整数部分) であるから，これを k とおくと

$$\boldsymbol{k \leqq x < k+1 \longleftarrow \text{基本原理としての表現！}}$$

である．しかし，$\boldsymbol{k = [\,x\,]}$ は x がカッコの中に**カンヅメ**になっているので，ここで $x \to \infty$ などとしても**カンヅメ**の中に直接に影響は及ばない．したがってこのままでは使えない．

そこで右側の不等式で（+1）を左辺に移項して

$$\boldsymbol{x - 1 < k \leqq x \longleftarrow \text{使い勝手のよい形の表現！}}$$

のように**不等式を組みかえる**———<u>**カンヅメを ナマの $\boldsymbol{x}$ ではさむ**</u> ことができた．

このハナシを本問に適用させてみよう．

$$\frac{x}{3} - 1 < \left[\,\frac{x}{3}\,\right] \leqq \frac{x}{3} \qquad \therefore\ \frac{1}{3} - \frac{1}{x} < \frac{\left[\,\frac{x}{3}\,\right]}{x} \leqq \frac{1}{3}$$

ここで $x \to \infty$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) \leqq \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\,\frac{x}{3}\,\right]}{x} \leqq \frac{1}{3} \ \longleftarrow \text{左側の不等式 に 等号 がついている！}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}$ だから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\,\frac{x}{3}\,\right]}{x} = \frac{1}{3} \longleftarrow \text{はさみうち！}$$

1.1.1.3　極限と論理———分数関数の極限と不定形

ここは特に**キッチリ**とわかってもらおう.

分数関数の極限

$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = 0}$ のとき

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = b} \text{ (有限確定値)} \longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to a} g(x) = 0}$$

であるが**逆は成り立たない**.

（証明）**背理法**を用いて証明する.

$\boldsymbol{\lim_{x\to a} g(x) \neq 0}$ と仮定 すれば, $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = 0}$, すなわち 分母 $\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty, -\infty$$

となって $\boldsymbol{b}$ が**有限確定値であることに反する** から

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} g(x) = 0}$$

でなければならない（**必要条件**）.

逆が成立しないことの証明は**反例**をあげればよい．たとえば

$$f(x) = (x-a)^2 \to 0 \ (x \to a), \quad g(x) = x - a \to 0 \ (x \to a)$$

とすれば

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x-a}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a} \to \infty \quad \text{または} -\infty$$

となり，有限確定値とはならない**反例**をさがすことができた———**逆は成り立たない**.

（注）$\boldsymbol{\frac{g(x)}{f(x)}}$ が**有限確定値** $\boldsymbol{b}$ **に収束する**ことに注目して，背理法を使わずに次のように証明してもよい．すなわち

$$g(x) = \boldsymbol{\frac{g(x)}{f(x)}} \cdot f(x) \to b \cdot 0 = 0 \ (x \to a)$$

<メモ>

■ **極限と論理——-有限確定と必要十分**

本文の内容は $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = 0}$ (分母 $\to 0$) のとき，$\boldsymbol{\lim_{x\to a} g(x) = 0}$ (分子 $\to 0$) は

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = b} \text{ (有限確定値 !)}$$

であるための **必要条件ではあるが十分条件ではない**———逆が成り立たないことをいっている！

つまり，左辺の分数形の関数が収束するためには，左辺が $\frac{0}{0}$ の **不定形**でなければならないが，もしそうであっても**収束するとは限らない**———トウアンも，その**必要性**と**十分性**がワカルよう

に書かなければならない.

＜例＞

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}=5$ のとき，定数 a,b の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+x+2}-(ax+b)\}=0$ となるような定数 a,b の値を求めよ.

(解) (1) まず，右辺の 5 が有限確定値であることに注目すべし！このとき $x\to 1$ ならば **分母 $\to$ 0** であるから，$x\to 1$ ならば **分子 $\to$ 0** であることが必要 (ココ！) である．すなわち

$$a\sqrt{x^2+3x+5}+b \to 3a+b=0\ (x\to 1) \qquad \therefore\ b=-3a$$

逆に，このとき（ココ以下！）

$$\begin{aligned}
\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1} &= \frac{a\sqrt{x^2+3x+5}-3a}{x-1}\\
&= a\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3}{x-1} \longleftarrow \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\text{の不定形 だから分子を 有理化！}\\
&= a\cdot\frac{(x^2+3x+5)-3^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5}+3)}\\
&= a\cdot\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5}+3)} \longleftarrow \text{因数分解 して 約分！}\\
&= a\cdot\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+5}+3}\\
&\to a\cdot\frac{5}{6}=\frac{5a}{6}\ (\ x\to 1\ )\ \text{（ココで十分！）}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{5a}{6}=5 \qquad \therefore\ a=6, \qquad \therefore\ b=-18$$

(2) これはあとで漸近線を求めるときに必要になる議論だが，準備をかねてここでチョッとだけ見せておこう———与えられた { } から x をくくり出しておくのがポイント！

$$x\times\underbrace{\left\{\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right\}}_{A}\to 0\ (x\to\infty)$$

だが，ここで $x\to\infty$ だから $A\to 0$ が必要である．すなわち

$$A=\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\to 1-a=0\ (x\to\infty) \qquad \therefore\ a=1$$

逆に、このとき

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+2}-ax &= \sqrt{x^2+x+2}-x \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{\infty-\infty}\text{(不定形) だから 有理化！}\\
&= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad \longleftarrow \quad \frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}\text{(不定形) だから 分母子を } \boldsymbol{x} \text{ で割る！}\\
&= \frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=b\ (x\to\infty)\ \text{（十分！）}
\end{aligned}$$

1.1.2　関数の連続

1.1.2.1　連続の定義

連続とは，要するにツナガッテイルということである．このことは数式を用いて次のように表される．

すなわち，$f(x)$ の $x=a$ における連続条件は

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

である．ただし，上記は等式１本の記述だが，その内訳は

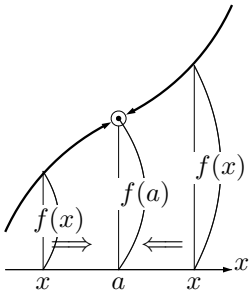
(i) $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)}$ が存在すること

$\longleftarrow \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$（=有限確定！）

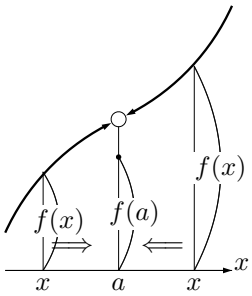
(ii) 関数値 $\boldsymbol{f(a)}$ が存在すること $\longleftarrow$ 関数値の存在！

(iii) その上でこれらが等しいこと．

であることを意味している．メンドウだが１つ１つ確認しなければならない．



$x=a$ で連続



$x=a$ で不連続

（注 1）右の不連続の例は (i)，(ii) は満たすが (iii) を満たさない場合の例である．
(i)，(ii) のいずれかが不成立ならば (iii) が成り立つワケがない．

（注 2）そもそも実数の連続そのものについてキチンと議論するのは大変難しいのでここでは触れない．大学でシッカリ時間をかけて勉強してもらいたい．

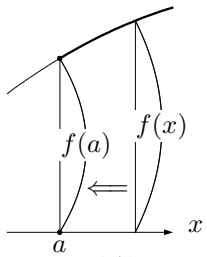
1.1.2.2　連続関数

関数 $f(x)$ が，**区間 $\boldsymbol{I}$ のすべての $\boldsymbol{a}$ について** 上記の**連続条件**を満たすとき，$f(x)$ は **区間 $\boldsymbol{I}$ において連続** であるという．

特に閉区間 $[\,a,b\,]$ などの**端点における連続性**は，たとえば右図のような**区間の左端**では

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \longleftarrow x = a \text{ で右側連続！}$$

と表す———**区間の右端**における**左側連続**も扱いも**同様**である．つまり a を b に，$a+0$ を $b-0$ に置きかえればよい．



右側連続の例

なお，連続関数には次に示す重要な性質がある．

連続関数の基本的性質

閉区間 $[\,a,b\,]$ で連続な関数 $f(x)$ は次の性質を持つ．

(1) その区間で **最大値 $\boldsymbol{M}$, 最小値 $\boldsymbol{m}$** が存在する．（**最大値，最小値の存在定理**）

(2) $m < k < M$ である任意の実数 k に対して

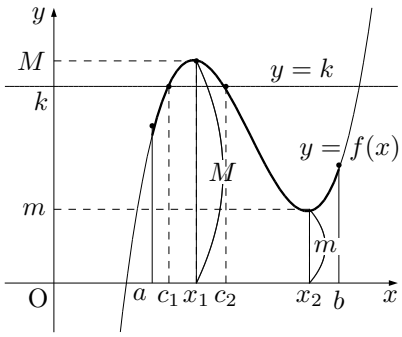
$$\boldsymbol{k = f(c)\ (a < c < b)}$$

となる**実数 $\boldsymbol{c}$ が少なくとも 1 つ**は存在する．（**中間値の定理**）

（**解説**）(1),(2) とも，**直感的にワカル！**

(2) は $y = f(x)$ のグラフを描くと，これは**切れ目のない曲線**である．

だから、x の値を a から b まで**連続的に変化**させればこの状況はおおむね了解できると思う．



（**注**）この定理がシッカリ顔を出すのは，このあと方程式の実数解，特に**微積分学の基本定理**である．

ここでは**微積分全体**の中で <u>**連続関数のもつ最も基本的で重要な性質**である</u> ことの確認にとどめる．

＜メモ＞

■ **中間値の定理の一般的な表現**

中間値の定理は次のような形でも記述される．

中間値の定理

関数 $f(x)$ が **閉区間 $[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]$ で 連続**で，$f(a) \neq f(b)$ であるとする．
このとき **$\boldsymbol{f(a)}$ と $\boldsymbol{f(b)}$ との間（中間）の任意の実数を $\boldsymbol{k}$** とすると

$$\boldsymbol{f(c) = k}\ (a < c < b)$$

を満たす c **が少なくとも 1 つ**は存在する．

本文 (2) の表現はこの表現の a,b を最大値，最小値をとる x の値，x_1，x_2 で置き換えたときのハナシと考えればよい———x_1 と x_2 との間に少なくとも 1 つの c があるではないか．

この形で $\boldsymbol{k=0}$ とおくと $\boldsymbol{f(a)}$ と $\boldsymbol{f(b)}$ は異符号 で，このことを数式で書くと

$$\boldsymbol{f(a)\cdot f(b)<0}$$

で、これは方程式 $\boldsymbol{f(x)=0}$ が，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との間に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件 に他ならない———これはよく出てくるハナシだ.

■ ” フツウの関数 ” は連続関数である.

x^2，$\sin x$，e^x，$\log x$ など，高校数学の範囲で扱う関数はその各点で上記の連続条件を満たすからトウゼン連続関数である———問題になるのはいくつかの関数のつなぎ目ということになる.

＜ 例 ＞

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2+x+a}{x^{2n}+1}$ が連続になるように定数 a の値を求めよ.

（解）ハデハデの式だがどこから斬りこむか——— $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n=0(\ |r|<1)}$ がツカエル！

$\boldsymbol{|x|<1}$ のとき（⟵ ここが切り口！）

$$\boldsymbol{x^{2n}\to 0,\quad x^{2n-1}\to 0}\quad \therefore\ f(x)=x^2+x+a\ \longleftarrow\ \boldsymbol{|x|<1}\ \text{で連続！}$$

$\boldsymbol{|x|>1}$ のとき（⟵ つぎにやるべきはこれ！）

$$\frac{x^{2n-1}+x^2+x+a}{x^{2n}+1}=\frac{1+\dfrac{x^2+x+a}{x^{2n-1}}}{x+\dfrac{1}{x^{2n-1}}}\ \to\ \frac{1}{x}\ (n\to\infty)$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{x}\ \longleftarrow\ \boldsymbol{|x|>1}\ \text{で連続！}$$

あとは $\boldsymbol{|x|=1}$，すなわち $x=\pm1$ が残っているが

$$f(1)=\frac{a+3}{2},\quad f(-1)=\frac{a-1}{2}$$

以上の考察から $\boldsymbol{f(x)}$ が $\boldsymbol{x=\pm1}$ で連続となる条件を求めればよいことになった.

$\boldsymbol{x=-1}$ で連続となる条件は

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-1+0}(x^2+x+a)=\frac{a-1}{2}$$

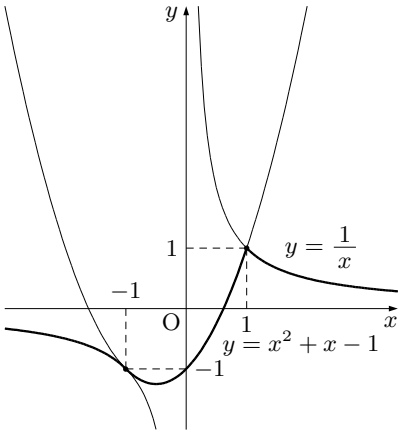
$$\therefore\ -1=a=\frac{a-1}{2}\quad \therefore\ a=-1$$

$\boldsymbol{x=1}$ で連続となる条件は

$$\boldsymbol{\lim_{x\to1} f(x)=f(1)}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1-0}(x^2+x+a)=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x}=\frac{a+3}{2}$$

$$\therefore\ a+2=1=\frac{a+3}{2}\qquad \therefore\ a=-1$$



これらをともに満たすから求める値は $a=-1$ である.

1.2 微分係数と導関数

ここからがいよいよ**本体工事**である．

特に，**微分係数**

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

の概念を正しく把握することが大切である．

また，$\boldsymbol{f'(a)}$ が $\boldsymbol{a}$ **で定まる定数**であり，$\boldsymbol{f'(x)}$ が $\boldsymbol{x}$ **の関数**であることに注目すること．

後半，導関数の公式がいろいろと出てくるが，これらは覚えるだけでなく**導関数の定義にしたがって誘導**できるようになっておくとよい．

以上，言い換えると，導関数 $f'(x)$ を求めて変数 x の値を定数 a においた $f'(a)$ が微分係数である———言葉，数式の意味するところを基本原理からキッチリと把握することが大切である．

1.2.1　微分係数

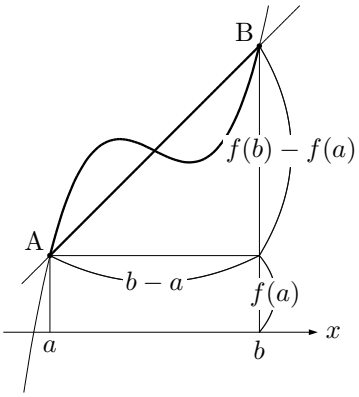
1.2.1.1　平均変化率

関数 $f(x)$ において x が a から b まで変化するとき，
x の変化 に対する **$f(x)$ の変化** の割合

$$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}}\ (=m\ \text{とおく})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を $f(x)$ のこの区間における**平均変化率**という．

これは右図でいえば AB **の傾き**を表している．



1.2.1.2　微分係数

(i) 微分係数の定義

前記 ① で，$b-a=h$ とおくと $b=a+h$ であるから，$\boldsymbol{h}$ を限りなく **0** に近づける ことを考える．このとき m が**有限確定値に収束**するならば，これを $\boldsymbol{f'(a)}$ と書き，$x=a$ における**変化率**，あるいは**微分係数**という．

すなわち

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，$a+h=x$ とおくと，$h=x-a$ で $\boldsymbol{h\to 0}$ **のとき** $\boldsymbol{x\to a}$ であるから

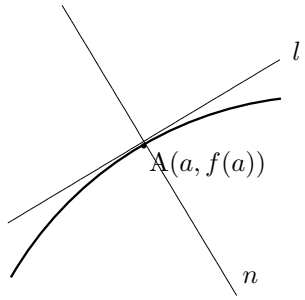
$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

とも表される．

(ii) 接線，法線の方程式

$y=f(x)$ の表す曲線上の点 $\mathrm{A}(a,f(a))$ における**接線の傾きは 微分係数** $\boldsymbol{f'(a)}$ で表される．

したがってこの点における**接線，法線の方程式**は次のように与えられる. すなわち



接線の方程式 $\boldsymbol{l}$ ： $\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

法線の方程式 $\boldsymbol{n}$ ： $\boldsymbol{y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)}$

(ただし，$f'(a)\neq 0$)

（注）法線とは接点で引いた**接線に直交する直線**のことである．

＜メモ＞

■ 微分係数の物理的な意味

微積分をウマク理解するには**物理的なテーマから入る**とよい．もともと**運動と変化をとらえる手段**として発展してきた学問であるから，まあトウゼンといえるハナシではある．

たとえば、高速道路で 300 ｋｍの距離を 3 時間で走る例で考えると，途中で休憩をとったかも知れないし，登り坂は遅くて下り坂は早かったかも知れないが，とにかく平均して 1 時間当たり 100 ｋｍの速度（平均速度）で走ったということについては異存はなかろう. これが本文に述べた**平均変化率**のことである．

問題はその途中で**刻々と変化する速度をどうとらえればよいかだ**．仮に制限速度が 100 ｋｍ/ｈのところを 50 ｋｍ/ｈのスピードオーバーでつかまったとしよう．そのとき”**オレはまだ 10 分も走っちゃいないよ**”などと言っても通用しない．警察官は”オマエ，**あの速度**でそのまま 1 時間走れば 150 ｋｍにもなるぜ”ということでメデタク逮捕となる．このように時速というのは”マルマル 1 時間走るときの距離”ということではないのだ．

本文②,③に示した **微分係数** $\boldsymbol{f'(a)}$ は”まさに**あの速度 (瞬間速度）**”のことで，この例でいえば **1 時間あたり走る距離に換算した数値**を意味していることをここでシッカリ了解しておくかなければならない．

■ 微分可能について

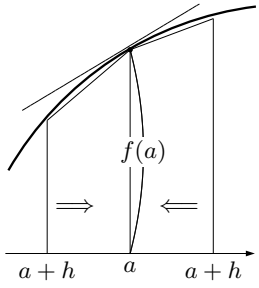
以下，②のスタイルで説明するが③の場合も同様である．

本文②はシンプルに書いてあるが，実は x が a に近づくときといっても**左側から近づくときと右側から近づくときとではハナシが違う．**

すなわち、②の $f'(a)$ は

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \longleftarrow \text{左側微分係数という}$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \longleftarrow \text{右側微分係数という}$$



が一致してともに **有限確定値 $f'(a)$** に等しいということである．

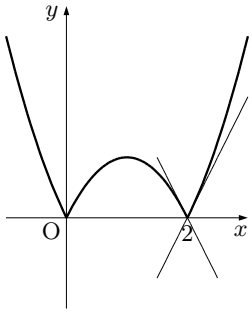
このとき **$f(x)$ は $x=a$ で微分可能** であるという．そして **$f(x)$ がすべての x で微分可能**であるとき，$f(x)$ は**微分可能な関数**であるという．

以下，実例をあげておく．

＜例 1＞

$f(x)=|x(x-2)|$ の $x=2$ における微分可能性を調べよ．

（解）まず，$\boldsymbol{x\to 2-0}$ のとき



$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2-0}\frac{|\,x(x-2)\,|}{x-2} \quad (f(2)=0\ )\\ &= \lim_{x\to 2-0}\frac{-x(x-2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2-0}(-x)=-2\end{aligned}$$

次に $\boldsymbol{x\to 2+0}$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2+0}\frac{|\,x(x-2)\,|}{x-2} \quad (f(2)=0\ )\\ &= \lim_{x\to 2+0}\frac{x(x-2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2+0}x=2\end{aligned}$$

となり，これらは**一致しない**——**$f'(2)$ は存在しない**から $x=2$ で**微分不可能**である．右図を見てもらいたい．要するにグラフが $x=2$ で**トンガッテイル**ということなのだ．

昔は微分可能な曲線のことを**なめらかな曲線**といった時代もあった．

＜例 2＞

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h^2)}{h}$ を $f(a)$，$f'(a)$ で表せ．

（解）lim 以下を**微分係数の定義**が使えるように変形する．

$$\begin{aligned}\frac{f(a+2h)-f(a-3h^2)}{h} &= \frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-3h^2)}{h} \longleftarrow \boldsymbol{f(a)}\text{ を調整！}\\ &= \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-3h^2)-f(a)}{h}\\ &= \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2-\frac{f(a-3h^2)-f(a)}{-3h^2}\times(-3h) \longleftarrow \text{微分係数の定義！}\\ &= 2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+(3h)\cdot\frac{f(a-3h^2)-f(a)}{-3h^2}\\ &\to 2f'(a)+0\cdot f'(a)=2f'(a)\ (h\to 0)\end{aligned}$$

■ $\boldsymbol{x = a}$ で微分可能ならば $\boldsymbol{x = a}$ で連続である．

これは③のスタイルの方が日常的表現という点でスッキリ表せる．

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

であった．この式で，$\boldsymbol{x \to a}$ のときは **分母** $\boldsymbol{\to 0}$ だから **分子** $\boldsymbol{\to 0}$ が**必要**である．

すなわち

$$\lim_{x \to a} \{f(x) - f(a)\} = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

これは $x = a$ における**連続の定義**に他ならない——$\boldsymbol{x = a}$ で**連続**である．

あるいは

$$\lim_{x \to a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

などと証明してもよい．

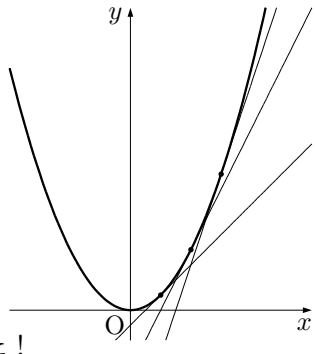
1.2.2　導関数

1.2.2.1　導関数の定義

微分係数の定義によれば

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であった．これは定数（有限確定値）であるが a にいろいろな値を与えるとそれぞれちがった値をとる．



しかし、その値は与えられたその a の値によって決まる定数である．すなわち $\boldsymbol{f'(a)}$ **は** $\boldsymbol{a}$ **の関数** である．

タメシに $f(x) = x^2$ などとして $f'(a)$ を上記の定義にしたがって計算してみると

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} \quad \longleftarrow h \neq 0 \text{ だから } h \text{ で割った！} \\ &= \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a \quad \longleftarrow h \to 0 \text{ だから } h = 0 \text{ とおいた！} \end{aligned}$$

となり，たしかに $\boldsymbol{2a}$ **は定数** だが a にいろいろな数値を入れるとそれぞれちがった値（右図でいうと**接線の傾き**のこと！）をとることがわかる．

それならそれで**関数**らしく，”いっそ $\boldsymbol{a}$ **を** $\boldsymbol{x}$ **に書きかえてしまえ！**”ということなのである．かくして微分係数の 定数 a を変数 x に書きかえて，**導関数**が次のように**定義**される．すなわち **関数** $\boldsymbol{f(x)}$ **の導関数** $\boldsymbol{f'(x)}$ は

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

で，**導関数**を求めることを”**微分する**”という．

① と ② は式のカタチからしてよく似ているが，まず**導関数**を求めその変数 x を定数 a で置き換えたものが**微分係数**である と考えればよい．

したがって、**微分係数** $f'(a)$ は定数であり、**導関数** $f'(x)$ は x の関数である から混同してはならない．

1.2.2.2　導関数についての基本の公式

改めて，微分係数と導関数はどうちがうか——カタチは似ているが「似て非なるもの」、全くちがうものである から混同してはならない．

導関数 $f'(x)$ は x の関数であり一般的なものである．一方，**微分係数 $f'(a)$ は a の個々の値によって定まる個別的な定数**である．

そして，われわれの目的としての方向性はまず，**導関数**を先に求めてそれに数値を代入し，具体的な形で**微分係数**（図形問題でいえば**接線の傾き**）として使う ことにある——要するに**導関数 $f'(x)$ を求めることが先決**なのだ．

そういうことなら，ある関数が与えられた場合，**いかに早く確実にその導関数を求めることができるか**という方法論の問題になる．

ハナシを整理すると

(i) 導関数を求めるための **四則演算（$+, -, \times, \div$）** を整備して**公式化**する．

(ii) **個々の関数の導関数**を**公式化**する．

ことができれば，目的はある程度スッキリした形で達成されることになる．

そこで，まず**複雑な関数の導関数を求める大ワクのハナシ**として，上記 (i) を，以下に述べる**導関数の基本公式**の解説から始めるが，(ii) はダラダラと出てくるのでその都度，確認しながら進むことにする．

導関数についての基本公式

$f(x)$, $g(x)$ は微分可能とする．

(1) $\boldsymbol{y = cf(x)} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y' = cf'(x)} \longleftarrow$ スカラー (実数) 倍

(2) $\boldsymbol{y = f(x) \pm g(x)} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y' = f'(x) \pm g'(x)}$ (複号同順) $\longleftarrow$ 和，差

(3) $\boldsymbol{y = \{f(x)g(x)\}} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)} \longleftarrow$ 積

(4) $\boldsymbol{y = \dfrac{f(x)}{g(x)}} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}} \longleftarrow$ 商

（証明） (1), (2) は問題ナシとしよう．

(3) **導関数の定義**を簡略に表現するために **x の変化量Δx** に対する **y の変化量をΔy** と表すことにする——☒でいえば　$\Delta x = h$,　$\Delta y = f(x+h) - f(x)$　のこと！

そうすると**導関数の定義**は

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \longleftarrow \text{簡略でシャレタ形だ！}$$

そこで lim 以下を計算する——**$f'(x), g'(x)$ の定義の式** を組み立てることが目標！

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \boldsymbol{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} g(x+\Delta x) + f(x) \boldsymbol{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}
\end{aligned}$$

ゆえに $\Delta x \to 0$ として

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \boldsymbol{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{f'(x)} \text{ の定義がデタ！} \\
&\qquad + f(x) \boldsymbol{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}} \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{g'(x)} \text{ の定義がデタ！} \\
&= \boldsymbol{f'(x)}g(x) + f(x)\boldsymbol{g'(x)}
\end{aligned}
$$

(4) 考え方は (3) と同様．ただし，分数が大きくなりすぎるので Δy を先に計算しておく．

$$
\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\ g(x)}
$$

そこで，また $\boldsymbol{f'(x)}$，$\boldsymbol{g'(x)}$ の定義の式 を目指して進む．

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\ g(x)\Delta x} \\
&= \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)\ g(x)\Delta x} \\
&= \frac{1}{g(x+\Delta x)\ g(x)} \\
&\qquad \times \left\{ \boldsymbol{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} g(x) - f(x) \boldsymbol{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}} \right\}
\end{aligned}
$$

ゆえに $\Delta x \to 0$ とすると導関数の定義から

$$
\boldsymbol{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)}, \quad \boldsymbol{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = g'(x)}
$$

$$
\boldsymbol{\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)} \quad \longleftarrow \quad g(x) \text{ は 微分可能 だから 連続！}
$$

であるから

$$
\boldsymbol{y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boldsymbol{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}
$$

＜メモ＞

■$\boldsymbol{\Delta x}$, $\boldsymbol{\Delta y}$ はナンダ！

本文に用いた記号 $\boldsymbol{\Delta x}$（デルタエックスと読む）は, これで 1 文字を表しており,（Δ カケル x）ということではない．**変化する量**を簡単に表せるのでなかなか便利のよい記号である．

普通は”**増分（ぞうぶん）**”という言葉を用いて”**$\boldsymbol{x}$ の増分$\boldsymbol{\Delta x}$ に対する $\boldsymbol{y}$ の増分$\boldsymbol{\Delta y}$** などと表し，**極限のハナシ**に移行することを匂わしてはいるものの，まだ**有限の値**である．

したがって $\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ は，まだ**有限の分数**である．しかし $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$(後述) はもはや分数ではない．

■ 導関数は $\boldsymbol{x}$ の関数，微分係数は定数！

x の関数である導関数 $f'(x)$ の変数 x に定数 a を与えた $f'(a)$ が微分係数だからこれはトウゼン定数である———次のような例はどうか．

＜ 例 ＞

$\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x-a}$ を $f(a)$，$f'(a)$ で表せ．

（解）**微分係数の定義**に関するフツウの問題である．
　これをフツウにやれば

$$\begin{aligned}\frac{x^3f(a)-a^3f(x)}{x-a} &= \frac{x^3f(a)-a^3f(a)+a^3f(a)-a^3f(x)}{x-a}\\ &= \frac{x^3-a^3}{x-a}f(a)-a^3\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= (x^2+ax+a^2)f(a)-a^3\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &\to\ 3a^2f(a)-a^3f'(a)\ (x\to a)\end{aligned}$$

だが，分子に注目して $\boldsymbol{x^3f(a)-a^3f(x)=F(x)}$ とおいてみると $F(a)=0$ だから

$$\lim_{x\to a}\frac{\boldsymbol{x^3f(a)-a^3f(x)}}{\boldsymbol{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\boldsymbol{F(x)-F(a)}}{\boldsymbol{x-a}}=\boldsymbol{F'(a)}$$

であることがわかる———**導関数** $\boldsymbol{F'(x)}$ を求めて $x=a$ を代入した**微分係数** $\boldsymbol{F'(a)}$ が求めるものである．
　すなわち

$$F'(x)=3x^2f(a)-a^3f'(x)\qquad\therefore\ F'(a)=3a^2f(a)-a^3f'(a)$$

となってトウゼン上の結果と一致する．
　問題によると導関数を求めてからこれを使って微分係数を求めるように仕組まれた問題もある———**微分係数**と**導関数**の**関係**をキッチリ理解して使い分けてもらいたい．

1.2.2.3　合成関数の微分とその応用

ここでは導関数に新しい記号 $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ を導入する．この記号は**ライプニッツ**（後述）が発明したと言われているが，**実際の計算**を実行する上でも、**基本原理**を理解する上でも微積分全体を通して**驚異的な威力**を発揮することになる．そのあたりに注目するとなかなか興味深いものがある．

(i) 合成関数の微分

合成関数の微分

$y = f(u)$, および $u = g(x)$ が微分可能なとき，合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

である．

（証明）合成関数 $y = f(u), u = g(x)$ において $\boldsymbol{x}$ **の増分** $\boldsymbol{\Delta x}$ **に対する** $\boldsymbol{u, y}$ **の増分を** $\boldsymbol{\Delta u, \Delta y}$，ただし $\Delta \neq 0$ とすると

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}} \longleftarrow \text{これはタダの 分数計算！} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで $\Delta x \to 0$ とすると $\Delta u \to 0,\ \Delta y \to 0$ である．

すなわち

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \longleftarrow \lim \text{ 以下は分数！} \cdots\cdots ②$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \longleftarrow \text{もはや 分数計算ではない！} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

(ii) 逆関数の微分

$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とすると

$$\boldsymbol{y = g(x) \iff x = f(y)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

両辺を x で微分すれば

$$1 = f'(y)\frac{dy}{dx} \quad \therefore \ \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}} \quad \longleftarrow ④\text{の右辺に 合成関数の微分 を実行！}$$

(iii) パラメーター（媒介変数）表示と微分

$x = f(t),\ y = g(x)$ のとき

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \boldsymbol{\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \longleftarrow \text{合成関数の微分 と 逆関数の微分 を実行！}$$

＜メモ＞

■ $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ の不思議——これは分数ではない！

記号 $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ は $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ で微分するという記号 であって ”分数を表しているわけではない” から特に注意しなければならない．扱い方は $\boldsymbol{y'}$ と同じだが微分する変数 x が明記されるので有難い．

しかし，形式的に分数の形をしていることの本当の有難さはもっと別のところにある．

本文 ①,②,③ をよく見てもらいたい．①,② までは分数計算だが ③ はすでに分数計算ではないのだ．しかし，”出身が分数である” ことがすぐにワカル形をしている——ここがスゴイ！

その目で見るとあとに続く＜逆関数の微分＞にしても＜パラメーター表示と微分＞のハナシにしても形式的にも内容的にも一目瞭然に見えてくる——なにせ ワケがわからなくとも分数計算で合成関数の微分や置換積分が自動的にデキてしまう のだ．

ライプニッツ先生の数学があまねく普及したのも無理はないと思わないか．

なおこの記号は $\dfrac{d}{dx}y$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$ のようにビミョウな表現で用いられるときもあるが，みな同じことを表している．

また，**2 次導関数**（2 回微分する）は $\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$ $(= y''$とも書く）で表される．

■ 陰関数の微分

これは筆者も昔，不思議に思ったことがある——実例で説明する．

＜ 例 ＞

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ． ただし，$y \neq 0$ とする．

（解） 与えられた

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の両辺を x で微分する——左辺の第 2 項に合成関数の微分を実行する．

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \longleftarrow \text{ ここがわからない のだ！} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

これを $\dfrac{dy}{dx}$ について解けばよい．すなわち

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

として一件落着ではある．しかし，ワケはわかっているか——次のように考えてはどうか．

以下は研究モードだが，考え方のポイントは ① の左辺と右辺を別々に考えること である．つまり、左辺の微分は

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}=\cdots\cdots \qquad \longleftarrow \boldsymbol{y} \text{ は } \boldsymbol{x} \text{ の関数か？}$$

だがこのカッコの中の y は☒を満たしているから

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \qquad \therefore\ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \longleftarrow \boldsymbol{y} \text{ は } \boldsymbol{x} \text{ の関数だ！}$$

すなわち ① の $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ の関数なのだ——これで ② の左辺は了解されるだろう．

① の右辺は定数 1 だから微分すればトウゼン 0——② が成り立つ．本文に述べた逆関数の微分も上記と同様の考え方に基づいていると思えばよい．

■ $\boldsymbol{\Delta u = 0}$ のときの心配

合成関数の微分の公式は

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \longleftarrow \text{分数計算 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ 出身！}$$

であった．ここで $\Delta u = 0$ のとき，$\dfrac{du}{dx} = 0$ は考えられるが $\dfrac{dy}{du}$ は意味をもたない．そういうことだからハナシを最初にもどそう．

$\Delta u = 0$ ということは x の変化に対して u は変化しない，すなわち定数である．ということは **y も定数で変化ナシ**——だから $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = 0}$ とキメテおけばよいわけだ．しかし，そこまでヘンにウルサイものはまず出ないと思ってよい．

1.3　三角関数, 指数関数と対数関数 の微分

三角関数の極限では $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ がポイントだが，そのために**弧度法（ラジアン）**という角の測り方を導入する———何のためのラジアンかを，改めて考えてもらいたい．

指数 · 対数関数の極限では，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ の形で $e=2.718\cdots$ を導入する．読者はこの数をワケのわからない**ハンパな数**と思っているのではないか．筆者がこの数と初めて出会ったのは大学 1 年生のときであったが，やはりそう思ったものである．

しかし，実は**ハンパな数ではない**のだ．というより神様が人々のために用意してくれたような，とんでもなく**有難い数**なのである．ここではこのことを**体感してほしい**．

筆者としてはそのことを，祈るような思いでハナシを進めることにする．

1.3.1　三角関数の微分

目的は**三角関数の微分**の基本となる公式

$$\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x,\quad (\cos x)' = -\sin x,\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

などだが, まずはそれらすべての**根拠**となる**極限**

$$\boldsymbol{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

をシッカリと**確認**することから始めよう.

1.3.1.1　三角関数の極限

いつも思うことだが，このハナシは誠にトートツに図形を用いた証明から始まる．しかも角の測り方が**弧度法（ラジアン）**であることに特に注目してもらいたい.

①は $\theta \to +0,\ \theta \to -0$ の両方の場合が等しく"1"に収束することを意味しているので証明にはトウゼンそのことを配慮しなければならない.

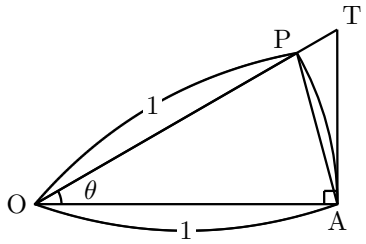
一般的には次のようにする.

(i) まず，$\boldsymbol{\theta \to +0}$ のときは**面積の関係**を利用する.

$$\triangle\mathrm{OAP} < \textbf{扇形 OAP} < \triangle\mathrm{OAT}\quad (\text{ただし，}\angle\mathrm{OAT} = \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta < \pi\cdot 1^2\cdot\frac{\theta}{2\pi} < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\sin\theta < \theta < \tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



両辺を $\sin\theta > 0$ で割ると

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

さらに逆数をとると不等号は逆向きになる.

すなわち

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで $\theta \to +0$ のとき $\cos\theta \to 1-0$ であるから

$$\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(ii) 次に $\boldsymbol{\theta \to -0}$ のときは $\theta = -\theta'$ とおく.

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta')}{-\theta'} = \frac{\sin\theta'}{\theta'} \to 1\ (\ \theta \to -0 \text{ のとき} \theta' \to +0\ )$$

(i),(ii) より

$$\boldsymbol{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$

＜メモ＞

■ $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$——何が何でも 1 にしたかった.

いまから関数の性質を研究しようという時に，なぜいきなり図形から始まるのか．なぜいきなりラジアンなのか——いかにも作為的で不自然ではないか.

穿った目で見ると人々は

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

の値を何が何でも ”1” にしたかったかに見える.

おそらくは $\sin\theta$ の値を調べていくうちに，θ の値が十分小さければ $\sin\theta$ の値をほぼ θ とみなすことができることを知ったのであろう.

しかしそれをどのように微分とリンクさせていったのか.

それは単なる偶然かも知れないが，弧度法 (ラジアン) は上記の極限値を何が何でも 1 にするために無理やりひねり出した角の測り方にみえてくる のは私の読みすぎか.

とにかくスゴイことを思いついたものである——指数関数の底，”e の導入” とあわせて, あらためて人々の知恵に感動してみるとよい.

以下，扱い方の例をあげておく.

＜例 1＞

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ を求めよ.

(解) まず，有限確定値として収束する部分を先に組み立て，残りの部分を整理する.

$$\sin 2x=\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x,\quad \sin 3x=\frac{\sin 3x}{3x}\times 3x \quad \longleftarrow \frac{\sin\theta}{\theta}\text{の形をまず作れ！}$$

だからこれを lim 以下に代入し，未確定の部分を調整すればよい.

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}&=\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\times 3x}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}\to\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}\ (x\to 0)\end{aligned}$$

＜例 2＞

$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ を求めよ.

(解) 分母子に $(1+\cos\theta)$ をカケル.

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}&=\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\\&=\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{1}{1+\cos\theta}\to 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\theta\to 0)\end{aligned}$$

＜例 3＞

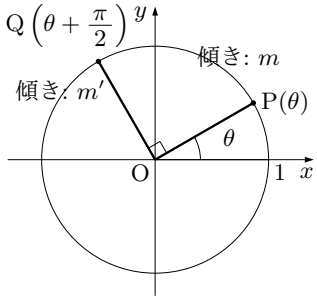
$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ を求めよ．

(解) これはナンダ！

$\theta\to 0$ はあったけど $x\to\dfrac{\pi}{2}$ なんてキイテナイ！——差をとれ！

$$\boldsymbol{x-\frac{\pi}{2}=\theta\to 0\ \ (x\to\frac{\pi}{2})}$$

だからいつもの形だ．すなわち



$$\begin{aligned}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x &= \theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \theta\left\{-\frac{1}{\tan\theta}\right\}\\ &\qquad\longleftarrow\ \textbf{直交条件}\ \boldsymbol{mm'=-1}\\ &= -\frac{\cos\theta}{\dfrac{\boldsymbol{\sin\theta}}{\boldsymbol{\theta}}}\to -\frac{1}{1}=-1\ (\theta\to 0)\end{aligned}$$

となるが，ここで

$$\boldsymbol{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}}$$

がまぎらわしい——こんなときは単位円で考えるとよい．

■ 幾何学的イメージから関数概念への昇華

本文②から③では

$$\frac{\theta}{\sin\theta}\ \text{が}\ \boldsymbol{\frac{\sin\theta}{\theta}}\ \longleftarrow\ \text{分母と分子がひっくり返った形だ！}$$

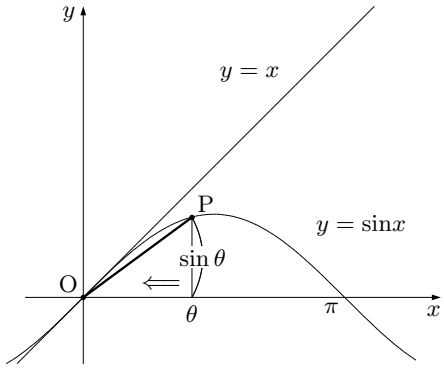
にわざわざ変形されている．

なぜそんなことをする必要があるのか．

それは $f(x)=\sin x$ とおくと

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)-f(0)}{\theta-0}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

$\longleftarrow$ これは 微分係数 $\boldsymbol{f'(0)}$ だ！



すなわち，$\boldsymbol{\dfrac{\sin\theta}{\theta}}$ は図の **OP の傾き** である．きっとこう使いたかったのだ．

そして，この極限の値は $\boldsymbol{f(x)=\sin x}$ **の** $\boldsymbol{x=0}$ **における微分係数** $\boldsymbol{f'(0)}$ になっている．

だから $\boldsymbol{y=\sin x}$ **のグラフ**を描くときは, これが原点 $\boldsymbol{(0,0)}$ で直線 $\boldsymbol{y=x}$ に接するように描かなくてはならないことがわかる．

そして，このことは何を意味するか．これは ”三角関数” の概念がすでに ”円” という幾何学的イメージから開放されて座標平面上の ”波形を表すグラフ” として飛躍する，まさにその離陸地点になっていることを意味している と見ることができるだろう．

さらに三角関数は他の分野とも関係しながら ”無限” という概念をもからめとって，フーリエ級数などへと大展開することになる．

いずれにしても、この極限がそれらすべての出発点になっていると考えるとなかなか興味深いものがある. ここでフーリエ級数についてチョットだけ触れておきたい.

これはフランスの数学者ヨセフ · フーリエ (1768-1830) によって導入された ”関数の級数表現” のことだが一言でいえば

すべての関数は sin，cos の代数和で表される

という理論———きっと何かの折に出会うことがあると思う．

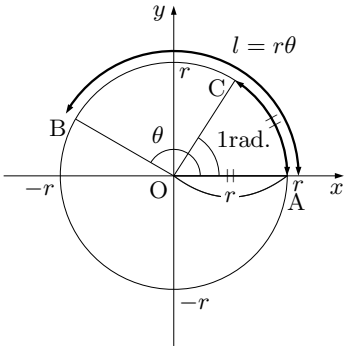
ともあれ，フーリエ級数は数学のみにとどまらずニュートン力学の限界を超えて音，熱，電磁波，光などの自然現象を解明する**数理科学の発展**に強力な**数学的手段**を提供することになったことはその後の歴史が示すところである．

■ 弧度法 (ラジアン) について

図のような **OA** と **OB** とのなす角 (**開き具合**) を表すには $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ など表現のほかに**弧の長さ** $(= \boldsymbol{l})$ **が半径** $(= \boldsymbol{r})$ **の何倍になっているか**で表す方法がある．

すなわち

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{r}} = \text{定数 (実数値)}$$



だが，これは**扇形の相似（半径が $\boldsymbol{k}$ 倍になれば弧の長さも $\boldsymbol{k}$ 倍になる）により保証されることを利用した表現**である．

具体的には弧の長さが半径に等しい角 (図の ∠AOC) を **1rad.(基準になる角度)** と表し、**その何倍であるか、ということで角の大きさを示す方法** である．

また，この数値は、単なる比の値だが、角の大きさを表しているので，他の場合の実数値と区別するために ”rad.” という記号をつけて 1rad., 2rad. と表す．

しかし他の場合は $\boldsymbol{\pi}$ などがついて**角の表現であることがすぐにわかる**ためからか，この記号はつけないようである．このことから，**”1 回り”**を表す**数値 (実数値)** は

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi}{r} = \boldsymbol{2\pi} \ (= 2 \times 3.14 = 6.28)$$

で，これは $\boldsymbol{l = r}$ **の場合 (1rad.) の 6.28 倍**になっていることがわかる．

また，1 例として 30° を弧度法で表すには 2π に **1 回りに対する比率**をカケルことにより

$$2\pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ} = 2\pi \times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

とすればよい．同様にして次の角度なども簡単に確認される．

$$45^\circ, 60^\circ, 90^\circ \ \longrightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$$

1.3.1.2　三角関数の微分

前掲の極限を利用して三角関数の公式を誘導することができる．

三角関数の微分

$$\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

（証明）まず，$\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x}$ を証明 する．

$f(x) = \sin x$ とおいて**導関数の定義**に従って $f'(x)$ を求めると

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \quad \longleftarrow \text{和積の公式！} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\ \sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} \quad \longleftarrow \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \\
&= \boldsymbol{\cos x}
\end{aligned}$$

（弧度法でないと上記の係数 (極限値) が ”1”にならないのだ！）

同様にして $\boldsymbol{(\cos x)' = -\sin x}$, $\boldsymbol{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$ も証明される——各自試みよ．

＜メモ＞

■ $\boldsymbol{n}$ 次導関数——$\boldsymbol{n}$ 回微分すること！

実際にやってみればよい．

$$\begin{aligned}
(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \boldsymbol{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)} \\
(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \boldsymbol{(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

とキレイにまとまった．

本来は**数学的帰納法**で証明するのだが，まあいいだろう．結果だけでも知っておけば何かのときに役に立つものだ．

このように $\sin x, \cos x$ は微分すると交互にあらわれて面白い——ただし符号には注意のこと．

■ $\boldsymbol{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$ の証明はもっとウマクやれる——商の導関数！

これもやってみる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{(\tan x)'} &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 x}}
\end{aligned}$$

■ 再び合成関数の微分法

＜例＞

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ のとき $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

（解）まずは約束どおりにやる．

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\dfrac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{d\theta}}}{\dfrac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{d\theta}}} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}$$
$$= -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(= -\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

次に $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ だが，これは，$\dfrac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$ **をさらに $\boldsymbol{x}$ で微分する**ということだから

$$\frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dx^2}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right)$$
$$= \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\theta}}\left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dx}} \longleftarrow \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\text{は } \boldsymbol{\theta}\text{の関数 だから 合成関数の微分法！}$$
$$= \frac{\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\theta}}\left(\dfrac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right)}{\dfrac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{d\theta}}} = \frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{-a\sin\theta}$$
$$= \frac{b}{a^2}\cdot\frac{-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^3\theta}$$
$$= -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3\theta}$$

とやらなければならない．これを形式的にタダの分数計算とみなして

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d^2y}{d\theta^2}}{\dfrac{d^2x}{d\theta^2}}\cdots\cdots$$

とやる間違いが多い———**ワケがわからない**ということは**オソロシイ**ことだ！

1.3.2　指数関数，対数関数 の微分

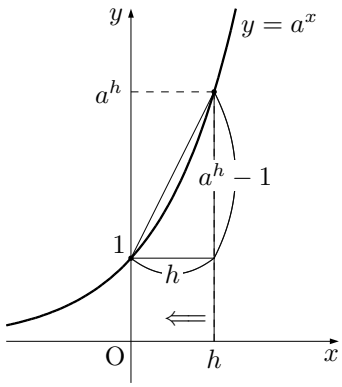
1.3.2.1　e の導入

まず，指数関数

$y = a^x$ ($= f(x)$ とおく)

を導関数の定義にしたがって微分してみよう．

ただし $a > 0,\ a \neq 1$ とする．



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= a^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{k \text{ とおく}} \\
&= \boldsymbol{k} \cdot a^x
\end{aligned}
$$

ここで、**k の値を "1" にする**ような底 a を選ぶことができれば誠に都合がよい．なぜなら上記の係数を考えずにすむからである．つまり

$(a^x)' = a^x \longleftarrow$ **微分しても変わらない！**

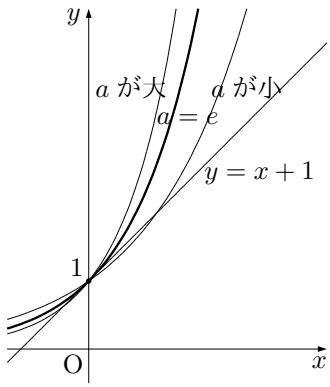
という結果が得られるのだ——しからばこの k は何を意味するか.

改めて k について調べてみると

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)
\end{aligned}
$$

であるから, k は $x = 0$ におけるこの関数の**微分係数**，すなわち曲線上の点 $(0, 1)$ における**接線の傾**きである．

そこで a の値をいろいろ入れ換えてグラフの概形を描いてみると, どうやら $k = 1$ となる場合はありそうである (右図).



仮に**この k の値を 1 にする a の値を e** と書くことにする．そうすると，この極限は

$$\boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される．

以下，① を同値変形しながら，この e という数のいろいろな"**カオ**"を眺めておこう．

これらは、形はちがってもが**みな同じ式**であることに注目して読み進めてもらいたい．

まず，① でで $\boldsymbol{e^h - 1 = t}$ とおくと $\boldsymbol{t \to 0}$ のとき $\boldsymbol{h \to 0}$ であるから

$e^h = 1 + t \quad \therefore \quad h = \log_e (1 + t)$

と変形すれば (以下，慣例に従って対数の底 e は省略する）

$$\begin{aligned}\frac{\log(1+t)}{t} &= \frac{h}{e^h-1}\\ &= \frac{1}{\dfrac{e^h-1}{h}} \to \frac{1}{1} = 1\ (h \to 0)\end{aligned}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

さらに ② は

$$\frac{\log(1+t)}{t} = \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \to 1\ (t \to 0)$$

であるが，これは**真数 $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ が底 e に収束する**ことを意味している．

すなわち

$$\boldsymbol{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

これで $\boldsymbol{e}$ がやっと**ナマの形**で姿を現したが，もう少し具体的にならないか．

③ は **$t \to +0$ と $t \to -0$ の両方の場合, $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ がともに e に収束する**ことを意味している．

そこで $t = \dfrac{1}{x}$ と置き換えて $t \to \pm 0$ のとき $x = \dfrac{1}{t} \to \pm\infty$ を用いて，③ は

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

と表される．e の値を知るには $x = 1, 2, 3 \cdots\cdots$ と代入していけば限りなく e に近い数値が求まることがわかる．ちなみに $\boldsymbol{e}$ は**ネピアの数**と言われ，今日では

$$e = 2.718281828459045\cdots\cdots$$

という**無理数**として知られているが，われわれとしてはその**近似値**として 2.7 を覚えておけば，まあ十分である．

かくして**指数関数の微分**における**基本公式**

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$$

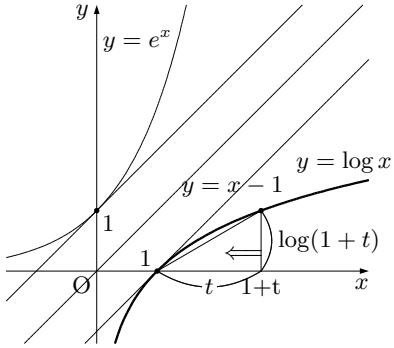
がやっと**われわれのもの**になるわけである．

＜メモ＞

■ 本文 ①,②,③,④ はみな同じことを表している．

したがって，このうちの 1 つが与えられれば他のものは簡単に誘導される——このことは、実際に計算して確認しておくとよい．

■ $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log(1+t)=1$ の意味



よくある質問だが本文の ② の左辺でなぜ

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

をトートツに計算する気になるのか——実は筆者も昔そう思ったことがある．しかし、それは以下の説明でその疑問は氷解するはずだ．$\log x=g(x)$ とおくと

$$\frac{\log(1+t)}{t}=\frac{g(1+t)-g(1)}{t}$$
$$\to g'(1)\ (t\to 0)$$

すなわち，② は，$y=\log x$ の $x=1$ における微分係数（接線の傾き）を表している．

$y=\log x$ が $y=e^x$ の逆関数 (グラフは $y=x$ に関して対称！) であることを考えれば，これはアタリマエ のことである．

いきなり教師が黒板に $(*)$ を書いて解説を始めると，生徒ははじめてだからビックリするが、教師の方はすでにその辺の事情も、これを 対数関数の微分に使いたい こともわかっているから、然るべく $\frac{\log(1+t)}{t}$ から書き始めていて、然るべくツジツマが合うわけである．

つまり，上記の ① から ④ はそれぞれの役割を担って見た目は違って見えるが実は同じことを表している のである——なかなかよくデキていておもしろい．

以下，定義の形の応用例をいくつか挙げておく．

＜例 1＞

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)^2}{x}$ を求めよ．

(解) 本文に示した定義の式を目指して式変形！

$$\frac{\log(1+2x)^2}{x}=2\cdot\frac{\log(1+2x)}{2x}\cdot 2\quad\longleftarrow\quad\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1\ (t=2x)$$
$$\to 2\cdot 1\cdot 2=4\ (x\to 0)$$

＜例 2＞

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-e^{2x-2}}$ を求めよ．

(解) $x\to 1$ だから x と 1 との差は $x-1=t\ (\to 0)$

$$\frac{x-1}{1-e^{2x-2}}=\frac{t}{1-e^{2t}}\quad\longleftarrow\quad\text{メンドウなときは } x=1+t \text{ として代入！}$$
$$=-\frac{1}{\frac{e^{2t}-1}{2t}\cdot 2}\quad\longleftarrow\quad\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\ (h=2t)$$
$$\to-\frac{1}{1\cdot 2}=-\frac{1}{2}\ (\ x\to 1 \text{ のとき } t\to 0,)$$

＜例 **3**＞

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}$ を求めよ．

(解) こうなるとチョット困る———**底を $\boldsymbol{e}$ に変換する．**

$\boldsymbol{a^t = y}$ とおくと $\log y = t\log a$ だから $y = e^{t\log a}$，すなわち

$$\begin{aligned}\frac{a^t-1}{t} &= \frac{e^{t\log a}-1}{t} \quad \longleftarrow \quad \text{底が } e \text{ になった！}\\ &= \boldsymbol{\frac{e^{t\log a}-1}{t\log a}}\cdot\log a \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}\ (h = t\log a)\\ &\to 1\cdot\log a = \log a\ (\ t\log a \to 0)\end{aligned}$$

これは $f(x) = a^x$ の $f'(0)$ のことであり $\boldsymbol{f'(x) = a^x\log a}$（後述）から**トウゼン**のことである．

■ **ネピアの数**

対数を発見したのはスコットランドの貴族**ジョン・ネピア** (1550—1617) である．

たとえば元金が a, 年利率 r である場合，n 年後の元利合計 S は $S = a(1+r)^n$ だが両辺の対数をとると

$$\log S = \log a + n\log(1+r) \quad \longleftarrow \quad \text{積が和の計算で達成される！}$$

あとは**対数表**が用意されていればよいわけで，ネピアはそれを 1614 年に発表したと言われている．

これは当時，**天文学者の寿命が 2 倍に伸びた**といわれるほどの**スゴイ発見**であった．

しかし，ネピアの時代にはまだ”底”がハッキリしていなかったようである．後年になって**レオナルド・オイラー** (1707—83) の研究によってその底が $\dfrac{1}{e}$ であったことが結論づけられ，対数の定義も今日的に確立されるが，それでも人々はネピアに敬意を表してか，$\boldsymbol{e}$ のことを**ネピアの数**と呼んでいるのである．

1.3.2.2　指数関数，対数関数の微分

指数・対数関数の微分

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}}$$

（証明）$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$ については本文で詳しく説明したからもういいだろう．

もう 1 つの基本公式，$\boldsymbol{(\log x)' = \frac{1}{x}}$ の証明は $\boldsymbol{\log x = g(x)}$ とおいて導関数の定義にしたがって微分する．すなわち

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} \\
&= \frac{1}{x}\underbrace{\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}}_{1} \longleftarrow \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1 \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

＜メモ＞

■ $\boldsymbol{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$（$\boldsymbol{\alpha}$は実数）の証明

一見，カンタンそうに見えるがそうはいかない———これは $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$ と合成関数の微分の威力を借りなければお手上げなのだ．

たとえば，次の 3 つの例ではどうか———平気で使っていたのではないか？ ダマッテつかってはイカンではないか

だいたい，次の微分は正しいか．

$(x^3)' = 3x^2$ ⟵ 指数が 整数！ ····· ①

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ⟵ 指数が 分数！ ····· ②

$(x^{\sqrt{3}})' = \sqrt{3}\ x^{\sqrt{3}-1}$ ⟵ 指数が 無理数！ ····· ③

① は一般の形は $\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$（$n$ は整数）だが，これは積の導関数を用いて数学的帰納法でやれば何とかなるだろう．

② は指数が α が分数の場合だが，導関数の定義にもどるとしても，α の数値 $\frac{1}{2}$ が $\frac{1}{3}$ になったりすると様子がちがうからこれらを個別にやるのではかなわない．

そして、③ になると教科書などにも見たことがない．大体，これは正しいか———実は正しい．これらを **1** カラゲにして証明するウマイ方法がある．

$\boldsymbol{y = x^{\alpha}}$ の両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^{\alpha} = \alpha \log x \quad \therefore\ y = e^{\alpha \log x} = e^{u}\ (u = \alpha \log x \text{ とおく})$$

$$\therefore\ \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}}\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} \longleftarrow \text{合成関数の微分！}$$

$$= e^{u}(\alpha\ \frac{1}{x}) = \alpha x^{\alpha}\frac{1}{x} \quad \longleftarrow (e^{u})' = e^{u},\ e^{u} = y = x^{\alpha}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

すなわち，$\boldsymbol{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$ **（$\boldsymbol{\alpha}$は実数）**が成り立つ．

結局，この微分は一見したところカンタンそうに見えるが**指数・対数**，さらには**合成関数の微分法**の威力を借りてやっと達成される のである．

とはいうものの，実を言うと**高校数学では指数の拡張は有理数まで**で，無理数はキチンとした形では定義されていない．したがって $y = a^{x}$ のグラフを描くと，少なくとも $x = \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ e,\ \pi, \cdots\cdots$ などの無理数では穴だらけでボコボコのグラフなってしまう——しかもこの無理数は無限にあるのだからハナシにならない．

しかし，そういうことを言っても仕方がないので数⊠では**トウゼンつながっているものとしてやる**のである．イイカゲンといえばいえるが当面は仕方がない．

まあ，空白部分はいずれ埋めることにしてとりあえずは先に進むのが現実的であろう．

■ **すべての指数関数は底を $\boldsymbol{e}$ に変換することができる．**

音の大きさ，光の吸収，バッテリーの充放電，細菌の増殖など，自然現象のほとんどは**指数現象**として**認識**され**記述**される，というより人々はそれらの自然現象を見つめて指数関数を獲得したにちがいない．

しかし，当然**それぞれの現象によってその”底”が違っている**はずだ．そのような個々バラバラな現象を**同じマナイタにのせる**にはどうすればよいか．説明は雑駁（ざっぱく）だが次のように考えてはどうか．

いま，ある指数関数を $\boldsymbol{y = a^{x}}$ とおいて両辺の対数をとれば

$$\log y = \log a^{x} = x \log a$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = e^{x \log a}} = e^{u}\ (u = x \log a \text{ とおく}) \longleftarrow \text{底が } \boldsymbol{e} \text{ になった！}$$

のように どんな底 a のものでも e を底とする指数関数に変換することができる——$\boldsymbol{e}$ **はスゴイ！**

このあとは**合成関数の微分法**を用いればよい——われわれは、**どんな指数関数をも微分できる方法**を手に入れた ことになる．すなわち

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}} \cdot \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} \longleftarrow \text{合成関数の微分！}$$

$$= (e^{u})'\ (x \log a)'$$

$$= e^{u} \log a \ \longleftarrow \boldsymbol{(e^{u})' = e^{u}}$$

$$= \boldsymbol{a^{x} \log a} \ \longleftarrow e^{u} = y = a^{x}$$

ついでに**対数関数**だが，これはもっとカンタン！

$$y = \log_{a} x = \frac{\log_{e} x}{\log_{e} a} \longleftarrow \text{底の変換公式！}$$

$$\therefore\ y' = \frac{\frac{1}{x}}{\log a} = \boldsymbol{\frac{1}{x \log a}}$$

となる．

■ 再び $\boldsymbol{e}$ について——$\boldsymbol{e}$ は神様がくれた数？

それにしても $\boldsymbol{e}$ は何という不思議な数だろう．まるで**神様が人々のために用意してくれた**かのような**運命的な数** である．歴史的には微積分よりもずっと前の時代から複利法による利息の計算の例，たとえば

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

などとして知られていたようではある．そのせいか公式の証明も $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ から始めて $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ にいたる方法で説明する教科書もあるが，われわれは上記のように了解しておくことにする．改めてこの

$$\boldsymbol{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1}$$

ながめて、やはり何とも不思議な数である．

どうも この左辺の極限を ”1” にするために無理やり作り出された数，つまりは**指数関数の微積分を実現するために用意された，きわめて人工的な数** に見えてくる——**感動**してください．

さらに e は途中経緯は大いに端折るがかの有名な，そして感動的な**オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ (\ i \text{ は虚数単位 })$$

にもいたる——いずれ勉強してみるとよい．

■ まあ，歴史はともかく．

最後に**ワサビ**の効いた復習問題を 1 つ——**目が覚めるぜ！**

＜例＞

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0)$ を求めよ．

(解) これは**チト難しい**——あれこれ**チエ**をしぼってを**総動員する！**

$\boldsymbol{\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right) = f(x)}$ とおくと $\boldsymbol{f(0)=0}$ ではないか！

すると

$$\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$\to f'(0)\ (x\to 0) \longleftarrow \text{ 微分係数！}$$

要するに**導関数 $\boldsymbol{f'(x)}$ を求めて $\boldsymbol{x=0}$ を代入**すればよい．

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)'}{\dfrac{a^x+b^x}{2}} = \frac{(a^x)'+(b^x)'}{a^x+b^x}$$

であるが，ここで

$$\boldsymbol{(a^x)' = a^x\log a,\quad (b^x)' = b^x\log b}$$

はすでに述べたから説明はサボっていきなり使おう．そうすると

$$f'(x) = \frac{a^x\log a + b^x\log b}{a^x+b^x}$$

だから，これを用いて

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) &= f'(0)\\ &= \frac{a^0\log a+b^0\log b}{a^0+b^0}\\ &= \log\sqrt{ab} \longleftarrow \text{デキタ！}\end{aligned}$$

1.4　関数の増減と導関数の符号，平均値の定理

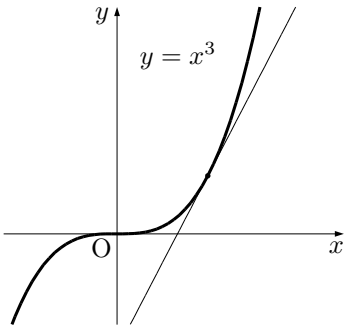
微分法を学ぶ主な目的は**関数の増減を調べてグラフを描き，その変化の状況を具体的な形で認識する**ことにあるといってよい．

しかし，そのためにはまず，”**増加する（単調増加）**”とはどういうことか，**それを数式に乗せる**にはどうすればよいかなど，基本的な事柄を前もってキチンと押さえておく必要がある．

結論から言うと，関数の増減の状況と $f'(x)$ の符号とを関係つけて説明するのであるが，高校の教科書では**接線の傾きが正**であることに注目して**視覚的**に

$$\boldsymbol{y' > 0 \longrightarrow}\ \textbf{単調増加！}$$

としている．もちろん**高校生の理解としては**”**十分これでよい**”わけで, あえて目くじらを立てるほどのことではない.



しかし，たとえば右図の原点では

$$y = x^3 \ \therefore\ y' = 3x^2$$

で，”$y' = 0$” であるが，この点で増加か減少か，などと言い出すとなんともキモチが悪い. そういうことも含めて何とかスッキリしたい.

一応スッタモンダのあげくヤッチマエということと相なった．とはいえ，ここのところは難しそうな数学用語も出てくるので敷居が高いと言えば言えるが，まあ勉強になることでもあるのでガンバッテ読んでみてもらいたい.

以下，ロルの定理から**平均値の定理**を証明し，それを用いて”**単調増加**”**という数学的概念**と”$\boldsymbol{f'(x) > 0}$” とをつなぐ説明を試みるが，ハナシの大筋がわかればそれでヨシとしよう.

1.4.1　ロルの定理から平均値の定理へ

1.4.1.1　ロルの定理

これは**平均値の定理**のための**基礎工事**である———平均値の定理はこの定理を用いて証明される.

ロルの定理

関数 $F(x)$ が **閉区間** $[\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\ ]$ **で連続**，**開区間** $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\ )$ **で微分可能** であるとき，$F(a) = F(b)$ ならば

$$\boldsymbol{F'(c) = 0\ (\ a < c < b\ )}$$

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する.

（証明）$F(x)$ は $[\ \boldsymbol{a, b}\ ]$ **で連続** だから，この区間で **最大値** $\boldsymbol{M}$，**最小値** $\boldsymbol{m}$ をもつ.

このとき，$M = m\ (= k)$ ならば，この区間で $F(x) = k$ (一定関数) だから

$$F'(c) = 0\ (a < c < b)$$

を満たす c は明らかに存在し，$M \neq m$ のときは $M > k$ か，または $m < k$ である.

以下，$\boldsymbol{M > k}$ **のときについて証明する** ($M < k$ のときも同様).

$F(x)$ は $\boldsymbol{(a, b)}$ **で微分可能** だから **最大値** $\boldsymbol{M}$ **を与える** $\boldsymbol{x}$ **の値 を** $\boldsymbol{c}$ とすれば $F'(c)$ は

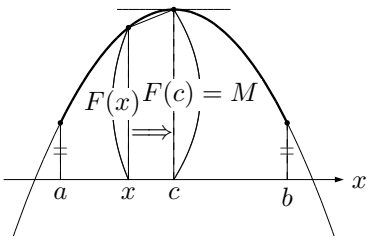
$$\boldsymbol{F'(c) = \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}} = K\ (\text{有限確定})$$

として存在する.

そこで，この内訳を調べると

$$F(x) - F(c) = F(x) - M \leqq 0$$

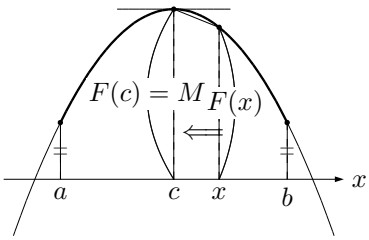
であるから



$\boldsymbol{x \to c - 0}$ のときは

$$\boldsymbol{F'(c) = \lim_{x \to c-0} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}} \geqq \boldsymbol{0}\ (x < c)$$

$\boldsymbol{x \to c + 0}$ のときは



$$\boldsymbol{F'(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}} \leqq \boldsymbol{0}\ (x > c)$$

で，$\boldsymbol{F'(c)}$ **はこれらを同時に満たす** から

$$\boldsymbol{F'(c) = 0}$$

である.

<メモ>

■ ロルの定理の図形的意味

初手から何やらガチガチの数学用語で読みづらい．要するに**山のテッペンがトンガッテいなければそこで水平に接線が引ける**というほどの意味で，アッタリマエのことである．ただし最後の

$$\boldsymbol{F'(c)}\ \textbf{はこれらを同時に満たす} \longrightarrow \boldsymbol{F'(c)=0}$$

にちょっと注目してもらいたい．以下にこの内容と意味を詳しく説明する．

本文に示した極限を構成している 1 つ 1 つの要素を検証してみよう．ただし，分子が 0 のときは等号が成立するから 0 でないとする．

まずは $\lim_{x\to c-0}$ の場合だが

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c}>0 \text{ だが，} \lim_{x\to c-0}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}\ (=K_1)\geqq 0$$

のように等号がついている——**この等号がクワセモノ**で、**極限の真髄**にかかわるハナシなのだと思う．つまり、前者が**収束途中**の状態で,「$\lim_{x\to c-0}$」がついて**目標の極限値**だから，ここは<u>**想定の範囲**を広げて**等号**をつけなければならない</u> ということになる——ここが**ミソ**だ．

「$\lim_{x\to c+0}$」の場合も同様で

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c}<0 \text{ だが，} \lim_{x\to c+0}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}\ (=K_2)\leqq 0$$

のように等号がつく．その上で $\boldsymbol{x=c}$ **における微分可能条件**を適用すると

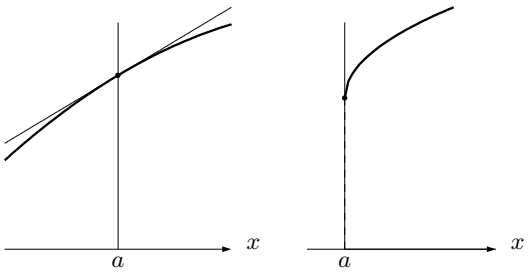
$$K_1=K_2\ (=F'(c)) \longleftarrow \textbf{左方微係数と右方微係数が等しい！}$$

である．

■ **" 閉区間 $[a,b]$ で連続, 開区間 (a,b) で微分可能 " の意味**

これは，図のような端点 $x=a$ において，左図は $F'(a)$ が有限確定値として存在する例である——<u>これが普通の場合</u> だ．

たとえば，右図のように接するときなど，$\boldsymbol{F'(a)}$ **が存在しなくてもよい** というほどの意味で, 上記の説明でいえば $a<c<b$ のように <u>c の両端の等号を切ってある</u> から、「ナルホドね」ということなのだ．



なかなか**巧妙な言い回し**になっている．筆者は昔，この前置きの意味がわからなくてチョッとばかり悩んだことがある．

今、そういうことを思い出して、ここではあえてとりあげた．しかしこういう関数はメッタに出てくるものではないから気にしなくてよい——数学屋さんの**こだわり**だろうがうまく言いぬけたものだとホトホト感心する．

1.4.1.2　平均値の定理

平均値の定理

関数 $f(x)$ が **閉区間 [a, b] で連続，開区間 (a, b) で微分可能** であるとき,

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\ (a < c < b\ )}$$

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する.

（証明）これは図形的には AB と**平行な接線が引ける**という意味で視覚的には**アッタリマエ**のハナシだが, **正式** (?) には次のように証明する．すなわち

$$\boldsymbol{F(x) = \{f(x)-f(a)\} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とおくと $\boldsymbol{F(x)}$ **は閉** $\boldsymbol{[a,b]}$ **で連続，開区間** $\boldsymbol{(a,b)}$ **で微分可能，かつ** $\boldsymbol{F(a) = F(b) = 0}$ である．このとき

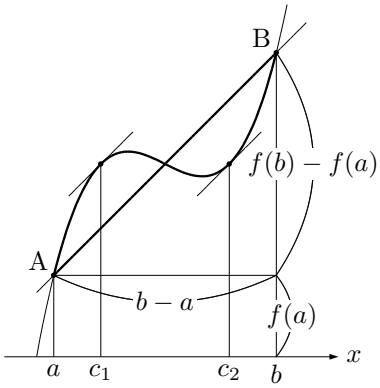
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

であるから，これに**ロルの定理**を用いると

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0\ (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．すなわち

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\ (a < c < b)}$$



<メモ>

■ **①の** $\boldsymbol{F(x)}$ **はどこから来たか**

右図で考える.

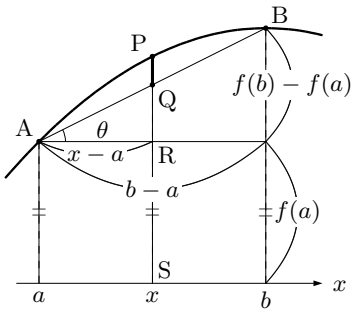
$$\mathrm{SP} = f(x), \quad \mathrm{SR} = f(a)$$

$$\mathrm{RQ} = (x-a)\tan\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

そこで PQ を求めると

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= (\mathrm{SP}-\mathrm{SR}) - \mathrm{RQ}\\ &= \{f(x)-f(a)\} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\\ &= \boldsymbol{F(x)}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 両端に近づくほど $F(x)$ の値は小さくなり $\boldsymbol{x = a,\ b}$ **で** $\boldsymbol{0}$ となる！



本文の $\boldsymbol{F(x)}$ は**線分** PQ のことだったのだ.

しかし，①がチョッとちがった形で表現されるときもある．たとえば

$$\boldsymbol{F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)} \quad \longleftarrow \boldsymbol{F(a) = F(b)} = f(a)$$

だが，☒で $f(a)$ は定数だから微分すると消えてしまう——この形でもよい．

■ **平均値の定理の応用例**——これらは**ほんのアルバイト**なのだ！

平均値の定理を用いると**不等式の証明**がカンタンにいったり，極限値がウマク求まったりするときがある——例をあげておく．

＜ 例 1 ＞

不等式 $0 < \dfrac{1}{x}\log\dfrac{e^x-1}{x} < 1\ (x>0)$ を示せ．

（解）$e^x = f(x)$ とおくと，$f'(x) = e^x$ だから

$$\boldsymbol{\frac{e^x-1}{x} = e^c\ (0<c<x)} \ \longleftarrow \boldsymbol{\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)}\ \textbf{(平均値の定理)！}$$

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する．

そこで c の範囲から

$$1 < e^c < e^x \qquad \therefore\ 1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x \ \longleftarrow \text{各辺の自然対数をとる！}$$

$$\therefore\ \ 0 < \log\frac{e^x-1}{x} < x$$

各辺を x で割れば

$$0 < \frac{1}{x}\log\frac{e^x-1}{x} < 1$$

＜ 例 2 ＞

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x-\sin x}$ を求めよ．

（解）$f(x) = \sin x$ とおくと，**平均値の定理**により

$$\boldsymbol{\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x} = f'(c)\ (x<c<\sin x,\ \text{または}\ \sin x<c<x)}$$

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する．

このとき $x\to 0$ のとき $c\to 0$（**はさみうち！**）で，$f'(x) = \cos x$ だから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x} &= \lim_{c\to 0} f'(c)\\ &= \lim_{c\to 0}(\cos c) = 1\end{aligned}$$

■ **ロピタルの定理への展開**

ロピタルの定理は高校数学では扱わないが、**極限の問題**を扱うとき，結果がすぐにワカルので知っていないとこれは**大損**だ——ただし，いきなりトウアンに使うのは好ましくないとされている．なぜかというと，問題が問題でなくなってしまうほどの**威力**があって出題側が困るからである．だからこそ、なおさら教えておきたい．そうでなければ不公平というものだろう．

ハナシの概要を説明すると，**不定形**の極限を調べる場合

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

が成り立つということで，これを**不定形でなくなるまでドンドン繰り返す**ことで最終的な極限を

調べることができる というものでなかなか便利なものである．

身近の例でいうと，たとえば．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

のように使うのだが，なかなかの**スグレモノ**だとは思わないか．

そこで，セッカクだからこの定理の証明をしておきたいが，困ったことにこれをイッキに証明することはできない——まず，**コーシーの平均値の定理**というものを証明し，それを用いて**ロピタルの定理**を証明するという手順を踏まなければならない．

ヤッカイだが仕方がない．以下，参考までに述べておく．

コーシーの平均値の定理

関数 $f(x)$，$g(x)$ が閉区間 $[\ a,\ b\ ]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であり，開区間 $(a,\ b)$ で $g'(x)\neq 0$ とする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ (a<c<b)$$

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する．

（証明） これが**コーシーの平均値の定理**といわれるものである．

まずは証明だ．

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x)-g(a)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

とおくと $F(x)$ は閉区間 $[\ a,\ b\ ]$ で連続，開区間 $(\ a,\ b\ )$ で微分可能である．また

$$F(a)=0$$
$$F(b)=f(b)-f(a)-\{f(b)-f(a)\}=0$$

であるから**ロルの定理**により

$$F'(c)=0\ (a<c<b)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する．

そこで $(*)$ を x で微分すると

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

これに $(**)$ を適用すると

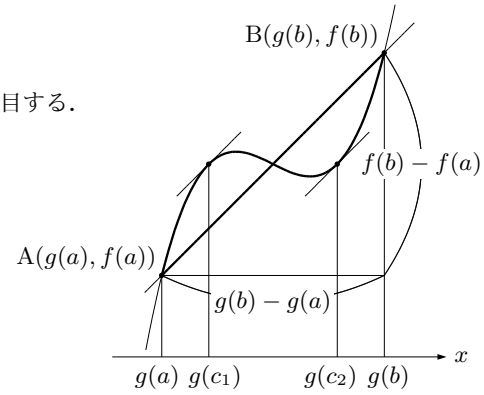
$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$
$$\therefore\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ (a<c<b)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(***)$$

であるから，条件を満たす c が存在する——ということで証明は**デキタ**．

しかし，この定理は何を意味しているのか．ここでの目標からは少しズレルが、われわれの手持ちの知識で理解できないハナシでもないので、チョッと寄り道をしておく．

結果の形から推測すると，どうもパラメーター表示と関係がありそうだ．すなわち曲線

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = g(t)} \\ \boldsymbol{y = f(t)} \end{cases} \quad (a \leqq t \leqq b)$$



上の 2 点 A $(g(a),\ f(a))$，B $(g(b),\ f(b))$ に注目する．

そうすると $(***)$ の左辺を m とおくと

$$\boldsymbol{m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

は**線分 AB の傾き**ではないか．

一方，合成関数の微分を用いると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

だから，上記の $(***)$ は線分 AB と平行な接線の引けるこの曲線上の点 C $(g(c),\ f(c))$ の存在を述べていることになる———$(*)$ の $\boldsymbol{F(x)}$ **の図形的意味**はおのずから明らかというわけだ．

次に，この結果を用いて**ロピタルの定理**を証明する———あと一息だ．

ロピタルの定理

関数 $f(x)$，$g(x)$ 微分可能な関数で，$\lim_{x \to a} f(x) = 0$，$\lim_{x \to a} g(x) = 0$，また $x \neq a$ のとき $g'(x) \neq 0$ とする．このとき

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ ならば } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

である．ただし，L は $\pm\infty$ でもよい

（証明） $f(x)$，$g(x)$ は微分可能だからトウゼン連続である．

すなわち

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

このことから

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\ c \text{ は } a \text{ と } x \text{ との間}\ ) \longleftarrow \text{コーシーの平均値の定理！}$$

ここで $x \to a$ のとき $c \to a$(**さみうち**) であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} \\ &= \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{aligned}$$

でロピタルの定理は**証明された**．

1.4.2　関数の増減と導関数の符号

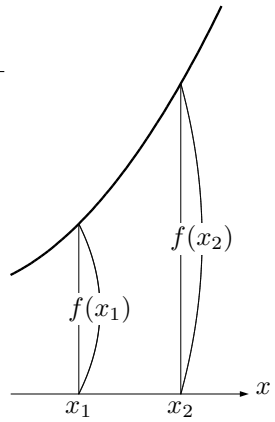
1.4.2.1　単調増加の定義

いま，ある区間 I に 2 つの値 x_1, x_2 を任意にとるとしよう——”任意”ということはどんなに”ひっつけても”というほどの意味である.

このとき

$$\boldsymbol{x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

が成り立つならば，$f(x)$ はこの区間 I で**単調増加であるという**（単調増加の定義）.



たとえば $y = x^3$ の例でいうと

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= {x_2}^3 - {x_1}^3 \\ &= (x_2 - x_1)({x_2}^2 + x_2 x_1 + {x_1}^2) \\ &= (x_2 - x_1)\left\{(x_2 + \frac{1}{2}x_1)^2 + \frac{3}{4}{x_1}^2\right\} > 0 \\ &\longrightarrow \boldsymbol{f(x_2) > f(x_1) \ \ (x_2 > x_1)} \end{aligned}$$

すなわち，$y = x^3$ は，一瞬 $y' = 0$ となる点があるがそれにかかわりなく全域にわたって単調増加である——**単調増加の定義**はとりあえず $\boldsymbol{f'(x)}$ **の符号** とは関係がない. これは **平均値の定理**によってはじめて関係付けられる (後述) のである.

1.4.2.2　導関数が ” 正 ” の区間では単調増加である

次に，$\boldsymbol{f'(x) > 0}$ である区間 I の 任意の $\boldsymbol{x_1 < x_2}$ に対して 平均値の定理を用いると

$$\frac{\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1)}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} = \boldsymbol{f'(c)}\ (\boldsymbol{x_1 < c < x_2})\ (\boldsymbol{> 0})$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．

この左辺で $\boldsymbol{x_1 < x_2}$ ならば (分母) > 0 だから $\boldsymbol{f(x_2) > f(x_1)}$ となり, 先に述べた単調増加の定義とシッカリ関係つけられることになる.

すなわち

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \longrightarrow f(x_2) > f(x_1)}$$

ゆえに，$\boldsymbol{f'(x) > 0}$ ならば, $\boldsymbol{f(x)}$ はこの区間で単調増加 である.

<メモ>

■ チョットマテよ.

$\boldsymbol{y' > 0}$ なら単調増加である (一方通行) ことはわかったとしよう.

しかし $y' = 0$ のときについてはまだカタがついてはいない———実はこういうことだ.

先に述べた $y = x^3$ の場合でいうと一瞬 $\boldsymbol{y' = 0}$ となるときがあるがそれにもかかわらず，これは全域にわたって単調増加であるとも書いた.

もしそうであるなら，単調増加の条件は $\boldsymbol{y' \geqq 0}$ と書くべきではないか———その通り！

ただし，$\boldsymbol{y' = 0}$ は ” 一瞬だけ ” に限って許されるのである.

その理由は，もしチョットでも平坦 (ベターッと $y' = 0$) の部分があれば

$$\boldsymbol{x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) = f(x_2)}$$

が起こり，本文に述べた単調増加の条件が満たされない.

このような場合，苦しまぎれに単調非減少などという怪しげなコトバで表したりするときもあるが，特に目くじらを立てて議論するほどのことでもなかろう．ここではハナシの内容がわかればヨシとする.

■ 平均値の定理の本業

実は，平均値の定理の本来の目的はここにあるのだと思ってよい.

つまり，平均値の定理は有限な 2 つの関数値 $\boldsymbol{f(x_1)}$ と $\boldsymbol{f(x_2)}$ の大小関係と極限がらみの $\boldsymbol{f'(x)}$ の符号とを関連つける力 (ちから) 仕事をしている のである.

人間というのはゲンキンなもので，結果がわかってしまうと縁の下でガンバッテイル平均値の定理のことなど普段は忘れてしまっている.

しかし，これがなければ増減表さえも書けないのだ———君は身に覚えがなくともオセワになっているのです．改めて平均値の定理に礼（レイ）！

■ 増減がワカルと何が有難いか.

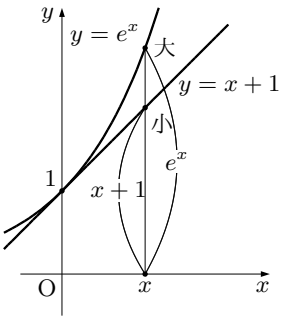
増減がわかると，すでに述べた連続関数の基本的性質の属性としてさらに詳しい説明が加えられたことになる———具体的にいえば不等式の証明，あるいは方程式の実数解の存在などをキチンとした形で扱えるということである.

以下実例をあげておくが，ここでは単調増加の場合のみに的を絞って解説する———その他の場合についてより精密に調べるにはグラフの概形を描く必要があるのでカシを変えて (?) 詳しく解説する．以下，増減を利用した不等式の証明問題，平均値の定理を用いた数列の極限に関する典型的な問題を挙げておく.

＜例 1＞

$e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ $(x > 0)$ を示せ．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ を示せ．

（解）まずは不等式の証明——差をとれ！



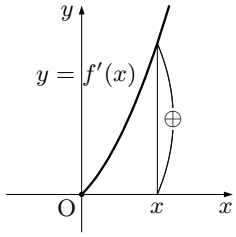
$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$
$$f'(x) = e^x - (1 + x) > 0 \ (x > 0)$$

ここでは，右図で見て $e^x > x + 1$ $(x > 0)$ をアッタリマエとした．

しかし，$\boldsymbol{f'(x)}$ **の符号がわからないときはその増減から調べなくてはならない**——そこで $f''(x)$ を求める．

$$f''(x) = e^x - 1 > 0 \ (x > 0)$$

このことから $f'(x)$ は

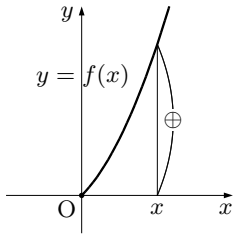


$\boldsymbol{x \geqq 0}$ **で 単調増加** $\longleftarrow$ ここは **等号を入れないとダメ！**

このとき、$\boldsymbol{f'(0) = 0}$ だから $\boldsymbol{f'(x) > 0 \ (x > 0)}$ である．

その結果，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x \geqq 0}$ **で単調増加** $\longleftarrow$ ここも **等号を入れないとダメ！**



このとき $\boldsymbol{f(0) = 0}$ だから $\boldsymbol{f(x) > 0 \ (x > 0)}$ であるということになってこれでやっと $\boldsymbol{f(x) > 0}$ **がいえる**のです．

どうもここは 0 に対する関数値のことより、$f'(x)$ と $f''(x)$ の**二階建ての議論**になっているのでわかりにくいらしい——注意！

また、このことから

$$\boldsymbol{e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \ (x > 0)}$$

がいえるが，さらに

$$\boldsymbol{e^x} > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 > \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2}$$

だから逆数をとると

$$0 < \frac{1}{e^x} < \frac{2}{x^2} \qquad \therefore \ \boldsymbol{0 < \frac{x}{e^x} < \frac{2}{x}}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0$ だから

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0} \ \longleftarrow \text{一般には} \ \boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0 \ (k = 2, 3, \cdots)} \ \ !$$

ちなみに

$$\boldsymbol{\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{y} = 0} \ \longleftarrow e^x = y \text{ とおいた！}$$
$$\boldsymbol{\lim_{t\to+0} t\log t = 0} \ \longleftarrow \text{さらに } y = \frac{1}{t} \text{ とおけ！}$$

これらはみな**同じこと**を表している——グラフを描くときなどに**サリゲナク**出てくる極限だから**覚えておく**とよい——すでに述べた **ロピタルの定理**を用いれば 1 パツ だがこれは**ウラ**のハナシ．

＜例 2＞

$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cos x_n,\quad x_1 = a\ \left(0 < a < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき数列 $\{x_n\}$ が収束することを示せ．

（解）フツウは方程式

$$x = \frac{1}{2}\cos x \ \longleftarrow\ \boldsymbol{x_{n+1}},\ \boldsymbol{x_n}\text{をともに}\ \boldsymbol{x}\ \text{とおいた!}$$

の**実数解の存在**を示させる**誘導**がついている———本問の場合は $\boldsymbol{y = x}$ と $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}\cos x}$ のグラフを描いてみればただ 1 点で交わることはすぐワカル．

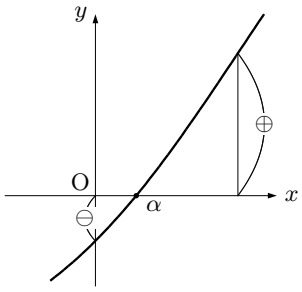
それでもマジメにやりたい人 (これがテーマ) は，右辺を左辺に移項して $f(x)$ とおくと

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x \quad \therefore\ f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x > 0$$

だから $f(x)$ は**単調増加**である．このとき

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$$

から方程式 $f(x) = 0$ は $\boldsymbol{0 < x < \dfrac{\pi}{2}}$ にただ 1 つの実数解 $\boldsymbol{\alpha}$ をもつ———**中間値の定理！**



さて問題の漸化式だが，α は上記の方程式を満たすから

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha}\quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

漸化式と辺々の引き算をすると

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\cos x_n - \cos\alpha})\ \longleftarrow\ \text{平均値の定理 が使える！}$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{-\sin c})(\boldsymbol{x_n - \alpha})\ \longleftarrow\ f(x) = \cos x\ \text{ならば}\ f'(x) = -\sin x\ \ !$$

何が起こったのか———$\boldsymbol{(\cos x_n - \cos\alpha)}$ では $\boldsymbol{x_n}$ や $\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{\cos(\ \ )}$ の中にカンヅメになっている．それを $\boldsymbol{(x_n - \alpha)}$ のように**中身だけをウマク取り出した** のだ———これは**スゴイ！**

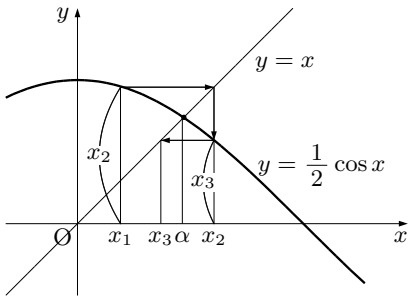
ハナシをもとにもどそう．以上の結果に絶対値をつけると

$$|x_{n+1} - \alpha| = \left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{-\sin c})(\boldsymbol{x_n - \alpha})\right|$$

$$= \left(\frac{\sin c}{2}\right)|x_n - \alpha| \leqq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|\ \longleftarrow\ \sin c \leqq 1\ \text{なのだ！}$$

が得られる———この不等式を繰り返し用いる．

$$\begin{aligned} 0 \leqq |x_n - \alpha| &\leqq \left(\frac{1}{2}\right)|x_{n-1} - \alpha| \\ &\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2} - \alpha| \\ &\cdots\cdots \\ &\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^r|x_{n-r} - \alpha| \\ &\cdots\cdots \\ &\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1 - \alpha| \quad (x_1 = a) \end{aligned}$$



ここで最右辺に注目すると

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1 - \alpha| = 0 \quad \therefore\ \lim_{n\to\infty}|x_n - \alpha| = 0\ (\ \text{はさみうち！})$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

図はこの収束の状況を示したものである．ただし，タテ方向を 2 倍に拡大してダマシてある．

1.5　関数のグラフ

いよいよ関数の表すグラフの概形を描くことになる．

グラフがかけると関数の変化の状況を目で見て確かめることができるので，関数そのものの振る舞いをより具体的に知ることができて有難いが，それにもまして最大値・最小値を求めることができたり，方程式・不等式などについてもより精密な考察ができるようになる．ハナシが具体的だから親しみやすいこともあって微積分に対する意識がイッキに拡大する分野でもある———ここまでのあれこれを整理しながら読み進めるとよい．

1.5.1　関数のグラフ

関数の変化の状況を $\boldsymbol{xy}$ 平面上のグラフで表すと，その変化を直感的に把握することができて便利である．

以下，グラフを描くために必要な情報とその求め方について解説する——軸との交点，曲線どうしの交点，などはトウゼンだが，特に注目すべきものとしては増減と極値，曲線の凹凸，漸近線などがある．

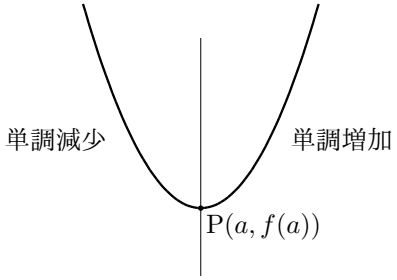
1.5.1.1　増減と極値

連続で**微分可能**な関数 $f(x)$ で，変数 x が増加しながら $x=a$ を通過するとき，$f(x)$ の値の変化が**減少から増加に変わる**ならば，$f(x)$ は $x=a$ で**極小になる**といい，その関数値 $f(a)$ を**極小値**という．

関数の増減は $f'(x)$ の符号を調べればワカルからこれらの関係を**表**（ひょう）にして表せばすべては一目瞭然である———この表を**増減表**という．

増減表は**シンプル**だが超**説得力**がある．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$



また逆に，変数 x が増加しながら $x=a$ を通過するとき，$f(x)$ の値の変化が**増加から減少に変わる**ならば，$f(x)$ は $x=a$ で**極大になる**といい関数値 $f(a)$ を**極大値**という———増減表と図はサボル．

(注) 極大値，極小値を総称して**極値**という．

しかし極値の議論では，結局は極大値，極小値と状況を分けて説明する場合が多いので極値という表現はあまり意味を成さない———**別々に分けて説明する習慣**にしておくほうがよい．

また，極大，極小の議論では $\boldsymbol{f'(x)=0}$ **はそのメヤス**でしかなく，あくまで $\boldsymbol{f'(x)}$ **の符号の変化，つまりは増減の変化**が問われている ことはキモに銘じておくべし———**増減表が示されていないトウアンはほとんど論外！**

＜メモ＞———————————————————————————————-

■ **極大，極小について**

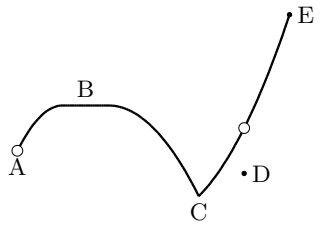
上記の説明では**連続，微分可能**が前提条件である．高校数学ではこれでおおむね十分だが実は**微分不可能**であっても**不連続**であっても極大，極小は定義されている———知っておいてもソンはしないハナシなので以下に説明しておく．

極小値とは ”$\boldsymbol{a}$ **を含む十分小さな区間** ($\boldsymbol{a}$ **の近傍という**) で **1 点** $\boldsymbol{a}$ **においてのみ最小値**をとるとき，その**最小値** $\boldsymbol{f(a)}$ のこと ” というのが正式な定義である．

もちろん**極大値**のときは上記の最小値のところが**最大値**に入れかわる．

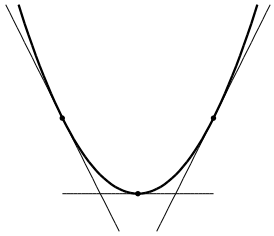
この定義によると右図の A，B，C，D，E は

A：端点でしかも除外点だから**極小ではない**．
B：平坦だから**極大ではない**．
C:トンガッテいて微分不可能だが**極小である**．
D：不連続点だが**極小である**．
E：端点だが関数値があるので**極大である**．



ということになる．

1.5.1.2　凹凸と変曲点



$\boldsymbol{f''(x)}$ **の符号から曲線の凹凸**がワカル．まずは図を見てもらいたい———**下に凸**である．

このとき，x の増加にしたがって**接線の傾きが増加している**．すなわち

$$\{f'(x)\}' = f''(x) > 0 \ \longleftarrow \ \boldsymbol{f'(x)} \text{ が増加！}$$

に対応し，逆に $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ のときは**上に凸**である．

また，$\boldsymbol{f''(x)}$ **の符号の変わり目**では $f''(x) = 0$ だがこの点では曲線の ” 曲がり ” が変わるので**変曲点**と呼ばれている．

これら $f''(x)$ の符号と曲線の凹凸との対応関係は凹凸表を作って説明してもよいが，一般には**増減表に書き込む**ことで間に合わせるようである．

＜メモ＞————————————————————————————————————-

■ **凹凸について**———もうチョイ詳しく説明しよう．

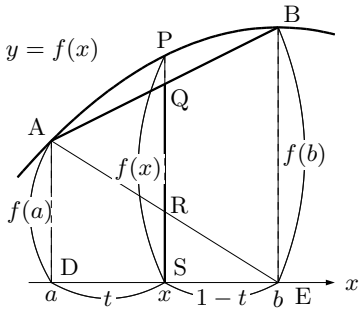
本文では図を描いて

下に凸 $\iff \boldsymbol{f''(x) > 0}$

と説明した———イージーだがこれが**直感的で最もわかりやすい**．

しかし，**もう少しキッチリした形でこの ” 凸（デッパッテイル）” という図形上の事実を数学的概念として数式に乗せる方法はないか**．

たとえば**上に凸**である図を描いてみよう———下に凸の図でもよいのだが説明の記号がゴチャゴチャ絡まって描きにくかったのでこうなってしまった．



さて，**ここから何がわかるか．いま凸である区間に** $\boldsymbol{a, b\ (a < b)}$ をとり，この間に x をとる———右図．

そうすると，点 Q は直線 AB 上の点だから

$$\mathrm{PS}\ (= f(x)) > \mathrm{QS}\ (= \mathrm{RS} + \mathrm{QR})$$

このとき，点 S が線分 DE を $t : (1-t)$ に内分しているならば

$$x = (1-t)a + tb\ (0 < t < 1)$$

$$\longleftarrow \ t : 0 \to 1 \text{ のとき } x : a \to b \text{ と対応して変化！}$$

一方，$\triangle\mathrm{ERS} \backsim \triangle\mathrm{EAD}$ と $\triangle\mathrm{AQR} \backsim \triangle\mathrm{ABE}$ から

$$\mathrm{RS} = (1-t)f(a), \quad \mathrm{QR} = tf(b)$$

これらを上記の不等式に入れると

$$\boldsymbol{f((1-t)a + tb) > (1-t)f(a) + tf(b)}$$

つまり **上に凸**とは，その凸である区間の**どんな** $\boldsymbol{a < b}$ **に対しても**（どんなにひっけても）**任意の** $\boldsymbol{t\ (0 < t < 1)}$ **についてこの不等式が成立する**というハナシ にまとめられる．

さて，これを $\boldsymbol{f''(x) < 0}$ **とどう関係づけるか**．

まずは，$\boldsymbol{f'(x)}$ **は単調減少**で t と x との関係は $\boldsymbol{a, b}$ **を定数**（トメル）として

$$\boldsymbol{(1-t)a + tb = x}$$

だが $\boldsymbol{t}$ **が** $\boldsymbol{0}$ **から** $\boldsymbol{1}$ **まで増加**するとき，それに対応して $\boldsymbol{x}$ **は** $\boldsymbol{a}$ **から** $\boldsymbol{b}$ **まで増加**する．

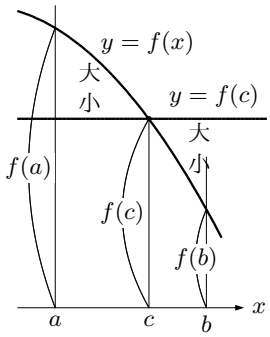
すなわち

$$
\begin{aligned}
F(t) =& f((1-t)a+tb) - \{(1-t)f(a)+tf(b)\} \\
\therefore\ F'(t) =& (b-a)f'((1-t)a+tb) - \{f(b)-f(a)\} \ \longleftarrow \text{合成関数の微分！} \\
=& (b-a)f'((1-t)a+tb) - f'(c)(b-a) \ \longleftarrow \text{平均値の定理！} \\
=& (b-a)\{f'(x)-f'(c)\}
\end{aligned}
$$

これらの関係を**増減表**としてまとめたい．

問題は $\boldsymbol{F'(t)}$ **の符号変化**だが、これは $\boldsymbol{f'(x)}$ と $\boldsymbol{f'(c)}$（**定数**）**との大小関係**に対応する．そこで、c を与える t を t_0 とすれば $\boldsymbol{c=(1-t_0)a+t_0b}$ で，t の変化に対する x の変化をも記入した増減表を作る と

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$	1
x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$F'(t)$		$+$	0	$-$	
$F(t)$	(0)	$\nearrow$	$F(t_0)$	$\searrow$	(0)



となって

$\boldsymbol{F(t)>0\ (0<t<1)}$

すなわち，$\boldsymbol{f''(x)<0}$ ならば**任意の** $\boldsymbol{0<t<1}$ に対して

$$\boldsymbol{f((1-t)a+tb)>(1-t)f(a)+tf(b)}$$

が成り立つ———あとは $\boldsymbol{a,b}$ **を任意に動かす**ことを考えればよい．

1.5.1.3　漸近線

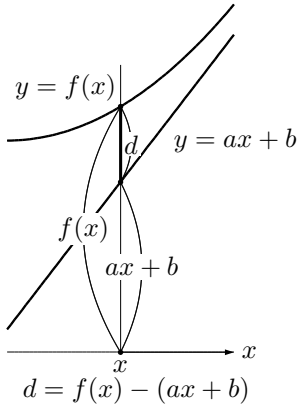
曲線によっては $x \to \infty$ あるいは $x \to -\infty$ とするとき，ある決まった**直線に漸近していく（だんだん近づいていく）**場合があり，これが見つかればグラフの概形を調べる上では有力な材料になる——このような直線を**漸近線**という．

いま，曲線 $y = f(x)$ の漸近線が $y = ax + b$ であるとする．このことを数式で表すと

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (ax+b)\} = 0} \longleftarrow \{\ \}\text{ 内は右図の } d\,!$$

だが，左辺で x を外にくくり出すと

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{\frac{f(x)}{x} - \left(a + \frac{b}{x}\right)\right\} = 0$$



ここで $x \to \infty$ だから $\{\ \} \to 0$ が**必要**である．

そこで

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x} - (a + \frac{b}{x})\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - a = 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}\ (= a_1\text{とおく}) \longleftarrow \boldsymbol{a}\text{ が求まる！}$$

十分性はこの $a = a_1$ に対して上記の b が求まればよい．

すなわち

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (a_1x + b)\} = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - a_1x\} - b = 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - a_1x\}} \longleftarrow \boldsymbol{b}\text{ が求まる！}$$

＜メモ＞

■ **グラフを描こう．**

これで関数のグラフを描くための**道具**は出揃った——とにかくグラフを描いてみよう．

＜ 例 1 ＞

$y = \dfrac{x^2}{x-2}$ の表すグラフの概形を描け．

(解) まず，見たままで $x = 0$ とすると $y = 0$ だから $\mathbf{O(0,0)}$ を通る．

また，(分母) $\neq 0$ だが $x \to 2 \pm 0$ とすると $y \to +\infty$ だから

$$\boldsymbol{y}\text{ 軸に平行な漸近線} \longrightarrow \boldsymbol{x = 2}$$

の存在もすぐにワカル．

次に y 軸に並行でない漸近線だが，これは次に示すように分子の 2 次式を分母の 1 次式で**割り落とす**と効果的である——まずは身軽になっておきたいのだ．

$$y = x + 2 + \frac{4}{x-2}$$

ここで $x \to \pm\infty$ とすると，この場合は $\dfrac{4}{x-2} \to 0$ だから

$$\text{軸に平行でない漸近線} \longrightarrow \boldsymbol{y = x + 2}$$

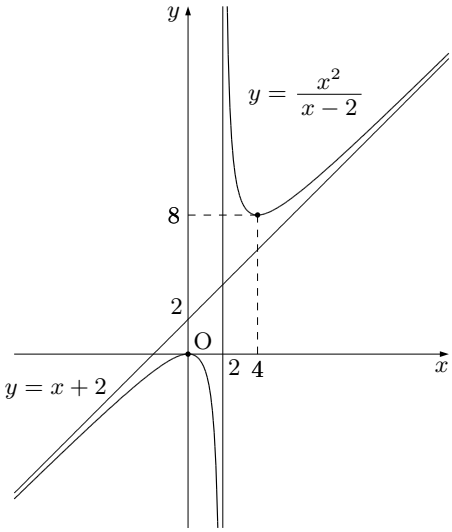
であることもすぐにワカル．

そこで

$$y' = 1 + 4\cdot(-1)\cdot(x-2)^{-2}$$
$$= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

だから**増減表**を書くと

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	8	$\nearrow$



である．

しかし，**漸近線**については，本問は**分数関数**だから上記のように簡略にカタづけたががそれ以外の場合でもデキルようにしておきたい．

以下，**正式な求め方**を説明しよう．

漸近線を $y = ax + b$ とおいて a, b を求める

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-ax) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1-\dfrac{2}{x}} = 2$$

すなわち、**漸近線は** $\boldsymbol{y = x + 2}$ である．

これらの情報をもとに上記のグラフの概形が得られる．なお特に求められなければ凹凸については説明の必要はない．

＜例 2＞

$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の表すグラフの概形を描け．

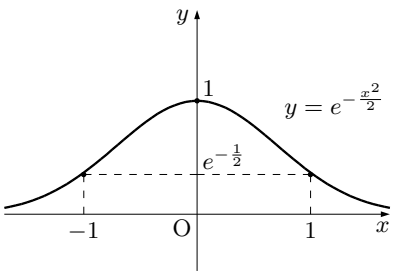
(解) $x = 0$ とおくと $y = 1$ だから曲線は**点 $(0, 1)$ を通る．**

そこで y', y'' を求めて増減と凹凸を調べる．

$$y' = e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot(-x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$
$$y'' = -\{1\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot(-x)\} = (x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

そこで**増減・凹凸表**を作る．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$



となって一応の情報は収集できた．グラフは右図！

1.5.2　最大 · 最小

最大最小の存在定理により，連続関数は閉区間において最大値，最小値をとることすでに保証されている．

すなわち，関数の増減，極大値や極小値などを調べることにより定義域内の最大値，最小値を求めることができる———1 つ 2 つやってみればよい．

あとは諸君の自主性に預けよう．

1.5.3　方程式，不等式への応用

微分もいよいよ**大詰め**だが，その内容を整理するとそのテーマは大枠で**次の 2 つ**になりそうである．

(i) **方程式，不等式**そのものをどうすれば**ウマク**扱えるか.

(ii) 他のテーマ（接線の本数，極大 · 極小の存在条件など）への応用.

(ii) は (i) の応用だから，ここでは基本のハナシとして (i) について詳しく解説する．

たとえば方程式の例でいうと

$$f(x) = 0$$

の実数解を調べるには $y = f(x)$ のグラフの概形を描き，x 軸との交点について考える——**マジメで正直な人**はハジメはみんなこうやるだろう．

しかし，これを**適当に同値変形**（たとえば移項など）して

$$g(x) = h(x)$$

のような形に**組みかえる**と問題の実数解は **2 つの関数**

$$\boldsymbol{y = g(x)} \text{ と } \boldsymbol{y = h(x)}$$

の表すグラフの交点の x 座標を調べるハナシに置き換えられる．

簡単な例を挙げると，たとえば 2 次方程式

$$x^2 - ax + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

の解を調べるには

$$x^2 + 1 = ax \longleftarrow y = x^2 + 1,\ y = ax \text{ のグラフ交点の } x \text{ を調べる！}$$

などは 1 つの方法である．さらには、このとき どちらかの関数が**定数関数**のような簡単なものになってくれればなお有難い——**定数の分離！**

$x \neq 0$ に注意して x で割ると

$$\frac{x^2+1}{x} = a \longleftarrow y = \frac{x^2+1}{x} \text{ と } y = a(\text{定数}) \text{ のグラフ交点の } x \text{ を調べる！}$$

ハナシに置き換わる——これなら $y = a$(定数) のグラフをタテにスライドさせればよいだけだから簡単だ．

それでも $(*)$ の左辺に a^2 などが混じりこんでいたりすると**ウマクいかない**ときもある．そういうときは大マジメにアタマから**シコシコやる**しかない——その**覚悟**は必要ではある．

＜メモ＞

■ ヒキョウと思えるほどウマクいくときがある．

実例をあげておく．

＜例 1＞

方程式 $2e^x - ax^2 = 0$ $(a > 0)$ の実数解の個数を求めよ．

(解) 左辺を $f(x)$ とおいてその増減を調べるために $f'(x)$ をとると未確定の定数 a が混入する．

仕方がないからさらにその増減を調べるために $f''(x)$ をとってもまだ a が残ってしまう．そこで場合わけをしていたのでは日が暮れる——方程式を組み換えて考えるのだ！

与えられた方程式に混入する $\boldsymbol{a}$ は幸いにして **1** 次である——$\boldsymbol{a}$ について解く！

$$2e^x = ax^2 \quad \therefore\ \boldsymbol{a = \frac{2e^x}{x^2}}\ (a > 0) \longleftarrow \boldsymbol{a}\ \text{を分離した という！}$$

こうなると、もはや問題は **2** つの関数

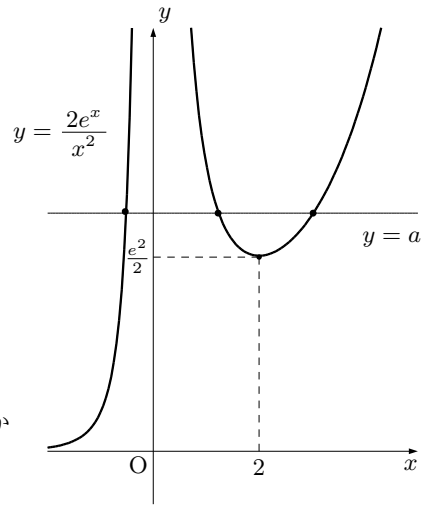
$$\boldsymbol{y = \frac{2e^x}{x^2}}\ \text{と}\ \boldsymbol{y = a}\ (a\ \text{は定数})$$

のグラフの交点のハナシになる——$\boldsymbol{\frac{2e^x}{x^2} = f(x)}$ とおいてグラフを描く算段をしよう．

$$f'(x) = 2\frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot (2x)}{x^4} = \frac{2e^x(x-2)}{x^3}$$

から次の増減表が得られる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\nearrow$



また，どこまで増減するかを調べなければならないが

$\boldsymbol{x \to \pm 0}$ のとき $\boldsymbol{f(x) \to \infty}$

$\boldsymbol{x \to -\infty}$ のとき $\boldsymbol{f(x) \to 0}$

はすぐにワカルが $\boldsymbol{x \to \infty}$ のときが問題だ．

本稿ではすでに $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ をやっているのでそれを使うが，だいたいの場合は何らかの説明がついているから心配することはない．

$$f(x) = \frac{2e^x}{x^2} = \frac{2}{\frac{x^2}{e^x}} \to \infty \ \left(\frac{2}{+0}\right)$$

以上の考察から実数解の個数が確定する——個数は表にして示すと明快である．

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{e^2}{2}$	$\cdots$
個数	0	0	1	2	3

1 つ注意しておきたい．それは、上記の ” どこまで増減するか ” の確認だが，この説明は絶対に必要である．なぜかというと，たとえば単調増加の例でいえば増加はしてもある定数に漸近して行き，その数を越えることがないような場合，増減表だけでは説明しきれない からである．

＜例 2＞

すべての x (> 0) について $\log x < a\sqrt{x}$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

(解) これもコトバにダマされる．”すべての $\boldsymbol{x}\ (>\mathbf{0})$ について”にすべてが集約されている．
$\boldsymbol{a}$ を分離しよう．

$$a > \frac{\log x}{\sqrt{x}}\ (= f(x) \text{ とおく})$$

だから，結局は $\boldsymbol{y = f(x)}$ と $\boldsymbol{y = a}$(定数) のグラフの位置関係の問題に帰着する———特に本問では $\boldsymbol{f(x)}$ の最大値に注目！

つねに a の方が大きいのだから，$\boldsymbol{f(x)}$ の最大値より $\boldsymbol{a}$ が大きい条件を求めればよい．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \log x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

増減表は

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

これより $\boldsymbol{f(x)}$ の最大値は $\boldsymbol{\frac{2}{e}}$ だから a のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{a > \frac{2}{e}}$ である．

本問はこの最大値にのみ興味があって他のことは求めてはいない．しかし，せっかく素材だから調べておく．

まず，$\boldsymbol{x \to +0}$ のとき $\boldsymbol{f(x) \to -\infty}$ は問題ナシだが，$\boldsymbol{x \to \infty}$ はチョットした工夫が要る．このときは $\sqrt{x} = t$ とおくと，このとき $t \to \infty$ だから

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\log t^2}{t} = 2\frac{\log t}{t} \to 0\ (t \to \infty) \ \longleftarrow\ \boldsymbol{\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = 0} \end{aligned}$$

これはすでに説明した．

第2章　積分法とその応用

2.1　不定積分

ここで言う**不定積分**は**微分の逆演算**と思えばよい．したがって**右辺を微分すれば左辺のインテグラルの中身になる**ことが基本である．

そのような状況の中で人々は面白い積分の方法を思いついた．それが**置換積分法**と**部分積分法**である．

その基本原理の由来は

置換積分法　$\longleftarrow$　**合成関数の微分法**

部分積分法　$\longleftarrow$　**積の微分法**

だが，そのあたりは本文で詳しく解説する．

いずれもやり方を覚えれば何とか答えは出るものの，キチンとその基本原理をわかって運用しているかというとそうでもなくて，なんともココロもとないようなところがある．とにかく紙面を割いて**できるだけ丁寧に解説した**．時間をかけてもよいから**根本的なところから理解**して，できれば**感動**してもらいたい．

2.1.1　不定積分とは何か

2.1.1.1　不定積分の定義

$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ のとき $\boldsymbol{F(x)}$ を $f(x)$ の**原始関数**という．
このとき，関数 $G(x)$ が

$$G'(x) = f(x)$$

であるとすると

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
$$\therefore G(x) - F(x) = C \quad \therefore \boldsymbol{G(x) = F(x) + C} \ \ (\boldsymbol{C} \text{ は任意の定数！})$$

が成り立つ．このことは何を意味するか．

これは $f(x)$ の原始関数の 1 つである $F(x)$ が求まれば，そのすべての原始関数が **”$\boldsymbol{F(x) + C}$ ($\boldsymbol{C}$ は任意の定数)”の形のもの全体** として求められることを示している．

それらの原始関数を総称して $f(x)$ の**不定積分**といい，記号 $\boldsymbol{\int f(x)\,dx}$ で表す．

すなわち

$$\boldsymbol{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

である．そして，$f(x)$ の不定積分を求めることを**積分する**という．

また、上記の左辺で $\boldsymbol{x}$ を**積分変数**, $\boldsymbol{f(x)}$ を **被積分関数**という．

2.1.1.2　不定積分の基本的性質

不定積分の基本的性質

(1) $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ （ 複合同順 ）

(2) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \ (k \neq 0)$

（解説）不定積分の定義

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

を用いると，(1),(2) とも右辺を微分すると左辺のインテグラルの中身になる．ゆえに上記 (1),(2) は正しい．

ただし，(2) では $k \neq 0$ としたが，$k = 0$ のときは右辺が 0 だから左辺を積分して得られる定数 C は 0 に調整されなければならない．

これら (1), (2) は実際にはまとめて次の形に表される．

すなわち

$$\boldsymbol{\int \{kf(x) \pm lg(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx \pm l\int g(x)\,dx} \text{ （ 複合同順 } k, l \text{ は定数 ）}$$

2.1.1.3　不定積分の基本公式

不定積分の基本公式

いずれも**微分法の公式の逆読み！**（C はいずれも積分定数）

(1) $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ （$\alpha \neq -1$）

(2) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$　(3) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$　(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

(6) $\displaystyle\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$　(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

（証明）証明はいたってカンタン——**右辺を微分して左辺のインテグラルの中身になる**ことを確認できればよろしい．

(7) については少し説明が要る．

これは $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ ということだが, 実は $x > 0$ と $x < 0$ とでハナシがちがう．$x > 0$ のときは

$$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

は**微分法の公式**通りだから問題はない．

$x < 0$ のときは $|x| = -x$ だから，**合成関数の微分法**を利用して

$$\begin{aligned}(\log|x|)' &= \log(-x)' = \frac{1}{-x}(-x)' \\ &= \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

となる．

上記の公式 (7) はこれら **2 つの事実を形式的にまとめて** 1 **本の式で表したもの**で，いきなり右辺が微分できるわけではない．

ここで絶対値が気になるが，本格的な運用は**定積分**のときで，積分区間をにらんで絶対値をはずすのだが，これはそのときに詳しく述べることにする．

(注) 合成関数の微分法を**逆読み**することにより、いきなり**見えてしまう**ものもある．

たとえば

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C, \quad \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

のようなものは，合成関数の微分 $(2x)' = 2$ により出てくる 2 を打ち消すために前もって係数 $\dfrac{1}{2}$ を用意して**待ち伏せさせておく**タイプの積分である．内容は置換積分だが，これらも基本公式のうちとしてよかろう．

2.1.2　置換積分

2.1.2.1　置換積分の基本原理

これは”合成関数の微分法”を裏返した積分法である．

置換積分

x の関数 $f(x)$ で，x がさらに t の関数であるとき

$$\boldsymbol{\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt}$$

（証明）左辺を $F(x)$ とおいて t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(x) &= \left(\frac{d}{dx}F(x)\right)\frac{dx}{dt} \quad \longleftarrow \text{合成関数の微分！}\\ &= f(x)\frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

これを $\boldsymbol{t}$ で積分すると——$\boldsymbol{f(x)\dfrac{dx}{dt}}$ を固めたままでヤル！

$$F(x) = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt$$

左辺を $F(x)$ とおいたのだから

$$\boldsymbol{\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt}$$

が成り立つ．

＜メモ＞

■ この公式の意味

そもそもこの公式は，ナントナク覚えて, それなりにやればナントナク答が出るものだからそれ以上には深くかかわるヒマがない——それではやはりマズイのだ．

だいたいが，はじめ $\boldsymbol{t}$ で微分しておいてあとで積分してもとにもどすなど，誰が思いついたか知らないが何とも不思議な公式ではある．

改めて本文に示した公式の両辺をにらみつけてどこがどう置き換わっているかに注目してみよう．部分的に取り出すと

$$\boldsymbol{dx = \frac{dx}{dt}dt} \quad \longleftarrow \text{右辺に形式的な分数計算を許すと左辺になる！}$$

ここで，記号 $\boldsymbol{dx, dt}$ などはそれらの前についているインテグラルとセットにしてはじめて意味をもつ記号である．また，$\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt}}$ はこの記号の導入のところで説明したように x を t で微分するという記号で，あくまでも分数ではない．

そうであるにもかかわらず上記の公式は，その本当の意味や内容がわからなくても分数計算のようにデキてしまうところが恐ろしい——だからこそ微積分が世界中に広まることがデキタともいえるであろう．またまた記号の神様，ライプニッツ先生に”敬礼！”である．

したがってここのところは，マジメな人は立ち止まってしまい，要領のよい人はカンタンに（形式的に）乗り越えてしまう．

筆者としては，マジメな人は本当にナットクした上で力づくで乗り越えてほしいし，形式的に偶然，乗り越えてしまった人はいま一度立ち止まって考えてほしい．

■ この公式の運用について——運用は”右向き”と”左向き”がある．
公式をもう 1 度ここに掲げる．どこがどう置き換わっているかよく見てもらいたい．

$$\int f(x)\,\boldsymbol{dx} = \int f(x)\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\,\boldsymbol{dt} \longleftarrow \text{太字部分 に注目！}$$

以下，実例を挙げながら説明する．

(i) 右向きの運用——$\boldsymbol{dx = \frac{dx}{dt}dt}$ の形 $\longleftarrow$ 形式的に**分数のカタチを作る**タイプ！

＜例 **1**＞

$I = \int x(2x-1)^{10}\,dx$ を計算せよ．

(解) まず，$(2x-1)^{10}$ を展開する気にはならないだろう——そこで**置換積分！**
インテグラルの中身をにらんで，$\boldsymbol{2x-1=t}$ とおくと

$$\boldsymbol{x = \frac{t+1}{2}}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{dx = \frac{dx}{dt}dt = \frac{1}{2}dt} \quad \longleftarrow \boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}} \text{ と置き換える！}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
I &= \int x(2x-1)^{10}\,\boldsymbol{dx} \\
&= \int \frac{t+1}{2}\,t^{10}\,\boldsymbol{\frac{1}{2}\,dt} \longleftarrow \boldsymbol{dx} \text{ を } \boldsymbol{\frac{1}{2}dt} \text{ に置き換える！} \\
&= \int \left(\frac{t^{11}}{4} + \frac{t^{10}}{4}\right) dt = \\
&= \frac{t^{12}}{48} + \frac{t^{11}}{44} + C \longleftarrow \text{あとは } t = 2x-1 \text{ を代入！} \\
&= \frac{(2x-1)^{12}}{48} + \frac{(2x-1)^{11}}{44} + C
\end{aligned}$$

(ii) 左向きの運用——$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}dt = dx}$ の形 $\longleftarrow$ 形式的に**分母を払う**タイプ！

＜例 **2**＞

$I = \int \frac{\log x}{x}\,dx$ を計算せよ．

(解) $\log x = u$ とおくと

$$\boldsymbol{\frac{1}{x}dx = \frac{du}{dx}dx = du} \longleftarrow \boldsymbol{\frac{1}{x} = \frac{du}{dx}} \text{ だから 形式的に約分！}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\log x}{x}\,dx = \int \log x\,\boldsymbol{\frac{1}{x}\,dx} \\
&= \int u\,\boldsymbol{du} = \frac{1}{2}u^2 + C \\
&= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C
\end{aligned}$$

2.1.2.2　典型的な置換積分

ここからがいよいよ**実用的なハナシ**になる．

置換積分は**合成関数の逆読み**から一見して結果が見えるものもあるが一般にはそうはいかない．

以下に，著者なりにまとめた**典型的な置換積分の例**を分類して列挙するが，これは**丸覚えして使う公式ではない**．

この先，置換積分を実行していくときの**ヒント**というか，**道しるべ**というか，そういう類のものであるからそのつもりで読んでもらいたい．

あくまでも**アタマ**を使って**自分の力で**問題を解決するよう心がけることが大切である．

なお，上記**運用**の”**右向き** $(\Longrightarrow)$”，”**左向き** $(\Longleftarrow)$”もあわせて明記しておくが，実際の運用に当たっては自分が**どちらに向かって計算を進めているのか**について意識的であるように心がけてもらいたい——慣れてくれば無意識やれるようになる．

(i) **累乗の形**

- $\displaystyle\int (ax+b)^p\,dx = \frac{1}{p+1}(ax+b)^{p+1}\cdot\frac{1}{a}+C$ (p は実数, $p \neq -1$)　$(\Longrightarrow)$

  $ax+b=t$ とおくと

  $$adx = dt \quad \therefore\ dx = \frac{1}{a}dt$$

  特に $p=-1$ のときは

  $$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b|+C$$

- $\displaystyle\int f(x)^p f'(x)\,dx = \frac{1}{p+1}f(x)^{p+1}+C$ (p は実数, $p \neq -1$)　$(\Longleftarrow)$

  特に $p=-1$ のときは

  $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$$

(ii) **三角関数の積分**

- $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,dx,\ \int \cos(ax+b)\,dx$　$(\Longrightarrow)$

  これも $ax+b=t$ とおいて

  $$adx = dt \quad \therefore\ dx = \frac{1}{a}dt$$

- $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|+C$　$(\Longleftarrow)$

  $\displaystyle\int \cot x\,dx = \log|\sin x|+C$ $\longleftarrow$ $\cot x$ は $\tan x$ の逆数 のこと！ $(\Longleftarrow)$

- $\displaystyle\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x+C$　$(\Longleftarrow)$

  $\displaystyle\int \cos^n x\sin x\,dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x+C$ $(\Longleftarrow)$

- $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx,\ \int \cos^2 x\,dx\ \ (\Longrightarrow)$

半角の公式

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

を用いて２乗を解消してから積分！

- $\displaystyle\int \sin mx\cos nx\,dx,\ \int \cos mx\cos nx\,dx,\ \int \sin mx\sin nx\,dx\ \ (\Longrightarrow)$

これらは<積 → 和>の公式で積の形を和の形に解消してから積分する——<積 → 和>の公式はこのためにあるのだ！

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}$$
$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}$$
$$\sin mx\sin nx = -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}$$

- $\displaystyle\int f(\sin x,\cos x)\,dx$ ⟵ 被積分関数 が $\sin x$ と $\cos x$ の関数！ $(\Longrightarrow)$

これは三角関数の積分の最後の切り札！
まず，$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと ⟵ だいたいこれが思いつかない！

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} \quad \longleftarrow \sin\frac{x}{2}\text{を消去 して}\tan\frac{x}{2}\text{と}\cos^2\frac{x}{2}\text{に揃える！}\\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1\\ &= 2\,\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

また，$\tan\frac{x}{2}=t$ の両辺を t で微分すれば

$$\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = dt$$
$$\therefore\ dx = \frac{2dt}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1+t^2}dt$$

これらを代入すると，三角関数の積分を避けることができる．
すなわち

$$\text{与式} = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

(iii) 指数・対数関数の積分

- $\displaystyle\int \boldsymbol{e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C} \quad (\Longrightarrow)$

- $\displaystyle\int \boldsymbol{a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C} \quad (\Longrightarrow)$

  $a^x = y$ とおくと

  $$x\log a = \log y \qquad \therefore \quad y = e^{x\log a}$$

- $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{(\log x)^n}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1} + C} \quad (\Longleftarrow)$

  $\log x = u$ とおくと $\dfrac{dx}{x} = du$ だからこれを利用！

(iv) その他の置換積分

- $\displaystyle\int \boldsymbol{f(\sqrt{ax+b})\,dx} \quad (\Longrightarrow)$

  $\sqrt{ax+b} = t$ とおくと

  $$ax + b = t^2 \quad \therefore\ x = \frac{t^2-b}{a} \qquad \therefore \quad dx = \frac{2}{a}tdt$$

  $$与式 = \boldsymbol{\frac{2}{a}\int tf(t)\,dt}$$

- $\displaystyle\int \boldsymbol{x^{2n+1}f(\sqrt{ax^2+b})\,dx} \quad (\Longleftarrow)$

  $\sqrt{ax^2+b} = t$ とおくと

  $$ax^2 + b = t^2 \quad \therefore\ x^2 = \frac{t^2-b}{a} \qquad \therefore \quad 2xdx = \frac{2tdt}{a} \qquad \therefore \quad xdx = \frac{tdt}{a}$$

  $$与式 = \boldsymbol{\frac{1}{a}\int \left(\frac{t^2-b}{a}\right)^n f(t)tdt}$$

- $\displaystyle\int \boldsymbol{\sqrt{a^2-x^2}\,dx} \quad (\Longrightarrow)$

  $\boldsymbol{x = a\sin\theta}$ とおくと

  $$dx = a\cos\theta$$

  $$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = a|\cos\theta|$$

  $$\therefore \quad 与式 = \boldsymbol{\int |a\cos\theta| a\cos\theta\,d\theta = a^2\int |\cos\theta|\cos\theta\,d\theta}$$

- $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{1}{x^2+a^2}\,dx} \quad (\Longrightarrow)$

  $\boldsymbol{x = a\tan\theta}$ とおくと， $dx = a\,\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ だから

  $$与式 = \boldsymbol{\int \frac{1}{a^2(\tan^2\theta+1)}\cdot a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta}$$

2.1.3　部分積分

2.1.3.1　部分積分の基本原理

これは**積の導関数**に対応するものである．

部分積分

$$\boldsymbol{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dt}$$

（証明）積の導関数より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

右辺の第２項を左辺に移項すると

積分する　そのまま

$$\boldsymbol{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

そのまま　微分する

と読むことができる――**積の形をした関数を積分**するときに有効である．

＜メモ＞

■ 部分積分の意味と運用

積の導関数からこんな**公式**を思いついたのはいったい誰だろう．
ともかく改めて公式としてながめてみるとしよう．

積分する　そのまま

$$\boldsymbol{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

そのまま　微分する

これを**部分積分**として**有効に運用**するための**読み方のポイント**は

(i)　$\boldsymbol{f'(x)}$ **が積分しやすい (原始関数が見つけやすい）形** であること．

(ii)　$\boldsymbol{g(x)}$ **が微分しやすい形** であること．

(iii) その上で $\boldsymbol{f(x)g'(x)}$ **が積分しやすい形** であること．

だが，しかし**ショウギでいえば 3 手先まで読むようなハナシ**で，微分するつもりで積分してしまったり，あるいはその逆であったり，あるいは符号を間違えたり，慣れるまでなかなか大変である．まあ，あせらず練習するべし．

まずは次の例でその**使い方**を確認することからはじめよう．

＜例＞

$I = \int x^2 e^x\,dx$ を計算せよ．

(解) 被積分関数をながめると，それを構成している x^2 と e^x 微分するにしても積分するにしてもそうメンドウではない．しかし x^2 は微分すると $2x$ となり**次数が下がる**．そこで $\boldsymbol{e^x}$ **を積分する**方にまわし，$\boldsymbol{x^2}$ **を微分する**ように計算を構成すればよい．すなわち

$$
\begin{aligned}
I &= \int \overset{\text{積分する}}{\boldsymbol{e^x}}\ \overset{\text{そのまま}}{\boldsymbol{x^2}}\ \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{e^x}\ \boldsymbol{x^2} - \int \boldsymbol{e^x}\ \underset{\text{微分する}}{\boldsymbol{2x}}\ \boldsymbol{dx} \\
&= x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx
\end{aligned}
$$

要するに第 2 項目に**部分積分をもう 1 度実行**してさらに**次数を下げれば**デキそうだ.

$$
\begin{aligned}
&\int \overset{\text{積分する}}{\boldsymbol{e^x}}\ \overset{\text{そのまま}}{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{e^x}\ \boldsymbol{x} - \int \boldsymbol{e^x} \cdot \underset{\text{微分する}}{\boldsymbol{1}}\ \boldsymbol{dx} \\
&= xe^x - e^x + C'
\end{aligned}
$$

これを代入して

$$
\begin{aligned}
I &= x^2 e^x - 2\,(\,xe^x - e^x + C') \\
&= (x^2 - 2x + 2)\,e^x + C \quad (\,C = -2C'\,)
\end{aligned}
$$

と，まあこんな具合である．

■ **置換積分とどう違うか.**

初学者は**積の形をした積分の問題**を与えられると ” これは置換積分か部分積分か ” と悩むようである．これは決定的に違うのだ．もう 1 度置換積分の公式を見てもらおう．

$$
\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f(x)\frac{dx}{dt}\,dt}
$$

この公式で積に見えるとすれば右辺の $f(x)$ と $\dfrac{dx}{dt}$ だが，これは先に述べた**置換積分の ” 左向き ($\Longleftarrow$) ” の運用**が用意されている．たとえば

$$
I = \int (1 + \sin x)\cos x\, dx
$$

を $(1 + \sin x)$ と $\cos x$ との積と見て，うっかり部分積分にかかれば**たちどころにメチャメチャ**になってしまう．

これは，$1 + \sin x = t$ とおけば $\cos x dx = dt$ だから

$$
I = \int t\, dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(1 + \sin x)^2 + C
$$

が正しい扱いである．

このように**手元の式の形**をよくにらんで，**どこに行きたいか**を的確に予測することが大切である．

2.1.3.2　典型的な部分積分

- $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

$\log x$ の前に”1”があると考えて”1”を積分して”x”を誘導する．そして $\log x$ を微分する．

$$\int 1\cdot\log x\,dx = x\cdot\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

積分する　そのまま　そのまま　微分する

かくしてこの部分積分が達成される．すなわち

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\log x - \int dx = x\log x - x + C\end{aligned}$$

さらに，$\log x$ のところが $\log(x+1)$ になっていると**もっとおもしろい**．
先の例にならって 1 を積分して x を誘導すると

$$\int 1\cdot\log(x+1)\,dx = x\cdot\log(x+1) - \int x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

積分する　そのまま　そのまま　微分する

この場合，右辺の第 2 項で

$$x\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

と変形すればやれなくもないが，ちょっとメンドウだ——これを**1 パツでやる方法**がある．
それは”**1**”を積分して”$x+1$”を誘導する——”積分する”で得られるものは $x+C$ (C は積分定数) のすべてだから，すでに**あとで約分する**ことを考えて $C=1$ を選んでおく！

$$\int 1\cdot\log(x+1)\,dx = (x+1)\cdot\log(x+1) - \int (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

積分する　そのまま　そのまま　微分する

とやればよい．すなわち

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\log(x+1)\,dx &= (x+1)\log(x+1) - \int (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= (x+1)\log(x+1) - x + C\end{aligned}$$

となる．この**積分**はなかなかの**クワセモノ**だが，**部分積分**を理解するには**カッコウの素材**である．

- 同じものが現れる例 —— $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx\ (=I),\ \int e^{ax}\cos bx\,dx\ (=J)$

まず

$$\begin{aligned}I &= \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}b\cos bx\,dx\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}J\end{aligned}$$

つぎに

$$
\begin{aligned}
J &= \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}b(-\sin bx)\,dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \boldsymbol{e^{ax}\sin bx\,dx} \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I
\end{aligned}
$$

そこで，これらを I, J に関する**連立方程式**とみてまず，I について解くと

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left\{\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I\right\} \\
\therefore\ \boldsymbol{I} &= \boldsymbol{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)\quad +(\,C_1)} \quad \longleftarrow \text{積分定数 } C_1 \text{は調整！}
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\boldsymbol{J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin ax)\ \ (+\,C_2)} \quad \longleftarrow \text{積分定数 } C_2 \text{は調整！}
$$

- **漸化式の例**

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I(m,n)} &= \int x^m(\log x)^n\,dx \\
&= \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\log x)^n - \int \frac{1}{m+1}\cdot x^{m+1}\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m(\log x)^{n-1}\,dx \\
&= \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1}\boldsymbol{I(m,n-1)}
\end{aligned}
$$

2.2 定積分

不定積分については**微分法の逆演算**ということで，まあナットクしてもらえた思う．問題は**定積分**である．というのは，大学以上では定積分は**無限級数の和**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$$\longleftarrow\ a<b,\ f(x)>0 \text{ なら } \textbf{面積！}$$

と定義され，**微積分学の基本定理**（後述）という大定理によってそれが**原始関数の増分**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

で表されることを確認し（ここが**微積分のハイライト**なのだ），その上で定積分の議論が展開する仕組みになっている．

クドイようだが、何より先に $(*)$ が定積分のアタマに来るはずなのだ．歴史的経緯から言っても、その目的とする求積への段取りとしても、発想としてこれが正しい自然な流れだと筆者は考える．

現行の高校数学ではそれが**サカサマ**で，原始関数の増分が定積分の定義になってしまっている．ここが何とも悩ましいのだ——理由はあとで述べる．

そこで、筆者としては**高校数学のカオ**も立てるわけではないが，君たちが今まで習ってきた経緯というものもあるだろうから、いきなり「 定積分は $(*)$ だ 」と言いまくるわけにも行かず、ここは泣く泣くでも「 **原始関数の増分** $(**)$ 」 をもって**定積分**と定義してハナシを始めるしかなかろう——あとで詳しく説明します．

したがって ” 周期関数がらみの定積分 ” や ” 積分と不等式 ” ——この辺は面積で説明する方が簡単でわかりやすいにキマッテイル．しかし、まずは ” 原始関数の増分 ” でつらぬいているという立場をご理解いただきたい．

その上で微積分学の基本定理を経由して面積，体積への**道筋をつける**ことにする．とは言うものの**ウマク行ったらオナグサミ**という心境ではある．

2.2.1　定積分とは何か

2.2.1.1　定積分の定義

さて改めて、関数 $f(x)$ の**原始関数**の 1 つを $F(x)$ とするとき，2 つの実数 a, b に対して $f(x)$ の a から b までの**定積分**をつぎのように**定義**する．

すなわち

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

である．このとき $f(x)$ を**被積分関数**，閉区間 $[a, b]$ を**積分区間**といい，積分区間は被積分関数の**定義域**になっている．また，$\boldsymbol{a}$ をこの定積分の**下端**，$\boldsymbol{b}$ を**上端**という．

ここでいう**定積分**は x が a から b まで変化するときの**原始関数の増分（変化量）**のことで，**面積とは何の関係もない**——単純に $F(b)$ と $F(a)$ との引き算のこと である．

したがって、$b \geqq a$ とは限らないし，計算の結果が負になることも起こりうるので注意しなければならない．

2.2.1.2　定積分の基本的性質

定積分の基本的性質

(1) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = -\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$ $\longleftarrow$ 特に $b=a$ のときは $\displaystyle\int_a^a f(x)=0$

(2) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(t)\,dt}$ $\longleftarrow$ 得られる**数値**は**積分変数**によらない！

(3) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{kf(x)\,dx} = \boldsymbol{k}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$ $\longleftarrow$ k は定数，$k=0$ でも成立！

(4) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\{f(x)\pm g(x)\}\,dx} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx} \pm \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{g(x)\,dx}$（ 複合同順 ）

(5) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f(x)\,dx} + \int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$ $\longleftarrow$ $\boldsymbol{a,b,c}$ の**大小関係は任意**！

(6) $\displaystyle\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)\,dt = f(x)}$

(**証明**)(1),(3) は問題ナシとしてよかろう．

(2) が意外に通りが悪い———次の例で確認！

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},\quad \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \longleftarrow \text{積分変数によらない！}$$

一般に，(3), (4) をまとめると次の形で表される．

$$\int_a^b \{kf(x)\pm lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \pm l\int_a^b g(x)\,dx \text{（ 複合同順，} k,\,l \text{ は定数 ）}$$

(5) は右辺を**定積分の定義**にしたがって計算すると

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,d + \int_c^b f(x)\,dx &= \{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}\\ &= F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

となり左辺が得られる．

(6) は当たり前といえばいえるが，**ワケ**をわかっておくことが大切である．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}\\ &= \{F(x)-F(a)\}' \longleftarrow \boldsymbol{F(a)} \text{ は定数！}\\ &= F'(x) = f(x)\end{aligned}$$

＜メモ＞

■ 積分区間の分割

改めて**定積分の基本的性質** (5) を見てもらいたい．

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx} \quad \longleftarrow \boldsymbol{a, b, c}\ \text{の大小関係は任意！}$$

であった．特に，a, b, c の大小関係については $a \leqq b$ とか，c は a と b との間 とかの制限は一切ない．それは本文に示した証明の計算から明らかである．実はこれは相当有難い性質で，入試にもよく出るから**完全にマスター**しておくべし．以下、**実例**で示すことにする．

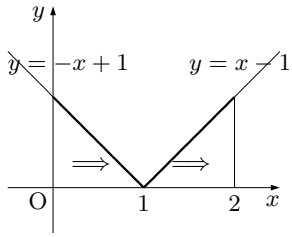
＜ 例 ＞

$I = \displaystyle\int_0^2 |\,x-1\,|\,dx$ を計算せよ．

（解）まず，被積分関数 $|\,x-1\,|$ が

$x \geqq 1$ のとき：$|\,x-1\,| = x-1$

$x < 1$ のとき：$|\,x-1\,| = -(x-1)$



で，1 **を境にちがう関数表現になっている**ことに注目して上記公式を運用する——— $a = 0,\ b = 2,\ c = 1$ とおいて，積分区間を [0,1] と [1,2] に分割すればよい．

$$I = \int_0^2 |\,x-1\,|\ dx \longleftarrow \text{被積分関数の枝分かれ にしたがって 積分区間を分割 する！}$$

$$= \boldsymbol{\int_0^1 |\,x-1\,|\ dx + \int_1^2 |\,x-1\,|\ dx} \longleftarrow \text{それぞれの定義域で 絶対値をはずす！}$$

$$= \int_0^1 -(x-1)\ dx + \int_1^2 (x-1)\ dx$$

$$= -\left[\ \frac{x^2}{2} - x\ \right]_0^1 + \left[\ \frac{x^2}{2} - x\ \right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

以上絶対値のついた 1 次関数で説明したが，どんな関数の場合でも**積分区間内で被積分関数の枝分かれが起こるとき**はまったく同様な扱いである．ヴァリエーションを 2 つあげておく．

$$\int_0^1 |\,t-x\,|\ dt, \qquad \int_0^x |\,t-1\,|\ dt$$

こうなるとトウアンはおおむねメチャメチャになるだろう．

<u>**積分区間で枝分かれが起こるか，起こらないかの場合分け**がポイント</u> である———これができれば免許皆伝ということだ．

■ 積分を微分する

本文に述べた**定積分の基本的性質** (6) は

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)} \longleftarrow \text{被積分関数 } \boldsymbol{f(t)} \text{ の変数 } \boldsymbol{t} \text{ が } \boldsymbol{x} \text{ に置き換わった！}$$

で，**左辺のインテグラル以下**は明らかに $\boldsymbol{t}$ **については定積分**である．

しかし、その値は上端の x に対応して変化する $\boldsymbol{x}$ **の関数**，キチンといえば $\boldsymbol{f(x)}$ **の原始関数の 1 つであ**ることを意味している．

さらに上端，下端が，$\boldsymbol{x}$ の関数になっている場合は

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\int_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f(t)\,dt}=\{F(v)-F(u)\}' \longleftarrow \boldsymbol{u,v}\text{ は }\boldsymbol{x}\text{ の関数だから合成関数の微分法！}$$

$$=\boldsymbol{f(v)\frac{dv}{dx}-f(u)\frac{du}{dx}}$$

となる．具体的に $u=x,\ v=x^2$ などとしてあてはめてみるとよい．

■ 積分で表された関数

具体的に例で説明する——積分とはどういうものかをながめてもらいたい．

＜例＞

(1) $f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1(x-t)f(t)\,dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{x+a}f(t)\,dt=1-e^x$ を満たす連続関数 $f(x)$ と定数 a を求めよ．

（解） (1) まず，$\displaystyle\int_0^1(\quad)\,dt$ の中に x と t が混在している——積分変数は $\boldsymbol{t}$ だからこの中では x は定数——これをインテグラルの外に放り出せ!

$$f(x)=x^2+\int_0^1(x-t)f(t)\,dt=x^2+\int_0^1\{xf(t)-tf(t)\}\,dt$$

$$=x^2+x\underbrace{\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{f(t)\,dt}}_{\boldsymbol{A}\ (\text{定数！})}-\underbrace{\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{tf(t)\,dt}}_{\boldsymbol{B}\ (\text{定数！})}\longleftarrow\ \text{定関数の定区間積分値は定数！}$$

$$=x^2+Ax-B$$

そこで改めて $A,\ B$ について書いてみると

$$A=\int_0^1(t^2+At-B)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}+A\frac{t^2}{2}-Bt\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{A}{2}-B\qquad\therefore\quad\frac{A}{2}+B=\frac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\boxtimes$$

$$B=\int_0^1t(t^2+At-B)\,dt=\int_0^1(t^3+At^2-Bt)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}+A\frac{t^3}{3}-B\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{A}{3}-\frac{B}{2}\qquad\therefore\quad\frac{A}{3}-\frac{3B}{2}=-\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots\boxtimes$$

$\boxtimes$，$\boxtimes$を解くと

$$A=\frac{3}{13},\ B=\frac{17}{78}\qquad\therefore\quad f(x)=x^2+\frac{3}{13}x-\frac{17}{78}$$

(2) これもナンダカわからない——$\boldsymbol{x=-a}$ とおくと左辺が 0 になるから

$$0=1-e^{-a}\qquad\therefore\quad e^{-a}=1\qquad\therefore\quad a=0$$

ゆえに，与えられた等式は

$$\int_0^xf(t)\,dt=1-e^x\ \longleftarrow\ \boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^xf(t)\,dt=f(x)}$$

この両辺を x で微分すると $f(x)=-e^x$ が得られる．

2.2.2　置換定積分

2.2.2.1　置換定積分の基本公式

置換定積分

$x = g(t)$ が閉区間 $[\ \alpha,\ \beta\ ]$ で連続な導関数 $g'(t)$ を持ち，$g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$ で，$f(g(t))$ も閉区間 $[\ \alpha,\ \beta\ ]$ で連続であるとき

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt}\ \left(= \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dx}{dt}\,dt\right)$$

(**証明**) 両辺をそれぞれ積分する．

$$\text{左辺} = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{右辺} = \boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = \Big[\ F(g(t))\ \Big]_\alpha^\beta} \longleftarrow \text{合成関数の微分法の逆演算！}$$

$$= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \ \longleftarrow\ g(\beta) = b, g(\alpha) = a$$

$$= F(b) - F(a)$$

すなわち上記の公式が成り立ち

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt}$$

<メモ>

■ 置換積分法の運用——”右向き”，”左向き”の使い方と積分区間の変換．

改めて，本文に示した置換定積分の公式は

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt}\ \left(= \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dx}{dt}\,dt\right)$$

だが，あたかも分数計算のような形式的な約分も部分的に取り出せば

$$\boldsymbol{dx = g'(t)dt}\ \left(= \boldsymbol{\frac{dx}{dt}dt}\right)$$

で，運用の方向の 右向き（ $\Longrightarrow$) と左向き ($\Longleftarrow$) も不定積分の場合と同様である．

しかし置換定積分の場合は積分区間の対応の問題がある——筆者もそうであったがこれは慣れるまではキモチが悪い．そういう人は本文に示した右辺の計算を見てもらいたい．

よく見ると 右辺で積分変数 $\boldsymbol{t}$ が $\boldsymbol{\alpha}$ から $\boldsymbol{\beta}$ まで連続的に変化するとき，それに対応して左辺の積分変数 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ まで連続的に変化する ことが見えてこないか．

要するに 積分区間が $\boldsymbol{f(x)}$ に対する $\boldsymbol{x = g(t)}$ という”合成”に対応して変換されていることがわかる．このことは一般に次のような対応表を書き添えることで説明している．すなわち

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

のように書けばよい．

以下，実例で説明する——置換積分の公式の運用が，**右向き** ($\Longrightarrow$)，**左向き** ($\Longleftarrow$) のどちら向きで使われているかを確認しながら読み進めてもらいたい．

＜例 1＞

$I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx$ を計算せよ．

(解) これは**右向き** ($\Longrightarrow$) の使い方の例である．

$\boldsymbol{\sqrt{1-\sqrt{x}} = t}$ とおくと

$$1-\sqrt{x} = t^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{x} = 1-t^2 \qquad \therefore\quad x = (1-t^2)^2 = (t^2-1)^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{dx = 2\,(t^2-1)\,(2t)\,dt} \quad \longleftarrow 2(t^2-1)(2t) = \frac{dx}{dt}$$

このとき**積分区間**は $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline t & 1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$ であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 t\ 2(t^2-1)(2t)\,dt \\ &= -4\int_0^1 (t^4-t^2)\,dt \\ &= -4\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

＜例 2＞

$I = \displaystyle\int_1^3 \frac{\log x}{x}\,dx$ を計算せよ．

(解) これは**左向き** ($\Longleftarrow$) の使い方の例である．

$\boldsymbol{\log x = t}$ とおくと

$$\boldsymbol{\frac{1}{x}dx = dt} \longleftarrow \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$$

このとき**積分区間**は $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \longrightarrow & 3 \\ \hline t & 0 & \longrightarrow & \log 3 \end{array}$ であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\log 3} t\,dt \\ &= \left[\ \frac{t^2}{2}\ \right]_0^{\log 3} = \frac{(\log 3)^2}{2} \end{aligned}$$

＜例 3＞

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx,\quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ を計算せよ．

(解) こうなるとわかりにくいが，ともに**運用は右向き** ($\Longrightarrow$) なのだ——**以下で確認**のこと．

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$\boldsymbol{x = \sin\theta}$ とおくと——**ルートを解消する**にはどうすればよいか．

$$\boldsymbol{dx = \cos\theta d\theta} \ \longleftarrow \frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

このとき積分区間は $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{2} \end{array}$ で，被積分関数は

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| \longleftarrow \text{定義域が決まらないと絶対値ははずせない！}\end{aligned}$$

ゆえに I_1 は

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta|\cos\theta\,d\theta \longleftarrow \text{積分区間内で } \boldsymbol{\cos\theta \geqq 0} \text{ を確認して絶対値をはずす！} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \longleftarrow \text{半角公式で累乗を解消してから積分！} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

次に

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

だが，ここで $\boldsymbol{x = \tan\theta}$ とおく——オケルかな？

$$\boldsymbol{dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta}$$

積分区間については $\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$ であるから

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}} \text{ で約分, ヒキョウだ！} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\ \theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2.2.2.2　置換定積分の応用例

対称積分

関数 $f(x)$ の偶関数、奇関数にしたがって

$$\int_{-h}^{h} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \begin{cases} \boldsymbol{2\displaystyle\int_{0}^{h} f(x)\,dx} & \longleftarrow\ f(x) \text{ が 偶関数 のとき！} \\ \boldsymbol{0} & \longleftarrow\ f(x) \text{ が 奇関数 のとき！} \end{cases}$$

である.

(証明) まず，偶関数とは何か，奇関数とは何か.

偶関数： つねに $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ $\longleftarrow y = f(x)$ のグラフは $\boldsymbol{y}$ 軸対称！

奇関数： つねに $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ $\longleftarrow y = f(x)$ のグラフは 原点対称！

以上を確認した上で

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-h}^{0} \boldsymbol{f(x)\,dx}}_{A} + \underbrace{\int_{0}^{h} f(x)\,dx}_{B} \quad \longleftarrow \text{積分区間の分割！}$$

右辺の A に置換積分を実行する——— $\boldsymbol{x = -t}$ とおくと

$$\boldsymbol{dx = (-1)dt}, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & -h & \longrightarrow & 0 \\ \hline t & h & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

であるから，

$$A = \int_{-h}^{0} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_{h}^{0} f(-t)(-1)\,dt = \int_{0}^{h} f(-t)\,dt$$

まず、$\boldsymbol{f(x)}$ が偶関数の場合は

$$A = \int_{0}^{h} \underbrace{f(-t)}_{f(t)}\,dt = \int_{0}^{h} f(x)\,dx = B \quad \longleftarrow \text{積分値は積分変数によらない！}$$

$\boldsymbol{f(x)}$ が奇関数の場合は

$$A = \int_{0}^{h} \underbrace{f(-t)}_{-f(t)}\,dt = -\int_{0}^{h} f(x)\,dx = -B \quad \longleftarrow \text{積分値は積分変数によらない！}$$

であるから、これらをまとめて

$$\int_{-h}^{h} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \begin{cases} \boldsymbol{2\displaystyle\int_{0}^{h} f(x)\,dx} & \longleftarrow\ f(x) \text{ が 偶関数 のとき！} \\ \boldsymbol{0} & \longleftarrow\ f(x) \text{ が 奇関数 のとき！} \end{cases}$$

となる———これらは、かなり有効である.

＜補足説明！＞

まあ、このくらいの**置換積分**ならドウということはないが、ここでも**定積分の定義**を

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f(x_k)\Delta x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

としておいてもらわないと基本的には**困る**のである――最初からそのように定義しておいてくれたなら、この定理は**一目瞭然**である.

あわせて、**偶関数**、**奇関数**の**定義**とその**意味**を確認しておく.

偶関数 ： $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ ⟵ グラフは y 軸対称で x^2, $\cos x$ など！

奇関数 ： $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ ⟵ グラフは原点対称で x^3, $\sin x$ など！

であったが、たとえば**偶関数の場合**、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 軸に関する対称点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると、これらの間の関係式は

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = -X \\ y = Y \end{cases} \quad \therefore \quad Y = \underbrace{\boldsymbol{f(-X) = f(X)}}_{\text{条件より}} \longleftarrow y = f(x)$$

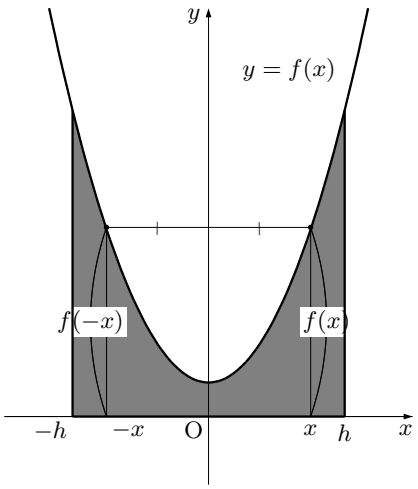
ゆえに、点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ も $y = f(x)$ 上にある ことになり、曲線は $\boldsymbol{y}$ **軸に対称**である.

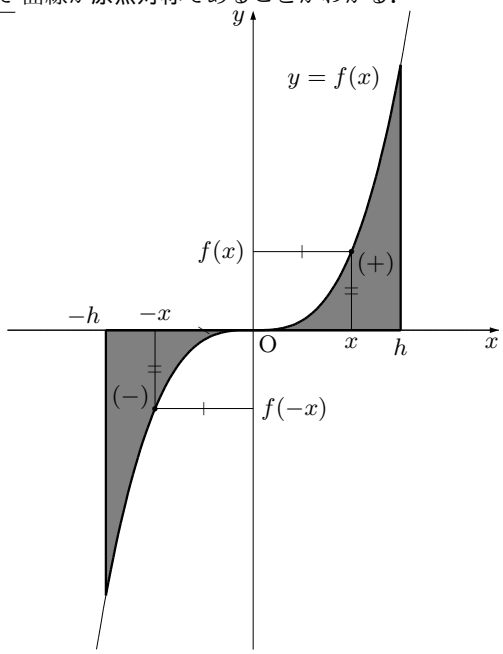
また、**奇関数の場合**も同様に原点に関する対称点を押さえて

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = -X \\ y = -Y \end{cases} \quad \therefore \quad -Y = \underbrace{\boldsymbol{f(-X) = -f(X)}}_{\text{条件より}} \longleftarrow y = f(x)$$

$$\therefore \quad Y = f(X)$$

この場合も 点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ が $y = f(x)$ 上にあって 曲線が**原点対称**であることがわかる.





＜end.＞

2.2.3　部分定積分

2.2.3.1　部分定積分の基本公式

部分定積分

$$\boldsymbol{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx}$$

(**証明**) これは証明するまでもない．チャートで示すと

$$\boldsymbol{\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

積分する　そのまま　そのまま　微分する

で，不定積分に**積分区間**をそのまま書き添えればよい．

それでもシックリしない向きは**不定積分の基本公式**を誘導する**経緯**を思い出してもらいたい．

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

であった．

すなわち $\boldsymbol{f(x)g(x)}$ は $\boldsymbol{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$ の**原始関数**の 1 つに他ならない．ゆえに**定積分の定義**より

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

$$\therefore \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

そこで左辺の第 2 項目を右辺に移項すると

$$\boldsymbol{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx}$$

となり，上記の公式が導かれる．

また，計算のノウハウについては不定積分のところで詳しく述べたのでここで触れるまでもない．

2.2.3.2　部分定積分の応用例

ここでは漸化式の例を 1 つあげておく.

$$\boldsymbol{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,\quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx}$$

を求めるにはどうすればよいか.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \ \longleftarrow\ \textbf{sin}\,\boldsymbol{x}\ \textbf{を 1 つはずす！}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx \longleftarrow \textbf{部分積分！}\\
&= \Big[\ (-\cos x)\cdot \sin^{n-1} x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1-\sin^2 x)\,dx\\
&= (n-1)\ \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\right\}\\
&= (n-1)\ (I_{n-2} - I_n)\\
&\therefore\quad nI_n = (n-1)I_{n-2}\\
\therefore\quad \boldsymbol{I_n} &\boldsymbol{= \frac{n-1}{n} I_{n-2}} \ \longleftarrow\ \textbf{漸化式なのだ！}
\end{aligned}$$

この関係で I_k の k は 2 つずつ下がるので順次用いて I_n は

$\boldsymbol{n}$ **が偶数**のとき

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}I_0\ \left(I_0 = \frac{\pi}{2}\right)$$

$\boldsymbol{n}$ **が奇数**のとき

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{2}{3}I_1\ (I_1 = 1)$$

実際に計算してみると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 = \frac{5\pi}{32}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1 = \frac{8}{15}$$

のようにやればよい——これは便利そうではある.

また，$\boldsymbol{J_n}$ は $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} - t}$ とおくと

$$dx = -dt,\quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-1)\,dt \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t\,dt \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = I_n
\end{aligned}
$$

すなわち I_n と等しいことがワカル.

＜補足説明！＞

何か**意味ありげ**な漸化式だが，これは**アステロイド** (後述) の面積を求めるときに使う．しかし，それも I_4, I_6 を計算するだけで他の用例はあまり見かけない.

探してみると他にないわけでもないが、I_4，I_6 くらいまでなら 2 倍角、3 倍角の公式を重ねて使えばカタがつくので、実際には見かけほど有難い公式でもない.

ちなみに n が奇数のとき、たとえば $n = 2k+1$ とすると

$$
\begin{aligned}
I_{2k+1} &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^k \sin x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^k \sin x\,dx
\end{aligned}
$$

と変形すれば、$\boldsymbol{\cos x = t}$ とおく**左向きの置換積分**が使えて有難さはさらに半減する——まあ、キレイなカタチの公式ではあるが役に立つ場面は限られている.

＜ end.＞

2.2.4　周辺の諸問題

ここで、あえて「 **周辺** 」という何とも奇妙な言葉を用いたわけは、ここで扱うテーマは**定積分の計算**に関する技術的な問題でもなく、さりとて**面積**、**体積**、**曲線の長さ**のような、**求積**というカタチで一括りにするわけにもいかないが、それなりの内容を含んだヤッカイなテーマというほどの意味である．

具体的には「**周期関数と積分**」、「**積分と不等式**」などだが、これらは実際の入試問題でも**無限級数**との融合問題、さらに**はさみうち**をも絡めた融合問題のようなカタチでヤマのように出題されている——概して受験生はメチャメチャに弱い．

したがって、筆者としてはここを避けて通るわけにはいかないから、別に項目を設けて解説をすることにした．しかし、ここにきて例の**定積分の定義**に引っかかる．

つまり、どうやらここまでは定積分の定義を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

として押し通してきた．そしてこの 2 つの項目「**周期関数と積分**」、「**積分と不等式**」についても、一応はその立場で貫いた．しかし、おそらく読まされる方にとっては相当過酷であろう、というよりあまりに非生産的である．

といって「手がない」わけではない．それは先に面積、体積、曲線の長さまでやってから「積分の応用」などとして「お茶をにごす」こともできた．

しかし、問題集ならいざ知らず、この趣旨で、しかもこのレベルでは、あまりに距離が遠すぎる——筆者としては定積分は定積分として然るべく完結したかった．

そこで、苦肉の策ではあるが、高校数学の立場である $(**)$ でまずは構成しておき、あとは必要に応じて**＜メモ＞**、あるいは**＜補足説明！＞**として、本来の定義である

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$\longleftarrow$ $a<b,\ f(x)>0$ なら **面積！**

による説明を随所に入れた——これはかなり有効ではなかったかと思う．

まあ、これは筆者のアリバイ工作のようなものだが、少なくとも具体的なイメージを膨らませることで読者の理解の**裏打ち**はできたであろう．オカゲでこの定義の両方の立場がハッキリしたことは確かである．

以下、「**周期関数と積分**」を第 **1** の難所、「**積分と不等式**」を第 **2** の難所として注意深く読み進めてもらいたい．

2.2.4.1　周期関数と積分

周期関数と定積分

$f(x)$ を周期 $\boldsymbol{p}$ の周期関数とするとき

(i) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{p+a}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f(x)\,dx},\ \int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{b+p}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$

(ii) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{np}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \boldsymbol{n}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$　(n は整数)

(証明) まずは周期関数とは何か——周期的に同じことを繰り返す関数ということ!

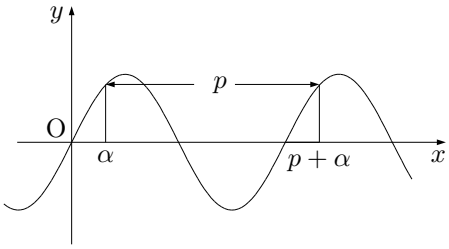
このことを数式で表すと，任意の $\boldsymbol{x}$ について

$\boldsymbol{f(x+p) = f(x)}$ $\longleftarrow$ $f(x) = \sin x$ などを例に考えてみよ！

が成り立つことである.

このとき、関数 $f(x)$ は周期 $\boldsymbol{p}$ の周期関数であるという.

また、正で最小の周期を基本周期という.



(i) 第 1 式は $x = p + t$ とおくと $dx = dt$ で

x	p	$\longrightarrow$	$p+a$
t	0	$\longrightarrow$	a

だから

$$\int_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{p+a}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_0^a f(p+t)dt \longleftarrow \text{周期性から } \boldsymbol{f(p+t) = f(t)}\text{ !}$$

$$= \int_0^a f(t)\,dt$$

$$= \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f(x)\,dx} \longleftarrow \text{積分値は積分変数によらない！}$$

また第 2 式は，左辺は b によらないことをいえばよいから b を変数と見て

$$\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{b+p}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = g(b)$$

とおくと

$$g'(b) = f(b+p) - f(b) = 0 \longleftarrow \text{周期性から } \boldsymbol{f(b+p) = f(b)}\text{ !}$$

すなわち $\boldsymbol{g(b)}$ は定数だから，これは $\boldsymbol{g(0)}$ の値に等しいとしてよい．すなわち

$$\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{b+p}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = g(b) = g(0) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$$

(ii) 左辺の積分区間を 1 周期ごとに分割して考えると

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{np}} \boldsymbol{f(x)\,dx} \left(= \int_0^p + \int_p^{2p} + \int_{2p}^{3p} + \cdots\cdots + \int_{(n-1)p}^{np} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)p}^{kp} f(x)\,dx$$

この定積分の部分に置換積分を実行する.

すなわち、$f(x)$ で $\boldsymbol{x=(k-1)p+t}$ とおくと $\boldsymbol{dx=dt}$ で

x	$(k-1)p$	$\longrightarrow$	kp
t	0	$\longrightarrow$	p

だから

$$\int_{\boldsymbol{(k-1)p}}^{\boldsymbol{kp}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_0^p f((k-1)p+t)\,dt \ \longleftarrow \boldsymbol{(k-1)p}\text{ もトウゼン周期！}$$

$$= \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f(t)\,dt} \ \longleftarrow \text{これが } n \text{ 個！}$$

$$\therefore \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{np}} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \left(\int_0^p f(t)\,dt\right) \times \ n$$

$$= \boldsymbol{n}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f(t)\,dt} \ \longleftarrow \text{1 周期分の } \boldsymbol{n} \text{ 倍！}$$

＜補足説明！＞

さて、ここが**第 1 の難所**である．まず注目してもらいたいことは、本文の解説では**定積分の定義**を徹頭徹尾、**原始関数の増分**、すなわち

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

で押し通していることである．

しかしここは、図を描いて**面積のイメージ**で説明する方がダンゼンわかり易い．では、なぜそうしないか．それは、定積分の定義を上記のように定義したがゆえに**面積**との**関連付け**ができないのだ——それは**微積分学の基本定理** (後述) によってはじめて達成される ハナシなのだ．

だから、最初から**定積分**を**世界の常識**にしたがって

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x}$$

と定義しておけば何の問題もないものを！——何とも腹立たしい．

つまり、この定義によれば

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

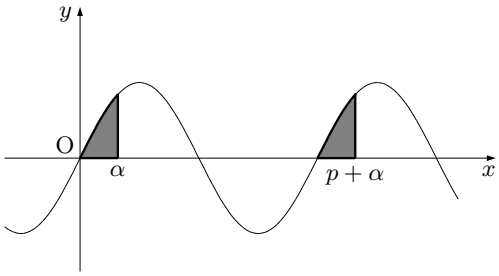
はほとんど明らかだから、本文に述べた公式群の成立は説明するまでもないハナシになる．

特に**周期関数**などと改まるとわかりにくいが、典型的な例に三角関数がある．

ここでは

$$y = \sin x$$

で、そのイメージを説明しよう (右図)．



たとえば、本文の (1) の前半などは図を描いて面積の関係をにらめば一目瞭然ではないか——後半は各自で確認せよ．

(2) についても、この立場で考えればほとんど明らか——n 周期分の積分は 1 周期分の n 倍になるのは当たり前である．ずっと簡単だ．

しかし、定積分の **2 つの定義**の**関連付け** (**微積分学の基本定理**) の前にこのイメージで説明したのでは**スジ**が通らないということにならないか．

＜ end.＞

＜メモ＞

■ 周期性とその応用

周期関数というといかにも難しいと思うかも知れないが，とりあえずは**典型的なサンプル**として $\boldsymbol{\sin x}$ などを思い浮かべるとよい．この場合，基本周期はトウゼン 2π である．

実例を挙げておこう．

＜例 **1**＞

$I=\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin nx+\cos nx|\,dx$ (n は正整数) を計算せよ．

(解) まず被積分関数の三角関数を**合成**して

$$I=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

そこで $nx+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと

$$ndx=dt\quad\therefore\ dx=\frac{1}{n}dt$$

また，

x	0	$\longrightarrow$	π
t	$\frac{\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$n\pi+\frac{\pi}{4}$

であるから

$$\begin{aligned}
I&=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}}|\sin t|\ \frac{1}{n}\,dt\ \longleftarrow \textbf{置換積分}\text{ を実行！}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}}|\sin t|\,dt\ \longleftarrow \boldsymbol{|\sin x|}\textbf{ の周期は }\boldsymbol{\pi}\text{ だから前記 (i) の第 2 式！}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{n}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt\ \longleftarrow \text{前記 (ii) が使えるゾ！}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{n}\left(n\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt\right)\longleftarrow\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt=2\\
&=\frac{\sqrt{2}}{n}\ (n\times 2)\\
&=2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

＜例 **2**＞

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ (n : 整数) の値を求めよ．

(解) こうなるとかなり難しいが，メゲズに解説に挑戦してみる．

被積分関数をながめると，e^{-x} は周期関数ではないが $\boldsymbol{|\sin x|}$ は**周期** $\boldsymbol{\pi}$ の周期関数である．

ここが**ポイント**なのだ．そこで**積分区間を分割**すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx&\left(=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx
\end{aligned}$$

その第 k 項を I_k は

$$I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x\,|\,dx$$

そこで，$\boldsymbol{x=(k-1)\pi+t}$ とおくと $\boldsymbol{dx=dt}$，

x	$(k-1)\pi$	$\longrightarrow$	$k\pi$
t	0	$\longrightarrow$	π

だから

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^{\pi} e^{-\{(k-1)\pi+t\}}|\sin\{(k-1)\pi+t\}|\,dt \\
&= e^{-(k-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt \\
&= \boldsymbol{(e^{-\pi})^{k-1}I_1} \quad \longleftarrow \text{等比数列の第 } \boldsymbol{k} \text{ 項！}
\end{aligned}$$

であるから，求めるものは初項 $\boldsymbol{I_1}$，公比 $\boldsymbol{0<e^{-\pi}<1}$ の無限等比級数であるから収束して和が存在する．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx = \frac{I_1}{1-e^{-\pi}} \quad (=S \text{ とおく})$$

ここで I_1 を求めると

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx \quad \longleftarrow \quad \text{積分区間で } \boldsymbol{\sin x \geqq 0} \text{ ！}$$

$\boldsymbol{I_1}$ に部分積分を実行すると

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx \quad \longleftarrow \text{部分積分！} \\
&= \Big[\,(-e^{-x})\sin x\,\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-e^{-x})\cos x\,dx \quad \longleftarrow \text{第 1 項目がきれいに消える！} \\
&= \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx \quad \longleftarrow \text{もう 1 度部分積分！} \\
&= \Big[(-e^{-x})\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-e^{-x})(-\sin x)\,dx \\
&= e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx \\
&= e^{-\pi}+1-I_1 \quad \longleftarrow \boldsymbol{I_1} \text{がデタ！}
\end{aligned}$$

I_1 を移項すれば $I_1=\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$ だから，これを代入して

$$S=\frac{\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

本問は第 1 回目の部分積分で積分区間の両端が $0,\pi$ なのでそのあとの第 1 項目が 0 となって消えてしまうので**ウマクいった**——e^{-x} を積分し $\sin x$ が残るように工夫したのだ．

しかし，そのことに気がつかず $\sin x$ を積分し e^{-x} を残すように部分積分を実行するとこうはいかない．

まして積分区間の両端が sin の値を 0 にしないような場合はこの項が残ってなんとも具合が悪いときがある———そういうときは ゴチャゴチャ言わずに**不定積分を先に求める**方がよい．

本問の I_1 でいうと

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{-x}\sin x\,dx = \left(-e^{-x}\right)\sin x - \int\left(-e^{-x}\right)(-\cos x)\,dx \quad \longleftarrow \text{部分積分！} \\
&= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx \quad \longleftarrow \text{もう 1 度部分積分！} \\
&= -e^{-x}\sin x + \left(-e^{-x}\right)\cos x - \int\left(-e^{-x}\right)(-\sin x)\,dx = -e^{-x}(\sin x+\cos x) - I \\
&\therefore \quad I = -\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^{-x} \quad (+C)
\end{aligned}$$

その上で

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left[-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^{-x} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{e^{-\pi}+1}{2}
\end{aligned}
$$

となる——慣れるまではいつも機械的にこうやるほうがよいかもしれない.

2.2.4.2　積分と不等式

積分と不等式

$a < b$ のとき

(i) $\boldsymbol{f(x) \geqq 0 \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0}$

(ただし，等号は恒等的に $f(x) = 0$ のときに成立する)

(ii) $\boldsymbol{f(x) \geqq g(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx}$

(ただし，等号は恒等的に $f(x) = g(x)$ のときに成立する)

ただし，(i)(ii) とも逆は成り立たない．

(**証明**) まず，(i) を証明し，それを用いて (ii) を証明する．

(i) $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = \boldsymbol{F(b) - F(a)} \longleftarrow \text{平均値の定理が使える！}$$

$$= \boldsymbol{f(c)(b-a)(\ a < c < b\ ) \geqq 0} \longleftarrow \text{この範囲では } f(x) \geqq 0 \text{ だ！}$$

次に**等号の成立**についてだが，これがチト難しい．

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ (a \leqq x \leqq b)$$

とおくと

$$F'(x) = f(x) \geqq 0 \longleftarrow F(x) \text{ は単調増加（あるいは単調非減少）！}$$

あえて”**単調非減少**”というヘンな言葉を使ったワケは $\boldsymbol{x}$ **の変化に対して”変化しない（一定）”の部分があるかも知れない**というほどの意味である．

このとき $F(a) = 0$ であるが，もし $f(x) > 0$ のときがチョットでもあればそこで $F(x)$ は必ず増加し，したがって

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx > 0$$

となって $F(b) = 0$ とはならない——すなわち $\boldsymbol{f(x)}$ **は恒等的に** 0 である．

(ii) これは (i) **をそのまま利用する．——右辺を左辺に移項！**

$$f(x) - g(x) \geqq 0 \longrightarrow \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \geqq 0$$

だから，この場合の $f(x) - g(x)$ を (i) の $f(x)$ と思えばよい．

また，**逆が成り立たないことは反例を示せばよい**わけだが，それも (i) の反例を示せば足りる．たとえば

$$f(x) = x,\quad a = -1,\quad b = 2$$

などとすれば (i) の逆は成り立たない——要するに示された．

＜メモ＞

■「 定積分と不等式 」は本来、面積で説明するものだ．

ここが第 **2** の難所である――ここの方がヤッカイだ．本文の解説はここでも**定積分の定義**を**原始関数の増分**、すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

で押し通している――本文の証明は苦労したぜ．

そのワリには見栄えがしない――図を描いて**面積のイメージ**で説明する方が断然わかり易い．それでもそうしなかったのは、**微積分学の基本定理**以前のこの段階では、やはりまだ**定積分の定義**と**面積**との**関連付け**ができていないからである．

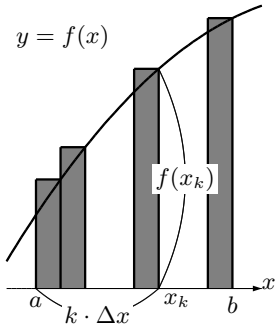
第 **1** の難所として説明した**周期関数**の場合もそうだが、結局こういう使い勝手の悪さや不自然さは、文科省が「 高校数学における定積分の定義」を、**歴史**に逆らって、勝手にひっくり返してしまったことに起因するものである――いまだにみんなが迷惑しているのである．

だから、ここでも**定積分**を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

と定義しておけばずっと簡単にいく．

この立場から本文の (i) を考えよう――図を見てもらいたい．



$$f(x) \geqq 0 \ \longrightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

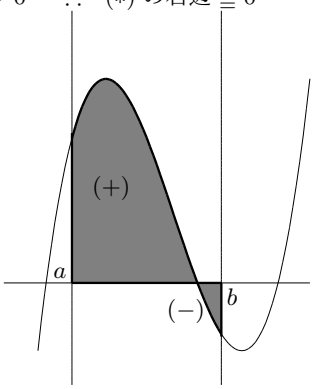
(ただし，等号は恒等的に $f(x) = 0$ のとき)

ということだが、$f(x) \geqq 0$ だから $(*)$ の右辺で

$$f(x) \geqq 0 \ \longrightarrow\ f(x_k) \geqq 0, \qquad a < b \ \longrightarrow\ \Delta x = \frac{b-a}{n} > 0 \qquad \therefore\ \ (*)\text{ の右辺} \geqq 0$$

は明らかと言ってよい．

特に**等号が成立**するときは、$f(x)$ が**恒等的に 0** でとすると区間 $[\,a,\ b\,]$ で $f(x) > 0$ となるときがあるはずで、このとき、上記の積分は**面積**を表しており、その**面積が 0**、すなわち $f(x)$ がべったり x 軸に張り付いていることである．しかし、これは $f(x) \equiv 0$ ということに他ならない．



ヤッカイなのは「 **(∗∗∗) の逆が成り立たない** 」ということだが、これも図を描いてみると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \geqq 0$$

であったとしても $f(x)$ そのものについていえば、この区間 $[\,a,\ b\,]$ でチョッピリくらい負になるときがあっても、トータルとして積分の結果が正になる例は容易に思いつく．

かくして $(***)$ の逆が成立しないことも、ほとんど自明のこととして説明される――この方がずっと**簡単**で、ずっと**自然**であろう．

■「積分と不等式」どう使われるか――「証明」、そして「はさみうち」とのセット

まず、**積分と不等式の扱い方**の実例をあげておこう.

＜ 例 1 ＞

$\log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \log n$ を示せ.

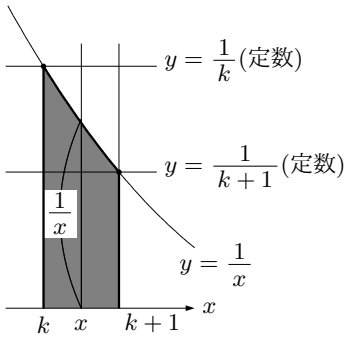
(解）図を描いて**面積の関係**から説明することもできる (むしろそれでよい) が，ここではせっかく公式としてまとめてあるので、その応用例として カタチ通りに扱う ことにする.

まず与えられた不等式を見て

分数の形 $\longrightarrow y = \boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$　　$\mathbf{log(\quad)} \longrightarrow \boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$ **の積分！**

を連想しないか.

そこで，**積分区間**と**被積分関数**に注目して次のように区切って考える.



$\boldsymbol{k \leqq x \leqq k+1}$ $\longleftarrow$ **積分区間！**

$\therefore\ \dfrac{1}{k} \geqq \dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{k+1}$

$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{k}}$ $\longleftarrow$ **被積分関数の範囲！**

インテグラルをかぶせると

$$\boldsymbol{\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx} \longleftarrow \text{等号がキレル！}$$

$$\therefore \frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}\int_k^{k+1} dx \longleftarrow \boldsymbol{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}} \text{ は定数だ！}$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}}$$

(i) **左側の不等式**で $k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, (n-1)$ とおいて加えると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < \int_1^2 dx + \int_2^3 dx + \cdots\cdots + \int_{n-1}^n dx$$
$$= \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_1^n = \log n$$

両辺に 1 を加えて

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

(ii) **右側の不等式**で $k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ とおいて加えると

$$\int_1^2 dx + \int_2^3 dx + \cdots\cdots + \int_n^{n+1} dx < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

左辺を計算すると

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

であるから

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

まあ、結果は出たが、この例の不等号、「 $>$, $\geqq$ 」の扱いについてちょっと注意しておきた

いことがある．それは問題文の証明を求めている式に、たとえば

$$\boldsymbol{\log(n+1) \leqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} \leqq 1 + \log n}$$

のように「**等号**」がついていたらどうなるか．上記の説明で「 **等号がキレル！** 」と書いたところに注意してもう 1 度読んでもらいたい．

だから、実際には「 等号が成り立つ場合は**ない** 」のである．出題者がイイカゲンなのか、あるいは意図的なのかはわからないが、こういう出題も結構あるから困ってしまう．

私は教室では上記のようなときは、解答のあとに

$$\log(n+1) \leqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} \leqq 1 + \log n$$

(ただし、等号の成り立つときはない！)

と 自分の立場を明確に示す ように指導することにしている．

たとえば、 $5 > 3$ は正しい．それでは $5 \geqq 3$ はウソかというと、これは

$5 > 3$, または $5 = 3$

ということで、どちらかが成り立ていればよいのだから「 ウソではない 」ということだろう．

こういうのは、出題の仕方に問題があるともいえるが、受験生としてはそうも言っていられない．そこで上記の書き方になると思うのだが君たちはどうしているのだろう．瑣末なことだが、私は「 自分の立場を明確に示す 」のがよいと思います．

さて、「**積分と不等式**」は、大きな問題の中で**はさみうち**とセットで使われることが多い．それもついでに見ておきたい———むしろこれがメインなのだ．

＜例 **2**＞

$I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．　(2) I_{n+1} を I_n で表せ．　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ を求めよ．

(解) (1) $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ の積分区間から**被積分関数**のとり得る範囲を押さえる．つまり

$0 \leqq x \leqq 1$ ⟵ **積分区間！**

$\therefore\ 0 \leqq x^n \leqq 1 \quad \therefore\ \boldsymbol{0 \leqq x^n e^{-x} \leqq e^{-x}}$ ⟵ **被積分関数の範囲！**

そこで、インテグラルをブッカケル (ここまでは等号が効いている)．

すなわち

$$\boldsymbol{\int_0^1 0\,dx < \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx < \int_0^1 e^{-x}\,dx}$$ ⟵ **等号がキレル！**

$$\therefore\ 0 < \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx < \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\therefore\ 0 < \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx}_{I_n} < \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \qquad \therefore\ 0 < I_n < \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

ここで $\dfrac{1}{n!}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \to 0$ $(n \to \infty)$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ ⟵ **はさみうちの原理！**

(2) まず I_{n+1} を書いてみて、そのカタチからどうするかを考える.

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx \ \longleftarrow\ \boldsymbol{x^{n+1}}\text{の次数を下げたい！}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{\ \Big[x^{n+1}(-e^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{-x})\,dx\right\} \ \longleftarrow\ \text{部分積分！}$$

$$= -\frac{1}{e(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e(n+1)!} + I_n$$

(3) (2) の結果から $I_{n+1} - I_n = -\dfrac{1}{e(n+1)!}$ がいえるので n が十分大きいとして

$$\boldsymbol{I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(I_{k+1} - I_k)} \ \longleftarrow\ \text{階差数列の公式！}$$

$$= I_1 - \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!} = I_1 - \frac{1}{e}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - 1\Big) \ \longleftarrow\ \text{この変形はワカル？}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = eI_1 - eI_n + 1$$

ここで I_1 を求めると

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \Big[x(-e^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1(-e^{-x})\,dx \ \longleftarrow\ \text{部分積分！}$$

$$= -\frac{1}{e} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

これを入れて (1) の結果の $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を用いると

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = e\left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1$$

$$= e - 1$$

この結果は $\boldsymbol{e-1}$ という無理数が

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

という**無限級数**で求まる、ということでなかなか面白い.

しかし、**テーラー展開** (本稿では扱わない) をやったことのある人なら

$$\boldsymbol{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots\cdots} \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を見たことがあるだろう.

この式で $x = 1$ とすれば上記は別の形で確認される. まあ、ムリにとは言わないが、(*) の展開はきわめて**ポピュラーな例**だから覚えておくとよい.

さて、他にもこの「積分と不等式」と「はさみうち」のセットで $\dfrac{\pi}{4}$ とか $\log 2$ などにたどりつく**有名な問題**もあり興味深い.

実際の入試問題にはおおむね誘導がついていて、扱い方はほぼ同じであるから、上記を十分にマスターすればさして難しいというほどのものではないが、ここは君たちが**特に不得意な分野**でもあるので以下にシツコク説明しておくことにする. これだけやっておけばこの**手**の問題についての**アレルギー**は解消される と思う.

＜例 3＞

自然数 n に対して $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=S_n$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\,dx=S_n$ を示せ．　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx=0$ を示せ．

(3) 無限級数 $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ の和を求めよ．

(解) (1) 交互に符号がちがっているところが悩ましい——等比数列の和の公式を利用する．

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-x^2)^{n-1}=\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)} \longleftarrow \textbf{初項 1，公比 } \boldsymbol{(-x^2)} \textbf{ ！}$$

$$\therefore\ \int_0^1 \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}\}\,dx$$

$$=\left[\,x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\,\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=S_n$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq \dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\leqq x^{2n}$ であるからインテグラルをかぶせて

$$\boldsymbol{\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx<\int_0^1 x^{2n}\,dx} \longleftarrow \textbf{等号がキレル！}$$

$$\therefore\ 0<\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx<\left[\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}\to 0\ (n\to\infty)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx=0} \longleftarrow \textbf{はさみうち！}$$

(3) (1) の結果より

$$S_n=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx-(-1)^n\underbrace{\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx}_{0\text{ に収束！}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\to\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{I\text{ とおく}}\quad(n\to\infty)$$

ここで I を計算するのだが、$x=\tan\theta$ とおいて置換積分を実行する．すなわち

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\qquad \begin{array}{c|c} x & 0\longrightarrow 1 \\ \hline t & 0\longrightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$\therefore\ I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \longleftarrow \boldsymbol{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

① で $n\to\infty$ とすれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{4}$ 、すなわち

$$\boldsymbol{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}}$$

だが、この無限級数を**ライプニッツ級数**と呼んでいる．

さて、**アプローチの方法**は他にもある——**漸化式**をうまく利用することができる．それは、$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx = I_n$ とおくと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I_{n+1}+I_n} &= \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2+1)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^{2n}\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

だが、そのままでは**階差数列の公式**が使えない——<u>両辺に $(-1)^{n+1}$ をかける</u>．

$$\underbrace{(-1)^{n+1}I_{n+1}}_{a_{n+1}} - \underbrace{(-1)^n I_n}_{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \underbrace{(-1)^n I_n}_{a_n} &= \underbrace{(-1)^0 I_0}_{a_0} + \sum_{k=0}^{n-1}\{\underbrace{(-1)^{k+1}I_{k+1}}_{a_{k+1}} - \underbrace{(-1)^k I_k}_{a_k}\} \\ &= \boldsymbol{I_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}} \\ &= I_0 - \underbrace{\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right\}}_{\text{題意の } S_n}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = I_0 - (-1)^n I_n$$

ここで、 $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$， $I_n \to 0\ (n\to\infty)$ を確認して $n\to\infty$ とすると

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad = \frac{\pi}{4}$$

となり、同じ結果が得られる．

もう 1 つよく似た例を挙げておく．それは**メルカトール級数**と呼ばれているもので

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{\log 2}$$

であることが知られている．<u>やり方は本問と全く同じ</u> だから詳しくは説明しないが、それでも心配だからヒントだけは記しておく．

等比数列の**和の公式**を利用するなら

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} \quad \longleftarrow \quad \textbf{初項 1，公比 } \boldsymbol{(-x)}\ \textbf{！}$$

の両辺を積分する．

また、**漸化式**を利用するなら

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{I_{n+1}+I_n = \frac{1}{n+1}}$$

あとは上記に倣って進めばよい．

ただし、この場合 $I_0 = \log 2$ の計算は簡単だが、$I_n \to 0\ \ (n\to\infty)$ は

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

から <u>**積分と不等式、はさみうち**のセットで説明する</u> ことになる．まあ、自力でトウアンを構成する練習と思ってやってみて下さい．

2.3　微積分学の基本定理

結論から言うと，**面積**を求めるには**積分区間**をキメて**定積分（原始関数の増分）**を計算すればよいのだが，その理由をキチンと理解している人はそう多くはない．それほど普及してしまっていると言えば言えるのだが，そうは言ってもここで**ナットク**して**感動**してもらわないことには筆者の立場がない．

その根拠はこの**微積分学の基本定理**によって初めて保証される——**微積分全体を通してのハイライト**であると筆者は考える．

この定理は**ニュートン**と**ライプニッツ**によって発見されたと言われているが，これを機会にその時代の歴史的な背景に想いをめぐらすのも一興，先駆者の業績を識っておのれの足場を確かめるもまた一興である——**ここで感動することなくして大学へなど行ってもらいたくない．**

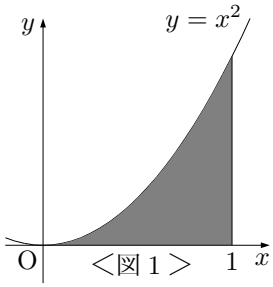
2.3.1　面積と無限級数の和

たとえば<図 1 >のような面積を求めるにはどうすればよいか.

それには<図 2 >のように **閉区間 $[\,\mathbf{0,1}\,]$ を $\boldsymbol{n}$ 等分 してできる小長方形の面積の総和の近似値**として求めることを考える.

すなわち

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots \\
&\quad \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\boldsymbol{1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + k^2 + \cdots\cdots + n^2}\right)
\end{aligned}
$$



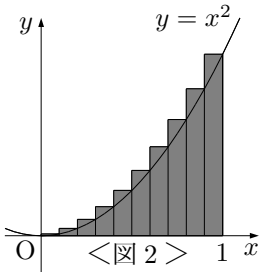
<図 1 >

だが、これは数列でよく用いた公式

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

で簡単な形に整理されるから

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n^3}\cdot\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}\ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$



<図 2 >

である.

このように面積などの量を求める場合，まずそれを細分して近似値 S_n を求め，その上で **$\boldsymbol{n\to\infty}$ の極限値**としてその量を求める方法がある．これを**区分求積法**という.

しかし，この例でいえば**定積分（原始関数の増分）**の計算で

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad \longleftarrow \text{上の結果と一致した！}$$

とやれば**ずっと簡単に同じ結果を得ることができる**——**なぜか.**

実は，この 2 **つのハナシをつなぐのがニュートンとライプニッツ**が発見したと言われている**微積分学の基本定理**である.

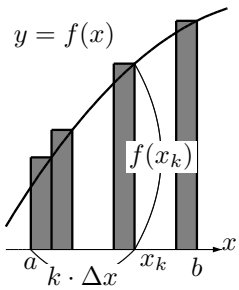
以下，ハナシの要点を**数式で整理**しておく．以下，ハナシの要点を**数式で整理**しておく.

一般に **連続関数 $\boldsymbol{f(x)}$ で 閉区間 $[\,\boldsymbol{a,b}\,]$ を $\boldsymbol{n}$ 等分** して

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x, \quad a + k\cdot\Delta x = x_k$$

とおくと，無限級数

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x}$$



が収束してその和が存在することが知られている．そしてこのような”無限級数で与えられる量”が”定積分”（$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ の増分）で計算される．

すなわち，ここでの最重要テーマは

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = F(b) - F(a) \longleftarrow \text{ツナギは微積分学の基本定理！}$$

を確かめることである．

＜メモ＞

■ 区分求積法の限界

冒頭の例でいえば，区分求積法ではソコソコ結構な計算だが，定積分（原始関数の増分）ならばタッタの 1 行でイケルのだ．これはなかなかのスグレモノではないか．

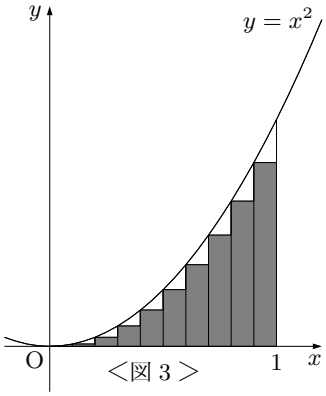
それでも区分求積法でうまくイケタのは

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \longleftarrow \text{数列の和の公式！}$$

が使えたからで，これを知らなければまったくのお手上げである．

まして公式の使えない関数，たとえば $\sin x$ などでは論外である．このような場合は定積分（原始関数の増分）でやるしかない．

■ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x\ (= S\ )$ と面積



＜図 3＞

右図のように細分する場合は，本文 S_n で

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\text{＜図 2＞}} \longrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k^2}_{\text{＜図 3＞}} \quad (\longleftarrow \text{いずれも } n \text{ 項の和})$$

と置き換えればよい．

そこで求めるものを T_n とおくと

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}\ (n\to\infty) \end{aligned}$$

となり，本文と同じ結果となる. また，$y = x^2$ がこの区間で単調増加であることに注目すれば S_n は大きい方から，T_n は小さい方から $\frac{1}{3}$ に収束することがわかる．

このハナシを一般の形で表せば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x\ (= S)$$

だが，この S は負の値をとることもあり得る ので注意しなければならない．

そして $\Delta x > 0, f(x) \geqq 0$ のときのみ現実的な面積のイメージに対応することになる．また，この場合の”無限級数の和 S の存在”は”最大最小の存在定理”，”中間値の定理”とともに連続関数を代表する基本的性質といわれている——これらは無条件に認めることにする．

＜補足説明！＞

極限の概念を用いて面積や体積を求める方法の歴史は古く，**アルキメデス**（287—212BC ギリシァ，シチリア）の業績が有名であるが，17 世紀になると**アイザック・ニュートン**（1642—1722 イギリス）が**微分積分法**を発見し，**ニュートン力学**とともに広く発展させることになる．

一方，**ゴットフリート・ウィルヘルム・ライプニッツ**（1646—1716 ドイツ）はニュートンとは独立に**微分積分法**を発見する．ライプニッツは**記号の神様**と言われるように巧みな記号を次々に案出し，そのアイディアをより効果的に展開したようである．現在，われわれの用いている記号も彼の手になるものが少なくない．

いずれにしてもこの 2 人が発見した微積分学はその後 18 世紀，19 世紀と時が進み，**数学のいろいろな概念**が確立してくると，より普遍的な形に洗練され，**数理科学**のみならず**あらゆる分野に直接，あるいは間接的に影響**しつつ今日に至っている．

以下に示す**微積分学の基本定理**は微積分学全体の**白眉**である．ぜひとも読破すべし．”**読まぬは一生のソン**” だと思いますよ．

＜ end.＞

2.3.2　微積分学の基本定理

”微積分学の基本定理”は”積分に関する平均値の定理”を用いて証明されるのでその流れで解説するが，それぞれの意味として問われることもある——ここではセットとして考えておくとよい．

ここで 1 つ注意しておかなければならないことがある．それは、ここでは，”積分”という言葉を”面積”と読み替えて読み進めてもらいたいということ．

理由は後で詳しく説明する．

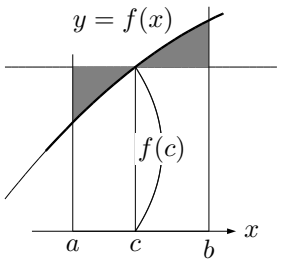
2.3.2.1　積分に関する平均値の定理

積分に関する平均値の定理

右図で，連続な関数 $y = f(x)$ $(\geqq 0)$ の表すグラフ, x 軸と 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\boldsymbol{S = (b-a)f(c)\ (a < c < b)}$$

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する．



(証明) **連続関数 $\boldsymbol{f(x)}$ の 閉区間 $[\ \boldsymbol{a, b}\ ]$ における 最大値を $\boldsymbol{M}$，最小値を $\boldsymbol{m}$ とする．**

$M = m(= k)$ ならば，$f(x)$ はこの区間で恒等的に k(一定) だから上記 c は明らかに存在する．

$M \neq m$ ならば右図で**面積の大小関係**から次の不等式が成り立つ．

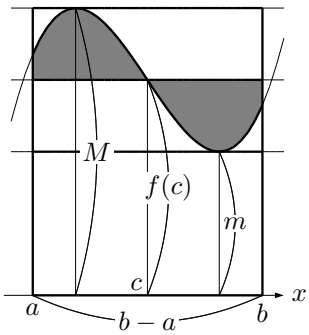
すなわち

$$\boldsymbol{m(b-a) < S < M(b-a)}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{m < \frac{S}{b-a} < M} \longleftarrow\ b-a > 0$$

このとき，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ まで連続的に（ズルズルと）変化させれば，関数値 $f(x)$ はそれに対応して**最大値 $\boldsymbol{M}$ と最小値 $\boldsymbol{m}$ との間のそれぞれの値を（とらない値がないように）必ずとりながら変化する**から

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{S}{b-a}}$$



を満たす x の値が **開区間 $(\boldsymbol{a, b})$ に少なくとも 1 つは存在する**——**中間値の定理**という．すなわち

$$f(c) = \frac{S}{b-a} \quad \therefore\ \ \boldsymbol{S = (b-a)f(c)\ (a < c < b)}$$

を満たす c が存在する．

＜メモ＞

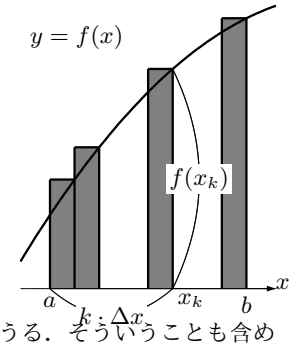
■ 積分に関する平均値の定理

まずは混乱なきよう，ここでいう”積分”はここまでに用いた定積分（原始関数の増分）のことではない．

これは先に述べた無限級数

$$\boldsymbol{S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$\longleftarrow$ $a<b,\ f(x)>0$ なら 面積！



のことで、右図はこの右辺をイメージで表したものである．

ここで $n\to\infty$ とすると $(*)$ の右辺は

$$y=f(x),\ y=0,\ x=0,\ x=b$$

で囲まれた部分の面積であることは容易に想像できるだろう．

しかし、上記の説明で用いている S は負の値をとる場合も起こりうる．そういうことも含めて、一括りに ” 面積 ” と表現した．

本来、この量 S を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と表して (原始関数とは関係がない)、これを「 定積分 」よび、$F(b)-F(a)$ で求まることを保証するのが微積分学の基本定理なのである．

そして、「 積分に関する平均値の定理 」の主な役どころは、この「 基本定理 」の証明だが、キチンと書くと

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)(a<c<b)}$$

で、これをそのまま使うと簡単に片付く入試問題も多い———知っておいてソンはない．

さて，この定理の ” 早分かり法 ” だが前ページの図を見て、高さが $f(c)$ より デッパッタ部分をヘコンダ部分に埋めて地ならしをすると思えばよい．このとき $\boldsymbol{f(c)}$ は $\boldsymbol{f(x)}$ のとり得る値，すなわち高さの平均値になっていることも実感しておいてほしい．

＜補足説明！＞

この「 **積分に関する平均値の定理** 」を現行の指導要領の通りに読むと

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=f(c), \quad \text{あるいは} \quad F(b)-F(a)=f(c) \quad (a<c<b)$$

ということになる．何ということはない、これでは微分法で述べた普通の「 平均値の定理 (ラグランジュの平均値の定理という) 」ではないか．ここではそういう意味ではないから、混乱しないようくれぐれも注意してもらいたい．

どこかの教科書にそう書いてものがあって、思わず笑ってしまったが笑い事ではない．高校生がわからなかったり混乱したりするのはトウゼンのことである．

ここでいう**積分**とは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}(\quad)$、つまり**面積**のことである．この値は負のときもあるから無条件に面積ということはできないが、このさい負の面積まで拡大解釈を許して、いっそ面積と断定してしまった方がハッキリする——「積分」と来たらココロの中では面積と読め！

＜ end.＞

2.3.2.2　微積分学の基本定理

平たく言えば，これは面積が微分の逆演算で求められるということであり，微積分全体を通してのハイライトである．そのつもりでイッキに読み通してほしい．

微積分学の基本定理

(1) 右図のアミかけ部分の面積は $\boldsymbol{x}$ の関数 だからこれを $\boldsymbol{S(x)}$ と表すと

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}S(x) = f(x)}$$

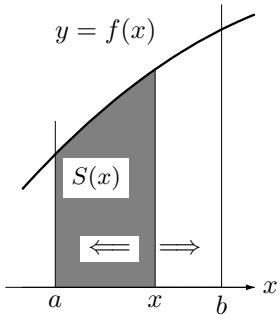
である．

(2) 面積 $\boldsymbol{S(b)}$ は

$$\boldsymbol{S(b) = F(b) - F(a)}$$

$\longleftarrow$ $\boldsymbol{f(x)}$ の原始関数 $\boldsymbol{F(x)}$ の増分！

である．



(証明) (1) について―― 導関数の定義より

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}S(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}}$$

だが，積分に関する平均値の定理 により

$$\boldsymbol{S(x+\Delta x) - S(x) = \Delta x \cdot f(c)}$$

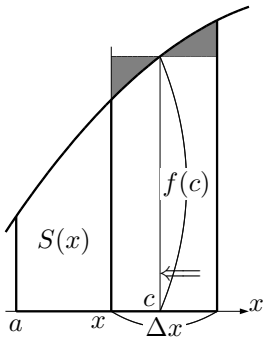
(ただし，c は x と $x + \Delta x$ との間！)

を満たす c が少なくとも 1 つは存在する

これより

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}S(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

$$= \boldsymbol{f(x)} \quad (\Delta x \to 0 \text{ のとき } x + \Delta x \to x \text{ で，はさみうち！})$$



.

(2) について――要するに (1) は

$$\boldsymbol{S'(x) = f(x)} \longleftarrow \boldsymbol{S(x)} \text{ が } f(x) \text{ の 原始関数 になっている！}$$

ということだから

$$\boldsymbol{S(x) = F(x) + C} \quad (C \text{ は任意定数}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

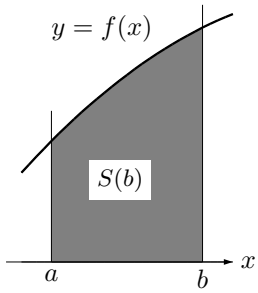
$(*)$ で $x = a$ とおくと $\boldsymbol{S(a) = 0}$ であるから

$$S(a) = F(a) + C$$

$$\therefore \quad C = S(a) - F(a) = -F(a)$$

これを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{S(x) = F(x) - F(a)} \left(= \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt \right)$$



さらに $x = b$ とおけば

$$\boldsymbol{S(b) = F(b) - F(a)} \quad \left(= \int_a^b f(x)\,dx \right)$$

＜メモ＞

■ **定積分の定義**——**高校数学**では**ハナシ**が**サカサマ**なのだ！

上記の説明で、やっと**面積（無限級数の和）**が**原始関数の増分（微分の逆演算）**で求められること証明された ことになる．

歴史的経緯も含めて**定積分はもともと無限級数で定義**されているのである．すなわち

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x} \longleftarrow \text{リミットシグマ を インテグラル とキメタ!}$$

である——$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} (\quad)$ はそもそも式の形からして厳しくて近寄りがたいが、まあ、ガマンして慣れるべし．

ともあれ、**大学以上ではこの定義に基づいて微積分学が構成**されているのである．しかし、現行の**高校数学はそうなっていない**．ここのところが何とも悩ましく腹立たしいが、その辺の事情についてはすでに説明したのでここではもう触れない．

さて，お家の事情を一応わかってもらった上で上記の定理を**本来の形**で書き直すとつぎのような表現になる．

いずれも，実際に入試問題を解くときの道具になる重要な公式だが，特に**積分に関する平均値の定理**の”**積分**”という言葉が**生き返った**かに見えて喜ばしい——実は、これが正式な記述なのです．

すなわち

＜積分に関する平均値の定理＞

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)(a<c<b)} \longleftarrow \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx} \text{ は } \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x} \text{ と読め！}$$

$$\text{このとき，} \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c) \text{ を 平均値 という}$$

＜微積分学の基本定理＞

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

である．

＜補足説明！＞

冒頭から、「定積分の**定義**が**サカサマ**になっている」と書いたが、おそらく君たちにとっては「**まさか**のハナシ」であったと思う．そのことを納得して 積分を正しく学んでもらう ためには、その前後の事情をも含めて、少し詳しい説明をしておかなければならない．

高校数学でも、かつては**定積分の定義**をこの「 $(*)$ 」で定義していたのだが、今でいう「ゆとり教育」のハシリか、あるいはもっと別の事情か、むかし (1970 年)、カリキュラムの改訂で数 IIB にあった**無限級数**を数 III に送ってしまうと事件 (事故と言いたい) があったのです．

そのために $(*)$ の右辺の表現が数 IIB で使えない．その結果、カリキュラムは数 IIB で定積分を無限級数 ($(*)$ の形) で定義できなくなり、仕方なく (？) 数 III の定積分まで原始関数の増分 ($(**)$ の形) をもって定積分の定義としてしまった———経緯はそういうことです．

今になって思うと、このときの改訂で行列と 1 次変換が新規に数 IIB に入っているから、無限級数はパンパンになった数 IIB からはじき出されたようにもみえる．ともあれ、ここで定積分の定義がひっくり返ってしまった のです．

当時、それは大変な大騒ぎで、新米教師であった私はベテラン教師たちの困惑をこの目で見てしまったのである．おそらく、**微積分の歴史**と**その体系**を熟知している人たちにとっては耐え難いほどバカバカしく愚かしいことに見えたのであろう．

以来、定積分の定義はサカサマになったまま、したがって教える方と教わる方の混乱を抱えたまま今日に至っている．筆者としては何とかしてこの混乱を払拭したい．来年は大学で本来の定義「 $(*)$ 」でやるわけだから、ここでそれにもどすことに何の不都合もないはずである．

しかし、そうは言っても今まで習ってきた経緯ということもあって、そう簡単にはいかないだろう———1 つ 1 つ丁寧にやるしかないと思いつつこれを書いています．

筆者としては この冊子を書いてみて、「 いかにヒドイことになっているか 」を痛感した．特に「 周期関数と積分 」、「 積分と不等式 」ではとてもとても難渋した．

そういうことを読者にコボしても仕方がないが、ここは多少ミットモナイ思いをしても、事実を事実として了解してもらわないと、何をやっているのかさえわからなくなってしまう恐れがある．そういう意味もあって、感じるままを、ゴマかさずに書いてみた．その辺に注目して読んでもらえるとありがたい．

ちなみに今、私の手元に 1987 年版の**韓国**の数学の教科書がある．これは昔、韓国を旅行した私の教え子が私のために入手してきてくれたものだが、それによると**定積分の定義**は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

と、シッカリ無限級数で定義しているではないか．

これを見るにつけて、日本の文科省はバカなことをしてくれたものだと思う．こんなことでは、このグローバルな時代に、日本の若者が外国で**赤っ恥**をかいてしまう ではないか．

それ以来、韓国の教科書がどうなったかは知らない．しかし、ゆとり教育が実践されたというハナシは聞こえてこないから、少なくとも日本のような愚かしい道をたどったとは思えない．

まあ、世界中、どこの国にでもそれなりの**お家の事情**があるだろうが、国家の方針がちょっと振れただけで、国中がとんでもないことになる という現実をまざまざと見る思いではある．

＜ end.＞

2.3.2.3　無限級数の和と原始関数の増分

「微積分学の基本定理」を体感しよう．この定理によれば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

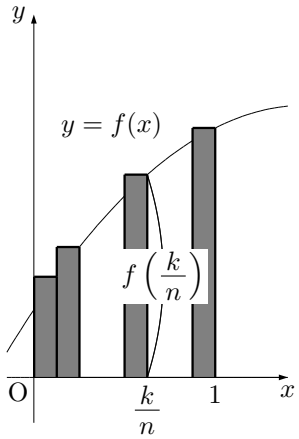
であった．この式で $a = 0,\ \ b = 1$ とすると

$$\Delta x = \frac{1}{n},\ \ x_k = \frac{k}{n}$$

であるから上に述べた関係は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$\longleftarrow$ なぜか $\dfrac{1}{n}(=\Delta x)$ を前に出す！



と表されるのだが，慣れないとこれがなかなか難しい．

手近なサンプルとして冒頭の例は次のように表される．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

＜メモ＞

■まずは、閉区間 $[\ 0, 1\ ]$ を n 等分 から！

まずは、閉区間 $[\ 0,\ 1\ ]$ を n 等分するタイプ のカタチをしっかりマスターすることが先決である．あとはやっているうちにわかってくる——その要領は

(1) まず, $\dfrac{1}{n}$ でくくる．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ あるいは $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}$ 以下をにらんで $\dfrac{k}{n} = x$ とおいて $f(x)$ をキメル．

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を計算する．

の手順で考えるとよい．

ヴァリエーションとしては，閉区間 $[\ 0, 1\ ]$ を $2n$ 等分，あるいは閉区間 $[\ 0, \pi\ ]$ を n 等分，あるいは閉区間 $[\ 1, 2\ ]$ を n 等分などいろいろある．

以下，実例で説明する．

＜例 1＞

次の極限値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots\cdots + e^{\frac{n}{n}}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$

(解) (1) 本来ならばまず，( ) 内が初項 $e^{\frac{1}{n}}$，公比 $e^{\frac{1}{n}}$ の等比数列であることに注目して

$$\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{(e^{\frac{1}{n}})^n-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\longleftarrow\boldsymbol{\frac{a(r^{n-1}-1)}{r-1}(r\neq 1)}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$=(e-1)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}}\longleftarrow\boldsymbol{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}$$

$$=(e-1)\cdot\frac{1}{\boldsymbol{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}}\to(e-1)\cdot\frac{1}{1}=e-1\quad(n\to\infty)$$

とやることになるのだがかなりヤッカイだ——そこで定積分の登場となる．すなわち

$$\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}$$

$$\to\boldsymbol{\int_0^1 e^x\,dx=I\ (n\to\infty)}$$

要するに I を計算すればよい——グッと楽になる．

$$I=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$$

(2) こうなると (1) のような公式はない——ハナから積分でやるしかない．

$\lim_{n\to\infty}$ 以下を $\sum_{k=1}^{n}$ でまとめる．

$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\cdot\frac{1}{n+k}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}\longleftarrow\boldsymbol{\frac{1}{n}}\text{でくくる！}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{n}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+\frac{k}{n}}}\longleftarrow\text{分母子を }\boldsymbol{n}\text{ で割る！}$$

$$\longrightarrow\boldsymbol{\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx}\ (=I\text{ とおく})\ (n\to\infty)\longleftarrow\boldsymbol{\frac{k}{n}=x},\ \text{被積分関数は}\boldsymbol{\frac{1}{1+x}}\text{だ！}$$

すなわち，上記の極限値を求めるには定積分 $\boldsymbol{I}$ を計算すればよい．

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\ \log(1+x)\ \Big]_0^1=\boldsymbol{\log 2}$$

＜例 **2**＞

半径 a の半円の直径 AB 上に、$n-1$ 個の点 P_1，$\mathrm{P}_2,\cdots\cdots$，$\mathrm{P}_{n-1}$ が A に近い方からこの順にある．その各々の点において AB に垂直に立てた垂線が半円の弧と交わる点を順に Q_1，$\mathrm{Q}_2,\cdots\cdots$，$\mathrm{Q}_{n-1}$ とする．

このとき、$S_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ として、次の各々の場合について $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ．

ただし、$\mathrm{P}_n=\mathrm{Q}_n=\mathrm{B}$ とする．

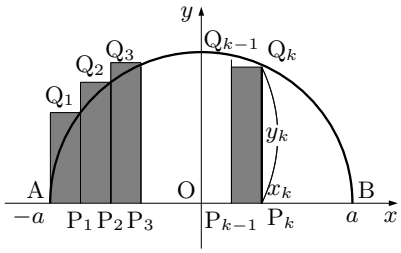
(1) 点 P_1，$\mathrm{P}_2,\cdots\cdots$，$\mathrm{P}_{n-1}$ が直径 AB を n 等分する．

(2) 点 Q_1，$\mathrm{Q}_2,\cdots\cdots$，$\mathrm{Q}_{n-1}$ が弧 AB を n 等分する．

(解) まず、図のように座標軸をとると と与えられた半円の方程式は

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \therefore\ \ y=\sqrt{a^2-x^2}\ \ (y \geqq 0)$$

その上で (1) と (2) との「ちがい」に注目！



(1) 条件では AB を n 等分するから $k=1,\ 2,\ \cdots$ に対して $\mathrm{P}_k(x_k, 0),\ \mathrm{Q}_k(x_k,\ y_k)$ とおけて

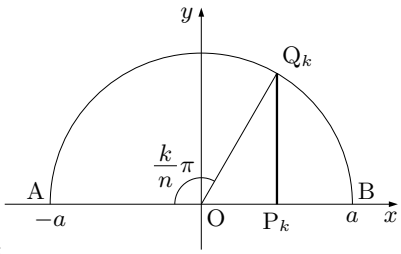
$$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = y_k = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\therefore\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a^2-x_k^2}$$

$$\therefore\ \ \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a^2-x_k^2} = \frac{1}{2a}\cdot\boldsymbol{\frac{2a}{n}\sqrt{a^2-x_k^2}}$$

$$\longrightarrow\ \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\boldsymbol{\sqrt{a^2-x^2}\,dx} = \frac{1}{2a}\underbrace{\left(\pi a^2\times\frac{1}{2}\right)}_{\text{半円の面積}} = \frac{\pi}{4}a\ (n\to\infty)$$

となる．このときの定積分は、$x=a\sin\theta$ とおいた置換積分などやらずに、**円の面積公式 $\boldsymbol{\pi r^2}$** を積極的に使うべし．



(2) (1) とチョッと事情がちがう．つまり

$$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = a\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}k\right) = a\sin\frac{\pi}{n}k$$

$$\therefore\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = \sum_{k=1}^{n} = a\sin\frac{\pi}{n}k$$

$$\therefore\ \ \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a\sin\frac{\pi}{n}k = \frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}k$$

$$\longrightarrow\ \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi}\quad (n\to\infty)$$

あるいは

$$\int_0^1 a\sin\pi x\,dx = a\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2a}{\pi}$$

としてもよい．

2.4　面積，体積，他

さて，やっと面積，体積を求める（これらを求積という）ところに来た．ここからハナシはグッと具体的になる．

基本原理はタダ１つ———面積や体積を細分化して無限級数で表し，原始関数の増分として計算するということにつきる．

しかしこのことは，微分における速度の概念の裏返しで，刻々と変化する量の総和を正しくとらえる方法論でもあった．

かくして人々はニュートン，ライプニッツ, etc.··· の仕事を通して運動と変化をとらえる手段を獲得したのである．

ともかく，この微積分の最終楽章をそういう古い時代にも多少の想いを馳せながら読んでもらえると筆者としては冥利につきる．

2.4.1　面積を求める基本原理

微積分学の基本定理から得られたことがらを整理すると

(1) $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$ $\longleftarrow$ 同じことを表している！

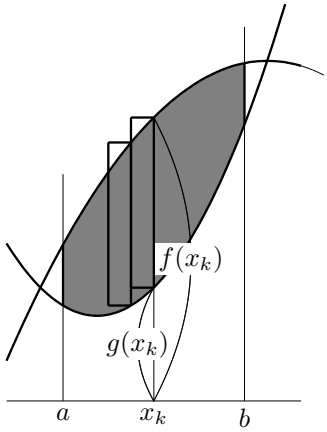
(2) そしてそれが $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ (原始関数の増分) として計算される．

ということであった．たとえば右図のような 2 つの曲線

$$y=f(x),\ y=g(x)\quad (f(x)\geqq g(x)\ )$$

ではさまれた $a\leqq x\leqq b$ の部分の面積を求めるにはどうすればよいか．

それにはまず，この区間を n 等分し，図のような細長い長方形の面積の和で求める面積を近似する．その上で $\boldsymbol{n\to\infty}$ とすると，これが求める面積 S と考えられるから



$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)-g(x_k)\}\Delta x \\ &= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx \end{aligned}$$

を計算すればよい．

この $\boldsymbol{f(x)-g(x)}$ は上記 (1) の $\boldsymbol{f(x)}$ にあたるものである．

<メモ>

■ 実際に面積を計算する

実際にトウアンに書くときは，まず積分区間を定め (ただし $a<b$)，被積分関数が積分区間で負にならないことを確認した上で求める面積を積分の式で表す．

つまり

$$\boldsymbol{S=\int_a^b f(x)\,dx} \ \longleftarrow\ \text{”}\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x}\text{”と唱えながらこう書くのだ！}$$

あとは置換積分なり部分積分なりを実行すればよい．この先は完全に積分技術の問題となる．

以下，興味深いものを中心に解説を進めることにする．

■ パラメーターで表された曲線と面積

まずは面積を与える積分の式

$$\boldsymbol{S=\int_a^b y\,dx} \ \longleftarrow\ \boldsymbol{x=g(t)}\ \text{となっている例でも，まずはこう書く！}$$

を書く——何よりもこれが先決，あとは置換積分！

そこで積分区間の対応 $\begin{array}{c|c} x & a\longrightarrow b \\ \hline t & \alpha\longrightarrow\beta \end{array}$ に注意して，次の置換積分を実行すればよい．

$$\boldsymbol{S=\int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}\,dt}$$

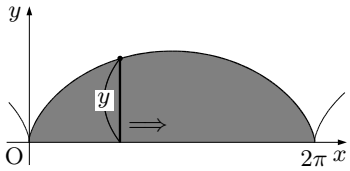
＜例 1＞

$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれる面積を求めよ．

(解) まず，$\boldsymbol{t}$ **の増加に対する** $\boldsymbol{x, y}$ **の増減**だが，x については

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \geqq 0 \longleftarrow\ t \text{ に対して } \boldsymbol{x} \text{ は単調増加！}$$

y については微分するまでもなく $\cos t$ の変化から $\boldsymbol{t = \pi}$ **まで増加，そして** $\boldsymbol{2\pi}$ **まで減少する．**



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2\pi}} \boldsymbol{y\,dx} \ \longleftarrow\ \text{この } \boldsymbol{2\pi} \text{は座標の目盛り！} \\
&= \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2\pi}} \boldsymbol{y\frac{dx}{dt}\,dt} \ \longleftarrow\ \text{この } \boldsymbol{2\pi} \text{はラジアン（角）！} \\
&= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\cdot(1-\cos)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \ \longleftarrow\ \boldsymbol{\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)\,dt \\
&= \left[\ \frac{3}{2}t - 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2t\ \right]_0^{2\pi} \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

＜例 2＞

$t^2 + x + 1 = 0,\ t^2 - t + y - 2 = 0\ \ (t$ はすべての実数) と x 軸とで囲まれる面積を求めよ．

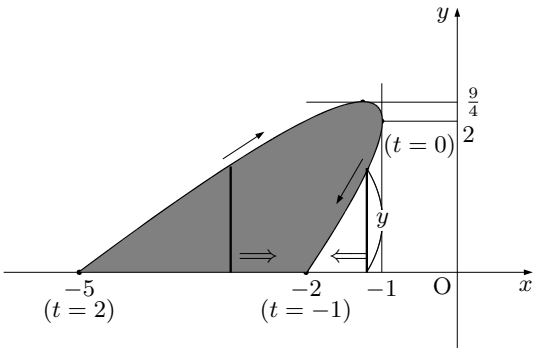
(解) $\boldsymbol{x, y}$ **ともにパラメーター** $\boldsymbol{t}$ **の** 2 **次関数だから**

$$x = -t^2 - 1,$$
$$y = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

と変形すれば $\boldsymbol{t}$ **の増加に対する** $\boldsymbol{x, y}$ **増減は微分しなくとも大体はワカル——このカンジが大切！**
また x 軸との交点は $y = 0$ とおけばよい．

$$y = -(t^2 - t - 2) = -(t+1)(t-2) = 0\ \longrightarrow\ t = -1,\ 2$$

このときの x 座標がそれぞれ $-2,\ -5$
であることに注目して



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \int_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{y\frac{dx}{dt}\,dt} \\
&= \int_2^{-1} (-t^2 + t + 2)(-2t)\,dt \\
&= 2\int_2^{-1} (t^3 - t^2 - 2t)\,dt \\
&= 2\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - t^2\right]_2^{-1} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

と，まあ結果は出た．

しかし，これは実はおもしろいのだ．

図のように，この曲線は右側がへコんでいる．にもかかわらず $\boldsymbol{t=2}$ **(このとき** $\boldsymbol{x=-5}$**)** から $\boldsymbol{t=-1}$ **(このとき** $\boldsymbol{x=-2}$**)** までとおして積分すると $\boldsymbol{S}$ が求められる——なぜか！

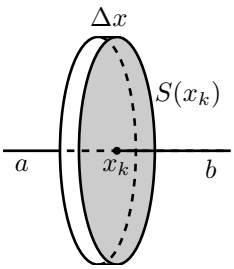
以下の説明でわかってもらえるだろうか．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-5}^{-1} y\,dx - \int_{-2}^{-1} y\,dx \quad \longleftarrow \quad \text{へコんだ部分を引く！} \\
&= \int_{2}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt - \int_{-1}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt \quad \longleftarrow \quad \text{置換積分！} \\
&= \int_{2}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt + \int_{0}^{-1} y\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= \int_{2}^{-1} y\frac{dx}{dt}\,dt \quad \longleftarrow \quad \text{積分区間がツナガッタ！}
\end{aligned}
$$

要するに，$\boldsymbol{x=-5}$**(左端)** を与える $t=2$ から $\boldsymbol{x=-2}$**(右端)** をあたえる $t=-1$ までを $\boldsymbol{t}$ **について積分していくと、**$t=2$ から $t=0$ **までは** $\boldsymbol{x}$ **方向を右向きに積分し，**$t=0$ から $t=-1$ **までは** $\boldsymbol{x}$ **方向を左向きに積分**することになるので**下側の部分が自動的にくりぬかれて，結局は図の部分の面積が計算される** のである．

2.4.2　定積分と体積

2.4.2.1　体積を求める基本原理



点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ を通り，x 軸と垂直な平面で立体 A を切ったときの**切り口の面積**を $\boldsymbol{S(x)}$ とするとき，立体 A の $\boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$ の部分の体積 V を求めるには面積の場合と同様に**この区間を $\boldsymbol{n}$ 等分**して考える．すなわち

$$\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)\,dx \longleftarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x} \text{ のこと！}$$

で，これは $\boldsymbol{S(x)}$ **の原始関数の増分**として計算される．

2.4.2.2　回転体の体積

回転体とは，ある図形を積分軸のまわりに回転して得られる立体のことでトウゼン積分軸に垂直な平面で切ればその切り口の図形は円である——前項の特別な場合！

したがってその半径を $r(x)$ とすれば上記 $S(x)$ は

$$\boldsymbol{S(x) = \pi\{r(x)\}^2}$$

であるから求める体積 V は

$$\boldsymbol{V} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\pi\{r(x)\}^2\,dx} \longleftarrow \text{第 1 式では}\boldsymbol{\pi}\text{はインテグラルの中 (私の好み)！}$$

$$= \pi\int_a^b \{r(x)\}^2\,dx \longleftarrow \text{ここから}\boldsymbol{\pi}\text{はインテグラルの外 (これも私の好み)！}$$

を計算すればよい.

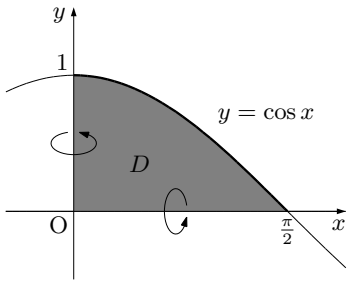
＜メモ＞

■ 実際に体積を計算する

＜ 例 ＞

$y = \cos x$ のグラフと両軸とで囲まれる領域 D を x 軸のまわりに回転させるとき，D の通過する部分の体積を求めよ．また y 軸のまわりに回転させるときはどうか.

(解) まず，$\boldsymbol{x}$ 軸のまわりの回転は



$$\boldsymbol{V_1} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}} \boldsymbol{\pi y^2\,dx} \longleftarrow \text{まずこの式を書け！}$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \longleftarrow \textbf{2 乗を解消！}$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\,x + \frac{1}{2}\sin 2x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

で，これは問題ナシ.

ところが $\boldsymbol{y}$ 軸のまわりの回転となるとチョット様子がちがう.

この体積 V_2 を求める積分は

$$\boldsymbol{V_2} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{\pi x^2\,dy} = \pi\int_0^1 \boldsymbol{x^2}\,dy$$

となり，被積分関数 x^2 を y で表さなければならないが，与えられた $\boldsymbol{y = \cos x}$ を x について解いて "$\boldsymbol{x = (y}$ の式$\boldsymbol{)}$" とは書けない——そこで置換積分！

そこで $dy = -\sin x\,dx$，$\begin{array}{c|c} y & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline x & \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0 \end{array}$ に注意して

$$V_2 = \pi\int_0^1 \boldsymbol{x^2}\,dy = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2(-\sin x)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx \longleftarrow \boldsymbol{x^2}\text{の次数を下げる ために 部分積分を 2 回！}$$

積分計算だけとり出すと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx = \Big[\ x^2(-\cos x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(-\cos x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx \ \longleftarrow\ \text{さらに部分積分！}$$

$$= 2\left\{\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sin x\,dx\right\} = pi - 2$$

$$\therefore\quad V_2 = \pi(\pi - 2)$$

本来 y 方向で積分すべきところを x 方向の積分でカタがついた——これはかなり有効！

■ **環体の体積**

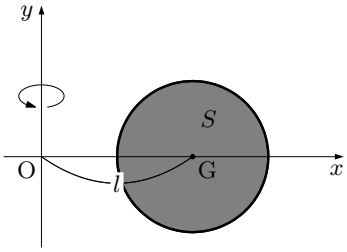
環体というのはカンタンにいえば**ドーナツ形状の立体（ワッカ）**のことである．

このような立体の体積を求めるハナシでは**パップス・ギュルダンの定理**を避けては通れまい．

これは，断面積 $\boldsymbol{S}$ の図形が，たとえば右図で

直線 g： $x = 0$ (y 軸)

のまわりを回転するとき，この**図形の重心から g までの距離が l** ならば，回転してできる立体の体積 V は



$$\boldsymbol{V = 2\pi S l}$$

$\longleftarrow$ 重心 G が 1 周する長さが $2\pi l$ なのだ！

で与えられる，というものでなかなかおもしろい．それというのも上式の $2\pi l$ は重心が回転する円周の長さを表しており，ドーナツをどこか 1ヶ所で切ってそれを伸ばすことによって，**底面積が $\boldsymbol{S}$，高さが $\boldsymbol{2\pi l}$ の円柱とみなして計算できる、というハナシ** である．

しかし残念なことに高校数学では**重心の一般的な定義**ができないので**パス**——とはいえ**結果の確認には重宝**な公式ではある．

しからばわれわれに残されたテはないか——**1 つだけある**．それは**ドーナツを同心円状に輪切りにする**のだが、たとえていえば，**バウムクーヘンの薄皮を 1 枚ずつ足していくように積分しようというわけだ**——**バウムクーヘン法**などという人もいる．

図を見てもらいたい．区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分し，その 1 つを Δx とすれば半径 x_k と半径 $x_k + \Delta x$ との間にはさまれる高さ y_k の**薄皮の部分**の微小体積は

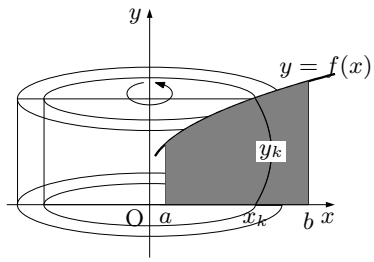
$$\pi(x_k + \Delta x)^2 y_k - \pi x_k^2 y_k = \pi\{2x_k y_k \Delta x + (\Delta x)^2 y_k\}$$

であるからこれらを**足し合わせると**

$$\boldsymbol{V} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\pi\{2x_k y_k\Delta x + (\Delta x)^2 y_k\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi x_k y_k \Delta x + \lim_{n\to\infty}\Delta x\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} y_k\Delta x$$

$$= \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{2\pi x y\,dx} \ \longleftarrow\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} y_k\Delta x\ (= S\ \text{面積}\ !)$$



という公式が導かれる．

たとえば前掲の<例>の後半で図形 D の **y 軸まわりの回転**のハナシはこの**環体**の例だがこの公式を用いると

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x y\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

となり，**部分積分を 1 回サボルことができる**———なかなかありがたい公式なのだ．

また，バウムクーヘン法などというと何か特別な公式のように聞こえるが，**置換積分と部分積分を使ってごくフツウに誘導する**こともできる———参考までに以下にやっておく．

回転体として求める体積を積分で表すと

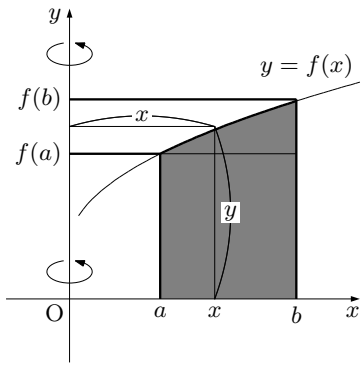
$$\boldsymbol{V=\underbrace{(\pi b^2)f(b)}_{\text{外側の円筒}}-\int_{f(a)}^{f(b)}\pi x^2\,dy-\underbrace{(\pi a^2)f(a)}_{\text{内側の円筒}}}$$

$$=\pi b^2 f(b)-\pi\underbrace{\int_{f(a)}^{f(b)}x^2\,dy}_{A}-\pi a^2 f(a)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで A を計算しておく．

$$y=f(x)\qquad\therefore\quad dy=f'(x)dx$$

で積分区間の対応は，$\begin{array}{c|c} y & f(a)\longrightarrow f(b) \\ \hline x & a\longrightarrow b \end{array}$ だから



$$A=\int_a^b x^2 f'(x)dx\ \longleftarrow\ \text{部分積分を実行！}$$

$$=\Big[x^2 f(x)\Big]_a^b-\int_a^b(2x)f(x)\,dx$$

$$=b^2 f(b)-a^2 f(a)-\int_a^b 2xy\,dx$$

これを $(*)$ に入れると $\pi b^2 f(b)$，$\pi a^2 f(a)$ が消えて

$$\boldsymbol{V=\int_a^b 2\pi xy\,dx}$$

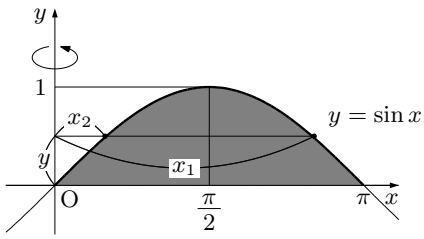
となる———まあ，安心して使ってよい．

＜例＞

$y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸との囲む領域を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ．

(解) まずは，マジメが一番！

回転の外周から内周をくりぬけばよい．これを積分の式で表すと



$$\boldsymbol{V=\int_0^1\pi {x_1}^2\,dy-\int_0^1\pi {x_2}^2\,dy}$$

だが**外周，内周と x の変化との対応関係**は

$$\begin{array}{c|c} x & 0\longrightarrow\frac{\pi}{2}\longrightarrow\pi \\ \hline y & 0\longrightarrow 1\longrightarrow 0 \end{array},\quad dy=\cos x$$

から **x の増加に対して y は 0 から $\frac{\pi}{2}$ までは増加し，$\frac{\pi}{2}$ から π までは減少することがわかる．**

問題は外周の積分で，**y が 0 から 1 まで増加するとき x は π から $\frac{\pi}{2}$ まで減少するのだ．**<u>このことを積分区間の変換に反映させて置換積分を実行する</u>と

$$V=\pi\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$$

$$=\pi\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2\cos x\,dx\ \longleftarrow\ \text{積分区間がツナガッタ！}$$

$$=\pi\int_\pi^0 x^2\cos x\,dx$$

要するに外周から計算をはじめて，そのままズルズル続けて内周まで積分すれば**へコんだ部分が自動的にくりぬかれる**状況が見えてくる．

あとは力ずくで**部分積分**を実行すればよい．

$$
\begin{aligned}
V &= -\pi \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx \quad \longleftarrow \quad \textbf{部分積分で } \boldsymbol{x^2} \textbf{の次数をサゲル！} \\
&= -\pi \left\{ \Big[\, x^2 \sin x \, \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x \, dx \right\} \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx
\end{aligned}
$$

となるがさらに部分積分を実行すれば

$$
V = 2\pi \left\{ \Big[x(-\cos x) \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot (-\cos x) \, dx \right\} = 2\pi^2
$$

と，まあ一応結論は得られるが，**かなりシンドイ**．

しかし，これを**バウムクーヘン法**にしたがって求めると

$$
V = \int_0^{\pi} 2\pi x y \, dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx
$$

となり**最初の部分積分をサボルことができる**．

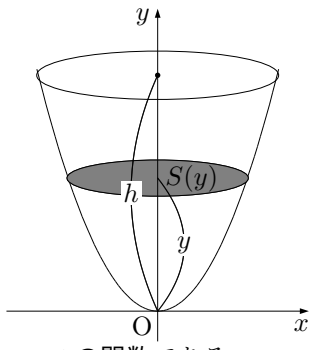
また，この図形の重心は $x = \dfrac{\pi}{2}$ 上だから**パップス・ギュルダンの定理**によれば

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi l S \quad \longleftarrow \quad S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \\
&= 2\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot 2 = 2\pi^2
\end{aligned}
$$

となり，上記の計算が**正しいことが瞬時にワカル**．

同じような形をした $\boldsymbol{y = -(x-\alpha)(x-\beta)\ (0 < \alpha \leqq x \leqq \beta\ )}$ などで**追実験を！**

2.4.2.3　体積の計算と体積変化率



右図のような立体の体積を積分で求めてみよう．高さ y において y 軸に垂直な平面で切ったときの断面積が $S(y)$ で与えられるならば水面の高さ h に対する水の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \int_0^h S(y)\,dy}$$

であるが，このときこの容器のそこに穴があいていて水がもれる事態が起こったとすると，時間の経過とともに水の体積は減少し，トウゼン水面の面積も高さも変化する——**t の関数**である．

そこでこの状況をとらえるために上に示した等式の両辺を **t で微分する**と

$$\boldsymbol{\frac{dV}{dt} = S(h) \cdot \frac{dh}{dt}}$$

となる——**体積変化率，水面の面積，水面の高さの変化率**の関係が与えられたことになる．おおむねの問題は、問題文中に**何か**を与えておいて，**未知のもの**を求めさせる形式になっている——よく考えればアタリマエ！

計算はともかく，**1 つ 1 つ の式**の意味するところ、**文中のコトバ**の意味するところをよく理解してナットクすることが大切 である．

＜メモ＞

■ 改めて、変化率とは何か

この微積分という分野が自然現象、あるいは物理現象をその**フルサト**にもつにもかかわらず、実際にその手の問題に当たると、どうに数式化すればよいかがピンとこない、という人が意外と多い．それは**変化率**という**数学的概念**をキチンととらえられないからではないか と思う．

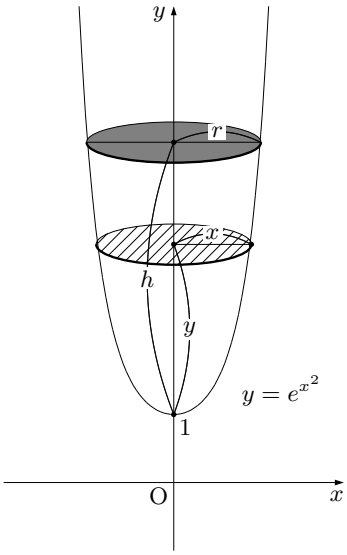
まあ、具体的にそういう問題を用いて説明するのがよいだろう．

＜ 例 ＞

(1) 曲線 $y = e^{x^2}$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に、深さが h になるまで水を入れたとき水の体積を V とし、水面の面積を S とする．V を h で表せ．また、V を S で表せ．
(2) この容器に毎秒 2 の割合で水を注ぎ込むとき、水の体積が π となった瞬間の水面の上昇する速さと、水面のひろがる速さを求めよ．

(解) (1) まず積分で体積 V を表す———これは問題ナシ．
深さが h だから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= \int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{S(y)\,dy} \\
&= \int_1^h \pi x^2\,dy \ \longleftarrow\ y = e^{x^2} \\
&= \pi\int_1^h \log y\,dy \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\
&= \pi\Big[\ y\log y - y\ \Big]_1^h \\
&= \pi\{(h+1)\log(h+1) - h\} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②
\end{aligned}$$



次に、水面は円だからその半径を r とすると面積 S は

$$S = \pi r^2 = \pi\log(h+1) \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\therefore\ \ h+1 = e^{\frac{S}{\pi}},\ \ h = e^{\frac{S}{\pi}} - 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

これらを ② に入れて

$$V = \pi\{e^{\frac{S}{\pi}}\cdot\frac{S}{\pi} - (e^{\frac{S}{\pi}} - 1)\} = (S-\pi)e^{\frac{S}{\pi}} + \pi$$

(2) ここが問題なのだ．まず 問題文中の**キーワード**を拾っておく．

与えられているもの：

「 毎秒 2 の割合で〜 」 $\longleftarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{dV}{dt} = 2}$ と読め！

「 水の体積が π〜 」 $\longleftarrow$ $V = 2$ だから、②から $\boldsymbol{h}$ **がキマリ、③から** $\boldsymbol{S}$ **もキマル！**

求めるもの：

「 水面の上昇する速さ 」 $\longleftarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt}}$ の $V = \pi$のときの値！

「 水面のひろがる速さ 」 $\longleftarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{dS}{dt}}$ の $V = \pi$のときの値！

そして、V は時刻 t の関数だから、② から h も t の関数、③ から S も t の関数で互いに関係していて、t の変化に対する**変化率**が問題になっている．

そういうことだから ① の両辺を t で微分する と

$$\boldsymbol{\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}} \longleftarrow \text{合成関数の微分！}$$

$$= \pi \log(1+h) \frac{dh}{dt}$$

$$\longleftarrow \frac{dV}{dh} \text{は③からでもよいが、②から } \boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x)} \text{ を利用！}$$

ここで $\dfrac{dV}{dt} = 2$ を入れると

$$2 = \pi \log(1+h) \frac{dh}{dt} \qquad \therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi \log(1+h)} \longleftarrow \text{これはまだ 導関数！}$$

求めているものは $V = \pi$ のときの微分係数である から、このとき ③ を用いて

$$\pi\{(h+1)\log(h+1) - h\} = \pi \ (= V) \qquad \therefore \quad (h+1)\log(h+1) = h+1$$

$$\therefore \quad \log(h+1) = 1 \ \ (h+1 > 0) \qquad \therefore \quad h+1 = e \qquad \therefore \quad h = e-1$$

これを用いて

$$\left[\ \frac{dh}{dt}\ \right]_{V=\pi} = \frac{2}{\pi \log e} = \frac{2}{\pi} \longleftarrow \text{やっと 微分係数！}$$

また ③ から

$$\frac{dS}{dt} = \pi \frac{dS}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \longleftarrow \text{合成関数の微分！}$$

$$= \pi \frac{1}{1+h} \cdot \frac{dh}{dt} \longleftarrow \text{これはまだ 導関数！}$$

であるから

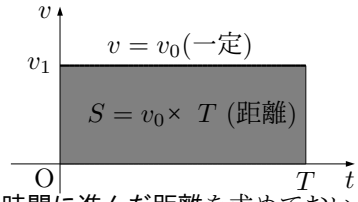
$$\left[\ \frac{dS}{dt}\ \right]_{V=\pi} = \pi \cdot \frac{1}{e} \cdot \left[\ \frac{dh}{dt}\ \right]_{V=\pi}$$

$$= \frac{\pi}{e} \cdot \frac{2}{pi} = \frac{2}{e} \longleftarrow \text{やっと 微分係数！}$$

いずれにしても、コトバや式の意味をキチンと理解して使うことが大切である.

2.4.3　曲線の長さ

2.4.3.1　定積分と連続変量の総和



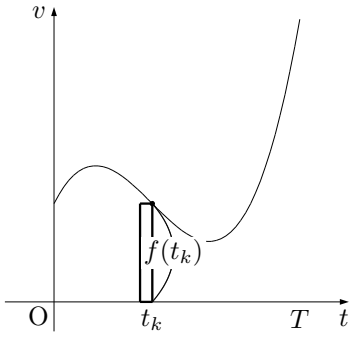
たとえば速度が一定のとき

(進んだ距離) = (速度)×(かかった時間)

で求められることは誰もが認めるところである．

しかし，速度が刻々と変化するときはどうするか．

それを求めるにはかかった時間を細分化しそれぞれの時間に進んだ距離を求めておいて，それらの総和で近似することを考える．



つまり，かかった時間 x を n 等分した小区間を Δt とすると進んだ距離 s は

$$\boldsymbol{s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t}$$
$$\boldsymbol{= \int_0^T v(t)\,dt} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \boxtimes$$

を計算すればよい．

もう説明するまでもないがエネルギー，仕事量など連続して変化する量の総和はすべて定積分で記述されることになる——これはいろいろな場面で有効である．

2.4.3.2　曲線の長さの計算

ただし，前記の説明は日常的な感覚で図もトウゼンのように**数直線上の移動**を $v(t) > 0$ として示したが，たとえば $v(t) < 0$(逆向きに動く) のときも起こり得る．このとき⊠は負の値をとり，要するにこれは T(秒) 後の**座標**に他ならない．

距離として正確に計算するには次のように計算しなければならない．

$$s = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{|v(t)|\,dt} \quad \longleftarrow \quad |v(t)| \text{ は 速さ！}$$

さて，一般に点 $\mathrm{P}(x, y)$ がこの平面上を移動する場合，時刻 t に対する x, y 座標の**変化率**を成分とするベクトルを**速度**という．すなわち

$$\text{速度：}\ \vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}, \qquad \text{速さ：}\ \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

これに上記に積分を適用すると点Pの描く**曲線の長さ** s は

$$\boldsymbol{s = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

と計算されるが，さらにこれに**置換積分**を実行すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s} &= \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \quad \longleftarrow \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow T \\ \hline x & 0 \longrightarrow X \end{array} \\
&= \int_0^T \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)\,dt \quad \longleftarrow \quad \text{ただし}, \frac{dx}{dt} > 0 \text{ とする．} \\
&= \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{X}} \sqrt{\boldsymbol{1} + \left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right)^{\boldsymbol{2}}}\,\boldsymbol{dx} = \int_0^X \sqrt{1 + (y')^2}\,dx
\end{aligned}$$

の形に変形することもできる．

第3章　さらなる展開のために

この辺で素材としてよく使われるポピュラーな曲線をいくつか紹介しておこう．

これらは基本的には x, y 平面上で**パラメーター表示**されるが，場合によっては**極座標表示**で示したほうが使い勝手のよい場合もありいろいろである．

そしてここに挙げる曲線は前章に述べた方法によって囲まれた領域の**面積**や曲線の部分的な**長さ**を求めることのできる素材でもあるが，もう１つ１つをやって見せなくともよいだろう———必要なことはおおむね書いた．

しかし，そうは言っても学ぶものとしてはそれらの周辺についての基本的な知識は，それなりに知っておいたほうがよいにキマッテいる．

あるいは，これを機会に多少の興味をもつことになるかも知れない．人間は興味をもてば次には手に入れたくなるものである．筆者としてはそういう期待がないでもないが諸君は気楽に読んでもらいたい．

チョッと**おもしろい**と思ってもらえたら筆者の仕掛けた**モクロミは成功した**のだと思う．

3.1　サイクロイドとそのファミリー

最もポピュラーな例では円が転がるときの円周上に固定した点の軌跡がある———ここからハナシをはじめよう.

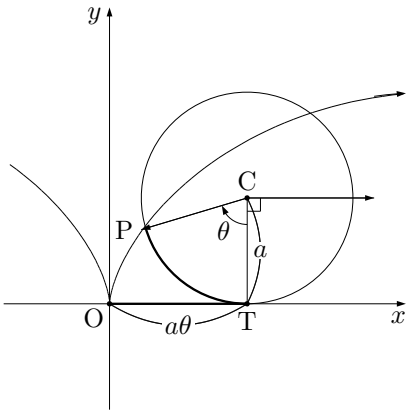
3.1.1　コモンサイクロイド

半径 a の円 C が x 軸上をすべることなく転がっていくとき，はじめ原点に一致していた円周上の点 P はどのような軌跡を描くか.

転がり角を θ として点 P をパラメーター表示したい———それにはベクトルを利用するのがよさそうだ.

右図で円の中心を C，θ 回転したときの円 C と x 軸との接点を T として，点 P を位置をベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} + \overrightarrow{\mathbf{CP}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



ここで

$$\overline{\mathbf{OT}} = \widehat{\mathbf{PT}} = a\theta$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix}$$

はすぐにワカルから，問題は $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ だ.

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と x 軸の正方向とのなす角を ϕ とすると

$$\phi = -\frac{\pi}{2} - \theta = -\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

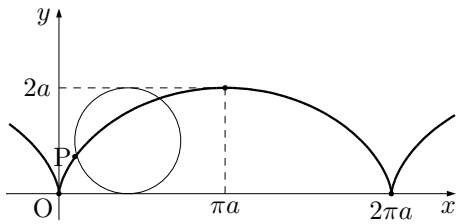
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} a\cos\phi \\ a\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ -a\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ -a\cos\theta \end{pmatrix}$$

これらを ① に入れると $\mathrm{P}(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ -a\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = a\theta - a\sin\theta} \\ \boldsymbol{y = a - a\cos\theta} \end{cases}$$



とパラメーター表示される.

この曲線をコモンサイクロイド，あるいは省略して単にサイクロイドと呼んでいる.

3.1.2　ハイポ (内側) サイクロイドからアステロイドへ

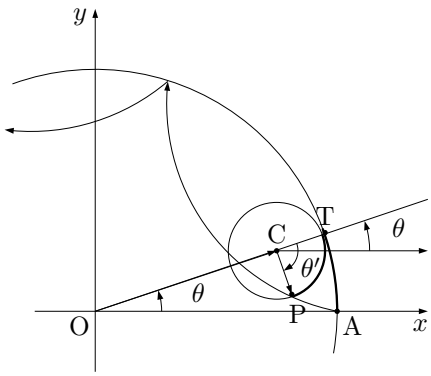
これは半径 a の円 C_0 に半径 b の円 C が**内接**しながら**すべることなく**転がる場合のハナシである．ただし $a > b$ とする．

はじめ 2 つの円が点 A で接していたとしよう．このとき内側の円 C が外側の円 C_0 に**内接**しながら**すべることなく**転がるとき外側の円 C_0 上点 A に重なっていた円 C 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ はどのような軌跡を描くか——これもベクトルで考えるとよい．

円の中心を C，θ だけ回転したときの円 C と C_0 との接点を T として，点 P の位置をベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} + \overrightarrow{\mathbf{CP}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となることはは問題なかろう．



このとき線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ の長さが $a - b$ であることに注目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} (a-b)\cos\theta \\ (a-b)\sin\theta \end{pmatrix}$$

はすぐにワカル——やはり問題は $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ だ．

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の長さが b であることはすでにわかっているから x 軸の正方向とのなす角 ϕ がわかればこのベクトルは求められる．

それに右は図に示す C_0 上の角 θ に対応する円 C の回転角 θ' を求めておかなければならない——ϕ は x 軸の正方向に対して**まず $\boldsymbol{\theta}$ を測り，$\boldsymbol{\theta'}$ もどる**と考えればよい．

そこで

$$\widehat{\mathbf{AT}} = \widehat{\mathbf{PT}} \longrightarrow \boldsymbol{a\theta = b\theta'} \qquad \therefore\ \theta' = \frac{a}{b}\theta$$

$$\boldsymbol{\phi = \theta - \theta'}$$

$$= \theta - \frac{a}{b}\theta = -\frac{a-b}{b}\theta$$

これが求まれば $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ はカンタンだ．すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} b\cos\phi \\ b\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cos\dfrac{a-b}{b}\theta \\ -b\sin\dfrac{a-b}{b}\theta \end{pmatrix}$$

これらを ① に入れると, $\mathrm{P}(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b)\cos\theta \\ (a-b)\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\cos\dfrac{a-b}{b}\theta \\ -b\sin\dfrac{a-b}{b}\theta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = (a-b)\cos\theta + b\cos\dfrac{a-b}{b}\theta} \\ \boldsymbol{y = (a-b)\sin\theta - b\sin\dfrac{a-b}{b}\theta} \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

とパラメーター表示される——この曲線をハイポ (内側) サイクロイドという．

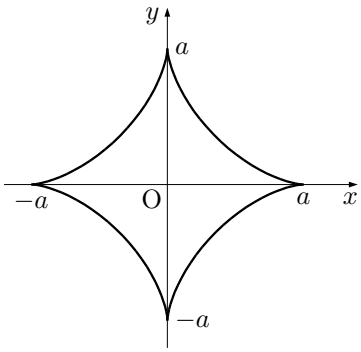
特に $\boldsymbol{b = \dfrac{a}{4}}$ のときは円 C の 1 周分が円 C_0 の周の四半分にあたるので図のようなキレイな対称形になる——この場合を特別にアステロイドと呼んでいる．以下，アステロイドのパラメーター表示を導いておく．

$(*)$ で $\boldsymbol{b = \dfrac{a}{4}}$ とおいて 3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

を用いて変形すると

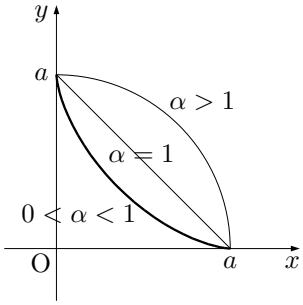
$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) = \boldsymbol{a\cos^3\theta} \\ y = \dfrac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \ = \boldsymbol{a\sin^3\theta} \end{cases}$$



でなかなかキレイな形にまとまった．

しかも，このパラメーター表示からは θ が消去できて $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のナマの関係として表すことができる．すなわち

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\longrightarrow \ \boldsymbol{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}}$$



でこれもキレイな形になる．一般に

$$x^\alpha + y^\alpha = a^\alpha$$

の形で表される曲線の形状は $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ に分けて分類するとなんとなくナットクしやすい——上図に示す．

＜メモ＞

■ アステロイドの接線

アステロイドの接線についてはおもしろい結果が知られている——実例で説明する．

＜ 例 1 ＞

アステロイドの接線が両軸から切り取られる長さは一定である．このことを証明せよ．

(解) アステロイドの方程式は

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

だから両辺を x で微分すると

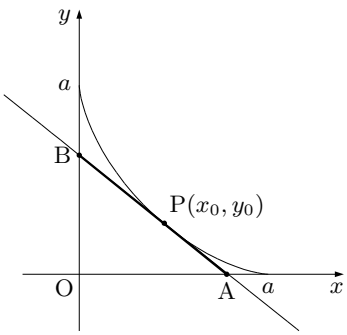
$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0 \qquad \therefore \ \ y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

ゆえに，アステロイド曲線上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$y - y_0 = -\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{-\frac{1}{3}}(x - x_0) \ \longleftarrow \ \ \text{ただし，} x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

整理すると

$$\boldsymbol{x_0^{-\frac{1}{3}}x + y_0^{-\frac{1}{3}}y = a^{\frac{2}{3}}}$$



だから $y=0$, $x=0$ を代入して両軸との交点の座標を求めると

$$\mathrm{A}\ (x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},\ 0),\quad \mathrm{B}\ (0,\ y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2 &= \left(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^2 \\ &= (x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}})\ a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{4}{3}} = a^2 \\ &\therefore\ \ \boldsymbol{\overline{\mathrm{AB}} = a\ (一定\ !)}\end{aligned}$$

であることがわかる——このことは何を意味するか.

要するに，長さ a の棒の両端を両軸上に置き，自由にスライドさせるときにその棒のなぞる曲線がアステロイドである.

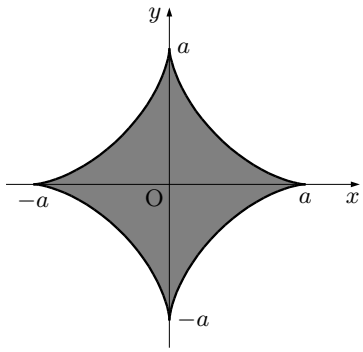
■ アステロイドの囲む面積——$\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta}$ の応用！

＜例 2＞

アステロイドで囲まれる領域の面積とこの曲線の長さを求めよ.

(解) アステロイドのパラメーター表示は

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$



で，図形は両軸について対称であるから第 1 象限の部分を求めて 4 倍すればよい.

そこで，$\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow a \\ \hline x & \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0 \end{array}$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_0^a y\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \ \longleftarrow\ \text{置換積分！} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta\ a3\cos^2\theta(-\sin\theta)\,d\theta = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\ &= 3a^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta\right\} \\ &= 3a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0\right) \ \longleftarrow\ I_0 = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3\pi}{32}a^2\end{aligned}$$

ゆえに求める面積は

$$S = \frac{3\pi}{32}a^2\times\ 4 = \frac{3a^2}{8}$$

また，この曲線の長さは

$$\boldsymbol{\frac{L}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

にしたがって計算すればよいのだが

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= \sqrt{\{a\ 3\cos^2\theta(-\sin\theta)\}^2 + \{a\ 3\sin^2\theta(\cos\theta)\}^2} \\
&= \sqrt{9a^2\cos^4\theta\sin^2\theta + 9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta} \\
&= 3a\sqrt{\sin^\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \\
&= 3a|\sin\theta\cos\theta|
\end{aligned}$$

だから，これを ① に入れて

$$\begin{aligned}
\frac{L}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta \quad \longleftarrow \quad \text{絶対値はここで積分区間をにらんではずす！} \\
&= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{3a}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2} \\
\therefore\quad L &= \frac{3a}{2}\times\ 4 = 6a
\end{aligned}$$

となる．

ここで研究モードだが，面積の計算で

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 d\theta = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\,d\theta = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$$

は敷居が高い———まず、入試でいきなり使わせることはないと思ってよい だろう．

といって倍角公式を何度も使ってやらせるのはチト過酷だから出題する方としてはなるべく避けたいと思うにちがいない．これはそういう問題なのだ．

また，曲線の長さは現行のカリキュラムでは範囲外である———まあやればこんなものだからやってもそう負担ではないと思う．

3.1.3　エピ (外側) サイクロイドからカージオイドへ

次は円の外側に**外接**しながらもう 1 つの円が**すべることなく**転がるときのハナシである——図の円 C_0 上の点 A に重なっている円 C 上の点 P はどのような**軌跡**を描くか．これもベクトルを用いて説明する．

円の中心を C，θ だけ回転したときの円 C と円 C_0 との接点を T とすると

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} + \overrightarrow{\mathbf{CP}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

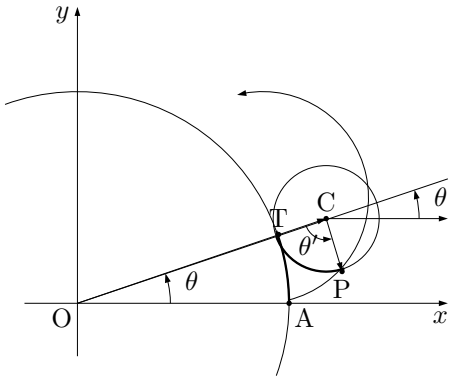
は問題はない．このとき線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ が $a+b$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} (a+b)\cos\theta \\ (a+b)\sin\theta \end{pmatrix}$$

はすぐにワカル——やはり問題は $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ なのだ．

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の長さは b だから、x 軸の正方向とのなす角 ϕ がわかればこのベクトルは求まる．その ϕ を求めるには下図に示す C_0 上の角 θ に対応する円 C の回転角 θ' がわかればよいから、ϕ は x 軸の正方向に対して**まず $\boldsymbol{\theta}$ を測り，さらに $\boldsymbol{\pi+\theta'}$ を測る** のだ．

実際に求めてみると



$$\widehat{\mathbf{AT}} = \widehat{\mathbf{PT}} \longrightarrow \boldsymbol{a\theta = b\theta'}$$

$$\therefore\quad \theta' = \frac{a}{b}\theta$$

$$\boldsymbol{\phi = \theta + \pi + \theta'}$$

$$= \theta + \pi + \frac{a}{b}\theta = \frac{a+b}{b}\theta + \pi$$

だから $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} b\cos\phi \\ b\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta + \pi\right) \\ b\sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta + \pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta \\ -b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta \end{pmatrix}$$

これらを☒に入れると，$\mathrm{P}(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)\cos\theta \\ (a+b)\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta \\ -b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta \end{pmatrix}$$

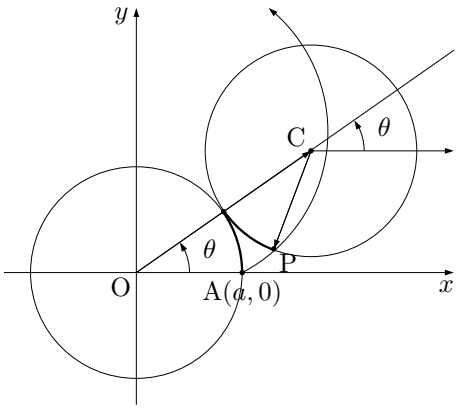
$$\longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = (a+b)\cos\theta - b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta} \\ \boldsymbol{y = (a+b)\sin\theta - b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta} \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

とパラメーター表示され，**エピ (外側) サイクロイド**と呼ばれている——その曲線はキレイな**花マル状**になることは容易に想像できるだろう．

以上がエピサイクロイドの一般的な場合の説明だが，この中で特に $b = a$ のときがおもしろい——実は**カージオイド** (ハート形) になるのである．

以下，カージオイドの**極方程式**までツメておきたい———その方があとあと**実用的**な展開となる．

ここで、$(*)$ のパラメーター表示で $\boldsymbol{b=a}$ とおくと



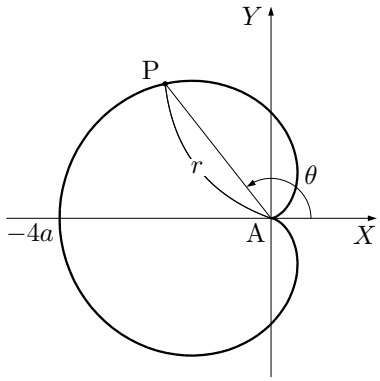
$$
\begin{aligned}
x &= 2a\cos\theta - a\cos 2\theta \\
&= 2a\cos\theta - a(2\cos^2\theta - 1) \\
&= 2a(1-\cos\theta)\cos\theta + a \\
y &= 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \\
&= 2a(1-\cos\theta)\sin\theta
\end{aligned}
$$

となるが x 座標の $(+a)$ がジャマになる———**座標軸を平行移動**してこれを消したい．

つまり，<u>A$(a,0)$ を**新しい原点**にとり直す</u> と

$$
\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
$$

だからこれに上記の x, y を入れると



$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a(1-\cos\theta)\cos\theta \\ 2a(1-\cos\theta)\sin\theta \end{pmatrix} \\
&\left(= k\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{OC}} \right)
\end{aligned}
$$

新規の座標軸で点 P をパラメーター表示すると

$$
\begin{cases} \boldsymbol{X = 2a(1-\cos\theta)\cos\theta} \\ \boldsymbol{Y = 2a(1-\cos\theta)\sin\theta} \end{cases}
$$

そこで線分 $\overline{\mathrm{AP}}$ の長さを r とおくと θ は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と x 軸の正方向とのなす角に等しく

$$
\begin{aligned}
r^2 &= X^2 + Y^2 \\
&= \{2a(1-\cos\theta)\cos\theta\}^2 + \{2a(1-\cos\theta)\sin\theta\}^2 \\
&= \{2a(1-\cos\theta)\}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \quad \longleftarrow \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\
&= \{2a(1-\cos\theta)\}^2 \\
\therefore \quad & \boldsymbol{r = 2a(1-\cos\theta)}
\end{aligned}
$$

となり一応の決着をみる．

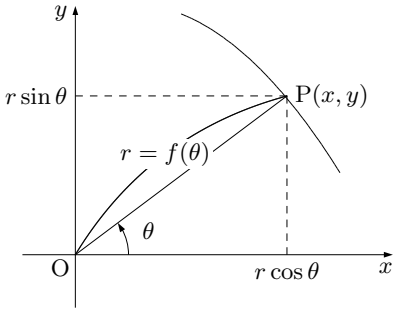
一般には上記の曲線を y 軸に関して対称移動した形で

$$
\boldsymbol{r = 2a(1+\cos\theta)}
$$

で表記されたりもするが，まあ問題なくナットクしてもらえるだろう．

<メモ>

■ 極座標表示と面積，曲線の長さ



改まって**極座標表示**などというと難しく感じるかもしれないが、カンタンに言うと直交座標で区画整理された町並みの 何丁目何番地 と指定する代わりに，たとえば時計の文字盤になぞらえると 12 時の方向を決めておいて 2 時の方向に何キロ という表現だと思えばよい．

曲線上の点が**母線** (基準の線) から測る角が θ，原点からの距離 r が θ の関数 $f(\theta)$ で与えられるとき，方程式

$$\boldsymbol{r = f(\theta)}$$

でこの曲線を表すことができる———これを**極方程式**という．

この曲線を直交座標でパラメーター表示するには

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = f(\theta)\cos\theta} \\ \boldsymbol{y = f(\theta)\sin\theta} \end{cases}$$

とすればよい———これも知っていると**トク**をする．

そうすると 直交座標と極座標ではどちらが扱いやすいかということになるが，それは場合によってちがうので一概には言えない———悩ましいが面白い．

たとえば、前記の**エピ** (外側) **サイクロイド**の場合は直交座標でないとうまくないがそれが**カージオイド**となるとダンゼン極座標の方が扱い易い．

そういう事情も考えてここで **極方程式で与えられた曲線が囲む面積**や**曲線の長さ**の求め方も説明しておくことにする———これは高校数学の範囲外ということになっているが基本原理はいままで解説してきたことで十分間に合うので恐れるにはあたらない．

それに知っていると重宝するときもある．チョッと**背伸び**するのもいいものだ．

(i) 極座標と面積

結論を先に書こう．曲線 $r = f(\theta)$ の θ が θ_1 から θ_2 まで変化するとき，線分 r が通過する部分の面積は

$$\boldsymbol{S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta}$$

で計算される———なぜか．

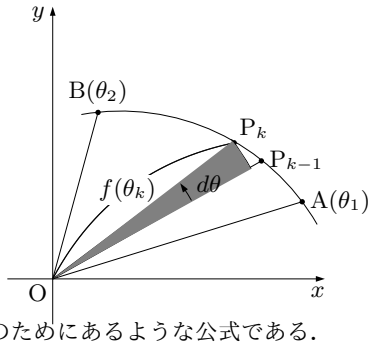
基本原理は $\boldsymbol{\lim \sum}$ でいくのだ．それには、まず区間 $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ を例によって $\boldsymbol{n}$ **等分**し，その 1 つの角を $\Delta\theta$, k 番目の θ の値を θ_k として k 番目の小面積を**扇形の面積で近似**する．すなわち

$$\pi\{f(\theta_k)\}^2 \times \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2 \Delta\theta$$

だから求める面積は

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2 \Delta\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\, d\theta = \boldsymbol{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta}$$



で計算できる———前記の**カージオイド**や**等角渦巻き線** (後述) のためにあるような公式である．

実際にやってみよう———パラメーター表示でやるより**ずっとカンタン**にいく．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{2a(1-\cos\theta)\}^2 \, d\theta \\
&= 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta \\
&= 2a^2 \int_0^{2\pi} \{1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\} \, d\theta \\
&= 2a^2 \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi a^2
\end{aligned}
$$

である———知っていると答えが先にわかったりするときがある..

(ii) 極座標と曲線の長さ

これは単純に置換積分でイケル．

前記の曲線をパラメーター表示すると

$$
\begin{cases} \boldsymbol{x = f(\theta)\cos\theta} \\ \boldsymbol{y = f(\theta)\sin\theta} \end{cases}
$$

だから**曲線の長さ**を求める公式

$$
\boldsymbol{L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \, d\theta}
$$

に適用する．ここで

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \{(f(\theta)\cos\theta)'\}^2 + \{(f(\theta)\sin\theta)'\}^2 \\
&= \{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\}^2 + \{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\}^2 \\
&= \{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2 \\
&= (r')^2 + r^2
\end{aligned}
$$

これを上の L を求める式に入れると

$$
\boldsymbol{L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2} \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r')^2 + r^2} \, d\theta}
$$

で，以外にカンタンな形になった．

まあ，ここまで要求されることはないと思うが，少し手を伸ばせばやれることを確かめたことはそれなりに有意義ではある．

3.2　その他の曲線

3.2.1　カテナリー (懸垂曲線)

よく使われる素材に

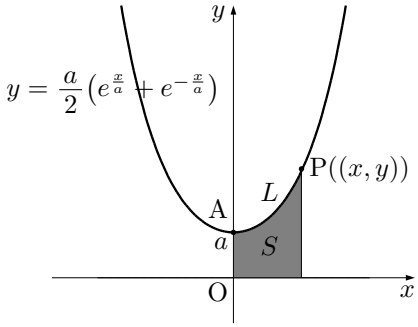
$$\boldsymbol{y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\ (a > 0)}$$

がある．これは張ったロープの両端を緩めたときにできる曲線といわれている——おもしろい性質がいくつかまとめられるので以下に述べておく．

(i) $\boldsymbol{S = aL}$ と覚えておこう

図の曲線に沿った弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ の長さは曲線の長さを求める公式によれば

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



の計算だが被積分関数が

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \cdots\cdots\cdots ②$$

とウマイ具合に変形されるので ② を ① に入れると

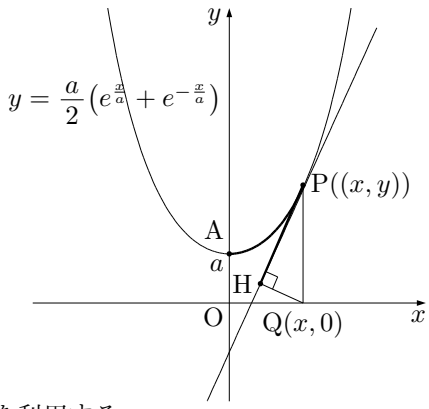
$$L = \int_0^x \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^x \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^x y\,dx = \frac{1}{a}S$$

で，分母を払えば $\boldsymbol{S = aL}$ が成り立つ．

(ii) $\boldsymbol{\overline{\mathrm{QH}} = a,\ \overline{\mathrm{PH}} = L}$

$\mathrm{P}(x, y)$ における接線の方程式は

$$Y - y = y'(X - x)$$
$$\therefore\ \ y'X - Y - xy' + y = 0$$



これに点 $\mathrm{Q}(x, 0)$ から垂線 QH を下ろすと点と直線の距離の公式から

$$\overline{\mathrm{QH}} = \frac{|y'x - 0 - xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}}$$
$$= \frac{y}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = a \ \longleftarrow\ ②\,!$$

$\overline{\mathrm{PH}}$ を求めるには △PQH にピタゴラスの定理を利用する．

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{PH}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2 - \overline{\mathrm{QH}}^2} \\
&= \sqrt{y^2 - a^2} \\
&= \sqrt{\left\{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}^2 - a^2} \\
&= a\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}^2} \longleftarrow \text{③を実行して } L \text{ を求めてみよ！} \\
&= a\sqrt{\left(\frac{L}{a}\right)^2} = L
\end{aligned}
$$

となる．

＜メモ＞

■ 伸開線 (インボリュート) と縮閉線 (エボリュート)

本文に示した結果は何を意味するか．これは、この曲線に張り付いた糸を**たるむことなく** (ツッパッタまま) ほぐすとき，はじめ点 A に重なっていた点は**ある曲線**を描く．そして、本文の点 H がこの軌跡の上にあるというのである——なかなかおもしろいと思わないか．

こうして得られる曲線をもとの曲線に対する**伸開線** (**インボリュート**) といい，もとの曲線をこの曲線に対する**縮閉線** (**エボリュート**) というのだがそんな難しい言葉は知らなくてもよい．

ともあれ、前掲のカテナリーでは，P における接線とそれと垂直で点 Q を通る直線との交点 H を求めればこの曲線が x をパラメーターとするパラメーター表示で求まるはずである．

一般の場合はどうするか——**ベクトル**という強力な道具がある ではないか．

$y = f(x)$ の場合で説明しよう．曲線上の点 $\mathrm{Q}_0(t_0, f(t_0))$ を始点としてこの曲線に巻きつけてある糸をゆるめることなく点 $Q(t, f(t))$ までほぐすものとする．このとき，はじめ点 Q_0 に重なっていた動点 $\mathrm{P}(X, Y)$ は次図のように動くであろう．

すなわち

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OQ}} + \overrightarrow{\mathbf{QP}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

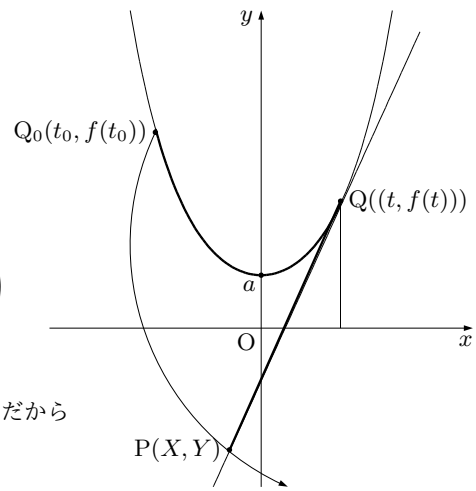
を計算するのだが $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ については問題なかろう．

次に $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ だが、これがチョッとヤッカイだ．これには接線方向の**単位ベクトル**を求めて利用するとよい——こういうときベクトルは有難いぞ．

すなわち

$$\overrightarrow{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{f'(t)} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\boldsymbol{e}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{m}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{m}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \{f(t)\}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(t) \end{pmatrix}$$



だが、これは $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の**逆向きだ**——**ここは注意！**

次に、$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の長さは Q_0 から Q までの弧の長さだから

$$L = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$

これら $(*)$ に代入して

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + L(-\overrightarrow{e}) \\ &= \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} - L \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\{f(t)\}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

を成分計算すればよい.

3.2.2　等角うずまき線

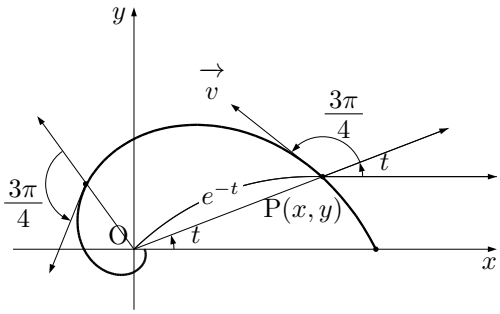
たとえば，**極方程式 $\boldsymbol{r = e^{-t}}$** で与えられる曲線は実数 t の増加にしたがって原点からの距離 r が減少し，キレイな**渦巻き状の軌跡**を描くことが知られている．

さらにこれを xy 平面上でパラメーター表示すると，この曲線に関するもう少し詳しい情報を得ることができる．

すなわち

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = e^{-t}\cos t} \\ \boldsymbol{y = e^{-t}\sin t} \end{cases}$$

$$\left(\longrightarrow \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right)$$



だから，点 P の変数 t に対する**速度ベクトル** $\vec{v}$ の成分は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{dx}{dt}} &= (-e^{-t})\cos t + e^{-t}(-\sin t) \\
&= \sqrt{2}\ e^{-t}\left\{\cos t \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sin t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \\
&= \sqrt{2}\ e^{-t}\left(\cos t \cdot \cos\frac{3\pi}{4} - \sin t \cdot \cos\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \boldsymbol{\sqrt{2}\ e^{-t}\ \underbrace{\cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{(注 1)}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{dy}{dt}} &= (-e^{-t})\sin t + e^{-t}(\cos t) \\
&= \sqrt{2}\ e^{-t}\left\{\sin t \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \\
&= \sqrt{2}\ e^{-t}\left(\sin t \cdot \cos\frac{3\pi}{4} + \cos t \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \boldsymbol{\sqrt{2}\ e^{-t}\ \underbrace{\sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{(注 1)}}}
\end{aligned}$$

すなわち

$$\vec{v} = \sqrt{2}\ e^{-t}\begin{pmatrix} \cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \ \longleftarrow \ \boldsymbol{t + \frac{3\pi}{4}} \text{ に注目！}$$

である――速度ベクトル $\vec{v}$ は x 軸の正方向と $t + \frac{3\pi}{4}$ の角をなすことがわかる．

ここで、**$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を ϕ** とすると

$$\boldsymbol{\phi} = \left(t + \frac{3\pi}{4}\right) - t = \boldsymbol{\frac{3\pi}{4}} \text{（常に一定！）}$$

となる――このことから上記の曲線は**等角渦巻き線**と呼ばれている．

(注 **1**) 上記の結果はなかなか興味深いが成分を調整する計算が慣れないと難しい．
その変形のポイントは

(i) 第 1 成分は $\mathbf{cos(\ \ )}$, 第 2 成分は $\mathbf{sin(\ \ )}$ となることを目指す．

(ii) 上記のカッコ内が同じになるように工夫する——上の例では $\left(\boldsymbol{t}+\dfrac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}}\right)$ になっている．

ことにある．

(注 **2**) 上記の例では $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ と $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ との成す角が $\dfrac{3\pi}{4}$ で $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいが，これが小さいときは渦巻きが左回転につれて大きく広がり，ちょうど $\dfrac{\pi}{2}$ のときには円を描く——これは容易に想像できるだろう．いろいろ数値を変えてやってみるとよい．

3.2.3　レムニスケート (連珠形)

筆者は昔

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

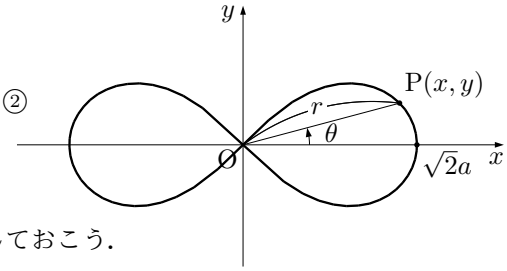
のグラフを描けという問題を見てビックリしたことがある——これは教わらなければわからないだろう．

それもそのはず，これは直交座標では手に負えない曲線なのだ．

そこで $\mathrm{P}(x,y)$ を

$$\boldsymbol{x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta}\quad\cdots\cdots\text{②}$$

とおいて**極方程式**で表してみる．



そして，① に ② を代入するのだがこのとき，$x^2+y^2=r^2$ であることに注意しておこう．

$$(r^2)^2=2a^2\{(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2\}$$

$$\therefore\quad r^2\{r^2-2a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\}=0\qquad\therefore\quad r^2=0,\ r^2=2a^2\cos2\theta$$

第 2 式で $\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}$ とおくと $r^2=0$ となり，第 1 式を表すことができるから，極方程式としては次のようにまとめればよい．すなわち

$$\boldsymbol{r^2=2a^2\cos2\theta}$$

ただし，$\cos2\theta\geqq0$ から $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\leqq\theta\leqq2\pi$

とずいぶんカンタンな表現になった——これはありがたい．

この愛嬌のあるメガネ形の曲線を**レムニスケート (連珠形)** という．

<メモ>

■ **レムニスケートはどこから来たか**

筆者も若いときにはこの曲線がどんな根拠に基づいているのかわからなかったが，何かのときに偶然それを知ることになった．

そのときチョッとばかりうれしかったのでその感動を君に伝えたい．他のアプローチの方法もあとで知ることになったがとりあえず最初の感動をここに披露するので一緒に感動してもらいたい．

そのハナシは**直角双曲線**

$$\boldsymbol{x^2-y^2=2a^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

から入る．

結論から先に言うと直角双曲線 $(*)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ において接線を引き，それに原点から垂線 OH を下ろす．点 P が $(*)$ 上を動くときの点 H の軌跡が**レムニスケート**になるのだ．

以下，それを確認する．

まず，$\mathrm{P}(x_1,y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x-y_1y=2a^2\ \ (\text{ ただし，}x_1^2-y_1^2=2a^2\ )\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

は問題ナシとする．

(∗∗) の法線ベクトル $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$

H は (∗∗) 上の点だから代入すると

$$x_1(tx_1) - y_1(-ty_1) = 2a^2$$

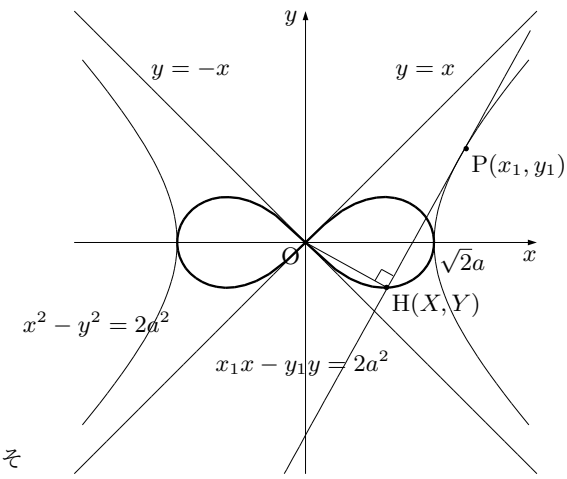
$$\therefore \quad t = \frac{2a^2}{x_1^2 + y_1^2}$$

これを代入して求める H の座標 (X, Y) は

$$\boldsymbol{X = \frac{2a^2x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad Y = \frac{-2a^2y_1}{x_1^2 + y_1^2}}$$

であることがわかる．

ここで X と Y の関係式を求めるのだが，それには先に $X^2 + Y^2$ を計算しておくとよい．



$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{2a^2x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\frac{-2a^2y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 = \frac{4a^4}{x_1^2 + y_1^2}$$

そこで

$$\begin{aligned} X^2 - Y^2 &= \left(\frac{2a^2x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 - \left(\frac{-2a^2y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 \\ &= 4a^4\frac{x_1^2 - y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} \quad \longleftarrow \quad x_1^2 - y_1^2 = 2a^2 \text{を代入！} \\ &= \frac{8a^6}{(x_1^2 + y_1^2)^2} \\ &= \frac{1}{2a^2}(X^2 + Y^2)^2 \end{aligned}$$

すなわち $\mathrm{H}(X, Y)$ の描く軌跡の方程式は

$$(X^2 + Y^2)^2 = 2a^2(X^2 - Y^2) \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)}$$

これは本文 ① に示した方程式に他ならない———多少難しいと思うかも知れないが**ワケ**がわかってしまえばもう**怖くない**．

(注) これで**数 III の微積分**で扱う曲線のほとんど**出揃った**と思ってよい．

とはいえ，学ぶ者の心情としては ”まだ他にもワケのわからない難しいグラフがあるだろう ” という**不安**に駆られるかもしれない．

しかし，高校生に**わかり易く，内容もソコソコ**で，まあ**おもしろい**という素材がそうたくさんあるものではない．そんなことを心配するより，まずはここに述べた曲線のムネを借りて**パラメーター表示，極座標表示**など，そのワケと扱い方を徹底的に研究するほうがよい———たいていのことは**コナセル**ようになる．