0.1　複素数とは何か

　複素数とは a, b を実数として

$$\boldsymbol{z = a + bi} \quad \longleftarrow \quad \text{ただし、}\boldsymbol{i = \sqrt{-1}} \text{ を 虚数単位(後述) とする！}$$

と表される数全体の総称である．

　特に $b = 0$ のときは $z = a$(実数) であるから、実数の集合 R は複素数の集合 Z の部分集合、すなわち $R \subsetneqq Z$ である

　また、$a = 0$ (ただし $b \neq 0$) のとき、$z = bi$ は**純虚数**であるという．以下、虚数の説明から始めるが、特に **虚数単位**の**意味**と**役割**に注目 して読み進めてもらいたい．

(注) 「純実数」とは言わない．

　たとえば、複素数の標準的なカタチをした複素数 $3 + 2i$ などはトウゼン**虚数の複素数**である．これに対して $5i$, $\sqrt{3}i$, $\cdots\cdots$ などのように、実数 a にあたる部分のない「キッスイの虚数」であるカタチをした複素数を、先の標準的なカタチをしている虚数と区別して、特に**純虚数**と言っている．しかし、$\sqrt{3}$, 2, 5, $\cdots\cdots$ などのように虚数 bi にあたる部分のない実数である複素数は「キッスイの実数」だが 純実数とは言わない．

end.

<補足説明> 数の構成

　そもそも「**虚数**」という数がどういう数なのか．そのハナシに入る前に、「**数の拡張**」で人々が獲得した数の分類について知っておく方が都合がよい．

　以下にその構成を図で示しておく．

- **複素数**
  - 実数
    - 有理数
      - **整数**
        - **正の整数（自然数）**
        - **0**
        - **負の整数**
      - 整数でない有理数 (分数)
        - 有限小数
        - 循環小数 ｝無限小数
    - 無理数 …………………… 循環しない無限小数 ｝無限小数
  - 虚数

　自然数に始まり、**整数**、**有理数**、**無理数**、**実数**、**虚数**、**複素数**と「 数の範囲 」を拡張してきたが、その拡張は**複素数**でオシマイ である．

なお、実数は、$\mathbf{(実数)^2} \geqq \mathbf{0}$ であるから、「**虚数**」とは $x^2 < 0$ となるような x のことである．

end.

0.1.1 複素数を記述するための準備

0.1.1.1 まず、虚数とは何か

この「**虚数**」(英語では *imaginary number*) などという言葉がよくないのかも知れないが、とにかくこの概念はノッケからわかりにくい.

しかし、**ライプニッツ** (1646〜1822) だって**オイラー** (1707〜1783) だってわからなかった、というより それを扱う**約束事**がまだ確立していなかった、という方が正確なのだろうが、そういうことだから初学者にとって敷居が高いのはあたりまえである.

特にその入口では、そういう数が「**存在する**」のか「**しない**」のか ということで混乱するのだが、これは、たとえば 2 次方程式の例でいうと

$$x^2 + 3 = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x^2 = -3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のような場合はどうすればよいのか. その昔、人々は戸惑ったにちがいない. あるいは、長い間タブーにされていたかも知れない.

それは、これを満たす x の値が**実数の範囲**にはない という事実に振り回されるのだが、この問題を解決するには **新しい約束事**をとり決めてかかる ことが必要になる.

私たちが無理数 $\sqrt{3}$ を獲得したときはどうであったか. たとえば「2 乗して 4 になる数」は 2 つあってそれが「± 2」であることは説明しなくてもよかろう.

その「 $+2$ 」という数を表すのに**平方根号**を導入して

$$2 = \sqrt{4} \quad \longleftarrow \quad \text{平方根号 } \sqrt{\cdots\cdots} \text{ は 正, または ゼロ なのだ！}$$

と決めたではないか. この**約束事**にしたがって

$$x^2 = 3 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{3}$$

としたではないか.

つまり、$\boldsymbol{\sqrt{3}}$ は、新規に**無理数**という数をを定義して **数の概念**の範囲を無理数にまで拡張することで数として「**存在する**」ことになった ではないか.

そこでハナシをもどして ① だが、これをそのまま

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{-3}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

としても、ここまではナットクしてもらえるだろう——どうやら、虚数の存在へのアプローチは無理数の存在の確認とほぼ同様の方法論でアクセスできそうだ.

(注) 負の数の平方根 $\boldsymbol{\sqrt{-3}}$ などについての考察

上記 ② の $\pm\sqrt{-3}$ のうち、たとえば $\sqrt{-3}$ を考察する場合、**虚数単位** $\boldsymbol{i}$ を知っていれば

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3}\, i \quad \longleftarrow \quad \text{後述！}$$

と変形し、$\boldsymbol{\sqrt{3}\,i}$ のカタチのものを**純虚数**というのだが、ここでは $\sqrt{-3}$ のカタチのものも併せて純虚数と呼ぶことにする.

そうすると $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-7}$ などもトウゼン純虚数で、「**虚数単位** $\boldsymbol{i}$ という**概念**の導入」の有難さ、便利さを次の項の解説で納得してもらうことになる.

end.

0.1.1.2　虚数単位 i の導入

しかし、$\boldsymbol{\sqrt{-3}}$ とか $\boldsymbol{\sqrt{-5}}$ のように平方根号の中の数値がちがってくると、それぞれの数値の間に一貫したモノサシがないので同じマナイタで議論ができない———早いハナシがヤッカイである．そこで、次のような**約束事**をとりきめる．

すなわち、$\boldsymbol{\sqrt{-3}}$ の場合でいうと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sqrt{-3}} &= \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{3}}}_{\text{実数}} \times \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{-1}}}_{\text{虚数}} \longleftarrow \textbf{実数の部分と虚数の部分を切り離す！} \\ &= \sqrt{3}\,i \longleftarrow \boldsymbol{\sqrt{-1} = i}\ \text{とおいてこれを}\ \textbf{虚数単位}\ \text{という！}\end{aligned}$$

のように変形するのである．このとき、虚数の部分はどの場合も同じになるように $\boldsymbol{\sqrt{-1}}$ としておく———ウマイことを考えたものだ．この約束事が妥当であることは

$$(\sqrt{3}\,i)^2 = (\sqrt{3})^2 \times i^2 = 3 \times (-1) = -3$$

からも容易に確認できるだろう．そして、単にモノサシの目盛りを決めるだけなら、虚数単位としては $\sqrt{-3}$ でも $\sqrt{-5}$ でもいいようなものだが、これを $\boldsymbol{\sqrt{-1}}$ とキメタことは**卓見**である———以下に説明する．

さて、このことは何を意味するか———それは ② で $\boldsymbol{\sqrt{-3}}$ から**実数部分** $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ を”**分離した**”ということに他ならない．

改めて、この**虚数単位**という言葉はどこから来たか．そして何を意味するか———次の 2 つを見比べてもらいたい．

$$\sqrt{3}i = \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{実数部分}} \times \boldsymbol{i} \longleftarrow \boldsymbol{i}\ \text{は}\ \textbf{虚数の 1 単位}\text{、}\sqrt{3}\text{で}\ \textbf{虚数の規模}\ \text{を表している！}$$

$$\sqrt{3} = \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{実数部分}} \times \boldsymbol{1} \longleftarrow \boldsymbol{1}\ \text{は}\ \textbf{実数の 1 単位}\text{、}\sqrt{3}\text{で}\ \textbf{実数の規模}\ \text{を表している！}$$

と読めないか———つまり、実数の 1 単位「$\boldsymbol{1}$」にあたる役割を、虚数では「$\boldsymbol{i}$」が引き受けている．その意味で「$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$」を**虚数単位**と呼ぶわけである．

念のために、一般の形で整理しておこう．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sqrt{a}} &= \boldsymbol{\sqrt{|a|}\,i} \longleftarrow a \geqq 0\ \text{のときは問題ないから}\ \boldsymbol{a < 0}\ \text{としておく！} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{-a}\,i} \longleftarrow \textbf{実数の部分を分離}\ \text{した！}\end{aligned}$$

とキメル———何よりも先に**実数部分を分離する**ことが**基本** である．そうすると

$$\begin{aligned}(\sqrt{a})^2 &= (\sqrt{|a|}\ i)^2 \\ &= |a| \times i^2 \longleftarrow a < 0\ \text{だから}\ |a| = -a \\ &= (-a) \times (-1) = a\end{aligned}$$

となってツジツマが合う．これを、根号の中の 2 乗を先行させて、ウッカリ $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$ とやってはならない———上の $\sqrt{-3}$ の例でやって見せよう．つまり

$$\begin{aligned}(\sqrt{-3})^2 &= \sqrt{-3} \times \sqrt{-3} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{(-3) \times (-3)}} \longleftarrow \textbf{ここがマチガッテイル！} \\ &= \sqrt{9} = 3 \longleftarrow \text{この値は} -3\ \text{になるはず！}\end{aligned}$$

となってしまう———これで **虚数単位**のもつ**意味と役割** がわかってもらえたと思う．

こういうことは、筆者も若いときはわかりにくかったので、次に紙面をシッカリ割いて一般の場合までキッチリ詳しく説明しておく．

0.1.1.3　純虚数を含む「カケザン」、「ワリザン」と虚数単位

$\sqrt{-3}$ のような、まだ $\boldsymbol{bi\ (b \fallingdotseq 0)}$ 形に整備されていない虚数 を扱う場合は、混乱する恐れがあるので特に念入りに注意しておきたい.

たとえば、**カケザン**の例でいうと

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\times\sqrt{-8} &= \boldsymbol{\sqrt{2}\,i\times\sqrt{8}\,i} \quad \longleftarrow \text{ そてぞれ 実数部分 } \boldsymbol{\sqrt{2}\,,\sqrt{8}} \text{ を分離 した！}\\ &= \sqrt{2\times 8}\,i^2 \quad \longleftarrow \ 2 \text{ つの } i \text{ が } \boldsymbol{i^2=-1} \text{ とおける！}\\ &= \sqrt{16}\times(-1) = -4\end{aligned}$$

これは**正しい**．これを

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\times\sqrt{-8} &= \sqrt{\boldsymbol{(-2)\times(-8)}} \quad \longleftarrow \ \textbf{ここがマチガイ！}\\ &= \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$

とやってはならないのだ．もう 1 つ**ワリザン**の例を挙げておく.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,i} \quad \longleftarrow \ \textbf{分母の虚数 } \boldsymbol{\sqrt{-2}} \textbf{ から実数部分 } \boldsymbol{\sqrt{2}} \textbf{ を分離！}\\ &= \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}\,i^2} \quad \longleftarrow \ \text{分母子に } i \text{ をかけて } \textbf{分母を実数化！}\\ &= \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}\times(-1)} \quad \longleftarrow \ \boldsymbol{i^2=-1} \text{ を入れた！}\\ &= -\frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}\,i}{2} \quad \longleftarrow \ \textbf{分母を有理化} \text{ してカタチを整えた！}\end{aligned}$$

で、これは**正しい**．これを

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}} &= \sqrt{-\frac{3}{2}} \quad \longleftarrow \ \textbf{ここがマチガイ！}\\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,i = \frac{\sqrt{6}}{2}\,i\end{aligned}$$

とやってはならないのだ．以上、$\boldsymbol{a,\ b}$ **の符号** でまとめると

$$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}\ \ (a \geqq 0,\ b \geqq 0),} \qquad \boldsymbol{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}\ \ (a > 0,\ b \geqq 0)}$$

で、これをすべての場合に拡張したいが**そうは行かない**――次のようになる.

$$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}} = \begin{cases} \boldsymbol{-\sqrt{a}\sqrt{b}\ \ (a<0,\ \ b<0 \text{ のとき})} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)\\ \boldsymbol{\sqrt{ab}} \quad \textbf{(その他のとき)}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}} = \begin{cases} \boldsymbol{-\sqrt{\frac{b}{a}}\ \ (a<0,\ \ b>0 \text{ のとき})} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)\\ \boldsymbol{\sqrt{\frac{b}{a}}} \quad \textbf{(その他のとき)}\end{cases}$$

だから、特に $(*)$, $(**)$ のときに**マチガイ**が起こりやすい ことがわかるが、いずれにしても、**基本の約束事**をはじめにキチンと理解しておくことが大切である.

いずれにいても、**虚数単位** $\boldsymbol{i}$ の考え方を導入して、すべての**純虚数**から実数部分を分離して「 **(実数)** $\boldsymbol{i}$ 」という形に表すことにより、同じマナイタの上で料理することができるようになった．このことは驚嘆に値する発明であろう――大いに感動しなさい.

0.1.2　複素数とは何か

0.1.2.1　複素数は「実数の部分」と「虚数の部分」との複合体

ここまで「**虚数**」、「**虚数単位**」について説明したのは、一般の**複素数の概念**を導入するための準備であったと思ってもらいたい．そしてハナシは一般の2次方程式の解法の経緯から入ることにする．たとえば、2次方程式

$$x^2 - 4x + 7 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

をどう解くか．まずは左辺で x について平方完成を実行するだろう．
つまり

$$(x-2)^2 + 3 = 0 \qquad \therefore \quad (x-2)^2 = -3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$x - 2 = X$ とおくと

$$X^2 = -3 \qquad \therefore \quad X = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,i \ \longleftarrow \quad i \text{ は虚数単位！}$$

ここまでの説明で問題ナシとすれば

$$\boldsymbol{x - 2 = \pm\sqrt{3}\,i} \qquad \therefore \quad x = 2 \pm \sqrt{3}\,i \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

としてやってきた．実際これで正解なのだが、もう少し詳細に眺めておこう

たとえば上記の $2+\sqrt{3}\,i$ で説明すると、これは「+」という記号の意味では **実数 2** と **虚数 $\boldsymbol{\sqrt{3}\,i}$** を**「タス」**ということだが、そもそも「 +, −, ×, ÷ 」という演算は実数と実数との間に定義された演算を表す記号である．それを実数と虚数、あるいは虚数と虚数の間にそのまま用いてよいか、という問題が残る．

つまり「赤色の水 (実数 2)」と「青色の水 ($\sqrt{3}\,i$)」をタシたら「紫色の水」になった、というようなハナシではない——— $2+\sqrt{3}\,i$ という表記では「赤色の水 (実数 2)」と「青色の水 ($\sqrt{3}\,i$)」が溶け合うことなく別々の存在として**併記されている**．

つまり、互いに排反である集合の要素の間を「＋」の記号 でつないでいるわけだが、これは実数同士の場合のような「タシザン」としての意味ではない．

改めて上記 ①② を眺めてみよう．ここで用いられている x は、結果的には $2\pm\sqrt{3}\,i$ という、今のところワケのわからない数値である．

そこで ③ だが、ここで「$x-2\ (=X\,)$」の意味は、トウゼン実数同士の間の場合のような「ヒキザン」ではない．それは「ワケのわからない数値 x から実数部分の 2 を除く」というほどの意味でしかない．それを**巧妙にも**実数のヒキザンの計算規則の記号の「−」を**そのまま適用**した**先人の知恵**に驚嘆するのは私だけか．

ともあれ、同じマナイタで議論のできない2つの数、実数 2 と虚数 $\sqrt{3}i$ を**混成**して $2+\sqrt{3}i$ という1つの数を構成した**人々の知恵**に心から敬意と感謝を贈りたい．

ともあれ、こうして人々は

$$\boldsymbol{z = a + bi} \ \ (\boldsymbol{a, b,} \text{ は実数}) \ \longleftarrow \ \boldsymbol{i = \sqrt{-1}} \ \ (\text{虚数単位！}) \cdots\cdots (*)$$

のカタチをした新しい**数の表現**を編み出した———これが**複素数**である．

(注) 複素数の「虚数部分」は実数なのだ———ダマされるな！

以下、改めてこの $\boldsymbol{z = a + bi}$ $(\boldsymbol{a, b,}$ は実数$)$ のカタチの複素数を扱う上で、注意すべきこと、混乱しそうなところをまとめておく.

すなわち、文字通り $\boldsymbol{a}$ が z の実数の部分、$b \neq 0$ のとき $\boldsymbol{bi}$ が z の虚数の部分だが、$\boldsymbol{a}$ はもちろんだが、$\boldsymbol{b}$ も実数である.

ところが、不思議なことに、昔から $(*)$ の $\boldsymbol{a}$ を実数部分 (実部)、$\boldsymbol{b}$ を虚数部分 (虚部) と呼んでいる．本稿も、それに倣ってそう呼ぶことにするが、虚数部分と呼ばれる $\boldsymbol{b}$ の値は実数なのである———ここは誤解されやすいので特に念入りに注意しておく.

ちなみに、$b \neq 0$ の場合、たとえば上記の $z = 2 + \sqrt{3}\,i$ などの場合、z には純虚数 $\sqrt{3}\,i$ が存在している．したがって実数ではない．よって虚数である———念のため！

さて、こうしておけば $\boldsymbol{b = 0}$ を与えればすべての実数を表すことができるし、$\boldsymbol{b \neq 0}$ とすればすべての虚数を表すことができる. しかも、それらは排反であるから、これで考え得るすべての数を表し尽くしている.

ついに人々は数の体系を完成させたのである．ここで、あえて「完成」という言葉を用いたのは、自然数に始まり、有理数、無理数と進んできた数の拡張のハナシが、ここまでを実数として包括し、さらに実数と虚数を合わせた複素数という数で数の全体を把握した.

したがって 数の拡張のハナシはこれでオシマイ ということで、このことはある種の感動をもって記憶しておきたいことがらでもある.

end.

0.1.2.2　複素数は「順序対」である

前掲の例でいうと、複素数「$\boldsymbol{z = 2 + \sqrt{3}\, i}$」というとき、2 はトウゼン**実数**で、$\sqrt{3}\,i$ は**純虚数**である．

そして z の「**実数部分は 2**」、「**虚数部分は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$**」で、これらは共に実数である．つまり、複素数「$z = 2 + \sqrt{3}i$」を与えるとき、1 組の**実数の順序対** (**順序つきのペア**) $\boldsymbol{(2,\ \sqrt{3})}$ が確定し、その実数の順序対に対してただ 1 つの複素数 z が対応する．

ちなみに、ベクトルも順序対である．したがって、ベクトル的諸問題もそのある部分は複素数の性質を使って簡単に処理できるにちがいない．そして、複素数としての順序対にはそれ特有の性質もあるだろう．

しかし、そういうことを明らかにするにはどうしても越えなければならない**ヤマ**がある．それは、すべての複素数の間の**四則演算**に対して**「順序対としての計算」**が追随しているか、もしそうだとしてもどこが**「ベクトルと同じ」**で、どこが**「複素数特有」**のものか の確認をしておかなければなければならない．

それには、**複素数の計算規則**を十分にマスターしている必要がある．そこで、まずその計算規則を先に解説し、そのあとで上記の確認という手順でハナシを進めます．

(注)「**複素数**」と「**ベクトル**」について

チョッと雑駁な説明になるが、ベクトルとは次の条件を満たす集合 V の要素のことである．ただし、R は実数の集合である．すなわち

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{a}},\, \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{V} \text{ ならば } \overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{V} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R} \text{ ならば } \boldsymbol{k}\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{V} \end{cases} \quad \longleftarrow \text{ベクトルの基本的性質！}$$

これを 2 元の **順序対** で表すと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \quad k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$$

が成り立つということであり、実際の運用では

$$k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka+lc \\ kb+ld \end{pmatrix}$$

のように使われることは、改めて説明するまでもあるまい．そして、複素数 $a+bi$ を実数の順序対 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と置き換えればこれらの条件を満たすことは明らかである．ここまでのハナシではベクトルとして扱うことは可能に見える———実際はそう扱うのだ．しかし、だからといって「複素数はベクトルである」とは言いがたい．それは、「複素数のすべての性質をベクトル表示できる」とはいえないし、「ベクトルのすべての性質を複素数で表現できる」ともいえないからである．

大体、複素数の場合は「**2 元に限る**」という限界がある から、ベクトルの一般論の中に取り込むわけには行かない———もともとチガウもの だから仕方がない．

複素数の計算にはベクトル特有の**和** (**差**)、**実数倍**の他に**積**、**商**という計算があり、それらに対して順序対はどう対応するのかを検証しておく必要もある．そこが複素数を扱う上でなんとも悩ましいところである———初学者は必ず混乱する．

本文の解説が「煮え切らない」のはそういうことを示唆しているわけで、筆者としては、初学者は、まず基本的には「2 次元ベクトル」としての性質をシッカリととらえ、その上で**積**、**商**という計算に対応した順序対として飛躍的な展開がある、と理解するのがよいかと思う．

end.

0.2　複素数の計算規則

結論を先に書こう．複素数の計算は次の要領でやればよい．具体的には

(i) まず、虚数で与えられたものを、$\boldsymbol{a+bi}$ のカタチに統一する．
(ii) $\boldsymbol{i}$ を 1 つの文字と見てドンドン**文字式の計算**を実行 する．
(iii) $\boldsymbol{i^2}$ が現れたらこれを $\boldsymbol{-1}$ に置き換える
(iv) 最終的に キレイなカタチ に整理する．

だけでよい．作業としてはカンタンなことだが、しかし、これには何はさておき、前掲の**虚数単位**とした $\boldsymbol{i}$ あればこそのハナシ である．

以下、複素数に関する**重要な定理**とそれに起因する**四則演算**をまとめておく．

0.2.1　複素数の計算の骨子

複素数の計算は、**相等** (複素数が等しいということ!) と**四則演算** (要領は上に述べた) に尽きる．

(i) 相等

これは 複素数が「等しい」ということ で、式で書けば $a,\ b,\ c,\ d$ を実数として

$$\boldsymbol{a+bi=c+di \quad\Longleftrightarrow\quad a=c,\ \ b=d}$$

ということで、シンプルで覚えやすいし 覚えて使う分には何の問題もない．

ところがこれはこれで、実は手ごわい．それにこれを使う場面も多々あるから、あとで相応の紙面を改めて詳しく解説する——-読めば**コトの重大さ**がわかる．

(ii) 四則計算

これは文字通り、**加**、**減**、**乗**、**除**の計算のことである．$a,\ b,\ c,\ d$ を実数として実際の計算でその方法を示す．

加法： $\boldsymbol{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i}$ $\longleftarrow$ i について整理！

減法： $\boldsymbol{(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i}$ $\longleftarrow$ i について整理！

乗法： チョッとカンジがちがう．

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+(ad+bc)\ i+bd\ \boldsymbol{i^2} \quad\longleftarrow\quad \boldsymbol{i^2=-1}\ \text{と置き換える！}\\&=(ac-bd)+(ad+bc)\ i\end{aligned}$$

除法： こうなると**工夫**が必要だ．

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+b\ i)\boldsymbol{(c-d\ i)}}{(c+d\ i)\boldsymbol{(c-d\ i)}} \quad\longleftarrow\quad \text{分母子に}\ (c-di)\ \text{をかけて}\ \textbf{分母を実数化！}\\&=\frac{ac+(-ad+bc)i-bd\ i^2}{c^2-d^2\ i^2} \quad\longleftarrow\quad \boldsymbol{i^2=-1}\ \text{と置き換える！}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\ i}{c^2+d^2}\\&=\underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{\text{実数}}+\underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{\text{実数}}\ i \quad\longleftarrow\quad A+Bi\ (A,\ B\ \text{は実数})\ \text{の形に整理する！}\end{aligned}$$

のように計算する———ただの文字計算だから結果を覚える必要はない．

ただし、**除法の分母の実数化**で、分母の $c+di$ に対して i の1次の項が出ないように分母子に $c-di$ をカケル というようなことは覚えておかなくてはならない.

まあ、ヤッカイと言えばヤッカイだが、それぞれの**複素数**がすでに $\boldsymbol{a+bi,\ c+di}$ のように**整理されている**からこそデキル計算 である.

＜メモ＞

■ **複素数とその計算**

まあ、「習うより慣れよ」という言葉もあるから、まずは丁寧に計算してみることである.

＜例＞

次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}}{4}+(1-\sqrt{-3})^3$　(3) $\dfrac{3+2\,i}{2+3\,i}$

(解) まず、「ナマの虚数」は**実数部分を分離**して、虚数単位を用いた「**(実数)** $\boldsymbol{i}$ 」のカタチに直すことが先決 である——それぞれが $\boldsymbol{a+bi}$ の形になってしまえば問題はなかろう.

(1) シツコク書いてみる.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}&=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,i}+\frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}} &&\longleftarrow\ \sqrt{-2},\ \sqrt{-3}\ \text{から}\ \textbf{実数部分を分離！}\\&=\frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}\,i^2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}} &&\longleftarrow\ \text{第1項の分母子に}\ i\ \text{をかけて}\ \textbf{分母を実数化！}\\&=\frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}\times(-1)}+\frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}} &&\longleftarrow\ \boldsymbol{i^2=-1}\ \text{と置き換えた！}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,i=0\end{aligned}$$

と計算される. もう念を押すまでもないが、このとき第1項目を

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}&=\sqrt{-\frac{3}{2}} &&\longleftarrow\ \textbf{ここがダメ！}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}}\,i\end{aligned}$$

とやってはならない.

(2) これも同様に、先に複素数 $a+bi$ の形に整理してから文字計算に入る.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}}{4}+(1-\sqrt{-3})^3&=\frac{\sqrt{8}\,i\times\sqrt{6}\,i}{4}+(1-\sqrt{3}\,i)^3 &&\longleftarrow\ \textbf{実数部分を分離！}\\&=\frac{\sqrt{48}\,i^2}{4}+\{1-3(\sqrt{3}\,i)+3(\sqrt{3}\,i)^2-(\sqrt{3}\,i)^3\}\\&=\frac{4\sqrt{3}(-1)}{4}+1-3\sqrt{3}\,i+3\cdot3\,i^2-3\sqrt{3}\,i\cdot i^2 &&\longleftarrow\ \boldsymbol{i^2=-1}\\&=-\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}\,i+9\cdot(-1)-3\sqrt{3}\,i\cdot(-1) &&\longleftarrow\ \text{さらに}\ \boldsymbol{i^2=-1}\\&=-\sqrt{3}-8-\cancel{3\sqrt{3}}\,i+\cancel{3\sqrt{3}}\,i &&\longleftarrow\ \text{整理！}\\&=-\sqrt{3}-8\end{aligned}$$

(3) 分母子に $(2-3\,i)$ をかけて**分母を実数化**する.

$$\begin{aligned}
\frac{3+2\,i}{2+3\,i} &= \frac{(3+2\,i)(2-3\,i)}{(2+3\,i)(2-3\,i)} \quad \longleftarrow \ \text{分母子に } (2-3i) \text{ をカケル！} \\
&= \frac{6-5\,i-6\,i^2}{4-9\,i^2} \quad \longleftarrow \ \boldsymbol{i^2=-1} \text{ と置き換える！} \\
&= \frac{6-5\,i-6\cdot(-1)}{4-9\cdot(-1)} \ = \frac{12-5\,i}{13}
\end{aligned}$$

となる——-**計算の基本**はこんなところでよかろう.

一件落着！

0.2.2 複素数の「相等」についての詳説

「複素数の相等」を保証する定理

> $\boldsymbol{a,\ b,\ c,\ d}$ を実数、$\boldsymbol{i}$ を虚数単位とするとき
>
> (1) $\boldsymbol{a+bi=0 \iff a=b=0}$
>
> (2) $\underbrace{\boldsymbol{a+bi=c+di}}_{\boldsymbol{A}} \iff \underbrace{\boldsymbol{a=c,\ \ b=d}}_{\boldsymbol{B}}$
>
> である.

(解説) この (2) は「**2** つの複素数が等しい」ということが「実部同士、虚部同士がともに等しい」ことと同値であることを意味している.

それは複素数 $a+bi$ という表現の一意性の保証でもある .

(1) (⟵) は説明するまでもなく明らかだから、(⟶) について証明しておこう.

それには背理法を用いる——いま、$b \fallingdotseq 0$ とすると

$$a+bi=0 \quad \therefore \ \ bi=-a \quad \therefore \ \ i=-\frac{a}{b} \ (\text{実数！})$$

だから i が実数ということになり不合理である．ゆえに

$$\boldsymbol{b=0} \quad \therefore \ \ \boldsymbol{a=0} \longleftarrow \text{示された！}$$

(2) これは (1) を用いて証明する．すなわち

$$a+bi=c+di \quad \therefore \ \ (\underbrace{a-c}_{0})+(\underbrace{b-d}_{0})i=0 \quad \therefore \ \ \boldsymbol{a=c,\ b=d}$$

となり、複素数 $\boldsymbol{a+bi}$ の表現の一意性が確認される.

end.

(注) $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ であるための十分条件でしかない.

ここで、チョッと注意しておきたいが、どうしてこんなヤッカイな手続きをしなければならないか．きっと「あたりまえジャン」と思う人もいるだろう——しかし、そうは行かない.

上の枠中の (2) をよく見てもらいたい.「B ならば A」は明らかに成り立つ．しかし「A ならば B」についてはわからない．つまり $a,\ b,\ c,\ d$ の $a=c,\ b=d$ 以外の数値の組合せで A の等号がなりたつ場合があるかも知れない．つまり

B は A であるための **十分条件** だが必要条件でない．あるいは、
A は B であるための **必要条件** だが十分条件でない.

ということなのだ．これは命題 $A,\ B$ の間に矢印を引いて論理の流れ (必要と十分の関係) を確認のしておくとよい．本文ではハナシを簡略にするために (1) を用いて証明したが、いきなり (2) の証明にかかってもよい．その場合は、A の両辺を i に注目して移項すると

$$(b-d)i=-(a-c)$$

ここで $b \fallingdotseq d$ とすると $b-d \fallingdotseq 0$ だから

$$\boldsymbol{i}=\underbrace{-\frac{\boldsymbol{a-c}}{\boldsymbol{b-d}}}_{\text{実数}} \longleftarrow \text{不合理！} \quad \therefore \ \ \boldsymbol{b=d} \quad \therefore \ \ \boldsymbol{a=c}$$

で、基本的には (1) の議論と同じことである.

end.

＜メモ＞

■「$\boldsymbol{a+bi=0 \iff a=b=0}$」の応用

さて、この定理を本文では複素数 $a+bi$ の表現の一意性を保証するものとして紹介した．実際、それはそうなのだが、私のカンジとしては複素数という限りなく広い集合から、実数という私たちに身近な集合を切り取る基本原理を与えてくれているような気がしてならない．

以下、これを「複素数から実数を切り取る原理」と呼ぶことにする．しかし、これも私の個人的な造語だから世間であまり振り回さないでもらいたい．

ともあれ、この原理によって実数というヒビキがなぜか愛おしく感じるのは私だけだろうか．改めて

$$\boldsymbol{a+bi=0\ (a,\ b\ \text{は実数}) \iff a=b=0}$$

である．以下、それを体感してもらうワケだが、これはいろいろなカタチで入試問題に作られている．そういう意味でも複素数を扱う上で避けて通れない基本原理である．

＜例 1＞

(1) 次の等式を満たす実数 $x,\ y$ を求めよ．

$$(2+3i)x+(1-5i)y=13$$

(2) 次の方程式が実数解をもつとき、実数 k の値を定めそのときの実数解を求めよ．

$$(1+i)x^2-(k+i)x+2-6i=0$$

（解） (1) この定理の典型的な扱いの例である．

まず、i について整理すると

$$\underbrace{(2x+y-13)}_{a}+\underbrace{(3x-5y)}_{b}i=0 \qquad \therefore\ \ 2x+y-13=0,\ \text{かつ}\ 3x-5y=0$$

これは、実数 $x,\ y$ についての連立方程式である．すなわち

$$\begin{cases} 2x+y=13 \\ 3x-5y=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \quad \longleftarrow \ \text{連立方程式を解いた！}$$

(2) 与えられた 2 次方程式は係数が複素数だから、苦しまぎれにでも解の公式を使うわけには行かない——次のようにやるのだ．

与えられた 2 次方程式の実数解を $\boldsymbol{\alpha}$ とおくと、これは解だから方程式を満たす．すなわち

$$(1+i)\alpha^2-(k+i)\alpha+2-6i=0 \quad \longleftarrow \ i\ \text{について整理！}$$

$$\therefore\quad \underbrace{(\alpha^2-k\alpha+2)}_{A}+\underbrace{(\alpha^2-\alpha-6)}_{B}i=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで $A,\ B$ は実数だから $A=B=0$、すなわち

$$\begin{cases} \alpha^2-k\alpha+2=0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \alpha^2-\alpha-6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

ここで ①, ② は k とα の連立方程式だがこの場合は、まず ② が α だけの 2 次方程式だから、先に α を求めて ① に代入して k を求めればよい．

$$②:\quad \alpha^2-\alpha-6=(\alpha+2)(\alpha-3)=0 \qquad \therefore\ \ \alpha=-2,\ \ 3$$

となり、それぞれに対して ①から k の値が定まる．

$$\alpha=-2 \quad \longrightarrow \quad (-2)^2-k(-2)+2=0 \quad \therefore\ \ k=-3$$

$$\alpha=3 \quad \longrightarrow \quad 3^2-3k+2=0 \quad \therefore\ \ k=\frac{11}{3}$$

これらの k の値に対して、$(*)$ にもどって解の関係を調べると

$k=-3$ のとき $(*)$ は

$$(\underbrace{\alpha^2+3\alpha+2}_{A=(\alpha+1)(\alpha+2)})+(\underbrace{\alpha^2-\alpha-6}_{B=(\alpha+2)(\alpha-3)})i=0 \quad \longleftarrow \boldsymbol{\alpha=-2} \text{ が } A=0,\ B=0 \text{ の共通解！}$$

$k=\dfrac{11}{3}$ のとき $(*)$ は

$$(\underbrace{\alpha^2-\frac{11}{3}\alpha+2}_{A=\frac{1}{3}(3\alpha-2)(\alpha-3)})+(\underbrace{\alpha^2-\alpha-6}_{B=(\alpha+2)(\alpha-3)})i=0 \quad \longleftarrow \boldsymbol{\alpha=3} \text{ が } A=0,\ B=0 \text{ の共通解！}$$

になっている———本問は ①② の**共通解**の問題でもある わけだ.

したがって、求める解は

$$\boldsymbol{k=-3 \text{ のとき解は } \alpha=-2,\quad k=\frac{11}{3} \text{ のとき解は } \alpha=3}$$

である.

＜考察＞　複素係数の 2 次方程式では「解の公式」は使えない

これで 複素数を係数とする 2 次方程式の扱い方 としては一応**決着**したことになる．しかし、**実数係数**の 2 次方程式では一般に**解の公式**として

$$\boldsymbol{x^2+bx+c=0\ (a\neq 0) \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

が用意されている．これを本問のように複素数 (虚数) を係数とする場合にも実数係数の場合と同様に使うのはどうか———実は**ダメ**なのだ.

その理由は、一般には解の公式の平方根号の中の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ が **実数**であるという保証がないからである．これが一般の複素数であったとしよう．どういうことが起こるかというと、たとえば

$$\begin{aligned}(2+i)^2&=4+4i+i^2\\&=4+4i+(-1)=3+4i\end{aligned}$$

ところが $2+i$ と符号ちがいの $-2-i$ についても

$$(-2-i)^2=(2+i)^2=3+4i$$

で同じ結果になる．しかし、このとき $3+4i$ の平方根 $\sqrt{3+4i}$ は $2+i$ なのか、$-2-i$ なのか. 実はどちらとこともキメられていない のである．そういう事情から、上記の解の公式の平方根号のついた $\sqrt{b^2-4ac}$ そのものが意味をなさない———平方根号の中に虚数が来ることはない.

だから、安易なキモチで

$$z^2=9i \qquad z=\pm\sqrt{9i}=\pm 3\sqrt{i}$$

などとやってはならない———必ず、 $\boldsymbol{z=x+yi\ (x,\ y}$ **は実数！)** とおいて z に代入する.

$$\begin{aligned}z^2&=(x+yi)^2\\&=\boldsymbol{x^2-y^2+2xyi=9i} \longleftarrow \text{ 複素数から実数を切り取る原理！}\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases}x^2-y^2=0\\2xy=9\end{cases} \longrightarrow x=y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ z=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

としなければならない———メンドウだが約束事だから仕方がない.

一件落着！

複素数から実数を切り取る原理 とあわせて、実数から有理数を切り取る原理 を確認しておこう———考え方は全く同様である.

＜例 **2**＞

有理数を係数とする 4 次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の 1 つの解が $\sqrt{2}+i$ であるという.

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ.

(2) 4 次方程式 $(*)$ を解け.

（解） (1) $(*)$ の左辺を $f(x)$ とおくと

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで、$\alpha=\sqrt{2}+i$ は方程式 $f(x)=0$ を満たすから、この値を $(*)$ に代入するのだが、それには $\alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ を先に計算しておく方がよさそうだ. すなわち

$$\begin{aligned}
\alpha^2&=(\sqrt{2}+i)^2\\
&=2+2\sqrt{2}\,i+i^2=1+2\sqrt{2}\,i \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{i^2=-1} \text{ なのだ！}\\
\alpha^3&=\alpha^2\cdot\alpha\\
&=(1+2\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}+i)\\
&=\sqrt{2}+5\,i+2\sqrt{2}\,i^2=-\sqrt{2}+5\,i \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{i^2=-1}\\
\alpha^4&=(1+2\sqrt{2}\,i)^2\\
&=1+4\sqrt{2}\,i+8i^2=-7+4\sqrt{2}\,i \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{i^2=-1}
\end{aligned}$$

を求めておいて $(*)$ に代入すると

$$f(\alpha)=(-7+4\sqrt{2}\,i)+a(-\sqrt{2}+5\,i)+b(1+2\sqrt{2}\,i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$$

$$(\underbrace{-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d}_{\text{実数 } A\ (=0)})+(\underbrace{4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c}_{\text{実数 } B\ (=0)})i=0$$

ここで $a,\ b,\ c,\ d$ は有理数であるからトウゼン実数で、したがって $A,\ B$ は実数だから $\boldsymbol{A=B=0}$ だが、さらに、$a,\ b,\ c,\ d$ は有理数だから、この中の無理数 $\sqrt{2}$ に注目して整理すると

$$A=(\underbrace{d+b-7}_{\text{有理数}=0})+(\underbrace{c-a}_{\text{有理数}=0})\sqrt{2}=0 \quad \longrightarrow \quad d+b-7=0,\quad c-a=0$$

$$B=(\underbrace{5a+c}_{\text{有理数}=0})+(\underbrace{2b+4}_{\text{有理数}=0})\sqrt{2}=0 \quad \longrightarrow \quad 5a+c=0,\quad 2b+4=0$$

これらを連立方程式として組みなおすと

$$\begin{cases} c-a=0 \\ 5a+c=0 \end{cases} \quad \therefore\quad a=c=0$$

$$\begin{cases} d+b=7 \\ 2b+4=0 \end{cases} \quad \therefore\quad b=-2,\quad d=9$$

となり、 $a,\ b,\ c,\ d$ の値が確定する———求まった！

(2) あとは方程式を解くだけだと思いきや、イジワルはまだ続く.

つまり、与えられた方程式は

$$f(x)=x^4-2x^2+9=0$$

だが、この**因数分解**がヤッカイだ———定数項の $9\ (\ = 3^2\ )$ に注目して、2次の項に $6x^2$ を用意する のだ．次のようにやればよい．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (\boldsymbol{x^4 + 6x^2 + 9}) - 8x^2 \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{6x^2}\text{を補って平方完成！} \\
&= (x^2+3)^2 - (2\sqrt{2}x)^2 \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)} \\
&= (x^2+3+2\sqrt{2}x)(x^2+3-2\sqrt{2}x) \\
&= (x^2+2\sqrt{2}x+3)(x^2-2\sqrt{2}x+3) = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{イケル！} \\
&\therefore \quad x = -\sqrt{2} \pm i, \quad x = \sqrt{2} \pm i
\end{aligned}
$$

で、やっと解決した．

＜考察＞「実数から有理数を切り取る原理」について

ここで、チョッと注意しておくが、(1) の後半は、ここの言い方に倣えば**実数**から**有理数**を切り取る原理 ともいえる．つまり

$$\boldsymbol{a + b\sqrt{2} = 0\ (a,\ b\ \text{は有理数！})\ \Longleftrightarrow\ a = b = 0}$$

を使っている．

その証明も「**複素数**から**実数**を切り取る原理」の場合とほぼ同様だが、ここではそのことを通じて特に **有理数**という数がどういう数であるか を**キッチリ**とわかってもらいたいという意味もある．よもや忘れてはいないだろうが、念のためにやっておこう．

まず**左向き ($\longleftarrow$)** の議論は問題ナシとしよう．問題は**右向き ($\longrightarrow$)** だが、この証明にも**背理法**を使う．つまり $b \neq 0$ と仮定すると

$$b\sqrt{2} = -a \qquad \therefore \quad \sqrt{2} = -\frac{a}{b}\ (\ \longleftarrow\ \ \textbf{有理数！})$$

で、これは**不合理**である．

つまり、**左辺**の $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ は**無理数** (分数で表すことのできない数) であり、**右辺**は**有理数** ($a,\ b$ が有理数だから分数で表すことができて、$-\frac{a}{b}$ も分数で表せる数) だから等しいワケがない．

この問題は その両方の基本原理が**セット**になっているところが**ウマイ！** と思ってもらえばよい．まあ、なかなかよく作ってあるが、あとで考えてみれば**ミエミエ**のハナシではある．

一件落着！

ダメ押しにもう１つ！

＜例 3＞

$\alpha,\ \beta$ を複素数とするとき

$$\boldsymbol{\alpha\cdot\beta=0 \iff \alpha=0,}\ \textbf{または}\ \boldsymbol{\beta=0}$$

を示せ．

（解） これは証明問題、というより**定理**である．

普段、実数の計算に慣れているので「**あたりまえジャン！**」ということだが、ここでは「 **$\boldsymbol{\alpha,\ \beta}$ を複素数とするとき**」とあるから、**それなりの説明**が求められている．

まずは、示すべきことがらを整理するところから始めよう．

$$\boldsymbol{\alpha=a+bi\ (a,\ b}\ \textbf{は実数}\boldsymbol{),\ \ \beta=c+di\ (c,\ d}\ \textbf{は実数}\boldsymbol{)}$$

とおいて

$$\boldsymbol{(\underbrace{a+bi}_{\alpha})\cdot(\underbrace{c+di}_{\beta})=0 \iff a=b=0,}\ \ \textbf{または}\ \boldsymbol{c=d=0}$$

を示せということだろう．

「**左向き ($\boldsymbol{\longleftarrow}$)**」については「**明らか**」だから「**右向き ($\boldsymbol{\longrightarrow}$)**」が問題だ———マジメに計算していくことにする．

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta&=(a+bi)(c+di)\\&=ac+(ad+bc)i+bdi^2 \longleftarrow\ i^2=-1\\&=ac+(ad+bc)i+bd(-1)\\&=(\underbrace{ac-bd}_{A=\text{実数}})+(\underbrace{ad+bc}_{B=\text{実数}})i=0 \longleftarrow\ \boldsymbol{A=B=0}\end{aligned}$$

$a,\ b,\ c,\ d$ が実数であるから $A,\ B$ は実数である．すなわち

$$\boldsymbol{A=ac-bd=0,}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{B=ad+bc=0} \longleftarrow\ \textbf{複素数から実数を切り取る原理！}$$

ここで、示すべきは $a=b=0,\ \ c=d=0$ だが、$a,\ b,\ c,\ d$ が実数であることから

$$\boldsymbol{a=b=0 \iff a^2+b^2=0}$$

$$\boldsymbol{c=d=0 \iff c^2+d^2=0}$$

であるから $a=b=0,$ または $c=d=0$ を示すには

$$(a^2+b^2)\ (c^2+d^2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

を示せばよいことがわかる———やっと「どうすればよいか」が見えてきた．そこで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A^2+B^2}&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \longleftarrow\ \boldsymbol{A=B=0}\ \textbf{だから}\ \boldsymbol{A^2+B^2=0}\\&=a^2c^2-2\cancel{abcd}+b^2d^2+a^2d^2+2\cancel{abcd}+b^2c^2\\&=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \longleftarrow\ \text{因数分解！}\\&=a^2\boldsymbol{(c^2+d^2)}+b^2\boldsymbol{(c^2+d^2)}\\&=\boldsymbol{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=0\end{aligned}$$

すなわち $(*)$ が示されたので**証明された**———「あたりまえ」に使っていることだがキチンと示そうと思うとそれなりに難しい．

一件落着！

0.2.3 虚数には大小関係がない

実は、**大小関係**が定められるのは**実数**だけであり、虚数には大小関係がない．これは、大小関係が定められる集合は実数のみ と読み替えてもよい．

しかし、このことを正確に理解するためには、まず、**実数**における**大小関係**とは何かをハッキリと理解しておく必要がある．

こういう議論は本来、数 I の**不等式の基本的性質**かなどで詳しくやるべきことがらだが、テーマがテーマなので、ここで改めて確認しておくことにする．

数の集合 M が次の **(1)〜(4)** を満たすとき、M の要素の間には**大小関係**があるという．すなわち

(1) M の任意の 2 数 $a,\ b$ については

$$\boldsymbol{a > b,\quad a = b,\quad a < b}$$

のどれか 1 つの関係だけが成り立つ．

(2) $\boldsymbol{a > b,\ \ b > c}$ ならば $\boldsymbol{a > c}$ である．

(3) $\boldsymbol{a > b}$ ならば、任意の $\boldsymbol{c}$ について $\boldsymbol{a + c > b + c}$ である．

(4) $\boldsymbol{a > b,\ c > 0}$ ならば $\boldsymbol{ac > bc}$ である．

これを**大小の公理**といい、ここから実数の大小に関するいろいろな定理が導き出される——この公理を満たす集合は**実数のみ** である．

それでは、上記の大小関係に虚数を持ち込むとどうなるか．簡単な例として虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ で実験をしてみよう．

$\boldsymbol{i > 0}$ とすると $i^2 > 0 \quad \therefore \quad -1 > 0 \ \longleftarrow$ **不成立！**
$\boldsymbol{i = 0}$ とすると $i^2 = 0 \quad \therefore \quad -1 = 0 \ \longleftarrow$ **不成立！**
$\boldsymbol{i < 0}$ とすると $i^2 > 0 \quad \therefore \quad -1 > 0 \ \longleftarrow$ **不成立！**

となり、いずれも成立しない——上記の**大小の公理** (1) に反する．

つまり、大小関係に i を持ち込むと実数における大小関係を支配する約束事が乱れてしまう ことがわかる．

まとめると、2 つの複素数の間では**実数どうしの間**以外、つまり実数と虚数の間、虚数と虚数の間では、実数どうしの間のような大小関係は設定できない のである．

(注) **大小関係について．**

本文の説明で虚数には大小関係がないことはナットクできたかと思うが、ここで言う大小関係というのは、あくまで上記の**大小の公理**で定められる約束事ということである——実数という集合の要素の間ではそのように決めたということでしかない．したがって、公理系 (大小関係の決め方) を替えればハナシはまた別である．まあ、**高校数学**としてはここまでで十分 と思う．

しかし、実際の入試で高校数学の範囲を少しは逸脱した出題がなされることもあり得るが、それなりの誘導なりヒントなりが用意されているはずだから、それにしたがって考察を進めればよい——すべての**ヒント**は**問題文中**にある．

end.

<メモ>

■「大小関係」再び

本文では「**虚数に大小関係はない**」と言い切った．しかも、高校数学ではここまで、とも書いた．その舌の根も乾かないうちに、と思われるかも知れないが、なぜかそのあとで**格好の問題**が見つかってしまったのです．

「好みでない」と思う人はパスしてもよい．しかし、知っておいてもジャマになるものでもないから、一応書いてみることにした．

実数どうしの場合と異なる**公理 (約束事)** を取り決めた場合は、かなりメンドウなハナシになることを**体感**できればそれでヨシとしよう．

＜例＞

複素数　$\alpha = a_1 + a_2 i$,　$\beta = b_1 + b_2 i$　について

$a_1 < b_1$,　または　($a_1 = b_1$,　かつ $a_2 < b_2$)　のとき $\alpha << \beta$

と定める．このとき、次の (1)～(5) のうち、正しいものには ○ 印、正しくないものには × 印をつけよ．ただし、 α, β, γ は複素数である．

(1)　$\alpha \fallingdotseq \beta$ ならば $(\alpha << \beta$,　または $\beta << \alpha)$ である．

(2)　($\alpha << \beta$ かつ $\beta << \gamma$)　ならば　$\alpha << \gamma$　である．

(3)　$\alpha = 0$　でも　$0 << \alpha$　でもなければ　$0 << -\alpha$　である．

(4)　$\alpha << \beta$　ならば　$\alpha + \gamma << \beta + \gamma$　である．

(5) $(\alpha << \beta$ かつ $0 << \gamma)$ ならば　$\alpha\gamma << \beta\gamma$　である．

(解)　まず、最初の約束事をシッカリと確認しておこう．

複素数　$\boldsymbol{\alpha = a_1 + a_2 i}$,　$\boldsymbol{\beta = b_1 + b_2 i}$　について

条件： $\underbrace{\boldsymbol{a_1 < b_1}}_{\boldsymbol{A}}$, **または** ($\underbrace{\boldsymbol{a_1 = b_1},\ \text{かつ}\ \boldsymbol{a_2 < b_2}}_{\boldsymbol{B}}$)　**のとき** $\boldsymbol{\alpha << \beta}$ ……(∗)

である———本問ではこれが「**命綱 (いのちづな)** 」、つまり、この**約束事**しかないのだ．

このとき、目新しい記号「 **<<** 」に驚いてはならない．複素数では「大きい」とか「小さい」とかはないはずだが、まあそれに似た概念を表す記号であろう、と思えばよい．

(1) これは、本文に述べた **大小に関する公理 (1)** の複素数版 である．

問題文は「 $\alpha \fallingdotseq \beta$ ……」で始まっていて、これを a_1, a_2, b_1, b_2 で表すのだが、いきなり $\boldsymbol{\alpha \fallingdotseq \beta}$ からでは考えにくい．

そこで、考えやすい　$\alpha = \beta$　のときの方から斬り込む ことにする．まずこれを調べて、問題の「 $\alpha \fallingdotseq \beta$ 」を この否定としてとらえる とよい———発想はチョッと難しいが筋道はかなりスッキリする．すなわち

$\boldsymbol{\alpha = \beta \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2}$　　⟵　**相等！**

だから、この否定である　$\boldsymbol{\alpha \fallingdotseq \beta}$　は

$a_1 \fallingdotseq b_1$,　または　$a_2 \fallingdotseq b_2$

である．こうしておいてこの場合を具体的に書き挙げていけばよいだろう．

起こり得るすべての場合は

$a_1 \fallingdotseq b_1$　に対して　$a_2 = b_2$, と $a_2 \fallingdotseq b_2$

$a_1 = b_1$　に対して　$a_2 = b_2$, と $a_2 \fallingdotseq b_2$

だから全部で 4 通り、この中で　$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$　のときは　$\alpha = \beta$　だから、これを除いて3 通りだが、次の 2 通りにまとめられる．

(i) $\begin{cases} a_1 \fallingdotseq b_1 \\ a_2 = b_2,\ \text{または}\ a_2 \fallingdotseq b_2 \end{cases}$　　　(ii) $\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 \fallingdotseq b_2 \end{cases}$

さらに、これを $a_1,\ a_2, b_1,\ b_2$ で表すと

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} a_1 < b_1,\ \text{または}\ \ a_1 > b_1 \\ a_2 = b_2,\ \ \text{または}\ a_2 \fallingdotseq b_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 < b_2,\ \ \text{または}\ a_2 > b_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで、① の $a_1 < b_1$ と $a_1 > b_1$ は a_1と b_1 の大小の入れかえ だから**条件 (∗)** のA を見て

$$\boldsymbol{a_1 < b_1}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{\alpha << \beta,} \qquad \boldsymbol{a_1 > b_1}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{\alpha >> \beta}$$

また、② の $a_1 = b_1$ から**条件 (∗)** のB を見て、$a_2 < b_2$ と $a_2 > b_2$ は a_2と b_2 の大小の入れかえ を考えて

$$\boldsymbol{a_2 < b_2}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{\alpha << \beta,} \qquad \boldsymbol{a_2 > b_2}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{\alpha >> \beta}$$

以上の考察から、いずれの場合も $\boldsymbol{\alpha << \beta,}$ **または** $\boldsymbol{\alpha >> \beta}$ で**正解は「○印」**である.

(2) 実数の場合の「**公理 (2)**」にあたるものの確認 である.

第 3 の複素数 γ を $\boldsymbol{\gamma = c_1 + c_2 i}$ とおくと

$$\alpha << \beta \iff \underbrace{a_1 < b_1}_{C},\ \text{または}\ (\underbrace{a_1 = b_1,\ a_2 < b_2}_{D})$$

$$\beta << \gamma \iff \underbrace{b_1 < c_1}_{E},\ \text{または}\ (\underbrace{b_1 = c_1,\ b_2 < c_2}_{F})$$

を同時に満たすから、これらを $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ で表すのだが、その組合せは、C と $(E,$ または $F)$, D と $(E,$ または $F)$ だから、結局、(C と E), (C と F), (D と E), (D と F) の 4 通りの組合せを調べればよい.

(i) C と E の場合は

$$\begin{cases} a_1 < b_1 \\ b_1 < c_1 \end{cases} \longrightarrow\ a_1 < b_1 < c_1 \quad \therefore\ a_1 < c_1 \quad \therefore\ \boldsymbol{\alpha << \gamma}$$

(ii) C と F の場合は

$$\begin{cases} a_1 < b_1 \\ b_1 = c_1,\ b_2 < c_2 \end{cases} \longrightarrow\ a_1 < b_1 = c_1,\ \ b_2 < c_2 \quad \therefore\ a_1 < c_1 \quad \therefore\ \boldsymbol{\alpha << \gamma}$$

(iii) D と E の場合は

$$\begin{cases} a_1 = b_1,\ \ a_2 < b_2 \\ b_1 < c_1 \end{cases} \longrightarrow\ a_1 = b_1 < c_1,\ \ a_2 < c_b \quad \therefore\ a_1 < c_1 \quad \therefore\ \boldsymbol{\alpha << \gamma}$$

(iv) D と F の場合は

$$\begin{cases} a_1 = b_1,\ a_2 < b_2 \\ b_1 = c_1,\ b_2 < c_2 \end{cases} \longrightarrow\ a_1 = b_1 = c_1,\ \ a_2 < b_2 < c_2 \quad \therefore\ a_1 = c_1,\ \ a_2 < c_2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha << \gamma}$$

となり、いずれの場合も $\boldsymbol{\alpha << \gamma}$ が成り立つので**正解は「○印」**である.

(3) 先に問題文を読み砕いておく.

$$\alpha = 0\ \text{でも}\ 0 << \alpha\ \text{でもない} \iff \alpha \fallingdotseq 0,\ \text{かつ}\ (\ 0 << \alpha\ \ \text{でない})$$

ところで、(1) の結果から

$$\alpha \fallingdotseq 0\ \text{ならば}\ (\ \alpha << 0,\ \text{または}\ \alpha >> 0) \quad \longleftarrow\ \text{(1) の}\ \beta\ \text{を}\ 0\ \text{とおいた！}$$

このとき、 $0 << \alpha$ ではないと言っているから $\boldsymbol{\alpha << 0}$ である.

これを具体的に書き表すと

$$a_1 < 0,\ (\text{または}\ a_1 = 0,\ \text{かつ}\ a_2 < 0) \longleftarrow \underline{\text{問題文の条件で}\ b_1,\ b_2\ \text{を}\ 0\ \text{とおいた！}}$$

そうすると

$$(-\alpha) = -a_1 - a_2 i >> 0 \longleftarrow\ -a_1 > 0\ \text{より}\ (-\alpha) >> 0\ \text{を確認！}$$

したがって、これも**正解は「○印」**である.

(4) $\alpha << \beta$ の具体的なカタチを改めて眺めてみると

$$\boldsymbol{\alpha << \beta \iff a_1 < b_1,\ \text{または}\ (a_1 = b_1,\ \text{かつ}\ a_2 < b_2)}$$

であつたから、これを $\alpha + \gamma,\ \beta + \gamma$ に適用する.

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2)\ i \\ \beta + \gamma = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2)\ i \end{cases}$$

だが、$\alpha << \beta$ とあるから、$\underline{a_1 < b_1\ \text{のとき}}$ と、$\underline{a_1 = b_1,\ \text{かつ}\ a_2 < b_2\ \ \text{のとき}}$ の両方を調べなければならない.

$a_1 < b_1$ のときは

$$a_1 + c_1 < b_1 + c_1 \qquad \therefore\ \ \alpha + \gamma << \beta + \gamma$$

$a_1 = b_1,\ \text{かつ}\ a_2 < b_2$ のときは

$$a_1 + c_1 = b_1 + c_1,\ \text{かつ}\ a_2 + c_2 < b_2 + c_2 \qquad \therefore\ \ \alpha + \gamma << \beta + \gamma$$

で、**正解は「○印」**である.

(5) 実数の場合の「**公理 (4)**」にあたるもの である．結論からいうと × 印で、こういう場合は成立しない反例を 1 つ挙げておけばよかろう———あとは勝手に考えてもらおう.

たとえば、$\alpha = 1 + 2i,\ \beta = 1 + 3i,\ \gamma = i$ とすると、$\alpha << \beta,\ \text{かつ}\ 0 << \gamma$ は成り立つが

$$\begin{cases} \alpha\gamma = \alpha i = -2 + i \\ \beta\gamma = \beta i = -3 + i \end{cases} \quad \therefore\ \ \beta\gamma << \alpha\gamma \qquad \longleftarrow\ \boldsymbol{\alpha\gamma << \beta\gamma}\ \text{は不成立！}$$

したがって、**正解は「×印」**である.

＜考察＞ 複素数 $a+bi$ は 2 つの実数 $a,\ b$ の 2 元量である

改めて複素数

$$z = a + bi \ (a,\ b \text{ は実数})$$

を眺めてみよう———複素数 z は 1 つの数だが、その内容は **2 つの実数 a, b** で構成されている.

したがって、2 つの複素数

$$z_1 = a_1 + b_1 i,\quad z_2 = a_2 + b_2 i \quad (\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \text{ は実数})$$

間に大小関係を決めようとしても、 a_1 と a_2 の大小 なのか、 b_1 と b_2 の大小 なのか、もっと他の関係なのか、ということで無条件には決められない.

本問では 記号「 $<<$ 」を用いて複素数間に、実数どうしの間とは異なる新しい**順序関係** (大小関係) の**約束事**を導入した わけである———**辞書式の順序関係**とも言われている.

この記号「 $<<$ 」の表す約束事は

$$a_1 < b_1,\ \text{または}\ (\ a_1 = b_1,\ \text{かつ}\ a_2 < b_2\ )\ \text{のとき}\ \alpha << \beta$$

だが、これは数式で見る限りかなりヤヤこしい.

そこで、 $a+bi$ を実数の組 $(a,\ b)$ と見て**直角座標系の点**で表す ことにする. そうすると上記の約束事は

(i) 右にある方が大きい. $\longleftarrow\ a_1 > b_1$

(ii) x 座標が同じなら上にある方が大きい. $\longleftarrow\ a_1 = b_1,$ かつ $a_2 > b_2$

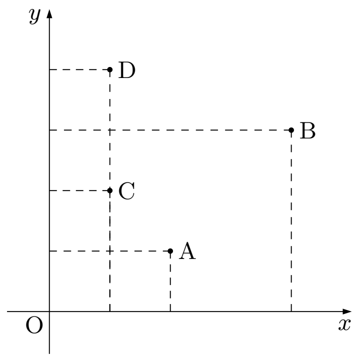
ということになる.

たとえば、右の図でいえば

(i) A と B なら B が大きい.

(ii) C と D なら D が大きい.

ということで、これなら かなり**直感的**でわかり易い.



このような意味でなら「複素数の大小関係」はトウゼン考えられるのだ.

しかし、普段「実数の大小関係」に慣れきっているので、それとちがう約束事を押し付けられるとかなり戸惑うが、まあそれは仕方がない.

いつでもそうだが、その**規則性**をナットクしてしまえばどうということはない———本問はそういう意味でも有意義であったと思う.

一件落着!

■「虚数に大小はない」

虚数に大小はない、と言ったがどんなときに使うかの 1 例を挙げておく.

＜例＞

複素数 $z = x + yi$ が不等式

$$2 \leqq z + \frac{16}{z} \leqq 10$$

を満たすとき、点 $(x,\ y)$ の存在範囲を求めよ.

（解） 大小関係は実数においてのみ———思い出してもらいたい.

つまり、$z+\dfrac{16}{z} = w$ (ただし $z \fallingdotseq 0$) とおくと w は $\boldsymbol{2 \leqq w \leqq 10}$ として実数 2 と 10 に**不等式ではさまれている**から、w は明らかに**実数**である. すなわち

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= z + \frac{16}{z}\\ &= (x+yi) + \frac{16}{x+yi}\\ &= (x+yi) + \frac{16(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)}\\ &= (x+yi) + \frac{16(x-yi)}{x^2+y^2}\\ &= \underbrace{\left(x + \frac{16x}{x^2+y^2}\right)}_{\text{実数}=A} + \underbrace{\left(y - \frac{16y}{x^2+y^2}\right)}_{\text{実数}=0} i \ = \ \textbf{(実数)} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

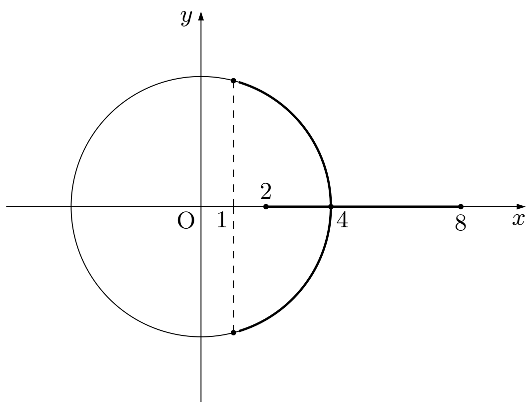
これが実数であるから、**「複素数から実数を切り取る原理」**によって

$$y - \frac{16y}{x^2+y^2} = 0 \quad \therefore\ \ y(x^2+y^2) - 16y = 0 \quad \therefore\ \ y(x^2+y^2-16)$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{y = 0}\ (\text{このとき } z \fallingdotseq 0 \text{ より } \boldsymbol{x \fallingdotseq 0}),\ \ \text{または } \boldsymbol{x^2 + y^2 = 16} \quad \cdots\cdots ②$$

このとき、w を求めて $2 \leqq w \leqq 10$ を適用するのだが、まず w は

$$\begin{aligned}w &= x + \frac{16x}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x(x^2+y^2+16)}{x^2+y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$



②にしたがって場合を分けると

(i) $\boldsymbol{y = 0}$ のとき : ③ に入れて

$$w = \frac{x(x^2+16)}{x^2} = \frac{x^2+16}{x}$$

$$\therefore\ \ 2 \leqq \frac{x^2+16}{x} \leqq 10$$

ここで $x > 0$ がわかるから分母を払って

$$2x \leqq x^2 + 16 \leqq 10x$$

これより x の範囲は

$$\begin{cases} 2x \leqq x^2 + 16 & \therefore\ \ (x-1)^2 + 15 \geqq 0 \ \longleftarrow\ \text{成立！} \\ x^2 + 16 \leqq 10x & \therefore\ \ x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8) \leqq 0 \quad \therefore\ \ 2 \leqq x \leqq 8 \end{cases}$$

よって、この場合は $\boldsymbol{y = 0,\ \ 2 \leqq x \leqq 8}$ である.

(ii) $\underline{\boldsymbol{x^2+y^2=16}\ \text{のとき}}$：③ に入れて

$$w=\frac{x(16+16)}{16}=2x$$

$$\therefore\quad 2 \leqq 2x \leqq 10 \qquad \therefore\quad 1 \leqq x \leqq 5$$

よって、この場合は $\boldsymbol{x^2+y^2=16,\quad 1 \leqq x \leqq 5}$ である.

一件落着！

0.3　共役複素数と複素数の絶対値

0.3.1　共役複素数

複素数 $\boldsymbol{\alpha = a + bi}$ $(a,\ b,$ は実数$)$ に対して

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{a - bi} \quad \longleftarrow \quad \text{複素数 } \alpha \text{ の } \underline{b \text{ の前の符号を変えた}}\text{もの！}$$

を $\underline{\ \alpha\ \text{の共役 (きょうやく) 複素数}}$ という—— $\overline{\alpha}$ は「アルファーバー」と読む．この共役複素数のもつ性質からいくつかの重要な公式が導かれる．

以下、詳しく説明する．

共役複素数と四則演算

(1) $\overline{\overline{\boldsymbol{\alpha}}} = \boldsymbol{\alpha}$ ($\overline{\alpha} = \alpha$ のとき α は実数！)

(2) $\overline{\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta}} = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \pm \overline{\boldsymbol{\beta}}$ (複号同順！)　　(3) $\overline{\boldsymbol{\alpha\beta}} = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\right)} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{\alpha}}}{\overline{\boldsymbol{\beta}}}$　　(5) $\overline{(\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}})} = \left(\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ (n は自然数！)

(解説) (1) はほとんど「あたりまえ」としてもよかろう．

(2)〜(4) では、共役に関する四則計算は加法と乗法の 2 つが基本になる と考えてよい．

まずはそこから斬り込もう．それは

$$\overline{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}} = \overline{\boldsymbol{\alpha}} + \overline{\boldsymbol{\beta}} \qquad \overline{\boldsymbol{\alpha\beta}} = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}} \qquad \longleftarrow \quad \text{加法と乗法！}$$

のことだが、まずこれら加法と乗法を証明する．そして、これらを下敷きにして他の公式を誘導する手順でハナシを進めることにする．

そこで、$\boldsymbol{\alpha = a + bi,\ \beta = c + di}$ $(a,\ b,\ c,\ d$ は実数$)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= a + bi + c + di \\
&= (a + c) + (b + d)i \\
\overline{\alpha} + \overline{\beta} &= (a - bi) + (c - di) \\
&= (a + c) - (b + d)i = \overline{\alpha + \beta} \\
\therefore\ \ \overline{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}} &= \overline{\boldsymbol{\alpha}} + \overline{\boldsymbol{\beta}}
\end{aligned}$$

また、$\boldsymbol{\alpha = a + bi,\ \beta = c + di}$ $(a,\ b,\ c,\ d$ は実数$)$ だから、マジメに複素数の乗法計算をすることで

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= (a + bi)(c + di) \\
&= (ac - bd) + (bc + ad)i \\
\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} &= (a - bi)(c - di) \\
&= (ac - bd) - (bc + ad)i = \overline{\alpha\beta} \\
\therefore\ \ \overline{\boldsymbol{\alpha\beta}} &= \overline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}
\end{aligned}$$

で、ともあれ証明できた．

次に**減法**と**除法**だが、上記の結果を利用するのがよい．つまり

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$

$$\therefore\quad \overline{\alpha} = \overline{(\alpha - \beta) + \beta} = \overline{\alpha - \beta} + \overline{\beta}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}}$$

$$\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta$$

$$\therefore\quad \overline{\alpha} = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\right)} = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \cdot \overline{\beta}$$

$$\therefore\quad \overline{\left(\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}}\right)} = \boldsymbol{\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}}$$

などとやると**カッコよく**見えないか.

(5) これは (3) を繰り返し使えばよい．すなわち

$$\overline{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} \cdots\cdots \overline{\alpha_n}$$

さらに $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_n$ とおくと

$$\overline{(\alpha^n)} = \left(\overline{\alpha}\right)^n$$

が得られる.

(注) 複素数の計算は「固めたまま」やろう

上記の証明で、**減法**も**除法**も $\boldsymbol{\alpha = a + bi,\ \beta = c + di}$ とおいてやればそうメンドウもなくやることはできる———あたりまえのことだ.

しかし、**共役複素数**の存在と使い方を知った以上、なるべくバラバラにしないで「固めたまま」やることに慣れてもらいたい.

それは、複素数 α を $a + bi$ と表した場合、**1 文字の** $\boldsymbol{\alpha}$ にはすでに $\boldsymbol{a}$ **,** $\boldsymbol{b}$ **という 2 つの要素**を内包している ことを指摘すればわかってもらえると思う.

たとえば、ベクトルの場合を考えるとわかり易いが

$$\boldsymbol{\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{a + bi}\ \text{をベクトルに読み替えてみよ！}$$

などの場合、**成分**で扱うのは最後にして $\vec{a}$ とか $\vec{b}$ とか、とりあえずは**ベクトル記号のままで**扱う方が**見通しがよい**にキマッテイル ではないか.

ちなみに、筆者にカンジを言わせてもらえば、この $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ にしても複素数 $\alpha = a+bi$ にしても、2 つの量 $a,\ b$ をセットにして、あたかも 1 つの量のように扱うことができるところが**オイシイ**のであって、これをバラバラに成分計算させるような扱い、出題などは本来のあり方に逆行している ように思われる———そういう視点で眺めてみるのも一興でしょう.

end.

<メモ>

■ 共役複素数の利用

共役複素数の性質を利用した計算を使うとずいぶんカンタンに説明できることがらもある.

＜ 例 ＞

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が虚数解をもつならば、その虚数解は互いに共役であることを示せ.

(解) **2 次方程式** の **解の公式** によれば

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

だが、虚数解をもつから判別式は $D = b^2 - 4ac < 0$ である.

すなわち 2 つの解は

$$\boldsymbol{\frac{-b - \sqrt{-D}i}{2a}}, \quad \boldsymbol{\frac{-b + \sqrt{-D}i}{2a}} \longleftarrow D < 0 \text{ から } \boldsymbol{-D > 0}$$

で、これらが**共役**であることはこの結果で**明らか**である――2 次方程式だから**これでよい！**

しかし、もっと広く有効なよい方法がある. それは $(*)$ の任意の解を α とおいて $(*)$ に代入するのだ――α は $(*)$ を満たす. つまり

$$\boldsymbol{a\alpha^2 + b\alpha + c = 0}$$

この 両辺の共役複素数をとる と

$$\overline{a\alpha^2 + b\alpha + c} = \overline{0} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a(\overline{\alpha})^2 + b(\overline{\alpha}) + c = 0}$$

すなわち、 $\overline{\alpha}$ は 2 次方程式 $(*)$ を満たすから $(*)$ の解である.

ずっと**スッキリ**したではないか――本文で**公式**を説明した甲斐があったというものだ. しかも、この方法なら、n 次の方程式 にそのまま拡張して応用することができる――やっておく.

実数係数の $\boldsymbol{n}$ **次方程式**

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

の解の 1 つを α すると、2 次方程式の場合と同様に α はこの方程式を満たすから代入して

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

両辺の共役複素数をとる と

$$\overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}\alpha + a_n} = \overline{0}$$

$$\therefore \quad a_0\left(\overline{\alpha}\right)^n + a_1\left(\overline{\alpha}\right)^{n-1} + a_2\left(\overline{\alpha}\right)^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}\left(\overline{\alpha}\right) + a_n = 0$$

すなわち、 $\overline{\alpha}$ は n 次方程式 $(**)$ の解であるということが極めてカンタンに示される――ここまで来ると 前掲の**公式**の**有難さ**がシミジミとしてくる ではないか.

ちなみに、この証明では $(**)$ の左辺をダラダラと書いたが、**実数係数**であることを明記すれば

$$(**) \ : \ \ f(x) = 0 \longleftarrow \boldsymbol{f(x)} \text{ **は** } \boldsymbol{n} \text{ **次の整式！**}$$

だから、この方程式の 1 つの解を α とすれば

$$f(\alpha) = 0 \qquad \therefore \quad \overline{f(\alpha)} = \overline{0} \qquad \therefore \quad f\left(\overline{\alpha}\right) = 0$$

で、実にスッキリしたハナシになってしまう.

一件落着！

■ 複素数 $\boldsymbol{z}$ の「 実部 $\boldsymbol{a}$ 」、「 虚部 $\boldsymbol{b}$ 」を求めるハナシとその応用

複素数 $\boldsymbol{z = a + bi}$ $(\boldsymbol{a,\ b}$ は実数$)$ が与えられるとき、その実部 a と虚部 b (実数 !) は $\boldsymbol{z}$ と $\overline{\boldsymbol{z}}$ で表される. また、z が与えられれば $\overline{z}$ が確定し

$$\begin{cases} \boldsymbol{z = a + bi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \overline{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{= a - bi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

これを $a,\ b$ についての連立方程式と見て

$$① + ② \longrightarrow z + \overline{z} = 2a \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = \frac{z + \overline{z}}{2}} \quad (\ = \boldsymbol{R_e(z)} \longleftarrow \textit{Real} \text{ の略!})$$

$$① - ② \longrightarrow z - \overline{z} = 2bi \qquad \therefore\ \boldsymbol{b = \frac{z - \overline{z}}{2i}} \quad (\ = \boldsymbol{I_m(z)} \longleftarrow \textit{Imaginary} \text{ の略!})$$

ということで、内容としてはそんなに難しいハナシではない. だからというワケでもないが、大げさに定理とはしなかったが、これが結構ツカエルのです.

つまり、$\boldsymbol{z}$ が実数である条件、$\boldsymbol{z}$ が純虚数である条件 が

$$\boldsymbol{z} \text{ が実数} \iff \boldsymbol{b = 0} \quad \therefore\ \boldsymbol{z - \overline{z} = 0} \quad \therefore\ \boldsymbol{\overline{z} = z}$$

$$\boldsymbol{z} \text{ が純虚数} \iff \boldsymbol{a = 0} \quad \therefore\ \boldsymbol{z + \overline{z} = 0} \ \text{ ただし、} \boldsymbol{b \neq 0} \text{ より } \boldsymbol{\overline{z} \neq z}$$

として簡単なカタチで表される——これは覚えおかなくてはならない.

以下、例を挙げて説明する.

< 例 1 >

$\alpha,\ \beta$ を任意の複素数とするとき

(1) $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$ が実数であることを示せ.

(2) $\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$ が純虚数、または 0 であることを示せ.

(解) (1) (2) とも $\boldsymbol{\alpha = a + bi,\ \beta = c + di}$ $(a,\ b,\ c,\ d$ は実数$)$ とおいてやれないことはないが、もう「そんなことをしている場合ではない!」という気分になってくれないかなあ.

(1) $\boldsymbol{\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = z}$ とおくと $\boldsymbol{z}$ が実数であるための必要十分条件は $\boldsymbol{z = \overline{z}}$ であるから、これを使う——カタマリのままで扱う ことを覚えて下さい. 以下、計算をすると

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{z}} &= \overline{\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta} \\ &= \overline{\alpha\overline{\beta}} + \overline{\overline{\alpha}\beta} = \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} = \boldsymbol{z} \end{aligned}$$

すなわち、$\overline{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{= z}$ が成り立つので $\boldsymbol{z}$ は実数である.

(1) $\boldsymbol{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta = w}$ とおくと $\boldsymbol{w}$ が純虚数であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{w + \overline{w} = 0,\ \ \overline{w} \neq w}$$

であるから、これが成り立つことを示せばよい. しかし、この後半の $\overline{w} \neq w$ は $w \neq 0$ の条件だから、本問では特に示さなくてよい.

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{w}} &= \overline{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta} \\ &= \overline{\alpha\overline{\beta}} - \overline{\overline{\alpha}\beta} \\ &= \overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} = -(\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta) = \boldsymbol{-w} \end{aligned}$$

すなわち、 $\boldsymbol{w + \overline{w} = 0}$ が示されたので $\boldsymbol{w}$ は 純虚数または $\boldsymbol{0}$ である.

一件落着!

＜例 **2**＞

$\alpha,\ \beta$ を任意の複素数とする．このとき、 z がどんな複素数であっても $\alpha z+\beta\overline{z}$ が常に実数であるならば、 $\beta=\overline{\alpha}$ であることを証明せよ．

(解) こうなると、素材は複素数だが内容は論証の問題である．

「 $\boldsymbol{z}$ がどんな複素数であっても $\cdots\cdots$」

が題意を読み解くカギになっている．

まず、$\boldsymbol{\alpha z+\beta\overline{z}=w}$ とおいて w が実数であるための必要十分条件は、 $\boldsymbol{w=\overline{w}}$ で、これは問題ないであろう．

$$\begin{aligned}\overline{w}&=\overline{\alpha z+\beta\overline{z}}\\&=\overline{\alpha z}+\overline{\beta\overline{z}}=\overline{\alpha}\ \overline{z}+\overline{\beta}z\end{aligned}$$

であるから、条件 $\boldsymbol{w=\overline{w}}$ を z で表すと

$$\alpha z+\beta\overline{z}=\overline{\alpha}\ \overline{z}+\overline{\beta}z\qquad\therefore\ \ \boldsymbol{(\alpha-\overline{\beta})z+(\beta-\overline{\alpha})\overline{z}=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここまで来ると、 $\beta=\overline{\alpha}$ ならば $\overline{\beta}=\overline{\left(\overline{\alpha}\right)}=\alpha$ だから、上記の $(*)$ が成り立つことはすぐにワカルが、これだけでは求める条件が「 $\beta=\overline{\alpha}$ である」とは言い切れない———他にもあるかも知れない、という問題が残る．つまり、「 $\boldsymbol{z}$ がどんな複素数であっても $\cdots\cdots$」に対して $\boldsymbol{\beta=\overline{\alpha}}$ は、まだその 十分性しか言及していない のである．

そこで、改めて問題文の「 $\boldsymbol{z}$ がどんな複素数であっても $\cdots\cdots$」に注目してもらいたい．この文言から、まず「最小限、どうでなければならないか」を考える．それには、最も簡単そうな好きな数を選べばよい．たとえば、他のものについては知らないが少なくとも複素数 $z=i,\ 1$ に対して成り立たなければならない———いちばんゆるい条件である．

そうすると、$\overline{z}=-i,\ 1$ だから、これらの z と$\overline{z}$ を $(*)$ に入れて

$$\begin{cases}(\alpha-\overline{\beta})i+(\beta-\overline{\alpha})(-i)=0 & \therefore\ \ (\alpha-\overline{\beta})-(\beta-\overline{\alpha})=0\cdots\cdots\cdots\cdots①\\(\alpha-\overline{\beta})\cdot1+(\beta-\overline{\alpha})\cdot1=0 & \therefore\ \ (\alpha-\overline{\beta})+(\beta-\overline{\alpha})=0\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

② $-$ ① より

$$2(\beta-\overline{\alpha})=0\qquad\therefore\ \ \boldsymbol{\beta=\overline{\alpha}}\ \longleftarrow\ \text{必要条件！}$$

すなわち $\boldsymbol{\beta=\overline{\alpha}}$ であることが示された．

この問題の問題文は必要条件を求めているだけ だからここで止めるべきだが、必要十分条件を求められる文面ならば、「逆にこのとき、明らかに $(*)$ が成り立つ」という決まり文句を入れる ことになる．

＜考察＞ 「 $\boldsymbol{z}$ がどんな複素数であっても $\cdots\cdots$」について

この「どんな〜についても〜」とか、「任意の〜について〜」とかの文言と必要十分条件との関係はよく出てくる論法なのでもう少し実例を引いて説明しておく．

最もシンプルな例で、たとえば

$$\text{任意の } \boldsymbol{x} \text{ について } \boldsymbol{Ax+B=0}\ \Longleftrightarrow\ \boldsymbol{A=B=0}$$

のような恒等式の例などで根本の考え方を確認しておくとよい．

まず、($\longleftarrow$)、つまり十分性については問題ナシとして、問題は ($\longrightarrow$) の必要性である．条件に「任意の $\boldsymbol{x}$ について〜」とあるから、 x には何を入れてもよいが、なるべくカンタンな数、たとえば $x=0,\ 1$ などがよい———A, B の 2 文字についての条件だから、等式が 2 本ほしい．

だから、 x の値も少なくとも 2 つは必要だろう．

$$\begin{cases}x=0\ \text{を入れて}\ \longrightarrow\ A\cdot0+B=0 & \therefore\ \ B=0\\x=1\ \text{を入れて}\ \longrightarrow\ A\cdot1+B=0 & \therefore\ \ A+B=0\end{cases}\qquad\therefore\ \ \boldsymbol{A=B=0}$$

となり**必要条件** $A = B = 0$ が求められる———**十分性**については説明するまでもない．**明らか**であろう．上記の解説もこれを踏まえて構成していると思ってもらえばよい．

ちなみに、本問を律儀 (りちぎ) に $\boldsymbol{z = x + yi(x,\ y}$ **は実数)** とおいて議論を進めようとする立場もある．それには、$\gamma = \beta - \overline{\alpha}$ とおいて、**任意の実数** $\boldsymbol{x,\ y}$ に対して $\gamma = 0$ をいえばよいのだが、それでもなるべく、その必要のないところは成分をバラバラにしないでまとめたままで議論を進める方がよい．

$$\begin{aligned}\overline{\gamma} &= \overline{\beta - \overline{\alpha}} \\ &= \overline{\beta} - \alpha = -(\alpha - \overline{\beta}) \\ &\therefore\ \ \alpha - \overline{\beta} = -\overline{\gamma}\end{aligned}$$

であるから、本文の $(*)$ は

$$-\overline{\gamma}z + \gamma\overline{z} = 0 \ \longrightarrow\ -\overline{\gamma}(x + yi) + \gamma(x - yi) = 0$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{(\gamma - \overline{\gamma})x - (\gamma + \overline{\gamma})yi = 0}$$

これが、「 **任意の実数** $\boldsymbol{x,\ y}$ 」について成り立つから

$$\begin{cases} x = 1,\ y = 0 \text{ を入れて } \longrightarrow \gamma - \overline{\gamma} = 0 \\ x = 0,\ y = 1 \text{ を入れて } \longrightarrow \gamma + \overline{\gamma} = 0 \end{cases}$$

これらを加えて $\boldsymbol{\gamma = 0}$ が得られる———**逆の成立**は**明らか**である．結局、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の **2** 文字の恒等式になった．まあ、いろいろやってみるとよい．

一件落着！

0.3.2 複素数の絶対値

複素数 $\boldsymbol{z = a + bi}$ の絶対値は z の実部 $\boldsymbol{a}$ と虚部 $\boldsymbol{b}$ を用いて

$$\boldsymbol{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}} \longleftarrow \quad |\cdots| \text{ は絶対値記号！} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

と定義する.

特に、z が実数の場合は、$b = 0$、したがって $z = a$ であるから

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \ (\ a \geqq 0\ ) \\ -a \ (\ a < 0\ ) \end{cases} \longleftarrow \text{ これは実数の絶対値の扱い！}$$

となり、実数の絶対値の扱いは、複素数の絶対値の特別な場合 であることがわかる.

この定義からわかるように、 $|z|$ は常に実数で、しかも負になることはない. 特に $a = b = 0$ のときは 0 で、それ以外のときは常に正である.

ところで $z = a + bi$ のとき $\overline{z} = a - bi$ だから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z\overline{z}} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 + b^2 = \boldsymbol{|z|^2} \end{aligned}$$

であるから、複素数の絶対値は

$$\boldsymbol{|z|^2 = z\overline{z}}, \text{ あるいは } \boldsymbol{|z| = \sqrt{z\overline{z}}}$$

で定義することもできる.

以下、絶対値に関する重要な公式を導いておく. 結果もさることながら、途中の経緯も注意して確認してもらいたい.

絶対値に関する重要公式

(1) $\boldsymbol{|\overline{\alpha}| = |\alpha|}$

(2) $\boldsymbol{|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|}$

(3) $\boldsymbol{\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}}$

(4) $\boldsymbol{|\alpha^n| = |\alpha|^n}$ (ただし、n は自然数とする)

(解説) これらは上記の $|z|^2 = z\overline{z}$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ を用いて証明される.

(1) $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ とおけば

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ |\overline{z}| &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

から $|z| = |\overline{z}|$ がすぐにわかるから、改めて説明するまでもない.

しかし、せっかく絶対値の扱いの約束事を上記にも示したので、成分にバラさないでやっておく——まずは、この扱い方に慣れてもらいたい.

$$\begin{aligned} |\overline{\alpha}| &= \sqrt{\overline{\alpha}\ \overline{\left(\overline{\alpha}\right)}} \\ &= \sqrt{\overline{\alpha}\alpha} = \sqrt{|\alpha|^2} = |\alpha| \end{aligned}$$

(2) これも同様！

$$
\begin{aligned}
|\alpha\beta| &= \sqrt{(\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})} \\
&= \sqrt{(\alpha\beta)(\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})} \\
&= \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}} = \sqrt{|\alpha|^2\cdot|\beta|^2} = |\alpha|\cdot|\beta|
\end{aligned}
$$

(3) これは (2) の結果を使えばよい．すなわち

$$
|\alpha| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\cdot|\beta|
$$

$$
\therefore\quad \boldsymbol{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}}
$$

(4) これは (2) を繰り返し用いると

$$
|\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdots\cdots|\alpha_n|
$$

だから、ここで $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=\alpha$ とおくと

$$
\boldsymbol{|\alpha^n| = |\alpha|^n}
$$

が示されて証明を終わる．

しかし、こうなると成分でバラしたのでは手に負えない．もはや、複素数といえば何でも $a+bi$ 、というような次元のハナシではない ことを実感してもらいたい．

end.

<メモ>

■ 複素数の絶対値とその計算

ゴタクを並べても仕方がない．まずは、内容を確認しながら丁寧に計算してみる ことである．いくつかやってみる中で、最も自然な方法をマスターしてほしい．

＜例 **1**＞

次の複素数の共役複素数を求め、絶対値を計算せよ．

(1) $(2+i)^2$　　(2) $(1-i)(2-3i)$　　(3) $\dfrac{2+\sqrt{-6}}{2-\sqrt{-3}}$

(4) $\sin\theta+i\cos\theta$　　(5) 3　　(6) $-i$

（解） (1) まずは、$(2+i)^2=z$ とおいて 2 乗展開すると

$$
z = 4+4i+4i^2 = 3+4i \qquad \therefore\ \overline{z} = 3-4i
$$

とやってもよいが、本文に述べた公式を用いて

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{(2+i)^2} = (2-i)^2 \\
&= 4-4i+i^2 = \boldsymbol{3-4i}
\end{aligned}
$$

絶対値についても、2 乗展開のカタチが求められていれば

$$
\begin{aligned}
|\overline{z}| &= |3-4i| \\
&= \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}
$$

が最もカンタンだ．あるいは

$$\begin{aligned}
\left|\overline{z}\right|^2 &= z\overline{z} = (3+4i)(3-4i)\\
&= 9 - 16\ i^2 = 25\\
&\therefore\quad \left|\overline{z}\right| = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}$$

としてもよい．しかし、ここでは何としても**本文に述べた方法**に慣れてもらいたい———<u>それが目的なのだ</u>．つまり

$$\begin{aligned}
|\,z\,| &= \boldsymbol{\left|\,(2+i)^2\,\right| = |\,2+i\,|^2} \longleftarrow \quad \boldsymbol{|\,\alpha^2\,| = |\,\alpha\,|^2} \quad \text{を使う！}\\
&= (\sqrt{2^2+1^2})^2 = (\sqrt{5})^2 = 5
\end{aligned}$$

(2) もう細々とは説明しない———**本文の公式**にしたがってやればよい．

$$\begin{aligned}
\overline{(1-i)(2-3i)} &= (1+i)(2+3i)\\
&= 2+5i+3\ i^2 = 2+5i+3(-1) = -1+5i\\
|\,(1-i)(2-3i)\,| &= |\,1-i\,|\cdot|\,2-3i\,|\\
&= \sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{13} = \sqrt{26}
\end{aligned}$$

(3) こうなると本文の公式の有難さがわかるだろう．まずは**共役複素数**の計算だが

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{2+\sqrt{-6}}{2-\sqrt{-3}}\right)} &= \frac{\overline{2+\sqrt{6}\ i}}{\overline{2-\sqrt{3}\ i}} \longleftarrow \quad \text{純虚数から実数部分を分離して、本文の公式！}\\
&= \frac{2-\sqrt{6}\ i}{2+\sqrt{3}\ i} \longleftarrow \quad \text{分母の実数化！}\\
&= \frac{(2-\sqrt{6}\ i)(2-\sqrt{3}\ i)}{(2+\sqrt{3}\ i)(2-\sqrt{3}\ i)}\\
&= \frac{4-2(\sqrt{6}+\sqrt{3})\ i+3\sqrt{2}\ i^2}{4-3\ i^2} = \frac{(4-3\sqrt{2})-2(\sqrt{6}+\sqrt{3})i}{7}
\end{aligned}$$

次に**絶対値**の計算をする．

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2+\sqrt{-6}}{2-\sqrt{-3}}\right| &= \left|\frac{2+\sqrt{6}\ i}{2-\sqrt{3}\ i}\right| \longleftarrow \quad \text{純虚数から実数部分を分離して、本文の公式！}\\
&= \frac{|2+\sqrt{6}\ i|}{|2-\sqrt{3}\ i|} \longleftarrow \quad \text{分母子の絶対値を個別に計算！}\\
&= \frac{\sqrt{4+6}}{\sqrt{4+3}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{70}}{7}
\end{aligned}$$

まあ、<u>本問の**メインテーマ**はここまで</u> です．(4) (5) (6) はチョッとかわったカタチにだまされないようにというだけのこと！

(4) これは、イワクのありそうなカタチだが、どうということはない．確認しておいてもらえばよい．

$$\overline{\sin\theta + i\cos\theta} = \sin\theta - i\cos\theta, \qquad |\sin\theta + i\cos\theta\,| = \sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta} = 1$$

(5) $\overline{3} = 3,\ \ |\,3\,| = 3$

(6) $\overline{-\,i} = i$、 $|\,-i\,| = 1$

となるが、もはや説明するまでもなかろう．

一件落着！

＜例 **2**＞

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ のとき、次の問に答えよ.

(1) $|\alpha+\beta+\gamma|=\left|\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right|$ を示せ.

(2) $\left|\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right|$ の値を求めよ.

（解） 問題文の 1 行目の $\boldsymbol{|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1}$ がポイントである．慣れないとモタモタするが、慣れてしまえば何でもない.

(1) $|\alpha|=1$ であるから

$$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}}$$

他も同様であるから

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta+\gamma| &= |\overline{\alpha+\beta+\gamma}|\\ &= |\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}| = \left|\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right|\end{aligned}$$

(2) (1) で

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta+\gamma| &= \left|\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right|\\ &= \left|\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right| = \frac{|\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta|}{|\alpha\beta\gamma|}\end{aligned}$$

であるから、示すべき式のカタチをよく見て

$$\begin{aligned}\left|\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right| &= \frac{|\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta|}{|\alpha+\beta+\gamma|}\\ &= |\alpha\beta\gamma| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma| = 1\cdot1\cdot1=1\end{aligned}$$

この場合、<u>(1) が (2) のヒントになっている</u> のだが、(2) だけ**単独にやる**こともできる．それは次のようにすればよい.

$$\begin{aligned}|\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta| &= |\overline{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}|\\ &= |\overline{\beta\gamma}+\overline{\gamma\alpha}+\overline{\alpha\beta}| = |\overline{\beta}\ \overline{\gamma}+\overline{\gamma}\ \overline{\alpha}+\overline{\alpha}\ \overline{\beta}|\\ &= \left|\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right|\\ &= \left|\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right| = \frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|} = \frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{1\cdot1\cdot1} = |\alpha+\beta+\gamma|\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ \left|\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right| = \frac{|\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta|}{|\alpha+\beta+\gamma|} = 1$$

いずれにしても、**共役複素数**、**複素数の絶対値**に関する扱い方がシッカリしていないと、カンタンなことで足をすくわれることになる.

一件落着！

＜ **例 3** ＞

次の方程式を満たす z を求めよ．

(1) $z^2-|z|^2+1=0$

(2) $|z-\alpha|=\left|1-\overline{\alpha}z\right|,\quad z+\overline{z}=0$ (ただし、$|\alpha|\fallingdotseq 1$ とする)

（解） (1) **複素数** z についての**方程式** である．

まず、素朴な発想で思いつくことは、$z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) とおいて、実数 $x,\ y$ の値を求める ということであろう．

$$z^2-|z|^2+1=0 \longrightarrow (x+yi)^2-(x^2+y^2)+1=0$$

$$\therefore\quad x^2+2xyi+y^2i^2-(x^2+y^2)+1=0 \quad\longleftarrow\quad i^2=-1$$

$$\therefore\quad \underbrace{(1-2y^2)}_{0}+\underbrace{2xy}_{0}\,i=0 \qquad \therefore\quad 1-2y^2=0,\ \text{かつ}\ 2xy=0$$

$$\therefore\quad x=0,\qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

まあ、初学者として**オーソドックスな解法** だろう．もちろんこれでよいが、z のままで式運びはできないか———ここでの**目的**はそういうことなのだ．

$$z^2-|z|^2+1=0 \qquad \therefore\quad z^2=|z|^2-1 \quad\longleftarrow\quad \textbf{これは実数だ！}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{z^2=\overline{(z^2)}}=\left(\overline{z}\right)^2 \quad\longleftarrow\quad \boldsymbol{z^2}\textbf{が実数である条件！}$$

$$\therefore\quad z^2-\left(\overline{z}\right)^2=(z+\overline{z})(z-\overline{z})=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで、与えられた方程式は

$$z^2-z\overline{z}+1=0 \qquad \therefore\quad z(z-\overline{z})=-1 \qquad \therefore\quad z-\overline{z}\fallingdotseq 0$$

これを $(*)$ に適用すれば

$$z+\overline{z}=0 \quad\longleftarrow\quad \boldsymbol{z}\ \textbf{は純虚数、または}\ \boldsymbol{0}\ \textbf{だ！}$$

これより $z=yi$ のカタチである———もとの方程式に代入して y の値を求める．

$$(yi)^2-|yi|+1=0$$

$$\therefore\quad -y^2-y^2+1=0 \qquad \therefore\quad y^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

で、ともかく $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ が得られるが、あんまりトクをした気にもならない．この場合は **最初の素朴な方法**の方がずっとよい と思う———こういうこともあるのです．

(2) $z=x+yi$ とおいて $x,\ y$ を求める方向で出発するなら、$\alpha=a+bi$ とおく．だが、α (1 文字) の代わりに導入した $a,\ b$ (2 文字) があるので計算は大変だろう———とりあえず**避ける．**

$$|z-\alpha|=\left|1-\overline{\alpha}z\right| \qquad \therefore\quad |z-\alpha|^2=\left|1-\overline{\alpha}z\right|^2$$

$$\therefore\quad (z-\alpha)(\overline{z-\alpha})=(1-\overline{\alpha}z)(\overline{1-\overline{\alpha}z})$$

$$\therefore\quad (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})$$

$$\therefore\quad z\overline{z}-\cancel{\alpha\overline{z}}-\cancel{z\overline{\alpha}}+\alpha\overline{\alpha}=1-\cancel{\overline{\alpha}z}-\cancel{\alpha\overline{z}}+(\overline{\alpha}z)(\alpha\overline{z})$$

$$\therefore\quad z\overline{z}(\alpha\overline{\alpha}-1)-(\alpha\overline{\alpha}-1)=0 \qquad \therefore\quad (\alpha\overline{\alpha}-1)(z\overline{z}-1)=0$$

ここで、条件の $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2\fallingdotseq 1$ により $\boldsymbol{z\overline{z}=1}$ が得られる．

まだ使っていない条件は、先に述べた

$$z+\overline{z}=0 \longrightarrow x=0 \quad \therefore \quad z=yi$$

があるから、これを入れると

$$z\overline{z}=(yi)(-yi)=y^2=1 \quad \therefore \quad y=\pm 1 \quad \therefore \quad \boldsymbol{z=\pm i}$$

と z が求まった.

＜考察＞ やはり、成分計算でもやっておく！

(2) を成分計算でやってみる.

$$|z-\alpha|=\left|1-\overline{\alpha}z\right| \quad \longrightarrow \quad |z-\alpha|^2=\left|1-\overline{\alpha}z\right|^2$$

まあ、ここまでは同じだから問題はない.

ここで、 $z=x+yi,\ \alpha=a+bi$ ($x,\ y,\ a,\ b$ は実数) とおくと

$$\begin{aligned}1-\overline{\alpha}z&=1-(a-bi)(x+yi)\\&=1-(ax+by)-(bx-ay)i\end{aligned}$$

だから上記の条件は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\{1-(ax+by)\}^2+\{-(bx-ay)\}^2$$

これを展開して整理すると

$$1-(x^2+y^2)-(a^2+b^2)+(a^2+b^2)(x^2+y^2)=0$$
$$\therefore \quad (a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)=0$$

ここで、$\boldsymbol{a^2+b^2=|\alpha|^2\fallingdotseq 1}$ が効いて $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$ が得られる.

このとき

$$z+\overline{z}=0 \longrightarrow x=0 \quad \therefore \quad z=yi$$

だから

$$0^2+y^2=1 \quad \therefore \quad y^2=1 \quad \therefore \quad y=\pm 1 \quad \therefore \quad z=\pm i$$

一件落着！

＜ 例 4 ＞

$\alpha,\ \beta$ は複素数で、$|\alpha|=1$ とする.

$$z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす複素数 z が存在するための必要十分条件は $\alpha\overline{\beta}=\beta$ であることを証明せよ.

(解) これも**方程式**の問題だ――結局、等式を満たす複素数 z が存在するための**必要十分条件**を求めている.

まずは、**必要条件**だが、これはそのような $\boldsymbol{z=z_1}$ が**存在する**として、そのためにはどうでなければならないか、と考える.

$z=z_1$ が与えられた方程式の解とすると、これは方程式 ① を満たす. すなわち

$$z_1+\alpha\overline{z_1}+\beta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

だが、この式 1 本ではどうにもならない――この z_1 を求めるにはもう 1 本ほしい. そこで、② の両辺の**共役複素数をとる**. この辺が複素数の**おもしろい**ところだ.

② の両辺の**共役複素数**をとると

$$\overline{z_1+\alpha\overline{z_1}+\beta}=\overline{0} \quad \therefore \quad \overline{z}_1+\overline{\alpha}z_1+\overline{\beta}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が得られるから、② ③ から $\overline{z_1}$ を消去して z_1 の式を作ることを考える．

つまり、② $-$ ③ $\times\,\alpha$ を計算すると

$$\boldsymbol{(1-\alpha\overline{\alpha})z_1+\beta-\alpha\overline{\beta}}=0 \cdots\cdots ④$$

ここで ④ を満たす z_1 は

$$(1-\alpha\overline{\alpha})z_1=-(\beta-\alpha\overline{\beta}) \qquad \therefore \quad z_1=-\frac{\beta-\alpha\overline{\beta}}{1-\alpha\overline{\alpha}}$$

とやりたいが、そうは行かない——条件 $|\alpha|=1$ から

$$\boldsymbol{1-\alpha\overline{\alpha}=1-|\alpha|^2=0}$$

で割ることができない．そこで ④ にもどるが、上記の条件から ④ の第 1 項は 0(ゼロ) となり、④ の等式が成り立つためには、定数部分の $\beta-\alpha\overline{\beta}$ が 0(ゼロ) でなければならない．

$$\beta-\alpha\overline{\beta}=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\beta=\alpha\overline{\beta}} \longleftarrow \textbf{必要条件！}$$

すなわち、 $\boldsymbol{\beta=\alpha\overline{\beta}}$ が**必要条件**として求まった．

しかし、このとき ④ を満たす z_1 は存在するのか．存在するなら「これです！」と言って示すか、それなりの論証をしなければならない．

そこで、このとき方程式 ① を満たす z が存在すること、つまり**十分条件**を示す．ただし、これは 先に求めた必要条件 $\beta=\alpha\overline{\beta}$ のもとに議論する わけである．

方程式 ① の両辺に $\overline{\beta}$ をかけると

$$\overline{\beta}z+\overline{\beta}\alpha\overline{z}+\overline{\beta}\beta=0 \qquad \longleftarrow \quad \boldsymbol{\alpha\overline{\beta}=\beta}$$

$$\therefore \quad \overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta}=0$$

この両辺に $z\overline{z}$ を加えると

$$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta}=z\overline{z} \qquad \therefore \quad z(\overline{z}+\overline{\beta})+\beta(\overline{z}+\overline{\beta})=z\overline{z}$$

$$\therefore \quad (z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})=z\overline{z} \qquad \therefore \quad (z+\beta)(\overline{z+\beta})=z\overline{z} \qquad \therefore \quad |z+\beta|^2=|z|^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{|z+\beta|=|z|} \cdots\cdots ⑤$$

ここで、この結果をよく睨むと $z=-\dfrac{\beta}{2}$ とすれば上記が成り立つ、つまり、解として $z=-\dfrac{\beta}{2}$ が存在することがわかる．

以上の考察から、方程式 ① が解をもつための**必要十分条件**は $\boldsymbol{\beta=\alpha\overline{\beta}}$ である．

＜考察 1 ＞ 十分条件についての考察

上記の「(解)」に示した**十分性の説明**はあまりに**ソッケない**．もっとも、1 つでもよいから解があることを言えばよい のだから、もちろん、これでよいのだが、もう少し詳細に事情を知りたいとは思わないか．本文の

$$① \ : \ \boldsymbol{z+\alpha\overline{z}+\beta=0} \quad \longrightarrow \quad ⑤ \ : \ \boldsymbol{|z+\beta|=|z|}$$

の変形については、まあいいだろう．

問題は ⑤ をどう読むかだが、これを次のように変形する．

$$|z-(-\beta)|=|z-0| \cdots\cdots (*)$$

ここで、**複素数平面** (後述) 上で $z,\ -\beta,\ 0$ に対応する点を P, C, O とすると、この $(*)$ の意味するところは

$$\boldsymbol{\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{OP}}} \quad \longleftarrow \quad \textbf{点 P は 2 定点 C, O から等距離！}$$

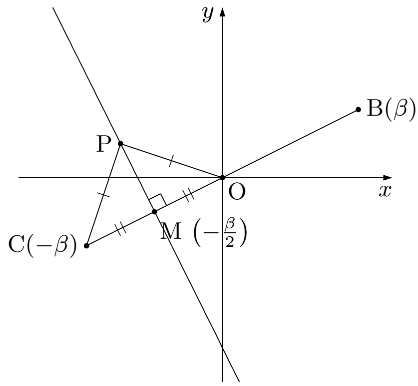
すなわち、点 P は線分 OC の**垂直 2 等分線**上にあり、この上の点 $z=x+yi$ 全体が方程式 ① の解になっている ということを表している．

したがって、2 点 C, O の中点 $\mathrm{M}(-\dfrac{\beta}{2})$ はこの直線上にあり、トウゼン解の 1 つであるから、この解 $-\dfrac{\beta}{2}$ も偶然に降って湧いたハナシではない．

そういうことなら、その直線上の $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) の x と y の関係式を求めておきたい.

そこで、$\beta=c+di$ ($c,\ d$ は実数) とおいて ⑤ に代入すると

$$|z+\beta|=|z| \qquad \therefore\ \ |z+\beta|^2=|z|^2$$
$$\therefore\ \ |(x+c)+(y+d)i|^2=|x+yi|^2$$
$$\therefore\ \ (x+c)^2+(y+d)^2=x^2+y^2$$
$$\therefore\ \ \boldsymbol{2cx+2dy+c^2+d^2=0}\cdots\cdots\cdots(**)$$



これが xy 平面上に現れる**垂直 2 等分線の方程式**で

$$x=-\frac{c}{2},\ y=-\frac{d}{2}$$
$$\longleftarrow\ \ \mathrm{M}\left(-\frac{c}{2},\ -\frac{d}{2}i\right),\ \text{つまり、}-\frac{\beta}{2}\text{のこと！}$$

を満たすことも確認される——トウゼンである.

まあ、ここまでやれば、この問題から学ぶべきものは一応吸収したことになるだろう. なかなか考えさせられる問題であった.

＜考察 2 ＞ 成分で調べてみた

バラバラに成分でやれば上記の説明の**内訳**が見えるかも知れない.

$$z=x+yi,\ \ \alpha=a+bi,\ \ \beta=c+di\ \ (x,\ y,\ a,\ b,\ c,\ d,\ \text{は実数})$$

とおいて方程式 ① に入れてみる.

$$①:\ \boldsymbol{z+\alpha\overline{z}+\beta=0}$$
$$\therefore\ \ (x+yi)+(a+bi)(x-yi)+(c+di)=0$$
$$\therefore\ \ \{\underbrace{(1+a)x+by+c}_{A=0}\}+\{\underbrace{bx+(1-a)y+d}_{B=0}\}i=0 \quad \longleftarrow\ \ \boldsymbol{A,\ B}\ \textbf{は実数！}$$

$A=B=0$ であるから

$$\begin{cases}(1+a)x+by+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\\ bx+(1-a)y+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\end{cases}$$

これは、$x,\ y$ に関する連立方程式である——$x,\ y$ が求まれば解 z が存在することになる.

加減法にしたがって

$$\begin{cases}(*)\times(1-a)-(**)\times b\ :\ \ (a^2+b^2-1)x=c-ac-bd\\ (*)\times b-(**)\times(1+a)\ :\ \ (a^2+b^2-1)y=d+ad-bc\end{cases}$$

ここで、$a^2+b^2-1\fallingdotseq 0$ ならば、これで割って $x,\ y$ が確定し、z が確かに存在することが言えるのだが、条件より $|\alpha|=0$ だからそうはいかない.

結局、与えられた条件から $\boldsymbol{a^2+b^2-1=0}$ で、したがって $x,\ y$ の値にかかわらず左辺はゼロになり、この 2 本の等式が成り立つには、それぞれの右辺がゼロ でなければならない——どうやら解があるとしても**不定解**らしい. したがって、求める**必要条件**は

$$\boldsymbol{c-ac-bd=0,\ \ d+ad-bc=0}$$

一方、与えられた条件 $\boldsymbol{\alpha\overline{\beta}=\beta}$ を成分で表すと

$$(a+bi)(c-di)=c+di \qquad \therefore\ \ (ac+bd)+(bc-ad)i=c+di$$
$$\therefore\ \ (\underbrace{c-ac-bd}_{\text{実数}=0})+(\underbrace{d+ad-bc}_{\text{実数}=0})i=0$$
$$\therefore\ \ c-ac-bd=0,\ \ d+ad-bc=0$$

だが、上に求めた必要条件と一致していることが確認される———これで大体見えた！

つまり、x と y の方程式 $(*)$ と $(**)$ は**一致**して、解はこの 1 次方程式を満たす $(x,\ y)$ のすべての組、xy 平面上なら $(*)$ または $(**)$ で表される直線上のすべての点である $z = x + yi$ ということになる———本文に示した $z = -\dfrac{\beta}{2}$ だけではなく無数にあることがわかる.

一件落着！

(注) 複素数をめぐる小史

このような立場から、複素数 $a + bi$ に始めて「**相等**」や「**四則** $(+,\ -,\ \times,\ \div)$」などの計算の定義 (意味) を与えたのは**コーシー** (1789〜1857) であると言われているが、彼は虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ のことを、「$\sqrt{3}$ が 3 の平方根であるような意味合いで -1 の平方根ではない. だから**タダの記号**として扱うべし」と言っていたそうである. この時点ですでに**虚数単位 $\boldsymbol{i}$** は算術的な意味での -1 の平方根というイメージではなくなっていたのではないか.

このことを、私流に解釈すると、複素数

$$\boldsymbol{z = a + bi} \quad (\longleftarrow \boldsymbol{a, b} \text{ は実数！})$$

を見るとき、**虚数単位 $\boldsymbol{i}$** を用いて表される $\boldsymbol{bi}$ が、実数 a のもつ属性とはちがった約束事に支配される数であることを表す**タダの記号**である とみる視点が確立していたと思ってよかろう.

そういうことなら、さらに深読みをすると、$a + bi$ を実数 $a,\ b$ の順序対、すなわち今で言う**平面ベクトル $(\boldsymbol{a, b})$** と見る萌芽が生まれていたにちがいない.

そして、ベッセル (1745〜1818)、アーガント (1762〜1822)、**ガウス** (1777〜1855) などによる **座標幾何**の普及を待つようにして**複素数平面**の考え方へと展開して行った のであろう.

そして、そのことによって**複素数の概念**そのものも、より精密に、より正確に裏付けられたのだとどこかに書いてあった———そういう相互の関係にも注意したい.

複素数平面についてはあとで詳しく述べるが、人々のそもそもの出発点は、あのヤッカイな図形問題を計算に乗せることから始まったのであろう.

しかし、複素数は今や、実数の枠内では記述不可能な**量子力学的な世界**の記述に至るまで大きく貢献していることは周知の事実である.

そして、改めて「**虚数は存在するか**」ということだが、この「虚数」という呼び名が何ともいかがわしくキモチワルイので誤解を招きやすいが、ここまで言えば、整数、有理数、実数が「存在する」ことと**同等の資格**でシッカリと「**存在する**」 ということがわかってもらえたかと思う.

「存在する」などと言うより、むしろ、人々がその必要にしたがって**複素数**という形で、**虚数**という「**実在する数**」を**獲得した** というべきものであろう. これは、数学の歴史からいうとそんなに遠い時代のハナシではない.

end.

＜補足説明！＞「複素数」とハミルトン先生の功績

複素数 $\boldsymbol{z = a + b\,i}$ が **実数の順序対** $\boldsymbol{(a,\ b)}$ に対応することはすでに述べた．そして、もちろん **2 次元ベクトル** も順序対である．

一般に「順序対」というとき文字、あるいは数字をヨコに並べて書くようだが、私としては

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

のようにタテに並べて書きたい．その方がずっと見通しがよい———やってみればわかる．

問題は、複素数をその四則演算にしたがって計算するとき、それぞれの複素数に対応する順序対の演算がそれに追随するか ということである———それが可能なら図形問題のかなりの部分が複素数による「単なる計算」として簡素化される だろう．

この考え方はアイルランド生まれの数学者、**ウイリアム・ローワン・ハミルトン** (1805 – 1865) が複素数を合理的に導入するために考案したといわれている．

そして、この考えが発展して**ベクトルの概念**が生まれたともいわれている．そういうことなら筆者としては、なおさら念入りに解説しておかなければばなるまい．以下、ハミルトン流の導入を追体験してみよう．

まずは**「順序対の和と実数倍」の定義**だが、**「順序対の和」**は**「実数の和」**とは決定的にちがう———ここでは**「順序対の和」**は特に区別して記号「 $\oplus$ 」を用いて表すことにする．

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ 和！},\quad k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ 実数倍！}$$

と**定義**する———これは「複素数」、「ベクトル」共に同じであるから問題ナシとしよう．

次に「 **順序対の積** 」の定義だが、これは新規に定めなければならない．そこで、実際に 2 つの複素数を $a + bi,\ c + di$ としてその積を計算すると

$$\begin{aligned}(a + b\,i)(c + d\,i) &= ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2 \longleftarrow \boldsymbol{i^2 = -1}\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\,i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

だが、ここでは実数における和と積、「$\boldsymbol{i^2}$**(虚数 × 虚数)** $\boldsymbol{= -1}$ 」をあたかも実数同士の積のように使っている———これらを 複素数の計算の**既成事実**として**順序対の積**を構成する．

それには、① の両辺の**実数部分**、**虚数部分**をにらんで ① の「 **順序対の積** 」を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ac - bd} \\ \boldsymbol{ad + bc} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と定めればよさそうだ———ただし、② の左辺はベクトルの内積のことではない．

ここで、上記の「和」と「積」については**交換則**、**結合則**、**分配則**が成り立つのでそれを使うが、その証明を確認するヒマがないので読者におまかせする．その上で、順序対の準備としては

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ 実数 } \boldsymbol{1} \text{ に}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{、虚数単位 } \boldsymbol{i} \text{ に}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{を対応させる！}\\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}\\ &= c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ 上記と同様 に対応させる！}\end{aligned}$$

としておいて、複素数の積 ① に倣って**分配則**で**式展開**を実行 すると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \left[a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\left[c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\\ &= ac\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus bc\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus ad\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus bd\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

これら 4 つの積を ② で計算するのだが、$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ はどの順序対にカケても不変だから、まず

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

は計算するまでもなくほとんど明らかである.

問題は 4 つ目の $\boldsymbol{i^2=-1}$ に当たる積の計算 だが ② にしたがって計算すると

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 0-1\cdot 1\\0\cdot 1+1\cdot 0\end{pmatrix}\longleftarrow \text{左辺は } i^2 \text{ の順序対としての表示！}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\longleftarrow \boldsymbol{i^2=-1} \text{ に対応している！}$$

結局、③ の計算結果は

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\end{pmatrix}=ac\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\oplus(bc+ad)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\oplus bd\,(-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=(ac-bd)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\oplus(ad+bc)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{ac-bd}\\\boldsymbol{ad+bc}\end{pmatrix}\longleftarrow \text{トウゼンだが②の右辺と一致する！}$$

結局、**複素数の計算**にピッタリと**順序対の計算**が追随している ことがわかる．そして、ワケがわかって混乱しなければ上記の「 $\oplus$ 」と「 $+$ 」は同じ記号「 $+$ 」でよい.

ここまでのハナシを整理すると

(1) 複素数 $\boldsymbol{a+b\,i}$ **($\boldsymbol{a,b}$ は実数)** は a と b の順序対 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ である.

(2) 複素数 $\boldsymbol{a+b\,i}$ **($\boldsymbol{a,b}$ は実数)** のすべての計算は**虚数単位**を $\boldsymbol{i}$ として

$$\boldsymbol{i^2=-1}\qquad\longleftarrow\quad \boldsymbol{i}\text{ の定義！}$$

を用いて実数の計算と同様に計算される.

につきると言ってよい.

ともあれ、ここまで書けば、**実軸の 1 目盛り** に実数の「**1**」をとり、**虚軸の 1 目盛り** に虚数単位である「$\boldsymbol{i}$」をとることにすれば、「**複素数平面**」への道は一直線 である.

さて、それはそれとして、わが**ハミルトン先生**は本当は何をやったのか．ある本に次のような記述があったので以下に紹介しておく．なかなかの卓見である.

「これは単なる表現のしかたではなく、「**定義**」である．ハミルトンいわく、複素数は実数の組以上でもなければ、それ以下でもない．それが役に立つのは、足し算と掛け算の規則をうまい具合に選んでいるからだ．実際にはありふれたものであり、それをどのように使うかが魔法を生み出している．ハミルトンはこの単純だが**天才的な一撃**で、何世紀にもわたる白熱したした論争や哲学的な議論に終止符を打った———ここがスゴイ！

しかし、すでに数学者は、複素数や複素関数の扱いに慣れすぎて、誰もそれ以上に気にかけることはなくなっていた．覚えておかなければならないのは「 $\boldsymbol{i^2=-1}$ 」だけだった のだ．」

(イアン・スチュアート「世界を変えた 17 の方程式」SoftBank Creative)

とある———そういうことだったのか.

ともあれ、このようにして**複素数**は**複素数平面**上で「**数として計算できる順序対**」として**絶大な威力**を**発揮する** のである.

end.

＜備考＞ 複素数の「差」と「商」について

上記では、ストレートにハナシを進めるために複素数の「和」と「積」についてのみ説明した．しかし、「差」と「商」についての順序対の追随はどうなっているのか、というギモンはトウゼン起こるだろう．

「和」についての逆演算である**「差」**については説明するまでもあるまい．見ての通りというか、ほとんど「明らか」である．

しかし、「積」の逆演算である**「商」**についても、高校数学よりチョッと勉強した立場では**「明らか」**とするのだが、いまそれを言っても仕方がない．初学者のわれわれとしては、実際の計算で確かめておくことにしよう———それも勉強である．

本文で示した複素数の「商」の計算は

$$\begin{aligned}
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)\boldsymbol{(c-di)}}{(c+di)\boldsymbol{(c-di)}} \quad \longleftarrow \ \text{分母子に } (c-d\,i) \text{ をかけて 分母を実数化！} \\
&= \frac{ac+(-ad+bc)i-bdi^2}{c^2-d^2i^2} \quad \longleftarrow \ \boldsymbol{i^2=-1} \text{ と置き換える！} \\
&= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{\text{実数}} + \underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{\text{実数}} i \quad \longleftarrow \ A+Bi\ (A,\ B \text{ は実数}) \text{ の形に整理する！}
\end{aligned}$$

であった．

その右辺の結果を求めるには、右辺を $x+yi$ とおいて

$$\frac{a+bi}{c+di} = x+yi \qquad \therefore\ \ a+bi=(c+di)(x+yi)$$

これを満たす $x,\ y$ を求めればよい．

つまり、「積の計算 ②」から誘導する———逆演算はもとの演算から誘導するのだ．このことは覚えておくとよい．

このことを ② を用いて順序対の積で表すと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore\ \begin{cases} cx+dy=a \\ -dx+cy=b \end{cases} \quad \longleftarrow \ \text{連立方程式として解く！}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad \therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} ac+bd \\ bc-ad \end{pmatrix}$$

となり、これが複素数で商 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ を実行した場合の結果 $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ のベクトル表示であることがわかる．

つまり、すべての**複素数の四則演算**は順序対を用いて表すことができた．ただし $c=d=0$ の場合は論外である．

以上の考察から、**「複素数平面」上**において

- **複素数の「加減、実数 (スカラー) 倍」はベクトルの「加減、実数 (スカラー) 倍」へ**
- **複素数の「積、商」は「極形式」を経て「回転と拡大・縮小」へ**

と、あるときはそれぞれ単独に、場合によっては複合的につながって行くのである．

end.