0.1　複素数平面の導入と極形式

0.1.1　複素数平面の導入

1 つの複素数

$$\boldsymbol{z = x + y\,i} \ \longleftarrow \ x,\ y \text{ は実数で } i \text{ は虚数単位！}$$

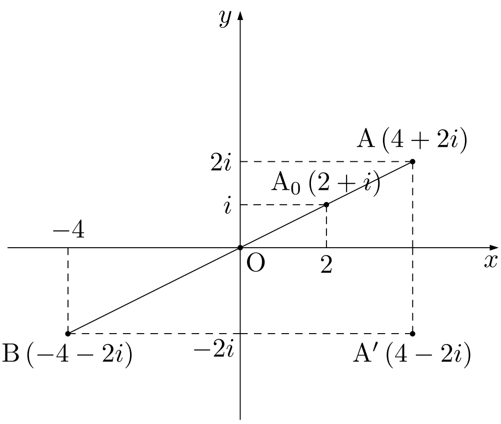
に対して実数 $x,\ y$ の**順序対** $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ がただ 1 組対応することはすでに確認した．そして、この**順序対** $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ が xy 平面上の 1 点に対応していることは改めて説明するまでもなかろう．

そういうことなら、上記の $\boldsymbol{z = x + y\,i}$ の実部 x の値を x 座標にとり、虚部 y の値を y 座標にとって、xy 平面上の点 $\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ を複素数 $\boldsymbol{z = x + y\,i}$ に対応させることはごく自然な思いつきである．

たとえば、右図で

点 A $(4\,,\ 2)\ \longleftrightarrow\ 4 + 2\,i$
点 B $(-4,\ -2)\ \longleftrightarrow\ -4 - 2\,i$

といった対応を見てもらいたい．



こういう座標平面を**複素数平面**、または**ガウス平面**という．

また、複素数平面では $\boldsymbol{x}$ 軸上の目盛りには**実数** $\boldsymbol{x}$ が対応し、$\boldsymbol{y}$ 軸上の目盛りには**虚数単位** $\boldsymbol{i}$ を用いた純虚数または 0(ゼロ) である $\boldsymbol{yi}$ が対応した表示になっている――― x 軸、y 軸をそれぞれ**実軸**、**虚軸**ともいう．

この議論で、今まで何気なく使ってきた**虚数単位**というコトバの意味が

$$|\,i\,|^2 = i \cdot (-i) = -i^2 = 1 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{|\,i\,| = 1}$$

で、**実数の単位 1** と同じ値であることもナットクするだろう――― i は y 軸の正の方向への 1 目盛りということである．

さらに、注目すべきことをいくつか挙げておくと、この平面では $z = x + yi$ の**共役複素数** $z = x - yi$ が、図の A と A$'$ のように x 軸 (実軸) に関して**対称**になっており

$$|\,z\,|^2 = x^2 + y^2 \qquad \therefore\ \ |\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

は原点から z にいたる**距離**を表していることがわかる．図の例でいえば

$$|\,4 + 2i\,| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \mathrm{OA}\ \longleftarrow\ \text{O から A までの距離！}$$

で計算される．

また、k を実数とするとき $\boldsymbol{kz}$ は、原点 O からみて $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{k}$ 倍した点を表している．たとえば、図の $4 + 2i$ の表す点 A は

$$4 + 2i = 2(2 + i)\ \longleftarrow\ \mathrm{A}(4 + 2i),\ \ \mathrm{A}_0(2 + i) \text{ とおく！}$$

であるから、$2 + i$ の表す点 A$_0$ を O から A の方に 2 倍にとった点を表している．

特に $k = -1$ のときは、もとの点 z の原点 O に関する**対称点**になる―――図の点 A と点 B の関係で確認されたい．

(注)「**複素数平面**」の導入

複素数 $\boldsymbol{a+bi}$ によって定まる**順序対**は

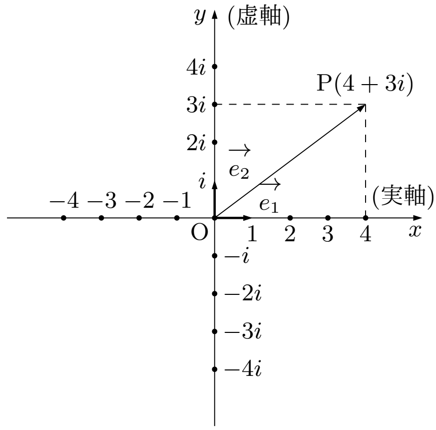
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{b}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

であることはすでに説明した．ここで

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}},\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}=\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$$

は互いに**直交**する**単位ベクトル**である．

したがって、これら $\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}$，$\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$ を**基本ベクトル**にとればこの平面上のすべての点は $(*)$ のカタチで表され、複素数 $\boldsymbol{a+bi}$ と 1 対 1 に対応する点が存在することは明らかである———図には $4+3i$ の点 $\mathrm{P}(4+3i)$ を示した．



ここで 1 つ注意しておかなければならないことがある．それは「ヨコ軸 (実軸)」は単なる数直線だから問題ナシとしてよかろう．

問題は「タテ軸 (虚軸)」で、初学者はみんな この「$\pm i$, $\pm 2i$, $\pm 3i$, $\cdots\cdots$」はナンダ、と思うらしい．要するに「i は虚数である」というイメージに振り回されてしまうのです．

ここで注意することは**目盛りは虚数部分 (実は実数)** なのだ———これはすでに計算のところで詳しく述べた．

もう少し詳しく言うと、「$\pm i$, $\pm 2i$, $\pm 3i$, $\cdots\cdots$」の**係数**に当たる「± 1, ± 2, ± 3, $\cdots\cdots$」は**目盛りを表す数値**で、これについている i は数値としての $\sqrt{-1}$ のことではなくて**「虚軸上の目盛りだよ」**という**合図**というか**印**というかそういう意味でしかない のです．

チョッとクドイが図中の点 $\mathrm{P}(4+3i)$ で確認しておこう．つまり、複素数 $4+3i=z$ とおくと

$(z$ の実数部分$)=4$

$(z$ の虚数部分$)=3$ (これは実数)　$\longleftarrow$　$3i$ ではない！

ということなのだ．虚軸上の目盛りには「$\pm i$, $\pm 2i$, $\pm 3i$, $\cdots\cdots$」と書き込んでいるが、それはただ「そう書いている」というだけで実効の目盛りは実数値であり、だからこそ「図形と方程式」や「ベクトル」の議論がほとんどそのまま通用する———ここが有難いのである．

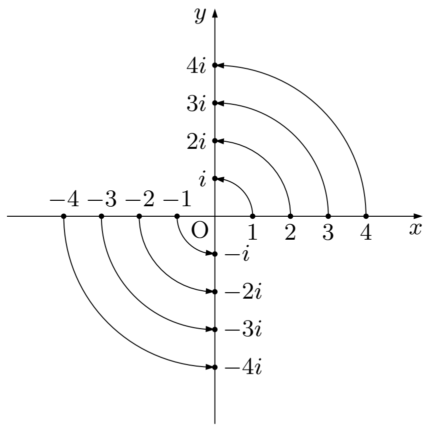
しかし、その議論の中核となる数式は複素数の約束にしたがった記述となるので、一応わかってはいても慣れないとそれなりに難しい．ここを無事に乗り越えるには、**初等幾何**、**図形と方程式**、**ベクトル**、そして**関数**などの総合的な力の裏づけが必要となる．間に合わない人はその都度確認しながら進む覚悟が必要である．

end.

＜補足説明＞ 虚軸は数直線を 90° 回転して得られる.

まず、平面上に**数直線**をおいてみよう．ただし、これは 0 を基点として**右方向**に**正の数**をとり、**左方向**はその逆方向の変位の表現として**負の数**をとる ものとする.

そこで、数直線上の各数値に (-1) をかけてみると数直線は全くの逆向き、すなわち反時計回りに 180° 回転したことになる.



では、この「 $\boldsymbol{\times(-1)}$ 」は何を意味するか．つまり、その内訳は

$$\boldsymbol{(\text{実数}) \times (-1) = (\text{実数}) \times \underbrace{i \times i}_{-1}}$$

で、 $\boldsymbol{i}$ を 2 回かけて 180° の回転だから 1 回の i では反時計まわり 90° の回転 と読め.

もっとも、 (-1) をかけて数直線が逆向きになるところは時計回りに 180° の回転と見れなくもないが、この場合は 1 回の回転では虚軸が逆向きになってしまい、われわれの使い勝っての要件を満たさないから却下とすればよい.

ともかくも、このようにして**複素数平面**が確定し、**実軸**、**虚軸**、**虚数単位**などの数学用語が具体的な意味を持つことになった.

こう説明すると簡単そうに見えるが、歴史的にはあれやこれやといろいろな議論があったらしい．しかし、これはなかなかキレイな説明ではある.

end.

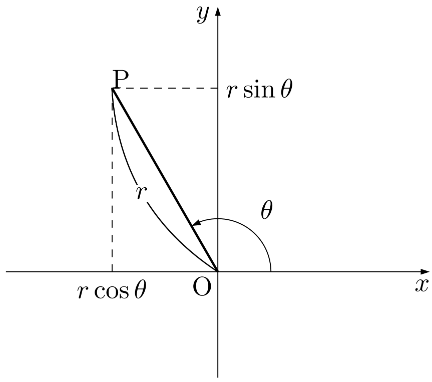
0.1.2　極形式による表示

複素数平面上の点を指定する方法には、実はもう 1 つ重要な方法がある———**極形式**といわれている．これは、たとえば複素数

$$\boldsymbol{z = x + yi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が指定する複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ とするとき、①が「x 丁目 y 番地」に似た表示 であることに対し、たとえば「東を基準に 角度 θ、距離 $r\,(=\mathrm{OP})$」に似た表示 と思ってもらえばよい———チョッと雑駁ではあります．

図で OP の長さを r、線分 OP を x 軸の正方向から測る角を θ とすると



$$\boldsymbol{x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta} \cdots\cdots (*)$$

であるから、これを ① に入れて

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta + (r\sin\theta)\,i \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \end{aligned}$$

だが、このとき

$$\begin{aligned} |z|^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \\ &= r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) = r^2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{r = |z|} \end{aligned}$$

であることがわかる．

すなわち、① は ② の形に表され、その関係が $(*)$ である———これは O を原点、$\overrightarrow{\mathrm{O}x}$ を始線とするときの点 P の**極座標表示** $\mathbf{P}\,(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{\theta})$ の場合と同じ である．

そこで ② の形を ① の**極形式**と呼ぶのである．特に $r = 0$ のとき、θ は定まらないからこれは任意の角でよいとする．また、z の絶対値 $|z|$ は負でないから、z に対する r はただ 1 つ定まり、その値は正または 0 である．

さて、θ については、これを z の**偏角**といい、$\boldsymbol{arg\ z}$ で表す．上の図でいうと

$$arg\ z = \theta$$

ということである．そしてこの記号「$\boldsymbol{arg}$」は $\boldsymbol{argument}$（アーギュメント）(**偏角の意味**) の略で、その 1 つを α とするとすべての θ は

$$\theta = \alpha + 2n\pi \quad (n \text{ は任意の整数})$$

で表されるが、それではあまりにウットオシイので、普通はこれらの角の 1 つで代表させている．その代表としては 1 回り (360°) のどこかで表せばよい ので

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi,} \ \text{または}\ \boldsymbol{-\pi \leqq \theta < \pi}$$

の範囲で選ぶことが多い．たとえば $z = 1 - i$ でいえば

$$arg\ z = \frac{7\pi}{4},\quad arg\ z = -\frac{\pi}{4}$$

のどちらで示してもよい．

＜メモ＞

■ あらためて極形式

　複素数の極形式とは、通常の複素数が $\boldsymbol{z = a + bi}$ の形をしているのに対して

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

の形をしているもののことをさしている．
　そして、極形式の形をした複素数は特に複素数の乗除でその威力を発揮する．そのため複素数の乗除の計算は、それに参加する複素数を 必ず極形式に直してから計算するのが基本 である．
　ところで、極形式で表された複素数を通常の形に展開するのは簡単だが、与えられた通常の形の複素数を極形式に変形するのはチョッと難しい．
　そこで、以下に 極形式の基本原理と実際の計算方法 を説明しておく．

(i) 極形式の基本原理 —— $\boldsymbol{x + y\,i = x' + y'\,i \iff x = x',\ y = y'}$ を利用する

$$a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta \quad (\ = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ )$$

$$\therefore\quad a = r\cos\theta,\quad b = r\sin\theta \longleftarrow \text{ 両辺の実部、虚部を比較！}$$

これらを 2 乗して加えると

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \\ &= r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} = 1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

これを $a,\ b$ に入れて

$$\begin{cases} a = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos\theta = r\cos\theta \\ b = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin\theta\ = r\sin\theta \end{cases}$$

が得られるから

$$\begin{aligned} a + bi &= r\cos\theta + (r\sin\theta)\,i \\ &= \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \qquad \longleftarrow \text{ 目的達成！} \end{aligned}$$

となり、極形式での表示が達成される．

(ii) 実際の計算方法 —— $\boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を前にくくりだす

　いきなり「$\sqrt{a^2 + b^2}$ を前にくくりだす」などというと、「えっ？」と思うかも知れないが、これは 上記の基本原理で得られた結果を知った上での簡便な計算方法 と思ってもらえばよい．

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{r}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,i\right) \quad \longleftarrow\ \boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ をくくりだした！} \end{aligned}$$

ここで $(\cdots\cdots)$ の中に注目すると

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$$

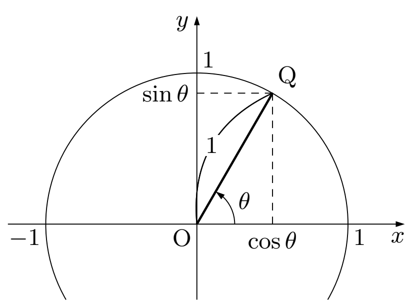
であるから

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\theta,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\theta}$$

を満たす角 θ が存在する——単位円周上で考えよ．
　そこで、上記をこれらで置き換えると

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \end{aligned}$$

で、極形式への変形が達成された——参考のために図を添えておく．



＜例＞

次に与えられた複素数を極形式で表し偏角を示せ．

(1) $1+i$　　(2) $1-\sqrt{3}\,i$　　(3) $4+3i$

（解） 以下、上記の (ii) にしたがって実例で計算してみよう．しかし、「こうやればうまくいく」のはなぜか、ということを**基本原理**に立ち返って確認しておいてもらいたい．

(1) $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから、これを前にくくり出して

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)\quad\longleftarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}\ \text{と読む！}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)},\quad \textbf{偏角は}\,\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(2) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから同様に

$$1-\sqrt{3}\,i=2\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right\}\quad\longleftarrow\quad \frac{1}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right),\ -\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\boldsymbol{2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}},\quad \textbf{偏角は}\,\boldsymbol{-\frac{\pi}{3}}$$

(3) $\sqrt{4^2+3^2}=5$ であるから、これも同様に

$$4+3\,i=5\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i\right)$$

ここまでは (1) (2) だと同様だが

$$\frac{4}{5}=\cos\theta,\quad \frac{3}{5}=\sin\theta$$

となる θ を (1) (2) のようには表せない．仕方がないから、仮に $\theta=\alpha$ として

$$4+3\,i=\boldsymbol{5(\cos\alpha+i\sin\alpha)},\quad \textbf{偏角は}\,\boldsymbol{\alpha}$$

とする．しかし、α がどういう角かの説明がほしい．

それには「**但し書き**」をつける．つまり、ただし α は

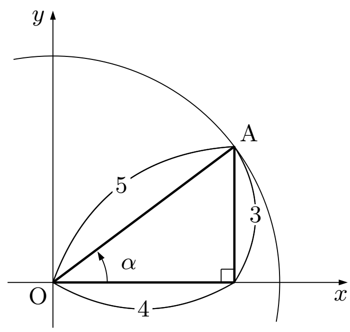
$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\quad \sin\alpha=\frac{3}{5},\quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

を満たす角である、などと書けばよい．

あるいは

$$\tan\alpha=\frac{3}{4}=0.75\quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

でもよかろう．



ちなみにこの α は

$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.57736\cdots\quad\longleftarrow\quad\text{電卓で計算！}$$
$$\tan\frac{\pi}{4}=1$$

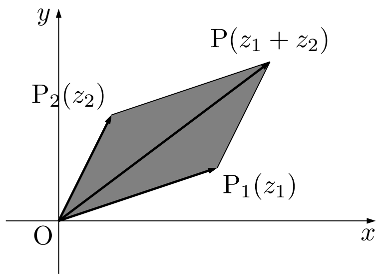
だから、$\dfrac{\pi}{6}$ よりは大きいが $\dfrac{\pi}{4}$ より小さい角であることがわかる——このような目見当も多少は役に立つときがある．

一件落着！

0.2　複素数の計算を複素数平面上で見る

0.2.1　複素数平面上の四則

0.2.1.1　複素数の「和」、「差」、「実数 (スカラー) 倍」を見る



＜1＞「和」を見る

2 つの複素数 $z_1,\ z_2$ を

$$z_1 = a_1 + b_2\,i,\quad z_2 = a_2 + b_2\,i$$

とするとき、その和は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z_1 + z_2} &= (a_1 + b_1\,i\,) + (a_2 + b_2\,i\,)\\ &\boldsymbol{= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i}\end{aligned}$$

である．これは図形的にどんな意味を持ちえるか.

まず、**複素数平面**上の $z_1,\ z_2$ の表す点を $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ としておこう．その上で z_1 に z_2 を加えるということは

$$\begin{cases}\mathrm{P}_1\text{の } x \text{ 成分 (実部) に } a_2\text{を加える} \;\longleftarrow\; \text{実軸方向に } a_2\text{だけ平行移動！}\\ \mathrm{P}_1\text{の } y \text{ 成分 (虚部) に } b_2 \text{ を加える} \;\longleftarrow\; \text{虚軸方向に } b_2\text{だけ平行移動！}\end{cases}$$

ということであり、これは**複素数平面**上で

点 $\mathbf{P_1}$ を $\overrightarrow{\mathbf{OP_2}}$ だけ平行移動する

ことに他ならない.

図でいうと、$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形 $\mathbf{OP_1PP_2}$ を作るとき、その第 4 頂点 P が上記に $z_1 + z_2$ を表す ことを意味している.

このことを原点を始点とした**ベクトル**で表すと

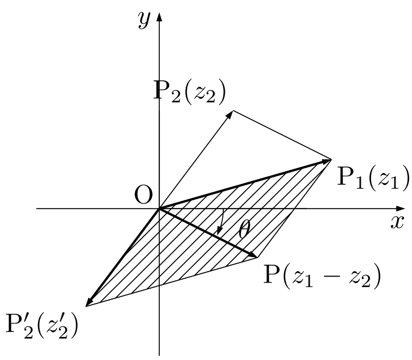
$$\overrightarrow{\mathbf{OP_1}} + \overrightarrow{\mathbf{OP_2}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}},\quad \text{あるいは } \overrightarrow{\mathbf{OP_2}} = \overrightarrow{\mathbf{P_1P}}$$

で複素数 $z_1,\ z_2$ の和は、複素数平面上でこれと同じことを表しているわけである.

＜2＞「差」を見る

複素数の差についても同様にベクトルに対応させて考えればよい．すなわち

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z_1 - z_2} &= (a_1 + b_1\,i\,) - (a_2 + b_2\,i\,)\\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i\\ &= \{a_1 + (-a_2)\} + \{b_1 + (-b_2)\}\;i\\ &= z_1 + (-z_2)\end{aligned}$$



であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}\quad (= \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1})$$

と同じことを表している.

　このとき特に $(z_1 - z_2)$ で計量される注目すべきものは

$$\boldsymbol{|z_1 - z_2| = \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\right|} \quad \longleftarrow \quad \textbf{2 点 } \mathbf{P_1,\ P_2}\textbf{間の距離！}$$

$$\boldsymbol{arg\ (z_1 - z_2) = \theta} \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{\theta}\ \textbf{は}\overrightarrow{\mathbf{P_2P_1}}\ \textbf{が実軸の正方向とのなす角！}$$

がある.

＜3＞「実数 (スカラー) 倍」を見る

　これはもう説明するまでもなかろう.

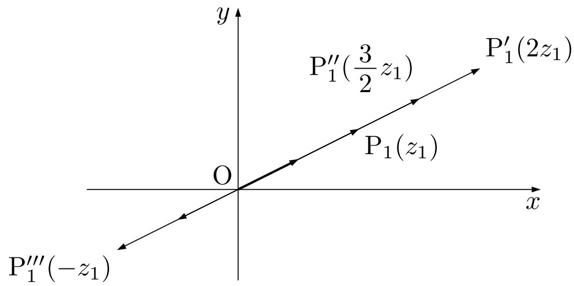
$$z = kz_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$$

ということである.

　図の $\mathrm{P_1}'$, $\mathrm{P_1}''$, $\mathrm{P_1}'''$ は

$$k = 2, \quad \frac{3}{2}, \quad -1$$

の場合について示したものである.



　いろいろな k の値について確認しておくとよい.

＜メモ＞

■「和、差、スカラー (実数) 倍」のまとめ

ここまでのところ、複素数 $\boldsymbol{a+bi}$ は複素数平面上におけるベクトルの成分表示 と思ってよい．すなわち

$$\boldsymbol{a+bi} \iff \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{しかし、}\boldsymbol{a+bi}\ (=z)\ \text{は 1 つの 数字 なのだ！}$$

である――――その 扱い方もベクトルの場合と同様 である．チョッと練習をしておこう．

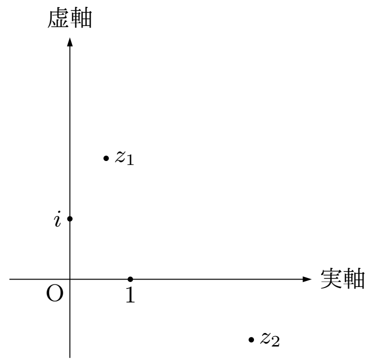
＜例＞

右の図は複素数平面上の

z_1,　z_2,　1,　i

の表す点を示している．
次の各複素数を表す点を図示せよ．
また、それを作図する方法を簡単に説明せよ．

(1) z_1+z_2
(2) $-\dfrac{z_1}{3}-z_2$
(3) $\dfrac{2z_1-z_2}{2}$
(4) z_1-2-i



(解) 和、差、スカラー (実数) 倍 の約束にしたがって作図すればよい．それにはまず、z_1, z_2 が指定する点を A(z_1), B(z_2) などと名前をつけておくと説明がしやすい．

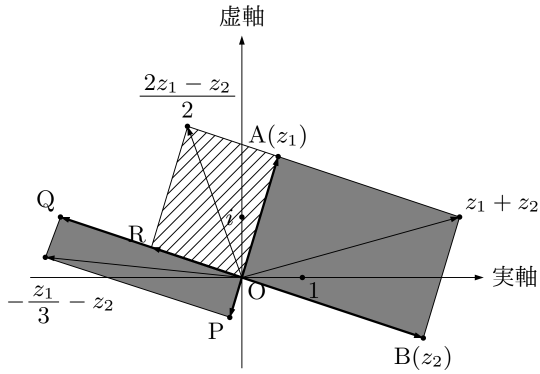
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形のもう 1 つの頂点が (z_1+z_2) である．

(2) 直線 OA の延長線上に

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である点 P をとり、O に関する B の対称点を Q とする．

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の、もう 1 つの頂点が $-\dfrac{z_1}{3}-z_2$ である．



(3) 与えられた複素数を

$$\frac{2z_1-z_2}{2}=z_1-\frac{1}{2}z_2$$

と変形し、線分 OQ の中点を R とする．

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の、もう 1 つの頂点が $z_1-\dfrac{1}{2}z_2$, すなわち複素数 $\dfrac{2z_1-z_2}{2}$ の指定する点である．

(4) z_1 を左へ 2、下へ 1 だけ平行移動したものが複素数 z_1-2-i の指定する点である．

一件落着！

0.2.1.2　複素数の「積」、「商」を見る

お待たせしました．ここからは極形式の独壇場です．「数」としての複素数と「ベクトル」としての複素数との **2** 面性に注目して読み進めて下さい.

＜**1**＞「積」を見る

まず、複素数 $\boldsymbol{z_1}$，$\boldsymbol{z_2}$ を極形式で表しておく.

$$\boldsymbol{z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\,)}$$

ただし、$r_1 = |\,z_1\,|,\ r_2 = |\,z_2\,|$ である.

このとき、積 $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2}$ は

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\,) \\ &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,)(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\,) \longleftarrow \text{展開して加法定理！} \\ &= r_1r_2\{\underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\underbrace{(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)}_{\sin(\theta_1+\theta_2)}\} \\ &= \boldsymbol{r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\ \sin(\theta_1+\theta_2)\}} \end{aligned}$$

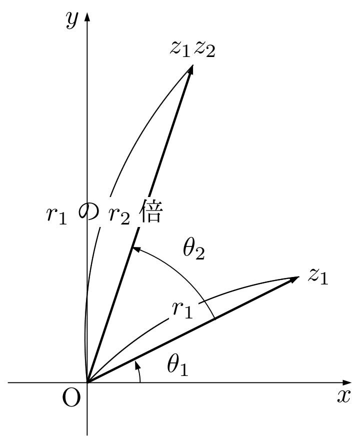
また、偏角の関係を式で表すと

$$\boldsymbol{arg\,(z_1z_2) = arg\,z_1 + arg\,z_2}$$

すなわち、z_1 に z_2 をかけて得られる点は

「$\boldsymbol{|\,z_1\,|\,(= r_1)}$ を $\boldsymbol{r_2}$倍に伸縮し、

原点 **O** のまわりに$\boldsymbol{\theta_2}$だけ回転する 」



ことで得られる———これがすべての出発点であり、当面「必要なことのすべて」と思ってよい.

しかし、この複素数の「積 $\boldsymbol{z_1z_2}$」を複素数平面上に作図する方法がある———以下に紹介する.

(i)　$\boldsymbol{\alpha\beta = \gamma\delta}$ (積が不変) の関係を見つけて細工をする.

具体的には、三角形の相似条件を使って複素数の積の関係を誘導する. 右図で

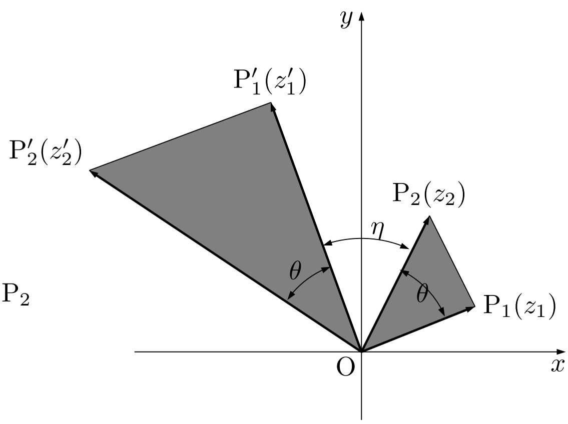
$$\boldsymbol{\triangle \mathrm{OP_1P_2} \backsim\ \triangle \mathrm{OP'_1P'_2}}$$

ただし、同じ向きの相似とする.

そうすると対応する辺の比は

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{OP'_1}}{\mathrm{OP_1}} = \frac{\mathrm{OP'_2}}{\mathrm{OP_2}}}\quad (= k \text{ とおく})$$

$$\therefore\quad \mathrm{OP}'_1 = k\mathrm{OP}_1,\quad \mathrm{OP}'_2 = k\mathrm{OP}_2$$



また、挟む角は

$$\boldsymbol{\angle \mathrm{P_1OP_2} = \angle \mathrm{P'_1OP'_2} = \theta}$$

ここで、$\angle \mathrm{P_2OP'_1} = \eta$ とおくと相似による回転角は

$$\boldsymbol{\theta + \eta = \phi}\ (\textbf{図形の回転角})$$

とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{OP'_1}}\ \text{は}\ \overrightarrow{\mathbf{OP_1}}\ \text{を}\ \boldsymbol{k}\ \text{倍して}\boldsymbol{\phi}\ \text{回転} \\ \overrightarrow{\mathbf{OP'_2}}\ \text{は}\ \overrightarrow{\mathbf{OP_2}}\ \text{を}\ \boldsymbol{k}\ \text{倍して}\boldsymbol{\phi}\ \text{回転} \end{cases}$$

だから、この関係を複素数で表せば $k(\cos\phi + i\sin\phi\ ) = w$ をかければよい.

すなわち

$$\begin{cases} \boldsymbol{z'_1 = z_1 w} \\ \boldsymbol{z'_2 = z_2 w} \end{cases} \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{\frac{z'_1}{z_1} = \frac{z'_2}{z_2}}\ \ (= w)$$

ゆえに $\boldsymbol{z_1,\ z'_1,\ z_2,\ z'_2}$ の関係式は比例式の分母を払って

$$\boldsymbol{z'_1 z_2 = z_1 z'_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

だが、都合のよいことに この関係は $\boldsymbol{w}$ によらない. つまり、相似である三角形の大きさや形状、O の回りの回転角などによらず成り立つ のである.

(ii) そこで細工をする

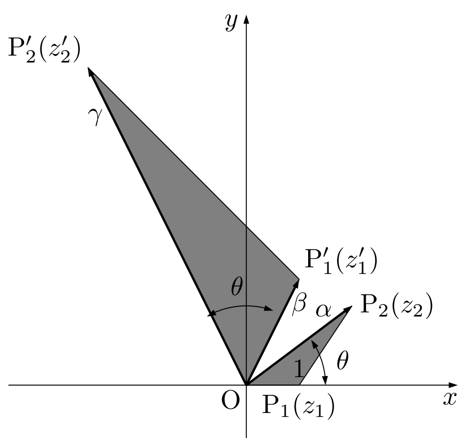
それは $(*)$ の $\boldsymbol{z_1,\ z'_1,\ z_2,\ z'_2}$ のうちで 1 文字を簡単な数値で固定する———たとえば $\boldsymbol{z_1 = 1}$ とおく. そうすると $(*)$ は

$$\boldsymbol{z_2 z'_1 = z'_2} \ \longleftarrow\ \ \textbf{積}\ \boldsymbol{z_2 z'_1}\ \textbf{の指定する点は}\ \boldsymbol{z'_2}\ \textbf{である！}$$

というわけで、求める点が作図できた ことになるではないか.

その要領を改めて説明すると

(1) 実軸上に点 $\mathrm{P_1}(z_1 = 1)$ をとり、$\triangle \mathrm{P_1OP_2}$ を作る.
(2) 点 $\mathrm{P'_1}(z'_1)$ をとり、$\triangle \mathrm{P'_1OP'_2}$ を $\triangle \mathrm{P_1OP_2}$ と同じ向きに相似になるように作る.
(3) 得られた点 $\mathrm{P'_2}(z'_2)$ が積 $z_2 z'_1$ の指定する点である.



ということだが、まだ何やらゴチャゴチャしてわかりにくい. 仕方がないから

$$\boldsymbol{z_2 = \alpha,\quad z'_1 = \beta,\quad z'_2 = \gamma}$$

と名前をつけてみよう. そうすると

$$\boldsymbol{\alpha\beta = \gamma}$$

要するに、図のような相似三角形を作って $\boldsymbol{\alpha}$ に対応する辺 $\boldsymbol{\gamma}$ を探せばよい ことがわかる.

あるいは、偏角に注目すれば

$$arg\ \alpha\beta = \underbrace{arg\ \alpha}_{\theta} + \arg\ \ \beta = arg\ \gamma$$

から条件を満たす点は $\boldsymbol{\alpha}$ に対応する辺 $\boldsymbol{\gamma}$ であることがわかる.

＜２＞「商」を見る

この場合も最初に、複素数 $z_1,\ z_2$ を極形式で表しておく.

$$\boldsymbol{z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\,)}$$

とおく．ただし、$r_1 = |\,z_1\,|,\ r_2 = |\,z_2\,|$ である．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,)}{r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\,)} \longleftarrow \text{分母を実数化！}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,)(\cos\theta_2 - i\ \sin\theta_2\,)}{(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\,)(\cos\theta_2 - i\ \sin\theta_2\,)}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,)\{\cos(-\theta_2) + i\ \sin(-\theta_2\,)\}}{\underbrace{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}_{1}} \longleftarrow \text{分子に積の計算！}\\
&= \boldsymbol{\frac{r_1}{r_2}\cdot\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}}
\end{aligned}$$

で、偏角については

$$\boldsymbol{arg\ \frac{z_1}{z_2} = arg\ z_1 - arg z_2}$$

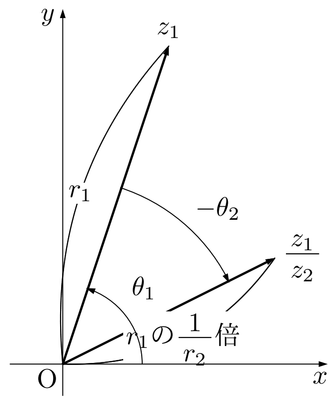
である.

したがって、複素数 z_1 を z_2 で割るとき、$\dfrac{z_1}{z_2}$ の指定する複素数平面上の点は

$\boldsymbol{r_1\,(=|\,z_1\,|)}$ を $\boldsymbol{\dfrac{1}{r_2}}$ 倍に伸縮し、

原点 **O** を中心に $(\boldsymbol{-\theta_2})$ の回転する

することで得られることがわかる.



まあ、必須事項はここまでと思ってよい．しかし、「積」の場合と同様に「商」についても作図することができる．ついでのことだからそれも説明しておく.

「積」のところで **(i)** として説明した三角形の相似条件はそのまま使える から

$$\boldsymbol{z_1' z_2 = z_1 z_2'}$$

その上で **(ii)** の $\boldsymbol{z_1 = 1}$ とおくところも同じでよい．そうすると

$$\boldsymbol{z_1' z_2 = z_2' \qquad \therefore\ \ z_1' = \frac{z_2'}{z_2}}$$

複素数 $\boldsymbol{\dfrac{z_2'}{z_2}}$ を作図するには

(1) 実軸上に点 $\mathrm{P}_1(z_1 = 1)$ をとり、$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2$ を作る.

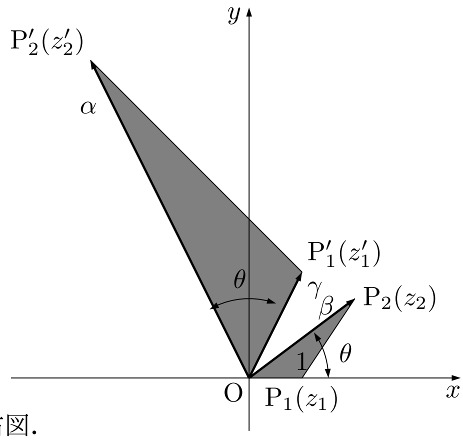
(2) 点 $\mathrm{P}_1'(z_1')$ をとり、$\triangle \mathrm{P}_1'\mathrm{OP}_2'$ を $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2$ と同じ向きに相似になるように作る.

(3) 得られた点 $\mathrm{P}_1'(z_1')$ が商 $\dfrac{z_2'}{z_2}$ の指定する点である.

となるが、やはりうっとおしい.

そこで
$$z_2' = \alpha,\quad z_2 = \beta,\quad z_1' = \gamma$$
と名前をつけかえてみよう．そうすると
$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \gamma}$$
となってわかり易い———相似条件で z_1 に対応する辺を探せばよいことがわかる．

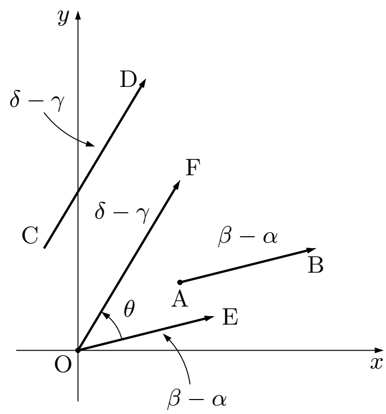
また、偏角に注目すれば
$$arg\ \frac{\alpha}{\beta} = arg\ \alpha - \underbrace{arg\ \beta}_{\theta} = arg\ \gamma$$
で実情を表していることが確認される———右図．



(注)「平行」、「垂直」、「共線」の条件を複素数で表示する

「$\boldsymbol{arg}$」の概念を導入すると、「**2 次元ベクトルのなす角**」がずっと扱い易くなる———タダの数値計算でイケルところがありがたい．とはいえ、複素数にはそれ固有の難しさもあるので、使える場面でシカルベク使うというココロが大切である．

右図で、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を求めたいが、始点が離れているので具合が悪い．視覚的には共に**原点が始点**となるように**平行移動**するのだが、ベクトルでも複素数でもそれは自動的にクリアされる (後述)．そうすると
$$\boldsymbol{arg\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} = \theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
として偏角 θ が定まる．



ただし、直線には方向性がないので **2 直線のなす角 $\boldsymbol{\phi}$** というときは、① の θ の数値を見た上で定義にあわせて $0 \leqq \phi \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で答えなければならない．以上、前置きをして

(i) 平行条件

① の値が「$\boldsymbol{\theta = 0}$, **または** $\boldsymbol{\pi}$」のときだから
$$\boldsymbol{\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} = k}\ \textbf{(0 でない実数)}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} = \frac{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}}$$

(ii) 垂直条件

① の値が「$\boldsymbol{\theta = \pm\frac{\pi}{2}}$」のときだから
$$\boldsymbol{\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} = ki}\ \textbf{(純虚数)}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} + \frac{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = 0,\quad \frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} \neq \frac{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}}$$

(iii) 共線条件

3 点 A, B, C が「共線 (同一直線上)」ということは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が平行ということで、「(i) の特別の場合」と考えればよいから求める条件は
$$\boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = k}\ \textbf{(0 でない実数)}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}}$$
となる———これらは場合によるとかなり役に立ちます．

end.

＜メモ＞

■「積」、「商」と極形式

「積」や「商」を含む計算では極形式は不可欠である．特にこのあとド・モアブルの定理、円分方程式などでその有難さが身にしみることになろう．

その前にチョッとした練習をしておきたい．以下はそのためのものと思ってもらえばよい．

＜例＞

次に与えられた複素数を極形式で表し偏角を示せ．

(1) 複素数 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ を $a+bi$ の形になおせ．

次に、分母と分子を極形式で表すことにより、$\cos\dfrac{\pi}{12}$， $\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(2) 複素数 z が

$$\left|\frac{z-1}{z}\right|=\frac{1}{2},\quad arg\ (z-1)=\frac{\pi}{3}+arg\ z$$

を満たすとき z を求めよ．

（解） (1) 前半はスナオに計算し、極形式との絡みは後半のハナシ―――「何をやらせたいか」、全体を見通すこと．

$$z=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\quad\longleftarrow\quad \textbf{分母を実数化！}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3}\,i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}+i\,(\sqrt{3}-1)}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,i}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

次に z の分母子を極形式になおす．

$$(\text{分子})=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\quad\longleftarrow\quad\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2\ \text{を前に括り出す！}$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(\text{分母})=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad\longleftarrow\quad\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\ \text{を前に括り出す！}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

以上の結果から

$$z=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで ①と② の実部と虚部を比較して

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\quad\longrightarrow\quad\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\quad\longrightarrow\quad\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

(2) 与えられた条件から

$$\boldsymbol{\left|\frac{z-1}{z}\right|=\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{arg\ \frac{z-1}{z}=arg\ (z-1)-arg\ z=\frac{\pi}{3}}\quad\longleftarrow\quad arg\ (z-1)=arg z+\frac{\pi}{3}$$

ゆえに $\dfrac{z-1}{z}$ を極形式で表すと

$$\boldsymbol{\frac{z-1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} \longleftarrow \text{ いきなりこう書きたい！}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}$$

分母を払って整理すると

$$4(z-1) = z(1+\sqrt{3}\,i) \longleftarrow \boldsymbol{z} \text{ について解く！}$$

$$\therefore\quad (3-\sqrt{3}\,i)z = 4$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{z = \frac{4}{3-\sqrt{3}\,i}} \longleftarrow \text{ 分母を実数化！}$$

$$= \frac{4\,(3+\sqrt{3}\,i)}{(3-\sqrt{3}\,i)(3+\sqrt{3}\,i)}$$

$$= \frac{4\,(3+\sqrt{3}\,i)}{12} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}\,i}{3}}$$

難しい問題ではないが、よくわかっていないとスマートには書けないぞ.

一件落着！

0.2.2 ド・モアブルの定理と円分方程式

0.2.2.1 ド・モアブルの定理

極形式を用いた積と商の計算から次の定理が導かれる．

ド・モアブルの定理

n を自然数とするとき

$$\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

が成り立つ．

(解説) 2 つの複素数 z_1, z_2 の積と商の計算で

$$|z_1| = |z_2| = 1\ (r_1 = r_2 = 1),\quad arg\ z_1 = \theta_1,\ arg\ z_2 = \theta_2$$

とすると 極形式における乗除の基本になる重要な公式 が導かれる．

すなわち

$$\boldsymbol{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)} \cdots\cdots ①$$

$$\boldsymbol{\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)} \cdots\cdots ②$$

が成立する．

ここで ① を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots\cdots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)\\&\qquad = \cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)\end{aligned}$$

だが、 $\theta_1 = \theta_2 = \cdots\cdots = \theta_n$ とおくと

$$\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta} \longleftarrow \text{ド・モアブルの定理！}$$

となり上記が証明される．

しかし、キチンとやりたい向きには数学的帰納法という手がある．やっておこう．

(i) $n=1$ のときは明らかに成り立つ．

(ii)$n=k$ のときの成立を仮定 すると

$$\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta}$$

$n = k+1$ のときは

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= \boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^k}(\cos\theta + i\sin\theta)\\&= \boldsymbol{(\cos k\theta + i\sin k\theta)}(\cos\theta + i\sin\theta)\\&= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\&= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

すなわち、 $n = k+1$ のときも成り立つことがわかる．

よって、(i) と併せて上記 (n が自然数) のド・モアブルの定理は証明された．

end.

<メモ>

■ ド・モアブルの定理の拡張と運用———実は、すべての整数 $\boldsymbol{n}$ で成り立つ

本文に述べたド・モアブルの定理は $\boldsymbol{n}$ を自然数として

$$(\cos\theta + i\,sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

というものであった．しかし、この定理は $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{0}$ や負の数を含むすべての整数にまで拡張することができる———やっておかねばなるまい．

まず、$n < 0$ のときは $\boldsymbol{n = -m\,(m > 0)}$ とおける から、本文の公式 ① ② を用いて

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\ \sin\theta)^{-m} \\ &= \frac{1}{(\cos\theta + i\ \sin\theta)^m} \quad \longleftarrow \begin{cases} 1 = \cos 0 + i\sin 0 \\ (\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \end{cases} \\ &= \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \\ &= \cos(0 - m\theta) + i\sin(0 - m\theta) \\ &= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) = \boldsymbol{\cos n\theta + i\sin n\theta}\end{aligned}$$

となり、この定理 $(*)$ は $\boldsymbol{n}$ が負の整数でも成り立つことが証明される．

また、 $\boldsymbol{(\cos\theta + i sin\theta)^0 = 1}$ と約束 しておけば

$$\underbrace{(\cos\theta + i\ \sin\theta)^0}_{1} = \underbrace{\cos(0\cdot\theta)}_{1} + i\underbrace{\sin(0\cdot\theta)}_{0}$$

であるから $(*)$ は $\boldsymbol{n = 0}$ でも成り立つことがわかる．

ド・モアブルの定理 $(*)$ はすべての整数 $\boldsymbol{n}$ で成り立つ、きわめて応用範囲の広い定理であることが確認された———ここまでやっておけばもう安心だ．

< 例 >

(1) 次の複素数を求めよ．

(i) $(1-i)^6$ (ii) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ (iii) $\left(\dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}\right)^n$

(2) ド・モアブルの定理を用いて、三角関数の 2 倍角の公式、3 倍角の公式 を導け．

(解) (1) (i) の 6 乗は先に 3 乗してそれを 2 乗するなどすれば素手でやれる———むしろその方が速くて確実かもしれない．

しかし、(ii) の 12 乗とか、(iii) の n 乗 (一般のカタチ) になるとそうは行かない．もはや、どうしても極形式の威力を借りなければならなくなる．順次やってみよう．

(i) 素手でやるのはお任せする———極形式に変形して 6 乗しよう．

$$\begin{aligned}1 - i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \quad \longleftarrow \quad \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ を前に括り出す！} \\ &= \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (1-i)^6 &= \left[\ \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\ \right]^6 \\ &= (\sqrt{2})^6\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^6 \\ &= 2^3\{\underbrace{\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}_{0} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}_{1}\} = 8i\end{aligned}$$

と、まあこんな具合だが、結構メンドウではある．

(ii) これは $\underline{1+i\text{ と }\sqrt{3}+i\text{ を極形式に変形してから}}$ だろう.

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \longleftarrow \sqrt{\mathbf{1^2+1^2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}\text{ を前に括り出す！}$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \longleftarrow \sqrt{\boldsymbol{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\mathbf{2}\text{ を前に括り出す！}$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに 12 乗の中味は

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

であるから

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right\}^{12}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{12} \longleftarrow \text{ド・モアブルの定理！}$$
$$=\frac{1}{64}(\underbrace{\cos\pi}_{-1}+i\underbrace{\sin\pi}_{0})=\boldsymbol{-\frac{1}{64}}$$

となることがわかる.

あるいは、① のカタチのまま 12 乗する. このときは分母と分子にバラバラに**ド・モアブルの定理**を用いるから、この定理をを 2 回使うことにはなるが

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}=\frac{(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{12}}{2^{12}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12}} \longleftarrow \text{分母子にド・モアブルの定理！}$$
$$=\frac{1}{64}\frac{\cos(3\pi)+i\sin(3\pi)}{\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)}=-\frac{1}{64}$$

で、トウゼン同じ結果になる.

あるいは 不幸にして

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \longleftarrow \text{分母の実数化！}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

とやってしまった人、**気の毒**だがこのままでは仕方がない. それでも

$$\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

を知っていれば

$$\text{②}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right) \longleftarrow \text{②で }\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ を前に括り出した！}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

だから**ド・モアブルの定理**が使えて上記のハナシにつながることはつながる．しかし、何となく不自然で見苦しい———答が合えばよいというものではない．

(iii) こうなると、ほとんど**三角関数**の知識に依存 する．まず、n 乗の中味の分子は

$$
\begin{aligned}
1+\cos\theta+i\sin\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \longleftarrow \textbf{倍角公式！}\\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

分母は これと**共役** だから

$$
1+\cos\theta-i\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)
$$

ゆえに n 乗の中味は

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta} &= \frac{\cancel{2\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \boldsymbol{\cos\theta+i\sin\theta}
\end{aligned}
$$

ゆえに、求めるものはこれを n 乗して

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n &= (\cos\theta+i\sin\theta)^n\\
&= \boldsymbol{\cos n\theta+i\sin n\theta}
\end{aligned}
$$

(2) まず、**2 倍角の公式**は**ド・モアブルの定理**を利用して

$$
\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta} \cdots\cdots ①
$$

このとき左辺を展開すると

$$
(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+i(2\sin\theta\cos\theta) \cdots\cdots ②
$$

① ② の右辺は等しいから 両辺の実部、虚部を比べて ($\longleftarrow$ **複素数の相等！**)

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta} \quad (=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta)\\
\boldsymbol{\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta}
\end{cases}
$$

3 倍角の公式も同様にして

$$
\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta} \cdots\cdots ③
$$

このとき左辺を展開すると

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\ \sin\theta)+3\cos\theta(i\ \sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3\\
&= \cos^3\theta-3\cos\theta\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}+i(3\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta}\sin\theta-\sin^3\theta)\\
&= 4\cos^3\theta-3\cos\theta+i\,(3\sin\theta-4\sin^3\theta) \cdots\cdots ④
\end{aligned}
$$

③ ④ の右辺は等しいから 両辺の実部、虚部を比べて ($\longleftarrow$ **複素数の相等！**)

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta}\\
\boldsymbol{\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta}
\end{cases}
$$

一件落着！

＜補足説明＞「さらなる展開」に向けて

チョッと興味深いハナシをしよう．ここまでに得られた知識を使うと

$$\boldsymbol{f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta}$$

に対して $f(\alpha)f(\beta)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(\alpha)f(\beta)} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = \boldsymbol{f(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

結果を眺めると $\underline{f(\alpha)f(\beta)\ (f\ \text{の掛け算！})\ \text{が}\ f(\alpha+\beta)\ (\text{角の足し算})\ \text{になっている}}$.

こんなハナシを、他のどこかで聞いたことはないか．たとえば、身近の例では

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \longleftarrow \ \text{指数法則！}$$

がある．そこでネピアの数 $e = 2.1828\cdots$ を底に用いた指数関数

$$\boldsymbol{g(\theta) = e^{i\theta}} \quad \longleftarrow \ i = \sqrt{-1}\ \ (\text{虚数単位！})$$

を用意すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g(\alpha)g(\beta)} &= e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}\\ &= e^{i(\alpha+\beta)} = \boldsymbol{g(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．

かと言って、これだけの説明で $f(\theta)$ と $g(\theta)$ とが同じ関数であるというのは乱暴だが、結論を言うと実はそういうことなのです．

そして、これこそ世界中の人々から**感動**と**尊敬**をもって迎えられた**オイラーの公式**

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \longleftarrow \ i = \sqrt{-1}}\ \ \textbf{(虚数単位！)}$$

に他なりません．この冊子でも、高校生でもわかる書き方で書き通したいと思っていますが、それにはそれなりの準備をしなければならないので、いましばらくお待ちください．

end.

0.2.2.2　円分方程式

この**円分方程式**という名前を奇妙と思うかも知れないが、少し読み進めばその意味がわかってくるだろう.

これは、**ド・モアブルの定理**を用いて方程式

$$\boldsymbol{z^n = 1}\ (\boldsymbol{n}\ \textbf{は正整数})\cdots\cdots①$$

の**解を複素数平面**上に捉える試みであると思えばよい.

解 $\boldsymbol{z}$ を極形式

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}\ \cdots\cdots②$$

で表すために、先に ② の $\boldsymbol{r}$ を求めておく.

それには ① で両辺の絶対値に注目して

$$|\,z^n\,| = |\,z\,|^n = r^n = 1 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{r = 1}\ (>0)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{z = \cos\theta + i\sin\theta}\cdots\cdots③$$

これを ① に入れて**ド・モアブルの定理**を用いると

$$(\boldsymbol{\cos\theta + i\sin\theta})^{\boldsymbol{n}} = \underbrace{\boldsymbol{\cos n\theta}}_{1} + i\underbrace{\boldsymbol{\sin n\theta}}_{0} = 1 + 0\cdot i$$

複素数の相等により

$$\begin{cases} \boldsymbol{\cos n\theta = 1} \\ \boldsymbol{\sin n\theta = 0} \end{cases} \qquad \therefore\quad n\theta = 2k\pi \qquad \therefore\quad \theta = \frac{2k\pi}{n}\quad (\,k\ \text{は任意の整数})$$

これを ③ に入れて

$$\boldsymbol{z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}}\quad (\,\boldsymbol{k}\ \textbf{は任意の整数}\,)\ \cdots\cdots④$$

と、まあ一応 z が求まったカタチにはなった. そして、条件には「z は任意の整数 $\cdots$」とあるから解 z は無数にあるかに見える. しかし、それは見かけ上のことで、実際には n 個しかないのだ——もう少し詳しく説明しなければならない.

それは、求まった偏角 $\boldsymbol{\theta = \dfrac{2k\pi}{n}}$ の 分子の $\boldsymbol{k}$ と分母の $\boldsymbol{n}$ に注目する. つまり、k を n で割るときの商を m、余りを r とすると

$$\boldsymbol{k = nm + r} \qquad \longleftarrow\ \textbf{剰余類}\ \text{に分ける!}$$

$$\text{ただし、}\boldsymbol{r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ (n-1)}$$

と表される. そこで、改めて偏角 θ の内訳を調べると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \frac{2k\pi}{n} \\ &= \frac{2(nm+r)\pi}{n} = \boldsymbol{2m\pi + \frac{2r\pi}{n}} \end{aligned}$$

となるから、これを ④ の実部と虚部に用いると

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2k\pi}{n} = \cos\left(2m\pi + \dfrac{2r\pi}{n}\right) = \cos\dfrac{2r\pi}{n} \\ \sin\dfrac{2k\pi}{n} = \sin\left(2m\pi + \dfrac{2r\pi}{n}\right) = \sin\dfrac{2r\pi}{n} \end{cases}$$

これを ④ に入れると

$$\boldsymbol{z = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}\ \ (\,r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1)\,)}\cdots\cdots ⑤$$

となる———解の個数は $\boldsymbol{n}$ **個である**.

つまり、どのような k の値に対しても、r は 0〜$(n-1)$ の n 通りの数のどれかになり、結局 方程式 ① の解は ⑤ の r に $\boldsymbol{0}$**〜**$\boldsymbol{(n-1)}$ の数値を入れて得られる $\boldsymbol{n}$ **個** であることがわかる———これらの解を「**1 の** n **乗根**」という.

ところで、この n 個の解の絶対値はすべて 1 である から、これらを複素数平面上に図示すると、ことごとく単位円周上に並ぶ ことがわかる.

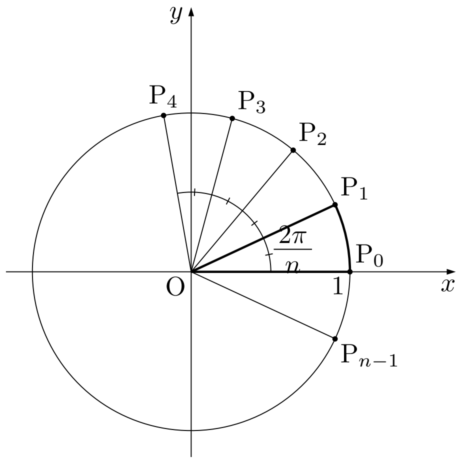
しかも、r の値に

$r =\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ (n-1)$

と入れていくと、r の値に対する**偏角**は

$$\boldsymbol{0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \cdots\cdots,\ \frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

で、これは初項 0 公差 $\dfrac{2\pi}{n}$ の等差数列をなしている.



すなわち、n 個の解は複素数平面上で、単位円周を n 等分した n 個の点

$$\boldsymbol{\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}}$$

として単位円周上に現れることがわかる.

方程式 **①** **:** $\boldsymbol{z^n = 1}$ を**円分方程式**と呼ぶのはこういう事情からである———うまい名前をつけたものである.

また、上記 ⑤ で与えられる n 個の解のうち、$r = 1$ を代入して得られる解

$$\boldsymbol{z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}}\ \longleftarrow\ \text{これがあとで述べる 原始 } \boldsymbol{n} \text{ 乗根 のこと！}$$

を ω とおくと ⑤ で与えられる解は

$$\begin{aligned} z &= \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n} \\ &= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^r =\ \boldsymbol{\omega^r\ (\,r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1)\,)} \end{aligned}$$

であり、$\omega^0 = 1$ ($r = 0$ のとき) であるから、**方程式 ① の解集合**は

$$\boldsymbol{\left\{\ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3, \cdots\cdots\cdots\cdots, \omega^{n-1}\ \right\}}$$

で表される. このうち 1 だけが**実数解**で残りの ω から ω^{n-1} は**虚数解** である.

そして方程式 ① は

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + z + 1\right) = 0$$

であるから $\omega,\ \omega^2,\ \omega^3, \cdots\cdots\cdots\cdots, \omega^{n-1}$ は方程式

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + z + 1 = 0$$

の解である．したがって、この左辺は次のように因数分解される．すなわち

$$\begin{aligned}&z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+z+1\\&\qquad=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(z-\omega^{n-1})\end{aligned}$$

しかも、これは任意の z に対して成り立つ**恒等式**であるから $z=1$ とおくと

$$n=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1-\omega^{n-1})$$

であることもわかる．

＜補足説明＞「 原始 $\boldsymbol{n}$ 乗根 」について

昔、今で言う方程式の解のことを**根** (こん) と呼んでいた．それがいつの時代からか、私の記憶では高校の数学のカルキュラムに**集合**が入ってきたときだと思うが、不等式の**解集合**という言い方にあわせて方程式の場合も**解**、あるいは特にいくつかある場合は**解集合**と呼ぶようになってきたのだと思う．

しかし、今でも**平方根**、**立方根**などの呼び方も当然のように使われているし、たとえば、「**虚数立方根**」のことを「虚数立方解」と呼んだのではキブンが出ない．

ここで説明する 「 **原始 $\boldsymbol{n}$ 乗根** 」も「 原始 n 乗解 」と言ったのでは迫力も出ないし、何だか大切なものがグニャッと潰れたようでキモチが悪い．それより、最も恐れることは、伝えたい核心が正しく読者に伝わらないような気がするのです．

そういう事情から、ここは筆者の判断に任せてもらって勝手に書かせてもらうことにします．だから、ここでいう「**根** (こん)」というのは概ね今風でいう「**解**」のこと だと理解して下さい．

さて、その上で、本文の補足の説明をします．方程式 $\boldsymbol{z^n=1}$ の解の 1 つを ω とするとき、この方程式の解集合がいつでも

$$\left\{\ \boldsymbol{1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\cdots\cdots\cdots\cdots,\omega^{n-1}}\ \right\}$$

と表されるかのように思うかも知れないが、実はそうはいかない．このように表されるのは、$\boldsymbol{\omega}$ が $\boldsymbol{n}$ 乗したとき始めて $\boldsymbol{1}$ になる解の場合に限る のである．

このような解 $\boldsymbol{\omega}$ を「**原始 $\boldsymbol{n}$ 乗根**」という．そして**原始 $\boldsymbol{n}$ 乗根**は 1 つとは限らない．以下、具体的に $n=2,\ 3,\ 4$ の値を入れて説明する——— **原始 $\boldsymbol{n}$ 乗根** というコトバがわかればよい．

(i) $\boldsymbol{n=2}$ のとき

$$z^2=1\qquad\therefore\quad z=\pm1,\qquad\longleftarrow\text{「原始 2 乗根」は }\ \boldsymbol{-1}$$

1 は 2 乗しなくてもそのまま 1 だし、(-1) は 2 乗してはじめて 1 になる．

(ii) $\boldsymbol{n=3}$ のとき

$$z^3=1\qquad\therefore\quad z=1,\quad\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\qquad\longleftarrow\text{「原始 3 乗根」は }\ \boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$$

では、1 は 3 乗しなくてもそのまま 1、 $\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ は いずれも 3 乗してはじめて 1 になる．これは確認してみてもらいたい．

(iii) $\boldsymbol{n=4}$ のとき

$$z^4=1\qquad\therefore\quad z=\pm1,\ \pm i\qquad\longleftarrow\text{「原始 4 乗根」は }\ \boldsymbol{\pm i}$$

だが、1 はそのままで 1、(-1) は 2 乗して 1．4 乗しなければ 1 にならないのは $\boldsymbol{\pm i}$ のみである．

まあ、ざっとこんなところだが、特に上記 (iii) の **原始 3 乗根**

$$\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}$$

を**虚数立方根**といい、その性質に着目した入試問題も散見されるので注目しておいた方がよい．

たとえば、この 2 つのうち、どちらでもよいがその 1 つを $\boldsymbol{\omega}$ とおくと

$$\boldsymbol{\omega^2 = \overline{\omega}, \quad \omega\overline{\omega} = 1 \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1}$$

という性質の他に、たとえば

実数 $\boldsymbol{p}$ の立方根 $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\sqrt[3]{p}, \quad \sqrt[3]{p}\,\omega, \quad \sqrt[3]{p}\,\omega^2}$

また、3 次式の因数分解などでは

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a-b\omega)(a-b\omega^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)}$$

のようになかなかキレイな用例もある．ただし、$a,\ b,\ c$ は実数とする．

end.

＜メモ＞

■ 円分方程式——-発展と演習

本文に述べた「円分方程式」は $\boldsymbol{z^n = 1}$ であった．しかし、一般には右辺の数値は 1 とは限るまい———その場合にどうするか．つまり

$$\boldsymbol{x^n = \alpha \ \ (\alpha \neq 0)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

をどう解くか．初学者としては $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおいて $(*)$ に代入し、両辺を比べて r と θ を求めればよい と素朴に考える———もっともなことだ．

しかし、α が一般の複素数の場合はかなりヤッカイなことになる場合がある．以下に述べる方法はそういう場合の救済策と思ってもらえばよい．

実は $\boldsymbol{z^n = 1}$ の n 個の解を利用していくらか簡単に解くことができる．つまり、α の n 乗根の 1 つを β とおくと $\alpha = \beta^n$ だから、$(*)$ の両辺を α で割って

$$x^n = \alpha \ \longrightarrow \ \frac{x^n}{\alpha} = \left(\frac{x}{\beta}\right)^n = 1 \qquad \therefore \ \boldsymbol{z^n = 1}, \ \text{(ただし、} \frac{x}{\beta} = z \text{ とおく！)}$$

となり、結局 $\boldsymbol{z^n = 1}$ を解くことに帰着させれられる のだ．

そこで、この解を $1, \ \omega, \ \omega^2, \ \omega^3, \ \cdots\cdots\cdots, \ \omega^{n-1}$ とおくと

$$z = \frac{x}{\beta} = 1, \ \omega, \ \omega^2, \ \omega^3, \ \cdots\cdots\cdots, \ \omega^{n-1}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = \beta, \ \beta\omega, \ \beta\omega^2, \ \beta\omega^3, \ \cdots\cdots\cdots, \ \beta\omega^{n-1}}$$

となる．このようにして、まず **1 の $\boldsymbol{n}$ 乗根** を先に求め、分母の β、すなわち α の n 乗根 を両辺にかけて分母を払えばよい．

そこで、α を極形式で表しておくと

$$\alpha = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) \ \longrightarrow \ \beta = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0}{n} + i\sin\frac{\theta_0}{n}\right)$$

であるから、求める x は

$$\boldsymbol{x = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0}{n} + i\sin\frac{\theta_0}{n}\right)\omega^k \quad (k = 0, \ 1, \ 2, \ \cdots\cdots, \ (n-1))}$$

として求められる———これはキレイだ！

しかし、リクツはそうなのだが、これはこれで難しい．以下、いくつかの例をあげておくから、円分方程式を利用するか、あるいは素朴にやるか、意識しながらながめてもらいたい．単に答えを出すだけでなく、いろいろな角度から複素数の扱いに習熟するのが目的 である．

＜ 例 ＞

(1) 次の方程式を解け．

(i) $x^3 = -2 + 2i$ (ii) $x^4 = 1 + \sqrt{3}i$ (iii) $x^6 = -1$

(2) 10 乗してはじめて 1 となる複素数を α とするとき

$$\alpha, \ \alpha^2, \ \alpha^3 \cdots\cdots\cdots\cdots, \ \alpha^n$$

のどれもが 1 でないような複素数はいくつあるか．

（解） (1) (i) 与えられた方程式は

$$x^3 = -2 + 2i \ \ (= \alpha \text{とおく}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

だが、円分方程式でやるとすれば、まず右辺を極形式で表す ことからはじめればよい．

$$\alpha = 2(-1 + i) \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}} \text{ を前に括り出す！}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= (\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

ゆえに、α の 3 乗根 α_0 は

$$\alpha_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i$$

一方、1 の 3 乗根は $\boldsymbol{1,\ \omega,\ \omega^2}$ であるから、求める x は $\boldsymbol{\alpha_0,\ \alpha_0\omega,\ \alpha_0\omega^2}$、すなわち

$$\boldsymbol{x = 1 + i,\ \ (1+i)\,\omega,\ \ (1+i)\,\omega^2}, \quad \text{ただし}\ \ \boldsymbol{\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}}$$

である——ω の数値を入れて計算したとしても、さして難しいハナシではない．

別解として、最初から素朴にやってもやれないことはない——むしろ、これが「スジ論」だが、やってみると「 **かなりヤッカイ** 」ではある．参考までに、以下に書いておく．

それには、まず求める x を極形式で表すと

$$\boldsymbol{x = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

だから ① に代入して両辺を比べる．

$$(\text{①の左辺}) = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^3$$
$$= r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \boldsymbol{r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)}$$
$$(\text{①の右辺}) = \boldsymbol{(\sqrt{2})^3\ \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} \longleftarrow \text{すでに②で計算したから使う！}$$

であるから

絶対値の関係： $r^3 = (\sqrt{2})^3 \quad \therefore\ \ \boldsymbol{r = \sqrt{2}}$

偏角の関係　： $3\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \therefore\ \ \boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}\ \ (k = 0,\ 1,\ 2)}$

以上の考察から

$$\boldsymbol{x = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right\}\ (k = 0,\ 1,\ 2)}$$

である——これで一応は解けたのだが、もう少し具体的にならないか．

k の値を入れてみると

$k = 0$ のとき： $x = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + i$

$k = 1$ のとき： $x = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right\}$

$k = 2$ のとき： $x = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3}\right)\right\}$

で、$k = 0$ のときだけは簡単になった——$k = 1,\ 2$ のときはこのままではマズかろう．仕方がないから、三角関数の加法定理で展開するか．

まず、$\boldsymbol{k = 1}$ のときは

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$\therefore\ \ x = \sqrt{2}\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i}$$

$\boldsymbol{k=2}$ のときも同様にして

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right) &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\
\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad x &= \sqrt{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i\right)\\
&= \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i}
\end{aligned}
$$

となるが、これではやっていられないだろう.

少なくとも、ある程度は**構造**がわかっている計算と、どこへ行くかわからない計算では**やらされる方の負担**は大違いだ．本問はそういうことを知ることができることも**収穫**の 1 つでもある.

なお、$\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ などの $\sin(\cdots)$, $\cos(\cdots)$ は**加法定理**で展開するのがよい——通分して $\dfrac{19\pi}{12}$ のようにしたのでは手に負えない.

(ii) 方程式は

$$\boldsymbol{x^4=1+\sqrt{3}i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

だが、**円分方程式**を利用しよう.

右辺の 4 乗根を求めるために、まず右辺を極形式で表すと

$$
\begin{aligned}
1+\sqrt{3}\,i &= \underbrace{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}_{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

ゆえに、この 4 乗根の 1 つは

$$\alpha_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

で、**円分方程式**「$\boldsymbol{z^4=1}$」の解は $\pm1,\ \pm\,i$ であるから、求める ① の解は $\pm\,\alpha_0,\ \pm\,i\,\alpha_0$ である．すなわち

$$x=\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\sin\frac{\pi}{12}\right),\quad \pm\,i\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

として求められる.

さらに具体的な数値として表すには

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right),\quad \sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形しておいて**加法定理**で展開しなければならないが、計算はサボります.

かくして求める x は

$$\boldsymbol{x=\pm\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right),\ \pm\,i\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}$$

として計算される.

問題はタッタの 1 行で「簡単そうに見える」がやってみると結構なものである．この ① のように 右辺が複素数で与えられているときは概してヤッカイ だ.

$x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおいて ① に代入する**素朴な方法**は読者にお任せする———どちらがよいかやってみるとよい．

(iii) 与えられた方程式

$$\boldsymbol{x^6 = -1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で前掲の (i) (ii) とちがうところは、右辺が実数だからきわめてシンプル である．こういう場合、たとえ

$$i^6 = (-1)^3 = -1$$

を見つけて ① の両辺をこれで割ると

$$\left(\frac{x}{i}\right)^6 = 1 \quad \therefore \quad \boldsymbol{z^6 = 1} \quad \left(\longleftarrow \ z = \frac{x}{i}\right)$$

となり、円分方程式が利用できそうな形にはなるが、(i) の 3 乗、(ii) の 4 乗とちがい、「6 乗」が災いしてこの円分方程式の 6 個の解を記述せねばならず、あまりオイシイ話にはならない．

いっそ、最初から素朴に $\boldsymbol{x = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ とおいて ① に代入する方がよい．それには ① の両辺の絶対値をそれぞれ求めると

$$\begin{cases} |x^6| = |x|^6 \\ |-1| = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad |x|^6 = 1 \quad \therefore \quad |x| = 1$$

だから、最初から $r = 1$ とおくことができる．

改めて $\boldsymbol{x = \cos\theta + i\sin\theta}$ として ① の左辺に代入して両辺を比べる．

$$\begin{cases} \text{左辺} = x^6 = (\cos\theta + i\sin\theta)^6 = \cos 6\theta + i\sin 6\theta \\ \text{右辺} = -1 = -1 + 0\,i \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \cos 6\theta = -1 \\ \sin 6\theta = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad 6\theta = (2k+1)\pi \quad \therefore \quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

これより求める x は

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

だが、k の値を代入すると

$$\boldsymbol{x = \pm i,\quad \frac{\sqrt{3} \pm i}{2},\quad -\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}}$$

が求まる．しかも、そう難しいハナシではない．

だが、チョッと待てよ———① は タダの 6 次方程式ではないか．それなら**因数分解**でやれないか．つまり

$$① : \quad x^6 + 1 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1) = 0 \quad \therefore \quad x^2 + 1 = 0,\quad x^4 - x^2 + 1 = 0$$

この $x^2 + 1 = 0$ から $x^2 = -1$、すなわち $\boldsymbol{x = \pm i}$ が出る．

一方、$x^4 - x^2 + 1 = 0$ からは

$$x^4 - x^2 + 1 = 0 \quad \therefore \quad (x^2+1)^2 = 3x^2 \quad \therefore \quad x^2 + 1 = \pm\sqrt{3}x$$

こうして得られる 2 本の 2 次方程式をそれぞれ解いて x を求めればよい．

$$\begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{3}x \quad \longrightarrow \quad x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}} \\ x^2 + 1 = -\sqrt{3}x \quad \longrightarrow \quad x^2 + \sqrt{3}x + 1 = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = -\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}} \end{cases} \quad (\text{複号任意！})$$

一応デキタようだ———**超素朴**というよりほとんど**原始的**だが、答えを出すだけならこれが最も似つかわしい．いろいろやってみるとよい．

(2) 問題文によれば α は

$$\boldsymbol{z^{10} = 1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解で、**「10 乗して初めて 1 になる」**とあるから、これは ① の **原始 10 乗根** である———まず ① を解いてすべての解を求めてみる．まず

$$|z^{10}| = |z|^{10} = 1 \qquad \therefore \quad |z| = 1$$

を確認して

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (\longleftarrow \ r = |z| = 1 \ )$$

とおくことができる．これを ① の両辺に入れると

$$\begin{cases} 左辺 = z^{10} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{10} = \cos 10\theta + i\sin 10\theta \\ 右辺 = 1 = 1 + 0\,i \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \cos 10\theta = 1 \\ \sin 10\theta = 0 \end{cases} \longrightarrow \ 10\theta = 2k\pi \qquad \therefore \quad \theta = \frac{2k\pi}{10}$$

$$\therefore \quad z = \cos\frac{2k\pi}{10} + i\sin\frac{2k\pi}{10} \ \ (\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \ ) \cdots\cdots\cdots (*)$$

で、α はこれら 10 個の解のどれかだが、実際にどれであるかはまだわからない．そこで、改めて条件が**「10 乗して初めて 1 になる」**とあることに注意すると、これは

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6,\ \alpha^7,\ \alpha^8,\ \alpha^9$$

が 1 でない、と読める．

つまり $(*)$ の z の中で、m 乗 ($m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$) すると 1 になるものを除けばよい、ということではないか———やってみればよい．

$$\begin{aligned} z^m &= \left(\cos\frac{2k\pi}{10} + i\sin\frac{2k\pi}{10}\right)^m \\ &= \cos\frac{2km\pi}{10} + i\sin\frac{2km\pi}{10} \ \longleftarrow \ 1\text{ になるものを除く！} \end{aligned}$$

すなわち、これが 1 になる条件は

$$\frac{2km\pi}{10} = 2\pi \times N \qquad (\longleftarrow N\text{ は整数！}) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{km}{10} = N}$$

そこでまず、「$m = 1$〜9」であることに注目しておこう．

このとき k が分母の「$10 = 2 \times 5$」と公約数をもてば k と分母の間に約分が起こって分母には 2 または 5 が残る．しかし、これは分子「$m = 1$〜9」の 2 または 5 と約分されて、結局 $\dfrac{km}{10}$ は整数になる———この場合を除けばよい．

すなわち、求める条件は、k が分母の「$10 = 2 \times 5$」と**互いに素**である (1 以外の公約数をもたない) こと である．そして、このような k は $k = 1,\ 3,\ 7,\ 9$ の **4 個** に限られる．

実際にこれらの k の値を代入して α を求めてみると

$$\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}, \quad \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}, \quad \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}, \quad \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}$$

として、**「10 乗して初めて 1 になる」**4 個の複素数 が確認される．

一件落着！

0.3　複素数の図形問題への応用

ここまでは、複素数「$\boldsymbol{z = a + bi}$」に対して複素数平面上の点を対応させて説明してきた．つまり、z を与えると複素数平面上の 1 点 P(z) がキッチリ 1 つだけキマルかのように説明してきた が、この z に

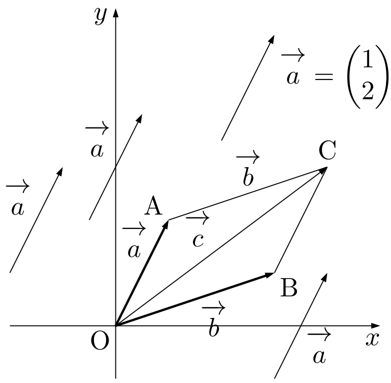
$$(x \text{ 成分}) = a,\quad (y \text{ 成分}) = b\quad (\text{ただし、} a,\ b \text{ は実数})$$

を対応させることを考えてみる．

いま、複素数「$z = a+bi$」を $(a,\ b)$ のように表しておくと複素数における「加法」、「減法」、「実数倍」の演算は

$$(a,\ b) \pm (c,\ d) = (a \pm b,\ b \pm d),\qquad k(a,\ b) = (ka,\ kb) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となり、これは $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ を 2 次元ベクトルと見たときの演算と全く同じ であることは見ての通りである――もはや**複素数**という「数の概念」から切り離して考えてもよいだろう．



ベクトルの場合はどうであったか．たとえば

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

をどう説明したか．

まず、$\vec{a}$ どうしは同じとみなす．そうすると $\vec{a}$ は始点の数だけ存在する．その中には原点Oを始点とするものもある．それを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とした．

$\vec{b}$ についても同様で、A を始点とする $\vec{b}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とした．つまり、位置の制約を解除した成分計算だけで、原点Oに対する点Cの位置を確定することができた．

要するに、複素数もベクトルの考え方を経由することによって、**「どこに平行移動して継ぎ足してもよい」**ということである．

このような見方をすると、複素数の性質のうち、「乗法」と「除法」を除いたハナシが 2 次元ベクトルのハナシそのものであり、**2 次元ベクトル** の**「代数的構造」**は、複素数を「加減、実数倍」の範囲で考えたものにそのまま適用できる ことがわかる．そして、これはきわめて重要な視点であることに注目しておいてもらいたい．

(注) ベクトルの成分表示はタテに書け

本来、ベクトルの成分表示は**「タテ」**に書くべきだ、と私は思っている．その方が紙面はとるが、ずっと見通しがよい．しかし、上記の $(*)$ はあえて**「ヨコ」**に書いた．それは

$$(a,\ b) \ \longleftrightarrow\ a + bi$$

のように、ベクトルの成分表示と複素数の表現を並べてみてもらいたかったからである．「同じ」に見えてきませんか．

end.

0.3.1 四則計算の図形問題への反映

0.3.1.1 和、差、実数倍———ベクトル的考察

複素数 $a+bi$ を順序対 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とみるとき、**ベクトルの基本的性質**である

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \quad k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$$

が成り立つことはすでに確認した———**2 次元ベクトル** そのものである．したがって、どこに平行移動して継ぎ足してもよい———「差」も全く同様!

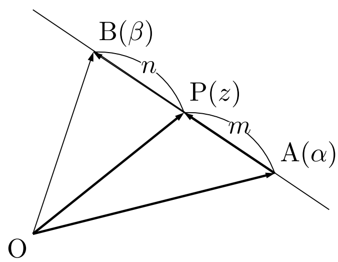
以下、ベクトルでやった**「分点の公式」**を複素数の記述の作法にしたがって書いてみる．これを参考にして練習してみるとよい．

分点の公式

> 2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分を $\boldsymbol{m:n}$ $(m>0,\ n>0)$ に**内分**する点 P(z) は
>
> $$\boldsymbol{z = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}} \longleftarrow \ \boldsymbol{\alpha} \text{ に } \boldsymbol{n} \text{ を, } \boldsymbol{\beta} \text{ に } \boldsymbol{m} \text{ をカケル！}$$
>
> で与えられる．

(解説) 最初、**ベクトル**から入る———ベクトルでイメージがシッカリとできていないとうまく書けない．おさらい をしておこう．

点 P が線分 AB を $m:n$ に内分しているとき



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\
&= \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{\frac{m}{m+n}}\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\
&\qquad\qquad \longleftarrow \ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \\
&= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\
&= \boldsymbol{\frac{n}{m+n}}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{\frac{m}{m+n}}\overrightarrow{\mathbf{OB}} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\
&= \boldsymbol{\frac{n\overrightarrow{\mathbf{OA}} + m\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{m+n}} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④
\end{aligned}$$

まあ、ここまではベクトルのハナシである．ここではこれらのことがらを複素数で表すのだが、まず $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ z$ で表せばよさそうだ．

しかし、$\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \ \longrightarrow \ z-\alpha, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \ \longrightarrow \ \beta-\alpha$$

のように、いずれも単独の意味を持つ $\alpha,\ \beta,\ z$ という記号の組合せで $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ というそれとは別の概念を表すことになる．これでは視覚的にもチョッと見苦しい、というより実際の使い勝ってとして不便である．それは複素数には

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \longleftarrow \text{ 始点 } \mathbf{A} \text{ から終点 } \mathbf{B} \text{ までのベクトル！}$$

のように、状況を一括して記述する記号がないからである———ここはベクトルの方が勝っていると思う.

そういうことにも留意して上記の ①〜④ を複素数を用いて書き直すと

$$
\begin{aligned}
z &= \alpha + \frac{m}{m+n}(\beta - \alpha) \\
&= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\alpha + \frac{m}{m+n}\beta \\
&= \frac{n}{m+n}\alpha + \frac{m}{m+n}\beta \\
&= \boldsymbol{\frac{n\alpha + m\beta}{m+n}}
\end{aligned}
$$

と表されることがわかる.

end.

(注 1)「(複素数) = (ベクトル)」という書き方について

答案を見ると、たとえば本文の例でいうと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = z - \alpha, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \beta - \alpha, \quad \text{あるいは } z - \alpha = \overrightarrow{\mathrm{AP}}, \quad \beta - \alpha = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

のように書いている答案を見かけることがある．キモチはわかるが **本来、数値**である**複素数**と**順序対**である**ベクトル**がイコールであるはずがない ので、これは**マズイ！**

だから私としては、せいぜい「コロン：」などを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \ : \ z - \alpha, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \ : \ \beta - \alpha, \quad \text{あるいは } z - \alpha \ : \ \overrightarrow{\mathrm{AP}}, \quad \beta - \alpha \ : \ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

までか———そのくらいの配慮はしたいもの、と思うのはムリだろうか.

end.

(注 2) 直線の「ベクトル方程式」へ

改めて、本文のベクトル表示 ①～④ を見てもらいたい．この経緯で $\boldsymbol{\dfrac{n}{m+n}=s,\ \dfrac{m}{m+n}=t}$ とおくと、$\boldsymbol{s+t=1}$ であるから

③ ： $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OP}}=s\overrightarrow{\mathbf{OA}}+t\overrightarrow{\mathbf{OB}},\ s+t=1}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

② ： $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathbf{OA}}+t\overrightarrow{\mathbf{OB}}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑥

① ： $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}+t\overrightarrow{\mathbf{AB}}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑦

また、① で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を左辺に移項すると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ だから

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{AP}}=t\overrightarrow{\mathbf{AB}}}$ $\longleftarrow$ $\dfrac{n}{m+n}=t$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑧

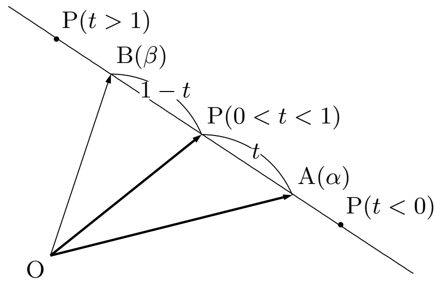
だが、これは本文の ①～④ と実は全く同じ内容である．———用途によって使い分けるために整備されたものと考えればよい．

すなわち、本文 ①～④ で求めた公式は線分 AB の分点 (内分点, 外分点) の扱いのための ものである．

そして、ここの ⑤～⑦ は t を変数として直線のベクトル方程式を扱うため のカタチである．

後者のために、実際に t の数値に対して点 P が直線 AB 上を動いていく状況を右図に示してみた．具体的に数値を入れて確かめておくとよい．

また ⑧ は、3 点 A, B, P の共線条件 としても重要である———以上、ベクトルについてのハナシ！



これらを複素数平面上で表す には、本文でやったと同様に $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ z$ とおき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $z-\alpha,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $(\beta-\alpha)$ とおいて

⑤ ： $\boldsymbol{z=s\alpha+t\beta,\ s+t=1}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑨

⑥ ： $\boldsymbol{z=(1-t)\alpha+t\beta}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑩

⑦ ： $z=\alpha+t(\beta-\alpha)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑪

⑧ ： $z-\alpha=t(\beta-\alpha)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑫

と書き換えれば目的は達成される．

多少の説明を加えるなら、⑨ ⑩ はベクトルの名残りを留めているから問題はなかろう．そして ⑪ は大仰に見えるが $\beta-\alpha$ と同方向のベクトルを仮に複素数 m などとおいて

$\boldsymbol{z=\alpha+tm}$ $\longleftarrow$ m は方向を表す複素数！

と書き直せば、点 A(α) を通り方向が m である直線が確定する から、そう難しい話ではない．

最後の ⑫ の共線条件は、複素数では普通 arg を使って説明する．つまり

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=t\,(\text{実数}) \qquad \therefore\quad arg\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=0,\ \text{または}\pi$$

だが、実際には

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)} \qquad \therefore\quad \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

を計算することもある———個々の知識もさることながら、それらの運用については扱っている内容の核心を正確につかんで使うことが肝要である．

特にここでは ベクトルと複素数を混同しないよう、「混同している」と思われないよう、書き方にも注意を払ってもらいたい．

end.

＜メモ＞

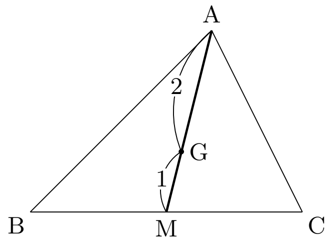
■ ベクトル的考察について

　複素数平面上の図形問題というと、まず「ベクトル的考察」が思いつく．しかし、それですべてかというとそういうものでもない．次に述べる「回転 ＋ 伸縮」という大きなテーマがある、と思いつつ、やはり入り口は「ベクトル的考察」だろうなあ と思いながら書いています．

＜例 **1**＞

3 点 A(α), B(β), C(γ) を 3 頂点とする三角形 ABC の重心を表す複素数を求めよ．

（解） 右の図で線分 BC の中点を M(δ) は本文で述べた「分点の公式」を用いて



$$\delta = \frac{1\cdot\beta + 1\cdot\gamma}{1+1} = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

さらに G は AM を $2:1$ に内分するから G(ϵ) は

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1\cdot\alpha + 2\cdot\delta}{2+1}\\ &= \frac{\alpha + \cancel{2}\cdot\dfrac{\beta+\gamma}{\cancel{2}}}{2+1} = \boldsymbol{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}\end{aligned}$$

これはベクトルでお馴染みの

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

の複素数版というところです．

一件落着！

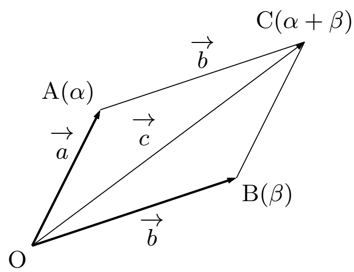
＜例 **2**＞

α, β を与えられた複素数とするとき

$$|\,|\alpha| - |\beta|\,| \leqq |\alpha+\beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$$

であることを示せ．

（解）「初等幾何」でも「図形と方程式」でも「ベクトル」でも三角不等式として出てきたきわめて重要な定理である．上記は複素数で記述されているが、このテーマそのものは素朴に初等幾何として扱うのがよい．



$$|\alpha| = \mathrm{OA},\quad |\beta| = \mathrm{OB}$$

とする．

(i) 3 点 O, A, B が一直線上にないとき：

　このときは $\alpha+\beta$ を表す点Cは OA, OB を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の第 4 の頂点であるから

$$|\alpha+\beta| = \mathrm{OC}$$

である．そしてこのとき $\triangle$OAC において

「**2** 辺の和は他の **1** 辺より大、かつ **2** 辺の差は他の **1** 辺より小」

であるから

$$|\mathrm{OA} - \mathrm{OB}| < \mathrm{OC} < \mathrm{OA} + \mathrm{AC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ところで、四角形 OACB は平行四辺形であるから、「$\mathrm{AC}=\mathrm{OB}$」で

$$|\mathrm{OA}-\mathrm{AC}|<\mathrm{OC}<\mathrm{OA}+\mathrm{OB}$$

$$\therefore\ \ ||\alpha|-|\beta||<|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$$

(ii) 3 点 O, A, B が一直線上にあるとき：
O に関して 2 点 A, B が同じ側にあれば

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

反対側にあれば

$$|\alpha+\beta|=||\alpha|-|\beta|| \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

以上 ①②③ より

$$\boldsymbol{||\alpha|-|\beta||} \leqq \boldsymbol{|\alpha+\beta|} \leqq \boldsymbol{|\alpha|+|\beta|}$$

が示された.

＜考察 1 ＞「複素数のまま」での計算は？

複素数による計算の前にベクトルによる計算をやっておきたい———説明だから右側の不等式だけでよいだろう．結論からいうと ベクトルはまだしも、複素数では大変やりにくい のです.

いま、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$ とおくと

$$\begin{aligned}(|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|)^2-|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2&=|\overrightarrow{a}|^2+2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|+|b|^2-(|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2)\\&=2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|-2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{a}|\cos\theta\\&=2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|(1-\cos\theta)\geqq 0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ (|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|)^2\geqq|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|\geqq|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|}$$

これなら、まあナットクできる.
しかし、複素数の場合はそうはいかないのだ———次の計算を見てもらいたい.

$$(|\alpha|+|\beta|)^2-|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2-(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}$$

ここで、計算はハタと止まってしまう———あとは成分計算か.
そこで、$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$ とおくと

$$\begin{aligned}(|\alpha|+|\beta|)^2&=|\alpha|^2++2|\alpha||\beta|+|\beta|^2\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}_{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=|a+c+(b+d)i|^2\\&=(a+c)^2+(b+d)^2\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2\underbrace{(ac+bd)}_{B}\end{aligned}$$

で、結局 A と B との大小比較 ということになる．そこで

$$\begin{aligned}A^2-B^2&=(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2})^2-(ac+bd)^2\\&=\boldsymbol{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2} \cdots\cdots\cdots (*)\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)\\&=(ad-bc)^2\geqq 0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ A^2\geqq B^2 \qquad \therefore\ \ A\geqq B$$

で、まあ目的は達成したが、あまり達成感はない.

せいぜい $(*)$ で、「コーシー・シュワルツの不等式」

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqq (ac+bd)^2$$

を使うか、あるいは同じことだがベクトルで

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{p}, \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \overrightarrow{q} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q})^2}_{(ac+bd)^2} \leqq (\left|\overrightarrow{p}\right|\left|\overrightarrow{q}\right|\cos\theta)^2 \leqq \underbrace{\left|\overrightarrow{p}\right|^2\left|\overrightarrow{q}\right|^2}_{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

とやるか、まあ、多少の工夫をしたい———どの道、遠回りであることは否めない．だから、複素数の計算でやりたくないのです．

＜考察 **2**＞「三角不等式」のルーツ

「三角不等式」は、これだけがテーマになることは少ないが、ひょっとしたところに現れる．基本的にそのルーツは初等幾何だと思うが、せっかくの機会だからここで説明しておく．

一般には $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき、これらが 三角形の 3 辺となり得る条件 は

$$|b-c| < a < b+c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

というもので、これを見ていると

$$|c-a| < b < c+a, \quad |a-b| < c < a+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

と併記しなければならないような錯覚におちいる．しかし、$(*)$ の左側の不等式が

$$|b-c| < a \quad \therefore \quad -a < b-c < a \quad \therefore \quad a+b > c,\ \text{かつ}\ c+a > b$$

であり、$(*)$ の右側の不等式とあわせると

$$b+c > a, \quad \text{かつ} \quad c+a > b, \quad \text{かつ}\ a+b > c$$

の「3 本セットの不等式」と同値である．$(**)$ の 2 本の不等式もショセンはこの 3 本セットの不等式になるので $(*)(**)$ で表した 3 つの不等式のどれか 1 つを示せばよい ことがわかる．

なお、たとえば a が最大辺のときは、$(*)$ で左側の不等式は成り立ってしまうので三角形のできる条件としては、右側の不等式

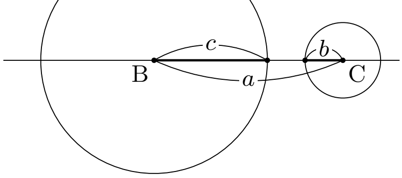
$$a < b+c$$

1 本だけを示せばよい．

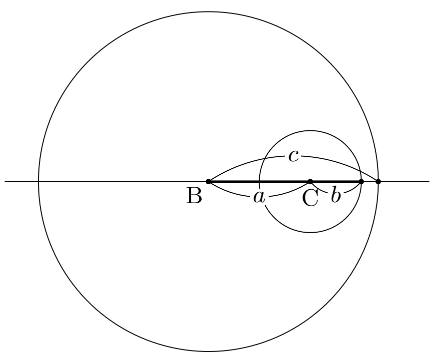
さて、$(*)$ の図形的説明だが、チョッと工夫する．つまり $(*)$ は「三角形が構成できる条件」だが、「構成できない条件」を先に求めておいて「そうでない条件」として求める のである．

辺 a の両端を B, C としてそれぞれを中心とする半径 $c,\ b$ の円を描く．このとき、図は $c>b$ であるが $c \leqq b$ の場合も同様である．そして、三角形が作れない場合は次の 2 つ である．

(i) $\boldsymbol{a > b+c}$———＜図 1＞　　(ii) $\boldsymbol{a+b < c}$ すなわち $\boldsymbol{a < c-b}$———＜図 2＞



＜図 1＞



＜図 2＞

結局、(i) でも (ii) でもない場合に三角形ができる.
つまり

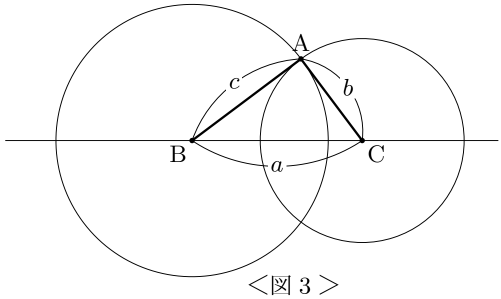
$$a \leqq b + c, \quad \text{かつ } a \geqq c - b$$
$$\therefore \quad c - b \leqq a \leqq b + c$$

さらに、$c \leqq b$ のときも含めて

$$\boldsymbol{|c - b| < a < b + c}$$

また、三角形が直線 BC 上につぶれてしまう等号のときを除けば

$$c - b < a < b + c$$



＜図 3＞

となる.

なお、本問について付け加えれば、複素数 $\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta$ の性質上、上記の (i)(ii) のようなことが起こり得ず、「**自動的に**」つぶれた場合も含めた三角形になってしまうので、いきなり

$$\big||\boldsymbol{\alpha}| - |\boldsymbol{\beta}|\big| \leqq |\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leqq |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$$

の証明を求めるカタチになっているわけである.

一件落着！

■ ベクトルの内積と複素数

結論からいうと、ここでのテーマは 2 つの複素数を $z_1,\ z_2$ とするとき

$$\overrightarrow{z_1}\cdot\overrightarrow{z_2}=\frac{1}{2}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$$

ということなのだが、詳しくは次の問題の**設問**の展開の中で確認 してもらいたい.

ただし、上記の「$\overrightarrow{z_1}$」などの表記は一般的ではないが、複素数 z_1 の実部と虚部を成分とするベクトルを 簡潔に表すために あえて利用した———キモチはわかってもらえると思うが、実際に使うときは多少のコメントでチョッと「ご挨拶」をした方がよいだろう.

＜ 例 **2** ＞

複素数平面上で 3 つの複素数 $0,\ z_1,\ z_2$ を表す点を O, A, B とする.

$$z_1=a+bi,\quad z_2=c+di\quad (a,\ b,\ c\ ,d \text{ は実数},\ i=\sqrt{-1})$$

とするとき、次の問に答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交する条件を $a,\ b,\ c,\ d$ で表せ.

(2) (1) の条件を $z_1,\ z_2,\ \overline{z_1},\ \overline{z_2}$ で表せ.

(3) O を中心とする半径 1 の円周上に $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ の順にある 4 つの点で作られる四角形の対角線が直交する条件は

$$z_1z_3+z_2z_4=0$$

であることを示せ.

(4) 正 n 角形の頂点を表す複素数を

$$1,\ z,\ z^2,\ \cdots\cdots,z^{n-1}$$

とするとき、n が奇数ならば、2 つの対角線が直交することはありえない. このことを証明せよ.

（解） (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を成分で示せばよい.

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$
$$=\boldsymbol{ac+bd=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(2) $z_1,\ z_2$ と、それぞれの共役複素数を利用する.

まずは z_1 から

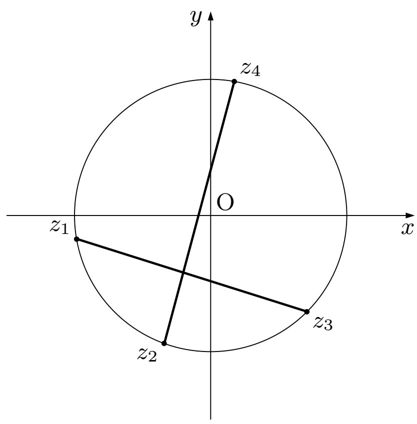
$$z_1\ \longrightarrow\ \begin{cases}z_1=a+bi\\ \overline{z_1}=a-bi\end{cases}$$

$$\therefore\quad a=\frac{z_1+\overline{z_1}}{2},\quad b=\frac{z_1-\overline{z_1}}{2i}$$

次に z_2 から

$$z_2\ \longrightarrow\ \begin{cases}z_2=c+di\\ \overline{z_2}=c-di\end{cases}$$

$$\therefore\quad c=\frac{z_2+\overline{z_2}}{2},\quad d=\frac{z_2-\overline{z_2}}{2i}$$



これらを ① に代入して

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{ac+bd} &= \frac{z_1+\overline{z_1}}{2}\cdot\frac{z_2+\overline{z_2}}{2}+\frac{z_1-\overline{z_1}}{2i}\cdot\frac{z_2-\overline{z_2}}{2i}\\
&= \frac{\cancel{z_1z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+\cancel{\overline{z_1}\,\overline{z_2}}}{4}-\frac{\cancel{z_1z_2}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+\cancel{\overline{z_1}\,\overline{z_2}}}{4}\\
&= \boldsymbol{\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{2}}=0\\
\therefore\quad & \boldsymbol{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0}
\end{aligned}
$$

(3) $\gamma=z_3-z_1$，$\delta=z_4-z_2$ の表すベクトルの直交条件に (2) をそのまま用いて、$\boldsymbol{\gamma\overline{\delta}+\overline{\gamma}\delta=0}$ が求める条件である．すなわち

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma\overline{\delta}+\overline{\gamma}\delta} &= (z_3-z_1)\overline{(z_4-z_2)}+\overline{(z_3-z_1)}(z_4-z_2)\\
&= (z_3-z_1)(\overline{z_4}-\overline{z_2})+(\overline{z_3}-\overline{z_1})(z_4-z_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

ここで、 z_1，z_2，z_3，z_4 は単位円周上にあるから

$$|z_i|^2=z_i\overline{z_i}=1 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\overline{z_i}=\frac{1}{z_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)}$$

これらを ② に入れると

$$
\begin{aligned}
\gamma\overline{\delta}+\overline{\gamma}\delta &= (z_3-z_1)\left(\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_2}\right)+\left(\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_1}\right)(z_4-z_2)\\
&= (z_3-z_1)\frac{z_2-z_4}{z_2z_4}+\frac{z_1-z_3}{z_1z_3}(z_4-z_2)\\
&= -(z_3-z_1)(z_4-z_2)\left(\frac{1}{z_2z_4}+\frac{1}{z_1z_3}\right)\\
&= -(z_3-z_1)(z_4-z_2)\frac{\boldsymbol{z_1z_3+z_2z_4}}{z_1z_2z_3z_4}=0 \longleftarrow\ z_3\fallingdotseq z_1,\quad z_4\fallingdotseq z_2\\
\therefore\quad & \boldsymbol{z_1z_3+z_2z_4=0}
\end{aligned}
$$

(4) 正 n 角形の、交わる 2 つの対角線は

$$1,\ z,\ z^2,\ \cdots\cdots,z^{n-1}$$

から <u>z^kと z^l で 1 本</u>、<u>z^sと z^t でもう 1 本</u> (ただし、$0\leqq s<l<t\leqq(n-1)$) のようにとればよいから、このようにとる対角線が直交する条件は (3) の結果を用いて

$$\boldsymbol{(z^k)(z^l)+(z^s)(z^t)}=z^{k+l}+z^{s+t}=\boldsymbol{0}$$

この両辺を z^{k+l} で割ると

$$1+z^{s+t-k-l}=0 \qquad \therefore\quad z^m=-1 \longleftarrow\ (\ \text{ただし、}m=s+t-k-l\ )$$

両辺を n 乗すると

$$
\begin{aligned}
&(z^m)^n=(-1)^n \qquad \therefore\quad (z^n)^m=(-1)^n \longleftarrow\ \boldsymbol{z^n=1}\\
&\quad\therefore\quad 1^m=(-1)^n \qquad \therefore\quad \boldsymbol{(-1)^n=1}
\end{aligned}
$$

これは奇数の n に対しては成立しない———直交することはない.

＜考察＞ここでは「無用の長物」だ！

　ベクトルでは**トップスター**であった**内積**も、ここでは影が薄い．さりとて触れないわけにも行かず、この問題も仕方なくここにおかせてもらったという具合だ.

　たとえば (1) も、ベクトルにこだわらず <u>ハナから複素数でやる</u> なら**極形式**で

$$\boldsymbol{\frac{z_2}{z_1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)} \longleftarrow\ \theta\text{は } z_1\text{から } z_2\text{へ測る角！}$$

と表すことができるが、ここで $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ とすると $\cos\theta=0,\ \sin\theta=\pm1$ だから

$$\boldsymbol{\frac{z_2}{z_1}=k}\ \textbf{(}\boldsymbol{k}\ \textbf{は実数)}\qquad\therefore\quad z_2=ikz_1$$

両辺の共役複素数をとると

$$\overline{z_2}=\overline{ikz_1}\qquad\therefore\quad\overline{z_2}=-ik\overline{z_1}$$

この 2 本の等式から ki を消去すると

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\overline{z_2}}{-\overline{z_1}}\ (=ik)\qquad\therefore\quad\boldsymbol{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0}$$

と、イトも簡単に (2) の $\overrightarrow{z_1}$ と $\overrightarrow{z_2}$ との 直交条件が求められる———もう上記の解答にはもどれまい．

それに、内積の場合は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta\ \ (=a_1b_1+a_2b_2)$$

だが $\cos x$ が偶関数であるため、θ が $\overrightarrow{a}$ から $\overrightarrow{b}$ を測っている角なのか $\overrightarrow{b}$ から $\overrightarrow{a}$ を測っている角なのかハッキリしない．そのため、複素数の偏角 (arg) の方が精度が高いといえなくもないが、そのためにヤッカイなこともおきて扱いにくいときもある．したがって、状況に応じて使い分けることできるようにしておかなければならない．

一件落着！

0.3.1.2　積、商の反映———「 回転 + 伸縮 」

ここは ベクトル的考察だけではカタのつかない**複素数特有の性質** のハナシである．具体的には「 **極形式** 」以降の知識が威力を発揮する．

そして、これは複素数の計算のうち、「 **積** 」と「 **商** 」の計算に追随する複素数平面上の **順序対** の「 **図形的振る舞い** 」である．すでに説明したことだが、念のために複素数の「 **積の構造** 」を確認しながら進めよう．

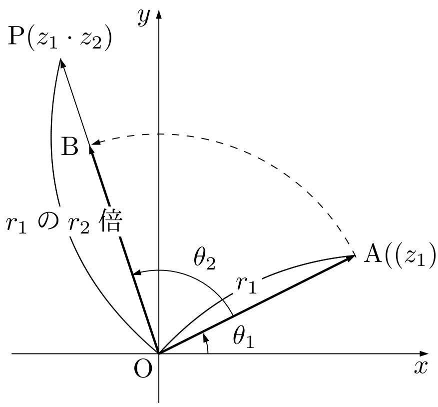
＜**1**＞ 原点を中心とする「 回転+伸縮 」

2 つの複素数 $z_1,\ z_2$ で $|\,z_1\,| = r_1,\ |\,z_2\,| = r_2$ とすると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w = z_1 \cdot z_2} \quad &\longleftarrow \quad z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) \\
&= r_1\,(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\,)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\,)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*) \\
&= r_1 r_2\,\{(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)}) + i(\underbrace{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}_{\sin(\theta_1+\theta_2)})\} \\
&= \boldsymbol{r_1 r_2\,\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)\}}
\end{aligned}
$$

また、**偏角**の関係を式で表すと

$$\boldsymbol{arg\,(z_1 z_2) = arg\,z_1 + arg\,z_2}$$



これらは何を意味するか．

まず、A(z_1) を固定しよう．そうすると A(z_1) は $(*)$ の $\cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ で角 θ_2 回転して点 B に移るが、このとき

$$\mathrm{OB} = \mathrm{OA} = r_1$$

である———**第 1 段階**.

次に、この点 B に $(*)$ の r_2 がカカルことで線分 OB が r_2 倍されて P(w) に移る. これが **第 2 段階** で、まあそういう仕組みである．

また、上記の積の計算は**交換則**が成り立つので、z_1 を固定したまま先に r_2 倍して角 θ_2 の回転をしてもよいし、z_2 の方を固定して z_2 を「角 θ_1 回転して r_1 倍」としても同じ結果が得られる———当然である．

ここでハナシをもとにもどすと、この場合、複素数 z_2 の役割だが、これは A(z_1) を P(w) に移す **オペレーター** (**作用素、あるいは演算子**) の役割を果たしている と考えるとわかりやすい．つまり

$\boldsymbol{z_1}$**に** $\boldsymbol{z_2}$**をカケル** $\iff$ $\boldsymbol{z_1}$**を原点を中心に**$\boldsymbol{\theta_2}$**回転して** $\boldsymbol{r_2}$**倍に伸縮する！**

ということである．

一般に、ある複素数を $\boldsymbol{z}$ とし、他の複素数を $\boldsymbol{\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ とするときは

$\boldsymbol{z}$ **に** $\boldsymbol{\alpha}$**をカケル** $\iff$ $\boldsymbol{z}$ **を原点を中心に**$\boldsymbol{\theta}$**回転して** $\boldsymbol{r}$ **倍に伸縮する！**

とまとめることができる———いつもこれが基本になる．以上が**複素数の積**に追随する **順序対** の「 **図形的振る舞い** 」である．

そうすると、**商**についても説明しておかなければなるまいが、もう上に説明した複素数を**オペレーター**として扱ってもよかろう．

そこで、$z=k(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ として計算してみると

$$\begin{aligned}\frac{z}{\alpha}&=\frac{k(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\&=\frac{1}{r}\cdot k\{\cos(\varphi-\theta)+i\sin(\varphi-\theta)\}\end{aligned}$$

この計算から、もはや図を描くまでもなく

$$\boldsymbol{z}\text{ を }\boldsymbol{\alpha}\text{でワル}\iff\boldsymbol{z}\text{ を原点を中心に }(-\boldsymbol{\theta})\text{ 回転して }\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\text{ 倍に伸縮する！}$$

となることがわかる.

以上の考察から、複素数の計算「**積**」と「**商**」に追随する複素数平面上の**順序対**の「**図形的振る舞い**」のすべてが確認された.

次は、これらのことを踏まえてチョッと発展的なテーマである.

＜ **2** ＞ 原点以外の点を中心とする「 回転+伸縮 」へ

このハナシを進める前提条件は、たとえば複素数平面における $1+2i$ という複素数が、xy 平面におけるベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ のように、どこに平行移動しても同じ、ということである――――これはすでに冒頭で書いたが、なかなかわかりにくいようだ.

その上で、たとえば複素数平面上の 2 点を $\mathrm{A}(z_a),\ \mathrm{B}(z_b)$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を A(z_a) を中心に θ 回転して r 倍に伸縮する にはどうするか.

(i) 複素数 (z_b-z_a) で＜ 1 ＞の α を実行する.

(ii) 回転の中心が点 A だから z_a の平行移動をする.

その結果として点 P(w) が得られたとすると

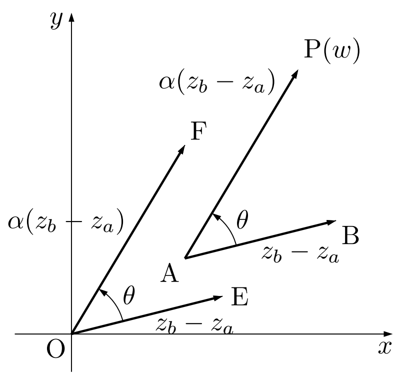
$$\boldsymbol{w=\alpha(z_b-z_a)+z_a}\cdots\cdots\cdots①$$

だが、この「 $\boldsymbol{+z_a}$ 」を初学者は忘れやすい.

それを避ける**覚え方**は ① の $\boldsymbol{z_a}$ を移項して、次の変形をするとよい. すなわち

$$\boldsymbol{w-z_a=\alpha(z_b-z_a)}\cdots\cdots\cdots\cdot②$$

これは原点において複素数 (z_b-z_a) にオペレーター $\boldsymbol{\alpha}$ を実行したということである.



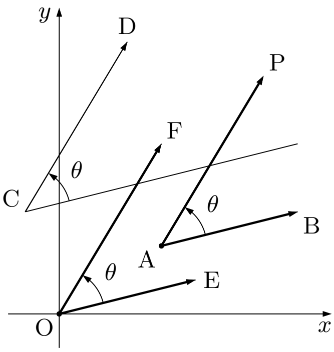
つまり、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が点 A を中心に θ 回転して r 倍されたということに他ならない. このとき、ベクトルでいうと $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ の始点に共通して **回転の中心** の点 **A** が入っていること、② のカタチで両辺に $\boldsymbol{z_a}$ が入っていることが**重要** である――――これなら忘れない.

また、ここではオペレーターが商のカタチのときは説明しなかったが

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{1}{\alpha}\\&=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))\}\end{aligned}$$

のときのことだから「 $(-\boldsymbol{\theta})$ **回転** $+\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$ **倍** 」ということで、もう説明するまでもない.

(注) ベクトル (複素数) は住所不定！



本文にも「複素数はどこに平行移動しても同じ」と書いた——住所不定なのだ．そうすると、図で $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を平行移動した $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ も複素数の表示は $\alpha(z_b - z_a)$ で、こういうものはこの複素数平面上に無数にあることになる．

上記では、点 $\mathrm{P}(w)$ の w の値を求める都合に合わせて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ に対応する複素数として $\alpha(z_b - z_a)$ をとり、z_a に継ぎ足した のである．

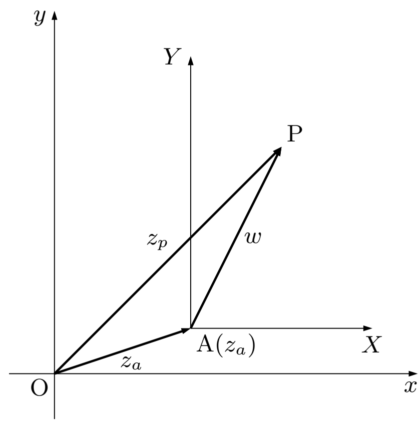
この辺のところがズルイというか、ウマイというか、なかなかよくデキている．

要するに、複素数 $p + qi$ にしてもベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ にしても座標表現としての固有の制約から解放された状態にある ということであり、ここが複素数 (ベクトル) の優れて有難いところ である．こういうことがわかってくると、「ナルホドなあ！」という妙なナットク感で満たされる．

end.

＜補足説明！＞ 実は「座標変換」なのです！

右図で 座標軸 $\mathbf{O} - \boldsymbol{xy}$ をもとの座標軸、点 A を原点に定めた新座標軸を 座標軸 $\mathbf{A} - \boldsymbol{XY}$ とする——座標変換として見ておこう．



ベクトルで説明すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

だが、ここで $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はもとの座標軸で原点 O から点 P を見たベクトル、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は新しい座標軸の原点 A から点 P を見たベクトル、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ はもとの原点から新しい原点を見たベクトル である．そして $(*)$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と変形されるから、これを複素数で表すと

$$\boldsymbol{w = z_p - z_a}$$

だが、これで準備はできた．そこで本文 ② を思い出してもらいたい．

$$② \ : \ \boldsymbol{w - z_a = \alpha(z_b - z_a)}$$

である．ここで、$z_b - z_a$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のことだから、これは新座標軸で原点 A から点 B を見たもので、これをオペレーター α によって **原点 A を中心に「$\boldsymbol{\theta}$ 回転 $+$ $\boldsymbol{r}$ 倍」**することで $(w - z_a)$、すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が得られることを表している．

つまり、② はすべて、「新しい座標軸 $\mathbf{A} - \boldsymbol{XY}$」内で完結していることがらと言ってよい．上記でいえば、原点を A として「**(1) の内容**」を実現しているのである．

それを もとの座標軸 $\mathbf{O} - \boldsymbol{xy}$ で見るために z_a を移項して

$$① \ : \ \boldsymbol{w = \alpha(z_b - z_a) + z_a}$$

の形に整えたというわけだ——この方がわかり易いかもしれない．

このように、座標変換というのは 対象の図形 (この場合でいうと点 P) を動かさず、座標軸を動かすところが特徴的 である．この先、「**2 次曲線の標準化**」などで大いに活躍することになる．チョッと注目しておくとよいと思います．

end.

＜メモ＞

■ 図形的特徴を「$\boldsymbol{\theta}$ 回転 ＋ 伸縮」で記述する

ここで、復習をかねて「$\boldsymbol{\theta}$ 回転 ＋ 伸縮」で記述される図形的特徴 をまとめて整理しておく.

(例 1) $\triangle\mathbf{ABC}$ と $\triangle\mathbf{A'B'C'}$ が相似である条件

まず、それぞれの頂点を

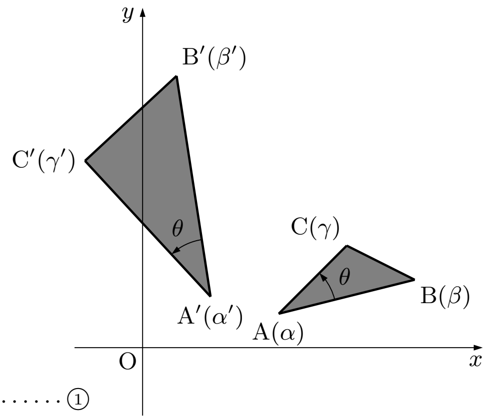
$$\mathrm{A}(\alpha),\ \ \mathrm{B}(\beta),\ \ \mathrm{C}(\gamma),\ \mathrm{A}'(\alpha'),\ \ \mathrm{B}'(\beta'),\ \ \mathrm{C}'(\gamma')$$

としておく.

$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ とが相似である条件は、**初等幾何の定理**の通り

(i) 対応する **2 辺の比** が等しい　(ii) その**挟む角** が等しい

だが、複素数平面上に表すときは、「**同じ向きに相似**」である場合と「**逆向き (裏返って) に相似**」の場合があり、右図は「**同じ向きに相似**」の場合 を示している.



この場合、条件 (i) は

$$\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\ (=k\text{ とおく})$$

また、(ii) については

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を θ 回転して k 倍

$\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$は$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$を θ 回転して k 倍

以上をまとめる と、求める条件は

$$\boldsymbol{\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}=k(\cos\theta+i\sin\theta)\cdots\cdots①$$

である.

また、「**逆向き (裏返し！) に相似**」である条件は、$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ に測る角 θ が (i) の場合の逆方向になるので ① の θ を $(-\theta)$ とおいて

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}&=k\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}\\&=k(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\overline{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=\frac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\end{aligned}$$

ゆえに、求めるこの場合の条件は

$$\boldsymbol{\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\frac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}}\ \longleftarrow\ \text{両辺の共役複素数で示してもよい！}\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

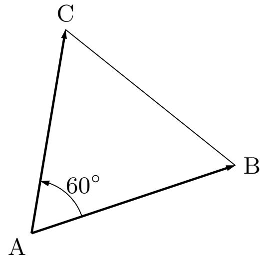
である．あるいは、まず ① をやっておいて $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ が $\triangle\mathrm{ABC}$ のどちらか一方を x 軸 (実軸) に関して対称にしてやれば「逆向きに相似」である状況を実現することができる.

具体的には ① の両辺のどちらか一方を共役複素数に入れ替えれば ② になる から、キチンと説明すればそれでもよい.

ともあれ、正解としては何らかのカタチで「**①, または②**」と、この両方を検証した証拠を示すべきだろうと思う.

(例 2) △ABC が正三角形である条件

$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を 3 頂点とする △ABC で、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $(\pm 60^\circ)$ 回転して $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が得られることを複素数を用いた数式で表現する．すなわち



$$\boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \cos(\pm 60^\circ) + \sin(\pm 60^\circ)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

だが、さらに変形して、虚数単位 i が消えるように整理しておくのがよかろう．

分母を払って

$$2(\gamma-\alpha) = (\beta-\alpha) \pm \sqrt{3}i(\beta-\alpha) \ \longleftarrow\ \textbf{2 乗して } \boldsymbol{i^2 = -1} \textbf{ とおく}$$

$$\therefore\ \ 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma^2 - 4\alpha\beta - 4\beta\gamma - 4\gamma\alpha = 0 \ \longleftarrow\ \text{両辺を 4 で割る！}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0} \ \longleftarrow\ \textbf{何となくキレイな式だ！}$$

どうやら それらしい関係式 が導かれた．

あるいは、$\boldsymbol{\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$ は 1 の「**虚数立方根**」で、どちらか一方を ω とすれば他方は ω^2 で表されることはすでに説明した．そして、$\omega^2 + \omega + 1 = 0,\ \omega^3 = 1$ であることも確認した．

そこで、改めて本文の $(*)$ の右辺を見てもらいたい．

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\left(\frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2}\right) = -\omega,\ \text{または}\ -\omega^2$$

これを $(*)$ に適用すると

$$\boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = -\omega},\ \text{または}\ \boldsymbol{-\omega^2}$$

$$\therefore\ \ \gamma - \alpha\ = -\omega(\beta-\alpha),\ \text{または}\ \gamma - \alpha\ = -\omega^2(\beta-\alpha)$$

$$\therefore\ \ \{\gamma - \alpha + \omega(\beta-\alpha)\}\{\gamma - \alpha\ + \omega^2(\beta-\alpha)\} = 0$$

$$\therefore\ \ (\gamma-\alpha)^2 + (\omega^2+\omega)(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) + \omega^3(\beta-\alpha)^2 = 0 \ \longleftarrow\ \omega^2 + \omega = -1,\ \omega^3 = 1$$

$$\therefore\ \ (\gamma-\alpha)^2 - (\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) + (\beta-\alpha)^2 = 0$$

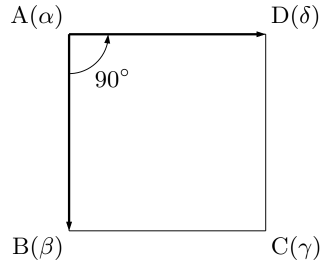
$$\therefore\ \ \boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0} \ \longleftarrow\ \textbf{上記と一致！}$$

あるいは △ABC ∽ △BCA だから、これに **(例 1)** を用いると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0}$$

だが、当然のことである．

(例 3) 四角形 ABCD が正方形である条件



求める条件は次の 2 つである．つまり

(i) 四角形 ABCD が**平行四辺形** であること．

(ii) 次に **1 つの頂角が 90°** であること．

である．

(i) 条件をまずベクトルで表して

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} \qquad \therefore\ \beta - \alpha = \gamma - \delta$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta + \delta} \longleftarrow$$ **平行四辺形の条件！**

(ii) たとえば $\angle\mathrm{BAD} = 90^\circ$ ならば、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $(\pm 90^\circ)$ 回転 して得られる．

$$\boldsymbol{\delta - \alpha = (\pm i)(\beta - \alpha)} \longleftarrow$$ これを 2 乗する！

$$\therefore\ \boldsymbol{(\beta - \alpha)^2 + (\delta - \alpha)^2 = 0}$$

以上、同時に成立するから、これらを併記 して

$$\boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta + \delta}, \quad \boldsymbol{(\beta - \alpha)^2 + (\delta - \alpha)^2 = 0}$$

(例 4) 4 点が同一円周上にある条件

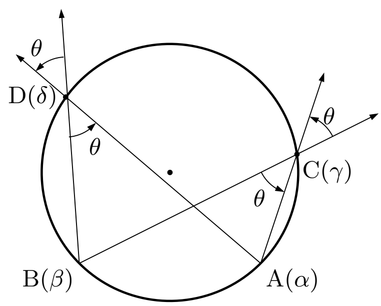
4 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$, $\mathrm{D}(\delta)$ が同一円周上にあるとすると条件は次の 2 つの場合である．

＜図 1 ＞ $\longrightarrow$ **円周角が等しい！**

$$\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{BDA}$$

$$\therefore\ arg\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = arg\frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}$$

$$\therefore\ arg\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} - arg\frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = 0^\circ$$



＜図 1 ＞

＜図 2 ＞ $\longrightarrow$ **内対角の和が 180°！**

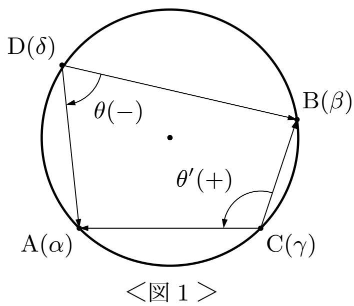
$$\angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{BDA} = 180^\circ$$

$$\therefore\ arg\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} - arg\frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = \pm 180^\circ$$

以上をまとめると

$$\boldsymbol{arg\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} - arg\frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}}$$

$$\boldsymbol{= arg\frac{\dfrac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}}{\dfrac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}} = 0^\circ,\ \pm 180^\circ} \cdots\cdots ①$$



＜図 1 ＞

すなわち、**虚数部分が 0 (ゼロ)** だから

$$\frac{\dfrac{\boldsymbol{\alpha - \gamma}}{\boldsymbol{\beta - \gamma}}}{\dfrac{\boldsymbol{\alpha - \delta}}{\boldsymbol{\beta - \delta}}} = \boldsymbol{k}\ \text{(実数)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ということに他ならない．

ここで注意しておくことがある．それは 複素数平面における偏角の測り方は、時計 (左) まわりをプラス (+)、反時計 (右) まわりを (−) に測ることになっているので、**初等幾何の定理**を用いるときはそれにあわせて**調整** してやらなければならない．

それにしても、**円周角**、**内対角**のハナシがまとめて ① で表され、しかも当然といえばトウゼンだが ② まで走るというのはチョッと感動的であった．

そして、② で $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$、または$\dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$ の一方が実数のときは、他方も実数で、このとき 4 点 A, B, C, D は一直線上にあるのだが、これもよく考えれば「あたりまえ」のことである．

また、② の k は

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\ :\ \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$$

の比の値のことで、この比を「**複比**」、または「非調和比」といい

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=k$$

のように表す———わざわざおぼえるほどのことでもない．

「**複比**」には次のような性質がある．

$$\begin{aligned}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)&=(\beta,\ \alpha,\ \delta,\ \gamma)\ \longleftarrow\ \alpha\text{と}\beta,\ \gamma\text{と}\delta\ \text{の同時入れ替え！}\\&=(\gamma,\ \delta,\ \alpha,\ \beta)\ \longleftarrow\ (\alpha,\ \beta)\ \text{と}\ (\gamma,\ \delta)\ \text{をセットのままで入れ替え！}\\&=k\end{aligned}$$

もともと分数で構成されているのだから、これも「あたりまえ」のことである．

■ 実際に使ってみよう

本文の解説で、「**回転 + 伸縮**」、すなわち

$$\boldsymbol{w=\alpha(z_b-z_a)+z_a,\quad \alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

を詳しく説明したが、特に $\boldsymbol{r=1}$ のとき、**オペレーター $\boldsymbol{\alpha}$** は「**伸縮なしの $\boldsymbol{\theta}$ 回転**」を実現する複素数である———どちらもその用例は多い．以下、実例をあげておく．

＜例 1＞

複素数平面上異なる 3 点 $\mathrm{A}(z_1),\ \mathrm{B}(z_2),\ \mathrm{C}(z_3)$ の間に

$$z_3=\alpha z_1+\beta z_2$$

の関係がある．ただし、$\alpha,\ \beta$ は複素数で $\alpha+\beta=1$ とする．

(1) 3 点 $z_1,\ z_2,\ ,\ z_3$ が同一直線上にあるときの α の満たす条件を求めよ．

(2) $|\alpha|=|\beta|=1$ のとき、α の値、および 3 点 $z_1,\ z_2,\ z_3$ の位置関係を求めよ．

（解） (1) 異なる 3 点 $z_1,\ z_2,\ ,\ z_3$ が同一直線上にある条件は

$$\boldsymbol{\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=k}\ \textbf{(0 でない実数)}$$

であるから、まずは左辺を計算する、すなわち

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}}&=\frac{\alpha z_1+\beta z_2-z_1}{z_2-z_1}\ \longleftarrow\ \alpha+\beta=1\\&=\frac{\alpha z_1+(1-\alpha)z_2-z_1}{z_2-z_1}\\&=\frac{(\alpha-1)z_1+(1-\alpha)z_2}{z_2-z_1}\\&=\frac{(1-\alpha)\cancel{(z_2-z_1)}}{\cancel{z_2-z_1}}=\boldsymbol{1-\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

これが、0 でない実数となる条件であるから

$$\overline{1-\alpha}=1-\alpha\qquad \therefore\ \ \overline{\alpha}=\alpha\qquad \longleftarrow\ \ \alpha\text{は実数！}$$

<u>この α は「全実数」で制限はないが、ここから「$z_1=z_2$, または $z_2=z_3$, または $z_3=z_1$」の</u>

おこる場合を除かなければならない.

そこで、それぞれの場合を吟味しなければならないが、まず $z_1 = z_2$, のときは

$$\begin{aligned} z_3 &= \alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha z_1 + \beta z_1 \\ &= \underbrace{(\alpha + \beta)}_{1} z_1 = z_1 \quad \longleftarrow \quad z_1,\ z_2,\ z_3 \text{は一致！} \end{aligned}$$

するが、この場合の α の制限はない.

次に、「$z_2 = z_3$, または $z_3 = z_1$」のときは ① から

$$\begin{aligned} z_2 = z_3 \ &\longrightarrow\ 1 - \alpha = 1 \qquad \therefore\ \ \alpha = 0 \\ z_3 = z_1 \ &\longrightarrow\ 1 - \alpha = 0 \qquad \therefore\ \ \alpha = 1 \end{aligned}$$

ゆえに、α の満たす条件はこれらの場合を除いて**「0, 1 を除く全実数」**である.

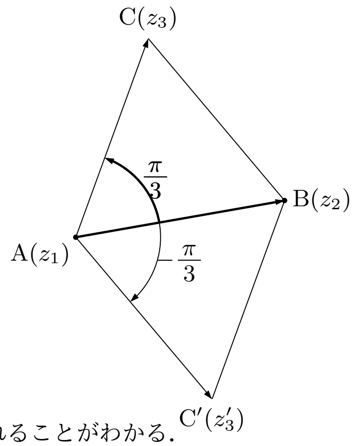
(2) 与えられた条件、$|\alpha| = |\beta| = 1$ に $\beta = 1 - \alpha$ を入れると

$$|\alpha| = |1 - \alpha| = 1$$

ここで、$\alpha = x + yi$ とおいて

$$\begin{cases} |\alpha|^2 = x^2 + y^2 = 1 \cdots\cdots ② \\ |1 - \alpha|^2 = (1 - x)^2 + (-y)^2 = 1 \qquad \therefore\ \ x^2 + y^2 = 2x \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②③ より



$$2x = 1 \qquad \therefore\ \ x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \ y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad \therefore\ \ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

これを (1) の ① に入れると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}} &= 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\cos\left(\mp\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\mp\frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

である. このことから $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\left(\mp\frac{\pi}{3}\right)$ 回転して得られることがわかる.

すなわち、3 点 A, B, C は正三角形の 3 頂点 である.

<考察>

問題文の「**$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ は複素数で $\boldsymbol{\alpha + \beta = 1}$**」を見たとき、まず「**えっ**」と思わなかっただろうか. 次には「そりゃそうだ」と思うだろう.

実際にやってみると、「3 点 z_1, z_2, , z_3 が同一直線上」という条件のときは α は実数、したがって β も実数 になった――出題者はここを強調したかったのか.

(2) で $|\alpha| = |\beta| = 1$ という条件が付くと様子はガラリと変わる. その辺はなかなかウマイものだと思う.

なお、(1) で $\alpha = 0$ のとき、z_3 は z_2 に一致し、$\alpha = 1$ のときは z_1 に一致するが、$\beta = t$ とおくと $\alpha = 1 - t$ であるから

$$\begin{aligned} z_3 &= (1 - t)z_1 + tz_2 \ \longleftarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1 - t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= z_1 + t(z_2 - z_1) \ \longleftarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \end{aligned}$$

と対応させて考えれば状況は、よりハッキリする.

一件落着！

■ 他の分野にまたがる問題

結局、「複素数平面の問題」をキチンと扱うためには、方程式はもちろん、初等幾何、三角比、図形と方程式、ベクトルなどの基礎知識がシッカリ充実していないとハナシにならない. 例題をあげておきますから、そういうつもりで読んでください.

＜例 **1**＞

(1) 2 点 A, B を表す複素数を $\alpha,\ \beta$ が

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たすとき △OAB の 3 辺の長さの比を求めよ.
(2) 2 つの 2 次方程式

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \qquad x^2 + 2px - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

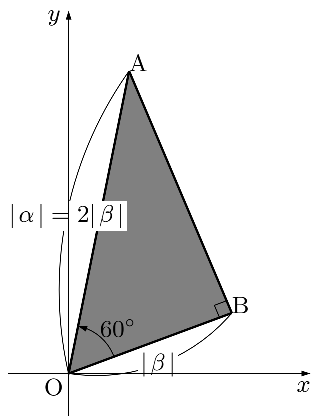
において ① の解が $\alpha,\ \beta$、②の解が $\gamma,\ \delta$ であるとする.
このとき複素数平面上で $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ の表す 4 点が同一円周上にあるように実数 p の値を定めよ.

（解） (1) 与えられた αとβ の関係式は

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

だが、辺の比に関する数値は、まずは $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が考えられるから、

$(*)$ の両辺を β^2 で割る と



$$\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 4 = 0}$$

$\longleftarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ **の 2 次方程式！**

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \pm \sqrt{3}i$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \boldsymbol{2\{\cos(\pm 60^\circ) + \sin(\pm 60^\circ)\}}$$ $\longleftarrow$ **「2 倍 + ($\pm 60^\circ$) 回転」のオペレーター！**

そこで、$\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ の絶対値と偏角を求めると

絶対値 $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = 2} \quad \therefore\ \boldsymbol{|\alpha| = 2|\beta|}$

偏角 $\longrightarrow$ $\boldsymbol{arg\dfrac{\alpha}{\beta} = \pm 60^\circ} \quad \therefore\ \left|arg\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = |\pm 60^\circ| = \boldsymbol{60^\circ}$

ゆえに、△OAB は 三角定規でお馴染みの直角三角形 で、3 辺の比は

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} : \mathrm{AB} = 2|\beta| : |\beta| : \sqrt{3}|\beta|$$
$$= \boldsymbol{2 : 1 : \sqrt{3}}$$

である.

(2) まず、2 つの方程式の解を求めておく.

① $\longrightarrow$ $x = 1 \pm i$ （ $\longleftarrow$ これが$\alpha,\ \beta$ ）

② $\longrightarrow$ $x = -p \pm \sqrt{p^2+1}$ （ $\longleftarrow$ これが$\gamma,\ \delta$ ）

だが、$\gamma,\ \delta$ は実数である——これは注意すべし！

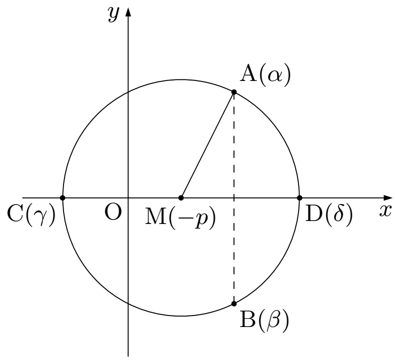
したがって、4 点を $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$ とすると A と B は実軸に対して対称、C と D は実軸上 の点で、しかも、CD は 4 点を通る円の直径である.

よって、この円の中心は CD の中点 $M(-p)$ であり

$$\mathbf{AM} = \sqrt{\boldsymbol{p^2+1}}\ (= \text{半径})$$

となるように p の値を決めればよい.

すなわち



$$|\boldsymbol{\alpha} - (-\boldsymbol{p})| = \sqrt{\boldsymbol{p^2+1}}$$

$$\therefore\ |\alpha+p| = \sqrt{p^2+1} \longleftarrow \text{2 乗する！}$$

$$\therefore\ |1+i+p|^2 = p^2+1$$

$$\therefore\ (1+p)^2+1^2 = p^2+1 \quad \therefore\ 2p=-1 \quad \therefore\ \boldsymbol{p = -\frac{1}{2}}$$

＜考察＞ 複素数やる方がカンタンとは限らない

特に (2) について言えば、**議論**は複素数平面上で行うものの、**内容**としてはほとんど「**図形と方程式**」である．しかし、入り口としてはそういうものであろう.

たとえば、この問題を「**初等幾何**」の「**方べきの定理**」で処理することもできる．それにはまず、2 次方程式の「**解と係数の関係**」で

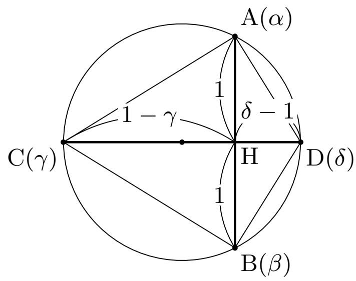
$$\gamma+\delta=-2p,\quad \gamma\delta=-1 \longleftarrow x^2+2px-1=0$$

一方、「**方べきの定理**」によれば

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH} = \mathrm{CH}\cdot\mathrm{DH} \quad \therefore\ 1\cdot 1 = (1-\gamma)(\delta-1)$$

$$\therefore\ \gamma\delta-(\gamma+\delta)+2=0$$

$$\therefore\ (-1)-(-2p)+2=0 \quad \therefore\ \boldsymbol{p=-\frac{1}{2}}$$



あるいは「**ベクトル**」でやるなら、CD が円の直径だから $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が条件――あとは **(内積) = 0** だ！

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix}\gamma-1\\0-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta-1\\0-1\end{pmatrix}$$

$$= (\gamma-1)(\delta-1)+(-1)^2$$

$$= \gamma\delta-(\gamma+\delta)+2 = (-1)-(-2p)+2 = 0 \quad \therefore\ \boldsymbol{p=-\frac{1}{2}}$$

で、とにかく p の値は求まる.

すでに 4 点が同一円周上の条件 として「**複比**」と併せて説明している.

$$\frac{\dfrac{\boldsymbol{\alpha-\gamma}}{\boldsymbol{\beta-\gamma}}}{\dfrac{\boldsymbol{\alpha-\delta}}{\boldsymbol{\beta-\delta}}} = \boldsymbol{k}\ (\text{実数！}) \longleftarrow \begin{cases}\alpha=1+i,\quad \beta=1-i\\ \gamma=-p-\sqrt{p^2+1},\quad \delta=-p+\sqrt{p^2+1}\end{cases}$$

これは 左辺を z とおき、$\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{z}$ を計算する ことで p の値が求まるはずだ、と張り切ってやってみたが計算に振り回されてヒドイ目にあった――場合によることを思い知った.

一件落着！

＜例 3＞

$\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ (i は虚数単位) とする.
複素数平面において、点列 $\mathrm{P}_n(z_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を

$$z_1 = 1,\quad z_{n+1} = \alpha z_n,\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定める.

(1) α を極形式で表せ.

(2) O を原点とするとき、自然数 n に対して $\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の値を求めよ.

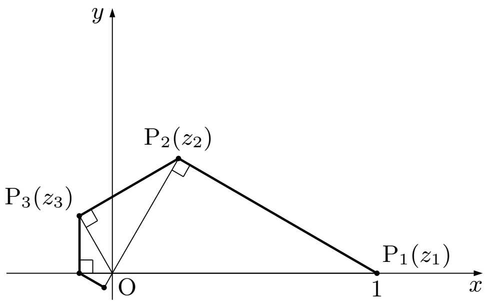
(解) (1) まず $|\alpha|$ を計算する.

$$|\alpha|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ |\alpha| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)!$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$



(2) 与えられた条件は

$z_{n+1} = \alpha z_n,\ z_1 = 1 \longleftarrow$ これは **漸化式！**

$\therefore\ \boldsymbol{z_n = \alpha^{n-1}z_1 = \alpha^{n-1}} \longleftarrow$ 等比数列の **第 n 項！**

ゆえに、求める面積 S_n は

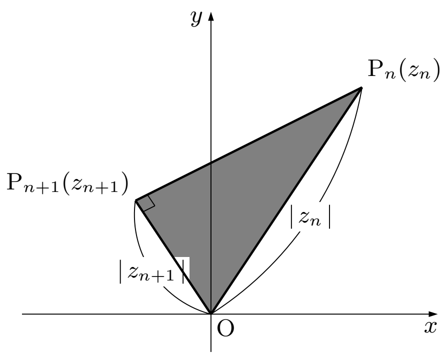
$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}\cdot|z_n|\cdot|z_{n+1}|\cdot\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|\alpha^{n-1}|\cdot|\alpha^n|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|\alpha|^{n-1}\cdot|\alpha|^n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\longleftarrow\ |\alpha| = \frac{1}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$



(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は初項 $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$、**項比が $\boldsymbol{0 < \frac{1}{4} < 1}$** の **無限等比級数** だから、**収束して和が存在する.**

ゆえに、これを S とおくと

$$S = \boldsymbol{\frac{a}{1-r}} \longleftarrow \text{無限等比級数の和の公式！}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

あるいは、<u>その「ハナシ (無限等比級数) の内容」をそのまま記述するカタチ</u> で

$$\sum_{n=1}^{N} S_n = \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^N}{1-\frac{1}{4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}}\ \left(0 < \frac{1}{4} < 1\right)$$

としてもよいが、せっかく「**和の公式**」が用意されているので、それを使う方が自然だろう.

＜考察＞ **無限等比級数の「和の公式」について**

ここでいう「**和**」というのは「**タス**」ということではないのです．この定義は、無限級数

$$a_0 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \ a_n + \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

について

(i) 初項から第 n 項までの和を S_n(n の式) とする———**第 $\boldsymbol{n}$ 部分和**という.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$=S (収束)

のとき、S を **無限級数** (∗) **の和** と定義する———これが**無限級数の和の定義**です.

この定義にしたがえば、無限等比級数の第 n 部分和 S_n は

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1) \ \longleftarrow \ \ r=1\text{のとき、}a=0 \text{ なら } 0\text{、それ以外は発散！}$$

であるから S_n の収束条件は

$$|\,r\,| < 1 \qquad \therefore \quad -1 < r < 1 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{a}{1-r}} \quad (=S) \ \longleftarrow \ \ \textbf{無限等比級数の「和の公式」！}$$

したがって、上記の $\boldsymbol{0 < \frac{1}{4} < 1}$ は収束条件の $\boldsymbol{|r| < 1}$ の確認であり、「**収束して和が存在する**」という**常套句**はその証であるから必ず求められると思わなければならない.

また、これは私の個人的な感想だが、上記の (i), (ii) は、**無限**という人々の想像を超えた概念に迫るための苦肉の知恵であったに違いない、といつも感動する．そうは思わないか.

一件落着！

■ **複素数平面を設定する**

＜**例 1**＞

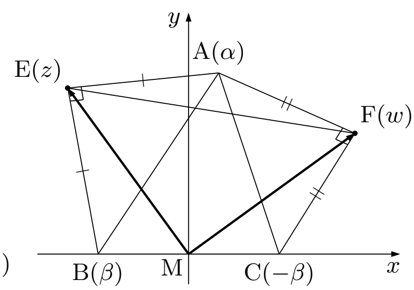
△ABC の辺 BC の中点を M とする．AB, AC を斜辺とする直角二等辺三角形を △ABC の外側に作り、その直角頂をそれぞれ E, F とする．このとき、△EMF は EF を斜辺とする直角二等辺三角形であることを証明せよ.

（解） 座標軸の指定されていない問題は、こちらの都合に合わせて**原点**と**座標軸**を設定できる.

特に本問は**複素数平面**が好都合なので、x 軸と y 軸をそれぞれ実軸と虚軸として座標軸を図のように定めると

$$\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta),\ \mathrm{C}(-\beta),\ \mathrm{E}(z),\ \mathrm{F}(w)$$

などとして 複素数平面上で考える ことができる．すなわち



$$\boldsymbol{\alpha - z = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)(\beta - z)}$$

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$は E を中心に$\overrightarrow{\mathrm{EB}}$を 90°回転！

$= \boldsymbol{i(\beta - z)}$

$\therefore \quad (1-i)z = \alpha - \beta i$

$\therefore \quad \boldsymbol{z = \dfrac{\alpha - \beta i}{1-i}} \quad (\longleftarrow$ これは$\overrightarrow{\mathrm{ME}}$)

$$\boldsymbol{-\beta - w = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)(\alpha - w)}$$

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$は F を中心に$\overrightarrow{\mathrm{FA}}$を 90°回転！

$= \boldsymbol{i(\alpha - w)}$

$\therefore \quad (1-i)w = -\beta - \alpha i$

$\therefore \quad \boldsymbol{w = \dfrac{-\beta - \alpha i}{1-i}} \quad (\longleftarrow$ これは$\overrightarrow{\mathrm{MF}}$)

以上の考察から、題意は $\overrightarrow{\mathrm{MF}}$ を $90°$ 回転して $\overrightarrow{\mathrm{ME}}$ になることを示せばよい.
すなわち

$$\begin{aligned}(\cos 90° + i\sin 90°)w &= i \cdot \frac{-\beta - \alpha i}{1-i} \\ &= \frac{\alpha - \beta i}{1-i} = \boldsymbol{z} \longleftarrow \textbf{上記で求めた } \boldsymbol{z}\textbf{！}\end{aligned}$$

が言えて条件は示された.

＜考察＞ 上記では z や w がすでに求まったかのように等式に組み込んで**方程式**として解いたから「$90°$ 回転」だけで解決した．しかし、アタマからスナオに計算してもよい.

たとえば、$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を「$\mathbf{45°}$**回転**$+\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$**倍**」して得られることに気がつけば

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45° + i\sin 45°)(\alpha - \beta) + \beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta) + \beta \\ &= \boldsymbol{\frac{(1+i)\alpha + (1-i)\beta}{2}}\end{aligned}$$

が得られるが、さらに変形すると

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)\alpha + (1-i)\beta}{2} &= \frac{(1-i)(1+i)\alpha + (1-i)^2\beta}{2(1-i)} \\ &= \frac{2\alpha + (-2i)\beta}{2(1-i)} = \frac{\alpha - \beta i}{1-i} \longleftarrow \textbf{当然ながら一致する！}\end{aligned}$$

と、先に求めた z の値と一致することがわかる.

一件落着！

0.3.2　複素数平面上の「図形と方程式」

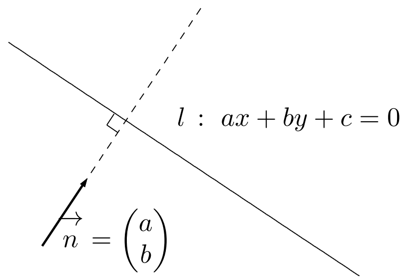
複素数平面上では、複素数の「ベクトル的性格」に加えて複素数特有の「回転+伸縮」という「隠しワザ(？)」も加わり、少しちがった形の表現で「図形と方程式」が展開する．そして主に扱う内容は**直線**と**円**である．以下に解説する．

0.3.2.1　複素数平面上における「直線の方程式」

「**通常の $\boldsymbol{xy}$ 平面**」における**直線の方程式**は $a,\ b$ を同時には 0 でない実数として

$$\boldsymbol{l\ :\ ax+by+c=0} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表された．ただし、文字はすべて実数である．



そして、せっかくのことだから係数 $a,\ b$ で作られるベクトル

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ 直線 } \boldsymbol{l} \text{ に垂直！}$$

が直線 l の**法線ベクトル**であることも確認しておこう．

ここまで準備して

$$\boldsymbol{z=x+yi} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\overline{z}=x-yi}$$

であるから、この 2 本の等式を $x,\ y$ の連立方程式と見て解くと

$$\boldsymbol{x=\frac{z+\overline{z}}{2},\ \ y=\frac{z-\overline{z}}{2i}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

これを ① に入れて

$$a\cdot\frac{z+\overline{z}}{2}+b\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}+c=0 \longleftarrow \text{ 分母を実数化して 2 倍！}$$

$$\therefore\quad a(z+\overline{z})-ib(z-\overline{z})+2c=0 \qquad \therefore\quad (a-bi)z+(a+bi)\overline{z}+2c=0$$

ここで $\boldsymbol{a+bi=\alpha}$ とおくと

$$\boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+2c=0\ \ (\alpha \neq 0)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となり、複素数平面上の**直線の方程式**が導かれる．ただし、α は**複素定数**、$2c$ は**実定数**(この実数条件は忘れやすい)、z は**複素変数**である．

チョッと見には ① と ③ があまりにカタチちがうので戸惑ってしまうが、実は同じ内容なのだ——② でツナガっている！

また、$\boldsymbol{a+bi=\alpha}$ は上記の**法線ベクトル** $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ に対応する複素数になっていることも興味深い．

(注) 直線の正規表現

上記 ③ に注目してもらいたい．私はこの式を複素数平面上の直線の**正規表現**と思っています．その理由は読み進むうちにわかります．

なお、ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は直線 $ax+by+c=0$ に垂直なベクトルで、この直線の**法線ベクトル**という——知らなかった人はすぐに調べておいてください．．

end.

＜メモ＞

■ 直線の方程式——$\boldsymbol{z}$ と $\overline{\boldsymbol{z}}$ の 1 次方程式

本文では図形と方程式でお馴染みの「本文①：$\boldsymbol{ax+by+c=0}$」から出発して

$$「本文③」：\ \boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+2c=0\ \ (\alpha \fallingdotseq 0,\ c\ は実定数)}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

を誘導した．複素数平面なら本来、もっとそれらしい導入でなくてはならない、と思い始めた．まあ、そのキブンはわかってもらえるだろう．

そこで、たとえば

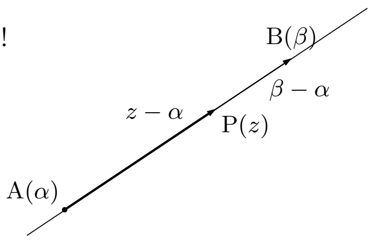
$$\boldsymbol{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=t}\ \textbf{(実数)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$\longleftarrow\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}),\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\beta}),\ \mathbf{P}(\boldsymbol{z})\ \textbf{が同一直線上！}$$

これは、複素数的ベクトル方程式

$$z-\alpha=t(\beta-\alpha)\ \longleftarrow\ ①の分母を払ったカタチ！$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{z=\alpha+t(\beta-\alpha)}$$



と同義である．

これを使えば、2 点 A(α), B(β) を通る直線の方程式の複素数平面上の表示が得られるはずである．

そこで、① の左辺が実数である条件は

$$\boldsymbol{\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}}\qquad \therefore\ \frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$$

であるから、分母を払って整理してみる．

$$(\overline{z}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)=(z-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})$$

$$\therefore\ \ \overline{z}(\beta-\alpha)-\overline{\alpha}(\beta-\alpha)=z(\overline{\beta}-\overline{\alpha})-\alpha(\overline{\beta}-\overline{\alpha})$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-(\beta-\alpha)\overline{z}+\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

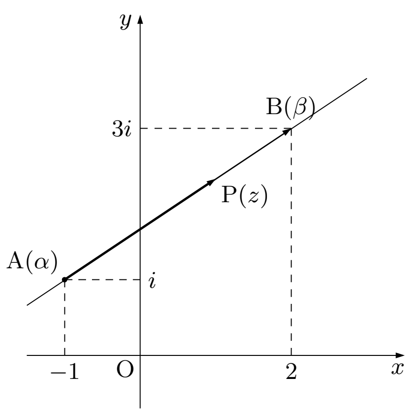
これが 2 点 A(α), B(β) を通る直線の方程式である．

＜例 1＞

複素数平面上の 2 点 A($-1+i$), B($2+3i$) を通る直線の方程式を求めよ．

（解）② の定数部分の数値を計算しておくと

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=(2+3i)-(-1+i)\\&=3+2i\\\overline{\beta}-\overline{\alpha}&=\overline{(\beta-\alpha)}\\&=3-2i\\\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}&=(-1-i)(2+3i)-(-1+i)(2-3i)\\&=\cancel{1}-5i-(\cancel{1}+5i)\\&=-10i\end{aligned}$$



だから、これらを ② に入れると

$$\boldsymbol{(3-2i)z-(3+2i)\overline{z}-10i=0}\cdots\cdots③$$

まあ、これで直線 AB の方程式が求まったことにはなるが、「本文③」のカタチとはチョッとちがっている——何がちがうか．

目で見たところでは

(i) 第 2 項目の符号が負 (マイナス) になっている．
(ii) 定数項が**純虚数** $\boldsymbol{(-10i)}$ になっている———ここは $\boldsymbol{2c}$**(実定数)** のはずだ．

まずは (ii) を解消する———両辺に i をカケて左辺の $(-10i)$ を実数化すればよい．すなわち

$$i(3-2i)z-i(3+2i)\overline{z}-10i^2=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}+10=0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

だが、こうすれば (i) も同時に解決される．

そして、③, ④ は、共に複素数平面上における直線 AB の方程式である．とはいえ、結果が 2 様のカタチで与えられたのでは紛らわしい．

しかし、④ を正規としておけば「**本文③**」で $\alpha=a+bi$ から、もとの $ax+by+c=0$ は

$$\begin{cases} a+bi=2-3i & \therefore\quad a=2,\ b=-3 \\ 2c=10 & \therefore\quad c=5 \end{cases} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{2x-3y+5=0}$$

として、ほとんど瞬時に知ることができる．

＜考察＞

複素数平面上の直線、たとえば

$$② \ :\ \boldsymbol{(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-(\beta-\alpha)\overline{z}+\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}=0$$

は、$z,\ \overline{z}$ の 1 次方程式で表されるが、この関係を xy 平面 上の関係式として捉えるには

$$\boldsymbol{z=x+y\,i,\ \ \overline{z}=x-y\,i\ (x,\ y\ \text{は実数})}$$

として代入して整理する．

$$\underbrace{\boldsymbol{f(x,\ y)}}_{\boldsymbol{0}}+\underbrace{\boldsymbol{g(x,\ y)}}_{\boldsymbol{0}}\,\boldsymbol{i=0}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$\longleftarrow\ \ \boldsymbol{f(x,y),\ g(x,\ y)\ \text{は}\ x,\ y\ \text{の 1 次式！}}$$

と変形されることは経験上、容易に認めるところである．

そして、一般的には次のような**連立方程式**となる．つまり

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

となり、ただ 1 組の解を持つのだが、それでは**マズイ** のです———もともとは $x,\ y$ の 1 次方程式で xy 平面上 の直線だから、1 点に決まってはマズイ．

③ の場合でいうと

$$③ \ :\ \boldsymbol{(3-2i)z-(3+2i)\overline{z}-10i=0}$$

だから $z=x+yi$ とおいて代入するのだが、それには $\boldsymbol{z+\overline{z}=2x,\ z-\overline{z}=2yi}$ を利用すると効率がよい．まあ、やってみよう．すると上記は

$$3(z-\overline{z})-2i(z+\overline{z})-10i=0$$

$$\therefore\quad 3(2yi)-2i(2x)-10i=0 \longleftarrow\ \ \text{実数部分が自動消滅！}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(\text{消えた！})-2(2x-3y+5)i=0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{2x-3y+5=0}$$

結局、$f(x)$ (実数部分) が自動的に消えて「$g(x)$ (虚数部分) $=0$」から $x,\ y$ の 1 次方程式として条件が求まっている．

また、④ は ⑥ の両辺に i をかけたものだから ⑥ に i をかければよい．すなわち

$$(\text{消えた！}) \times i - 2(2x-3y+5)i \times i = 0 \times i$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{2(2x-3y+5)+(\text{消えた！})\,i=0} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{2x-3y+5=0}$$

この場合は、**$g(x)$ (虚数部分)** が自動的に消えて、「$f(x)$ (実数部分) $=0$」から $x,\ y$ の 1 次方程式として条件が求まっている．つまり、いずれの場合も $x,\ y$ の 1 次方程式 の 1 本が消えて他の 1 本しか出てこない ことが確認される———これが複素数平面上の直線の基本のカタチなのだ．

そして、このハナシは次のようにまとめられる．まずは ②, ③, ④ で次のことを確かめてもらいたい．それは

両辺の共役をとって (-1) をカケルともとの方程式になる

というもので、これを**自己共役**という．

したがって、複素数 z と $\overline{z}$ で構成された 1 次方程式が複素数平面上で直線を表すのは、この**自己共役**の場合に限る、ということが知られている．なかなか**「おもしろい性質」**である．

さて、改めて ③と④ をみてもらいたい．

それは、複素数平面上の直線 AB を $z,\ \overline{z}$ で表すだけならどちらでもよい．しかし、**「本文③」**を正規表現として覚えておくと都合のよいことがあるのだ．

しかし、③ の左辺の最初の 2 項 は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(3-2i)z-(3+2i)\overline{z}} &= (3-2i)z-\overline{(3-2i)z}\\ &= \boldsymbol{(\cdots)\,i}\end{aligned}$$

の形になり、加えて **定数項**が $(-10i)$ という**純虚数** である———-早いハナシが**キモチワルイ**．

それに対して ④ の左辺の最初の 2 項 は

$$\begin{aligned}(2+3i)z+(2-3i)\overline{z} &= (2+3i)z+\overline{(2+3i)z}\\ &= \textbf{(実数)}\end{aligned}$$

しかも、**定数項**は 10 という**実数** である———④ の左辺は全て実数でハッキリ言って好ましい．

ここで、冒頭にあげた**「本文③」**をながめてもらいたい．それは

「本文③」： $\boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+2c=0\ (\alpha \neq 0,\ 2c\ \text{は実定数})}$

であったが、定数項の「**$2c$ は実定数**」という条件は、上記の例でいうと、同じ内容である ③と ④ のうち ④ を指定するためのものであった ことがわかる———だから私としてはこれをぜひとも、複素数平面上の直線の**正規表現**と呼びたいのです．

一件落着！

＜例 2＞

複素数平面上の 2 直線

l_1 : $(3-2i)z-(3+2i)\overline{z}=-4\,i$ ……………………………①

l_2 : $(i+1)z+(i-1)\overline{z}=2i$ ……………………………②

の交点を求めよ.

（解） z を求めるには ①, ② から $\overline{z}$ を消去して、z の 1 次方程式作る.

そうすると、① $\times(i-1)+$ ② $\times(3+2i)$ より

$$\{\underbrace{(3-2i)(i-1)+(i+1)(3+2i)}_{A}\}z=\underbrace{-(4i)\times(i-1)+(2i)\times(3+2i)}_{B}\cdots\cdots③$$

ここで、A, B を先に計算しておく.

$$\begin{aligned}A&=-(2i-3)(i-1)+(i+1)(2i+3)\\&=-(2i^2-5i+3)+(2i^2+5i+3)=10i\end{aligned}$$

$$B=4(i^2-i)+2(3i+2i^2)=10i$$

これら $A,\ B$ を ③ に入れて

$$\cancel{(10i)}z=\cancel{(10i)}\qquad\therefore\ \boldsymbol{z=1}\ \ (=1+0\,i\ \text{のこと！})$$

＜考察＞

①② の定数部分が $-4i,\ 2i$ と私のいう**正規表現**になっていないのが気に入らない. そこで i をかけて

「本文③」: $\boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+2c=0}$ ($\boldsymbol{\alpha\fallingdotseq 0,\ 2c}$ **は実定数)**

の形に変形してみよう.

l_1 については

$$i(3-2i)z-i(3+2i)\overline{z}=-4i^2\qquad\therefore\ \boldsymbol{(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}-4=0}$$

そうすると、正規表現との係数の比較で

$$\alpha=a+bi=2-3i\qquad\therefore\ a=2,\ b=-3$$

$$2c=-4\qquad\therefore\ c=-2$$

で、l_1 は xy 平面上では $\boldsymbol{2x-3y-2=0}$, すなわち $2x-3y=2$ であることがわかる.

l_2 についても同様に i をかけて

$$i(i+1)z+i(i-1)\overline{z}=2i^2\qquad\therefore\ (-1+i)z+(-1-i)\overline{z}+2=0$$

ゆえに、この場合は

$$\alpha=a+bi=-1-i\qquad\therefore\ a=-1,\ b=-1$$

$$2c=2\qquad\therefore\ c=1$$

だから、l_2 は xy 平面上では $\boldsymbol{-x-y+1=0}$**, すなわち** $\boldsymbol{x+y=1}$ である.

もう、説明するまでもないが連立方程式を解けばよい. すなわち

$$\begin{cases}2x-3y=2\\x+y=1\end{cases}\qquad\therefore\ x=1,\ y=0$$

から、求める交点は $z=1$ である.

一件落着！

■ 複素数的ベクトル方程式

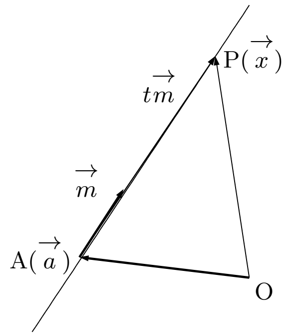
ここで、チョッと遊んでもらおうか.

つまり、点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ を通り、方向ベクトルが $\overrightarrow{m}$ で与えられる直線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{m} \longleftarrow t\text{ は実数}, \ \overrightarrow{m} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$$

であった———これはあくまでベクトルのハナシ！

これに倣って、ベクトル $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{m}$ をそれぞれ複素数 z, a, $,m$ に置き換えて複素数的ベクトル方程式



$$\boldsymbol{z = a + tm} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\longleftarrow \ \boldsymbol{t}\text{ **は実数**}, \ \boldsymbol{m \fallingdotseq 0}$$

が得られることもすでに述べた．そこで、方向ベクトルにあたる複素数 m に注目する．たとえば、m と直交する方向は複素数 m に $\dfrac{\pi}{2}$ 回転の i をかけて im と簡単に表される．

もちろん $(-i)$ をかければ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 回転になるが、直交という条件だけならばどちらでもよい．

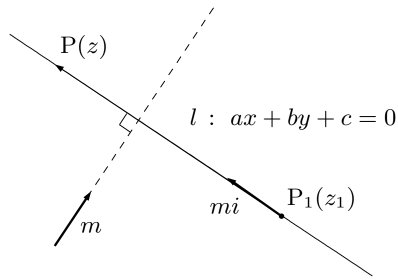
つまり、点 $\mathrm{P}_1(z_1)$ を通り ① と直交する直線 は

$$\boldsymbol{z = z_1 + t(im)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のように **1 パツ** で表される———これは有難い！

さらに、② の両辺の共役複素数をとると

$$\overline{z} = \overline{z_1} - t\overline{mi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$



②, ③ から t を消去すると

$$\boldsymbol{\frac{z - z_1}{m} = \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{-\overline{m}}} \quad (= ti)$$

だが、分母を払って整理すると

$$\overline{m}(z - z_1) + m(\overline{z} - \overline{z_1}) = 0 \qquad \therefore \quad \overline{m}z + m\overline{z} - (\overline{m}z_1 + m\overline{z_1}) = 0$$

ここで m を α と書き直す と

$$\boldsymbol{\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 2c = 0} \quad \text{ただし、}\boldsymbol{2c = -(\overline{m}z_1 + m\overline{z_1}\ )} \longleftarrow \text{ これは実数！}$$

となって、「**本文③**」に述べたものと同じ形になる．

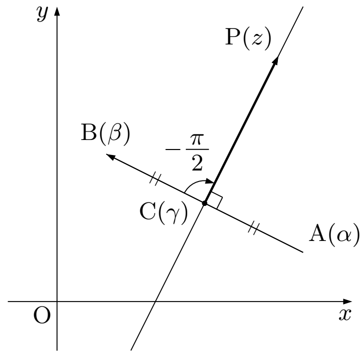
要するに、m が法線ベクトル、mi が本文の l の方向ベクトルに対応する複素数になっている．つまり、① のベクトル方程式で表される直線は本文の直線 l、すなわち「**①：$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$**」に他ならない．

ちなみに、上記では「② の共役をとって ③ を作った」が、一般に「$P = Q$」に対して「$\overline{P} = \overline{Q}$」を**共役方程式**という．複素数の方程式では、「ある文字を消去したい」ときに、この共役方程式がよく使われる———覚えておいてもよいハナシだ．

＜例１＞

複素数平面上の 2 点を $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ とするとき、線分 AB の垂直 2 等分線を求めよ．

（解） 線分 AB の中点を $\mathrm{C}(\gamma)$ とすると、点 P は点 C を通りその方向は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\pm\dfrac{\pi}{2}$ 回転した直線上にある．



そこで、点 $\mathrm{P}(z)$ を複素数的ベクトルで表すと

$$\boldsymbol{z=\gamma+t(\beta-\alpha)(\pm i)} \longleftarrow \ \boldsymbol{t \neq 0} \text{ は実数！}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha}=(\pm t)i=ki}$$

で表される．すなわち

$$\left(\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha}\right)+\overline{\left(\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha}\right)}=0$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{(z-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+(\overline{z}-\overline{\gamma})(\beta-\alpha)=0}$$

どうもキモチの悪い式だが、これに $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を代入して整理するといくらか見やすい式になる———以下にやっておきます．

$$\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+\left(\overline{z}-\frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{2}\right)(\beta-\alpha)=0$$

$$\therefore\ \ 2z(\overline{\beta}-\overline{\alpha})-(\alpha+\beta)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+2\overline{z}(\beta-\alpha)-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\beta-\alpha)=0$$

$$\therefore\ \ 2z(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+2\overline{z}(\beta-\alpha)=\underbrace{(\alpha+\beta)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\beta-\alpha)}_{A}\cdots\cdots\cdots①$$

定数項を右辺にまとめたが、その計算はチャツチャツとやらずにキッチリと**分配則**にしたがって丁寧に進めること———**「急がば廻れ」**なのだ．つまり

$$\begin{aligned}A&=(\alpha+\beta)\overline{\beta}-(\alpha+\beta)\overline{\alpha}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\beta-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\alpha\\&=\cancel{\alpha\overline{\beta}}+\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha}-\cancel{\overline{\alpha}\beta}+\cancel{\overline{\alpha}\beta}+\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha}-\cancel{\alpha\overline{\beta}}\\&=2(\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha})\end{aligned}$$

こうしておいて ① に代入すると

$$2z(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+2\overline{z}(\beta-\alpha)=2(\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha}) \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\beta-\alpha)\overline{z}=\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha}}$$

となって、いくらかキレイな形になる．

あるいは、古式床しく**初等幾何**で行く．すなわち、垂直 2 等分線は

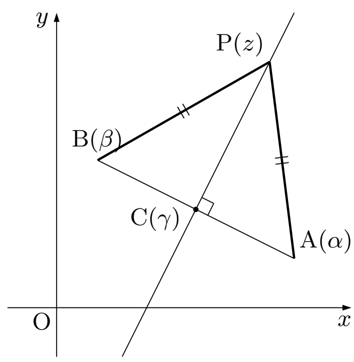
2 定点からの距離の等しい点の集合

と定義される．**図形と方程式**でもこの定義が基本である．これはこれでよいものだ．

それは、いつも次の**マクラ**で始まる．

「条件に適する点を P とすると」

である———以下、これを複素数で書いておく．



条件に適する点を $\mathrm{P}(z)$ とすると

$$\mathbf{AP} = \mathbf{BP} \longleftarrow \text{ ただし、2 定点を A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta) \text{ とする}$$
$$\therefore\ |z-\alpha| = |z-\beta| \qquad \therefore\ |z-\alpha|^2 = |z-\beta|^2$$
$$\therefore\ (z-\alpha)(\overline{z-\alpha}) = (z-\beta)(\overline{z-\beta})$$
$$\therefore\ (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = (z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})$$
$$\therefore\ \cancel{z\overline{z}} - z\overline{\alpha} - \overline{z}\alpha + \alpha\overline{\alpha} = \cancel{z\overline{z}} - z\overline{\beta} - \overline{z}\beta + \beta\overline{\beta}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z + (\beta-\alpha)\overline{z} = \beta\overline{\beta} - \alpha\overline{\alpha}}$$

これが複素数平面上における線分 AB の **垂直 2 等分線の方程式** で、当然のことながら上記と同じになる．しかも、計算はこちらの方がずっと簡単に済む．

＜考察＞

ここで、直線の**正規表現**と決めた

$$\boldsymbol{\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 2c = 0 \ \ (\alpha \neq 0,\ 2c \text{ は実定数})}$$

を思い出してもらいたい．そうすると α にあたるものが $(\beta-\alpha)$，$2c$ にあたるものが $-(\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha})$ になっていることがわかる．そこで、たとえば

$$\mathrm{A}(5+i),\ \ \mathrm{B}(1+3i)$$

とすれば

$$\beta - \alpha = -4+2i, \qquad \overline{\beta}-\overline{\alpha} = -4-2i$$
$$\beta\overline{\beta} - \alpha\overline{\alpha} = (1^2+3^2) - (5^2+1^2) = -16$$

だから、<u>線分 AB の垂直 2 等分線の方程式</u> は

$$(-4-2i)z + (-4+2i)\overline{z} + 16 = 0 \qquad \therefore\ \underbrace{(2+i)z + (2-i)\overline{z} - 8}_{B} = 0$$

である．さらに、xy 平面上の直線として表すには、これに $z = x+yi$ を入れて計算するのだが、このときも

$$\boldsymbol{z + \overline{z} = 2x,\ \ z - \overline{z} = 2yi}$$

を利用する．

$$\begin{aligned} B &= 2(z+\overline{z}) + i(z-\overline{z}) - 8 \\ &= 2(2x) + i(2yi) - 8 \\ &= 4x - 2y - 8 = 0 \\ &\therefore\ 2x - y - 4 = 0 \qquad \therefore\ y = 2x - 4 \end{aligned}$$

となる．また、余計なハナシではあるが、これが線分 AB の中点 M(3, 2) を通り、複素数平面上の $(\beta-\alpha)$ にあたる法線ベクトル $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ と垂直であることは容易に確認される．

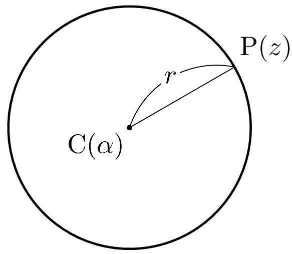
一件落着！

0.3.2.2　複素数平面上の「円の方程式」

円は「定点 (中心) からの距離が一定 (半径) の点の集合」として定義される．したがって、複素数平面上で中心を $\mathrm{C}(\alpha)$、半径を r、条件に適する点を $\mathrm{P}(z)$ とすれば

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = \boldsymbol{|z-\alpha| = r}\ (>0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{CP}}^2$ を計算すると



$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2 &= |z-\alpha|^2 \\ &= (z-\alpha)\,\overline{(z-\alpha)} \\ &= (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) \\ &= z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha}\end{aligned}$$

であるから条件は

$$z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} = r^2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0}$$

ここで、$\alpha\overline{\alpha} - r^2 = k$ (定数) とおけるから、複素数平面上の**円の方程式**は

$$\boldsymbol{z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + k = 0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．ただし

$$k = \alpha\overline{\alpha} - r^2 \qquad \therefore\ r^2 = \alpha\overline{\alpha} - k > 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{k < \alpha\overline{\alpha} = |a|^2}$$

を忘れてはならない．

(注) 要は「式展開」と「平方完成」の関係だ．

デカルト座標平面上の円の方程式では

中心 $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})$**，半径** $\boldsymbol{r}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$

展開した形では $\longrightarrow$ $\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$

の 2 つの形があった．本文 ① は $(*)$，② は $(**)$ にあたる形と言ってもよいだろう．

しかし、複素数平面上では「① ⟶ ②」の変形はまあ、タダの式展開だから「ヨシ」としても、「② ⟶ ①」の変形は慣れないと難しい．

だから、この「② ⟶ ①」の変形の要領についてチョッと説明しておきたい．それは、まず展開の経緯の変形の

$$\begin{aligned}\boldsymbol{|z-\alpha|^2} &= \boldsymbol{(z-\alpha)\,\overline{(z-\alpha)}} \\ &= \boldsymbol{(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})}\end{aligned}$$

に注目して、これを逆にたどるということ――**式展開**に対する**因数分解**のようなものである．

とにかく、② の左辺をながめてこの形をひねり出す工夫をするのだ．

$$\underbrace{z\overline{z} - \overline{\alpha}z}_{A} - \underbrace{\alpha\overline{z}}_{B} + k = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (***)$$

まず A の部分は z で括れる――やれるところから先にやる．

$$A = z(\overline{z} - \overline{\alpha})$$

と変形できるが、B の部分はこの $(\overline{z}-\overline{\alpha})$ に注目して

$$\begin{aligned} B &= \alpha\overline{z} \longleftarrow \textbf{ }(\boldsymbol{\overline{z}-\overline{\alpha}})\text{ で括れるように }\boldsymbol{\alpha(\overline{z}-\overline{\alpha})}\text{ を作り余計な }\boldsymbol{-\alpha\overline{\alpha}}\text{をトル！} \\ &= \alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha} \longleftarrow \text{ こんな具合！} \\ &= \alpha(\overline{z}-\overline{\alpha})+\alpha\overline{\alpha} \longleftarrow \text{ これでイケル！} \end{aligned}$$

この $A,\ B$ を $(***)$ に入れると

$$z(\overline{z}-\overline{\alpha})-\{\alpha(\overline{z}-\overline{\alpha})+\alpha\overline{\alpha}\}+k=0$$

$$\underbrace{z(\overline{z}-\overline{\alpha})-\alpha(\overline{z}-\overline{\alpha})}_{(\overline{z}-\overline{\alpha})\text{ で括る}}-\alpha\overline{\alpha}+k=0 \qquad \therefore\ (\overline{z}-\overline{\alpha})(z-\alpha)=\alpha\overline{\alpha}-k$$

$$\therefore\ |z-\alpha|^2=|\alpha|^2-k \qquad \therefore\ \boldsymbol{|z-\alpha|=r}\ ,\ \text{ただし }\boldsymbol{r=\sqrt{|\alpha|^2-k}}$$

で、一応は **デキタ！**

しかし、これを 一瞬のうちにやらなければならない のだから、やはり難しいのだと思います. せいぜい頑張って練習してください.

end.

＜メモ＞

■ $z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+k=0$———式の形 (カタチ) に驚くな！

この複素数で表した円の方程式は、今まで学んだ**図形と方程式**でも**ベクトル**でも見たことがない———初学者が**違和感**を感じても当然 である.

どうすればよいか. それは、よく納得して慣れる より他はない. そういうものです.

＜ 例 ＞

複素数 z が

$$z\overline{z}+(1+i)z+(1-i)\overline{z}+1=0 \cdots\cdots ①$$

を満たすとき

(1) 点 z の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ.

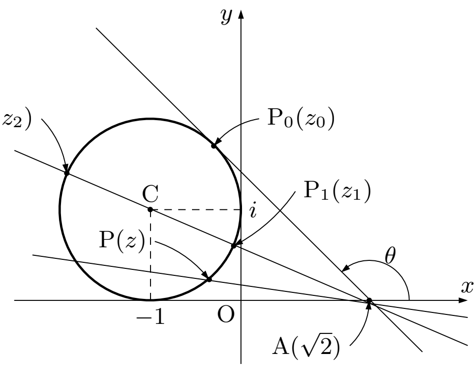
(2) 複素数 $z-\sqrt{2}$ の偏角 θ、および絶対値のとり得る値の範囲を求めよ.
ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(3) (2) において θ が最小になるときの $|z|$ を求め、そのときの $z=z_0$ を求めよ.

(解) こういう問題を扱う場合でも、**図形と方程式**や**ベクトル**で得た知識のアレコレが心のどこかで、しかも**生きた知識**として用意されていなくてはならない. 本問では設問 (1) とそれに続く (2)(3) を比較してみてください.

(1) ① で $1-i=\alpha$ とおくと $1+i=\overline{\alpha}$ だから、それぞれを置き換えて

$$
\begin{aligned}
&① : z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+1=0\\
&\therefore\ z(\overline{z}+\overline{\alpha})+\alpha(\overline{z}+\overline{\alpha}-\overline{\alpha})+1=0\\
&\therefore\ (z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}-1\\
&\therefore\ |z+\alpha|^2=|\alpha|^2-1 \longleftarrow \alpha=1-i\\
&\qquad\qquad =\{1^2+(-1)^2\}-1=1\\
&\therefore\ |z-(-\alpha)|=1\\
&\therefore\ \boldsymbol{|z-(-1+i)|=1}
\end{aligned}
$$



これより z は中心 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円を描くことがわかる.

(2) $\sqrt{2}$ を表す実軸上の点を $\mathrm{A}(\sqrt{2})$ とする.

このとき、円周上に点 $\mathrm{P}(z)$ をとると、複素数 $z-\sqrt{2}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ に対応する複素数である. そこで、$z-\sqrt{2}$ の偏角を θ とすると直線 AP の傾き m は $\tan\theta$ に等しいから

$$arg(z-\sqrt{2})=\theta,\quad \tan\theta=m$$

このとき、直線 AP の方程式は

$$y=m(x-\sqrt{2}) \qquad \therefore\ mx-y-\sqrt{2}m=0$$

だが、求める条件は この直線と (1) の円とが共有点を持つ ことである. すなわち、円の中心 C からこの直線におろした垂線の距離が半径以下ということである. よって

$$\frac{|m(-1)-1-\sqrt{2}m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} \leqq 1 \qquad \longleftarrow \qquad \boldsymbol{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\therefore\ |-(\sqrt{2}+1)m-1| \leqq \sqrt{m^2+1}$$

この両辺は負でないから 2 乗しても不等式の同値関係は保存される.

ゆえに 2 乗して

$$(\sqrt{2}+1)^2m^2+2(\sqrt{2}+1)m+1 \leqq m^2+1$$

$$\therefore\ 2(\sqrt{2}+1)m^2+2(\sqrt{2}+1)m \leqq 0 \qquad \therefore\ m(m+1) \leqq 0 \qquad \therefore\ -1 \leqq m \leqq 0$$

そこで θ の範囲を求めると

$$-1 \leqq \tan\theta \leqq 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi}$$

また、$\left|z-\sqrt{2}\right| = l$ は円周上の点 $\mathrm{P}(z)$ と点 $\mathrm{A}(\sqrt{2})$ との距離であるから

$$\mathrm{AP_1} \leqq l \leqq \mathrm{AP_2} \;\longleftarrow\; \mathrm{AP_1} = \mathrm{AC}-1,\;\; \mathrm{AP_1} = \mathrm{AC}+1$$

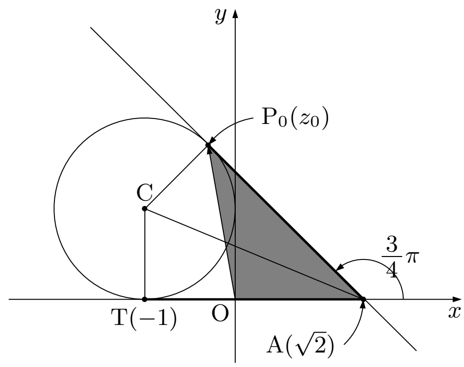
ここで AC は

$$\mathrm{AC} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

であるから $\left|z-\sqrt{2}\right| = l$ のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1 \leqq l \leqq \sqrt{4+2\sqrt{2}}+1}$$

である.



(3) 条件は θ が最小のとき、とあるから $\theta = \frac{3}{4}\pi$ として議論を進めればよい．そうすると

$$\angle\mathrm{PAT} = \pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

で、しかも $\mathrm{AP_0}$, AT は点 A から円 C に引いた接線であるから

$$\mathrm{AP_0} = \mathrm{AT} = \sqrt{2}+1$$

すなわち、$\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ を点 A を中心に $-\frac{\pi}{4}$ 回転して得られることがわかる.

ゆえに

$$z_0-\sqrt{2} = (-1-\sqrt{2})\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$\therefore \quad z_0 = -(1+\sqrt{2})\frac{1-i}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}i}$$

$$\therefore \quad |z_0|^2 = \left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{|z_0| = \sqrt{3}}$$

である.

＜考察＞

(1) は、初学者がよくやるように

$$z = x+yi,\;\; \bar{z} = x-yi$$

とおいて ① に代入して整理すると虚数単位 i を含む項が消えて

$$x^2+y^2+2x = 0 \qquad \therefore \quad (x+1)^2+y^2 = 1$$

が簡単に導ける——もう**図形と方程式**そのものだから問題はない.

しかし、この方法では原理的には素朴でよいのだが、場合によるとヤッカイなことにもなりかねない．それに、上記の**複素数のままの計算**は何とも**カッコイイ**ではないか．そういうわけでここでは複素数特有の変形に注目して読んでもらいたい.

(2) は偏角 θ を正しくおさえれば、あとはどこにでもある図形と方程式の内容であるから、さして問題はないかと思う.

(3) については問いかけの順序がちがうのではないか．つまり複素数の問題らしく z_0 を先に求めたが、考えてみると出題の意図はそうではないかも知れない．

$\triangle$OAP に**余弦定理**を用いると

$$\begin{aligned}|\,z_0\,|^2 &= \mathrm{AO}^2 + \mathrm{AP}^2 - 2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AP}\cos\frac{\pi}{4}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\\ &\therefore\quad |\,z_0\,| = \sqrt{3}\end{aligned}$$

と、まあ簡単に求まる．しかし、この方法だとここまではウマイのだが、求まった $|\,z_0\,|$ にチョッとこだわる．そして、このときの z_0 と x 軸の正方向とのなす角が簡単に求まらないので惨めに引きずりまわされて、結局、上記の方法にもどってやり直しだ．そういう意味でこの設問の順番には悩ましいものがあります．

また、上記では複素数らしく「**回転+伸縮**」を用いたが、とにかく $\mathrm{AP}_2 = 1+\sqrt{2}$ が見えさえすれば**ベクトル**で

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}_0}$$

だが、これを複素数で表すと

$$\begin{aligned}z &= (\sqrt{2}+0\,i) + \underbrace{(1+\sqrt{2})}_{\text{長さ}}\underbrace{\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{単位ベクトル的複素数}}\\ &= \sqrt{2} + (1+\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i}\end{aligned}$$

としてもよい——これは使えるかも！

つまり、ベクトルで $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 方向の**単位ベクトル** $\vec{e}$ は

$$\boldsymbol{\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

であった．そういうことなら、複素数で表示されたベクトルについても同様に

$$\begin{aligned}e &= \boldsymbol{\frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}} \quad \longleftarrow \quad e \text{ は } |\,e\,| = 1 \text{ の複素数！}\\ &= \boldsymbol{\cos\alpha + i\sin\alpha} \ \longleftarrow \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

と、全く同様に使えるではないか．まあ、いろいろ考えてみるとよい．

一件落着！

0.3.2.3 複素数平面上の 軌跡、領域

(1) 軌跡について

ある条件に適する点の描く図形を軌跡という．このとき、図形 F が条件 C の軌跡であるためには次の 2 つが満たされていなくてはならない．すなわち

(i) 条件 C を満たす点は図形 F 上にある．（ $\longleftarrow$ **必要条件！**）

(ii) 図形 F 上の点は**すべて**条件 C を満たす．（ $\longleftarrow$ **十分条件！**）

である．

特に (ii) は、場合によると「明らかである」という 1 行ですむ場合もあるが、重大な条件 (たとえば除外点、あるいは不適当な範囲など) の確認をウッカリ見逃さないよう注意しなくてはならない．

とはいえ、これらは**初等幾何**、**図形と方程式**などで十分痛い目にあって来たことがらである．ここでは、それらを**複素数平面**上で検証することになる．

<メモ>

■ 軌跡に関する問題

ここで軌跡の問題というと、まずは「**垂直 2 等分線**」と「**アポロニウスの円**」であろう．垂直 2 等分線は図形と方程式でとりあげたから、ここでは「**アポロニウスの円**」をとりあげる．

両者ともこの先「**1 次分数変換**」などで頻繁に出てくる——複素数平面で扱いやすい素質 をしているのだと思う．

＜ 例 1 ＞

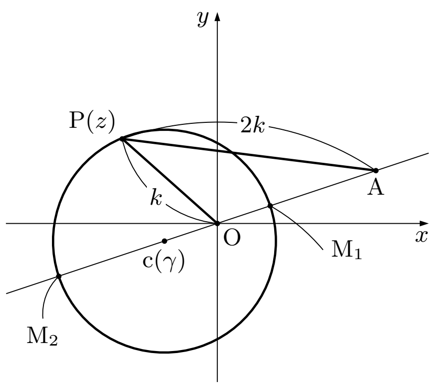
複素数平面上で、2 定点を A(3α), O(0) とする．このとき A, O からの比が $2:1$ である点の軌跡を求めよ．

（解）条件に適する点を P(z) とすると

$$\mathbf{AP : OP = 2 : 1} \qquad \therefore \ 2\mathrm{OP} = \mathrm{AP}$$

$$\therefore \ 2\,|z| = |z-3\alpha|$$

2 乗して



$$4\,|z|^2 = |z-3\alpha|^2$$

$$\therefore \ 4z\bar{z} = (z-3\alpha)\overline{(z-3\alpha)}$$

$$= (z-3\alpha)(\bar{z}-3\bar{\alpha})$$

$$= z\bar{z} - 3z\bar{\alpha} - 3\bar{z}\alpha + 9\alpha\bar{\alpha}$$

$$\therefore \ 3z\bar{z} + 3z\bar{\alpha} + 3\bar{z}\alpha - 9\alpha\bar{\alpha} = 0$$

$$\therefore \ z\bar{z} + z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha - 3\alpha\bar{\alpha} = 0 \qquad \therefore \ (z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha}) = 4\alpha\bar{\alpha}$$

$$\therefore \ |z+\alpha|^2 = 4|\alpha|^2 \qquad \therefore \ \boldsymbol{|z-(-\alpha)| = 2|\alpha|}$$

これより、P(z) は点 C$(-\alpha)$ を中心とする半径 $2\,|\alpha\,|$ の円周上にある．また、この円周上の任意の点は上記の計算を逆算することにより AP : OP $= 2:1$ であることは明らかである．よって 求める図形は「点 C$(-\alpha)$ を中心とする半径 $2\,|\alpha\,|$ の円」である．

ちなみに、図の M$_1$, M$_2$ はそれぞれ OA の**内分点**、**外分点**である．また、この AP と OP の比が $1:1$ のとき、求める軌跡は円ではなく線分 OA の垂直 2 等分線になる．また、このように定まる円を**アポロニウスの円**という．

＜考察＞ アポロニウスの円

これは**初等幾何**で有名な定理で、何かの折はその結果をトウゼンのように使うのだが、その古典的な立場に触れる機会はなかなかない．そこで、チョッとだけ説明しておく．

定理： **2 定点から距離の比が一定である点の軌跡は円** である．

というもので、証明は次のようにやるとよい．

2 定点を A,B とし、直線 AB 上にない点を P とする．このとき、三角形 PAB の内角 APB の 2 等分線と直線 AB との交点を C とし、その外角の 2 等分線と直線 AB との交点を D とする．また、直線 AP 上の点 P に関して A と反対側に PE = PB となるように点 E をとる．

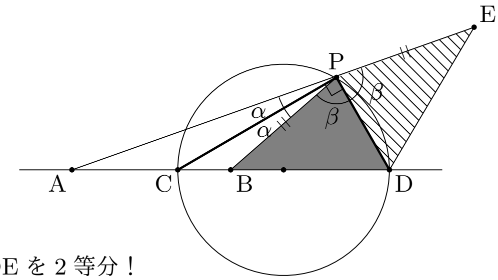
これで準備ができた．そこで、与えられた距離の一定比を

$$\mathrm{PA} \ : \ \mathrm{PB} = m \ : \ n$$

とすると

$$\mathrm{AC} : \mathrm{CB} = \mathrm{PA} : \mathrm{PB} = m : n$$

$\longleftarrow$ **点 C は AB の同比の内分点！**



また、この 2 点 C, D については

$\triangle\mathrm{DEP} \equiv \triangle\mathrm{DBP} \longrightarrow$ 線分 DP は∠ADE を 2 等分！

$\therefore \ \ \mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AD} : \mathrm{DE} \longleftarrow$ 合同条件から DB = DE

$= \mathrm{AP} : \mathrm{PE} \longleftarrow$ 線分 DP は∠ADE を 2 等分！

$= \mathrm{AP} : \mathrm{PB} \longleftarrow$ 合同条件から PE = PB

$= m : n \longleftarrow$ **点 C は AB の同比の外分点！**

このとき図で

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\therefore \ \ \angle\mathrm{CPD} = \alpha + \beta = 90^\circ$$

すなわち、点 P は線分 CD を直径とする円周上 にある．

つまり、直線 AB 上にない点 P を PA : PB = m : n にとるとき、点Pは点 C を線分 AB の同比の内分点、点 D を同比の外分点として、線分 CD を直径とする円周上にある．

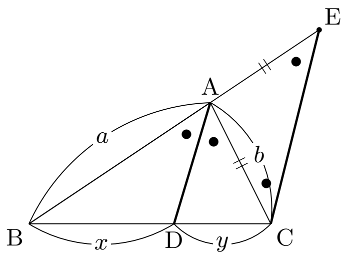
逆に、2 点 C, D を含むこの円周上の任意の点 P は 2 点 C, D からの距離の比が一定 であることは明らかである．よって定理は証明された．

(注) 頂角の 2 等分線による対辺の分割比

右図で、頂角 A の 2 等分線と対辺 BC との交点を D とし、C を通る AD の平行線と直線 AB との交点を E とすると

$$\begin{cases} \angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{AEC} \longleftarrow \text{同位角！} \\ \angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{ACE} \longleftarrow \text{錯角！} \end{cases}$$

$$\therefore \ \ \angle\mathrm{ACE} = \angle\mathrm{AEC} \quad (\ \because \ \ \angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} \ )$$



ゆえに、△ACE は AC = AE の 2 等辺三角形である．

このことから

$$a \ : \ b = a \ : \ \mathrm{AE} = x \ : \ y \longleftarrow \text{平行線と比例！}$$

である———上記ではこれを用いている．

end.

一件落着！

＜例 2＞

複素数平面上で、$-1,\ 1,\ z$ を表す点をそれぞれ A, B, P とする．このとき

$$\frac{z-1}{z+1}=ti \quad (t \text{ は正の実数})$$

であるとき、次の問に答えよ．

(1) ∠APB の大きさを求めよ．

(2) t が $0<t<1$ の範囲で動くとき、点 P はどんな曲線を描くか．

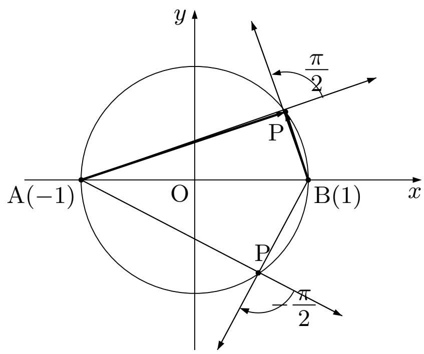
（解） (1) 与えられた等式は

$$\boldsymbol{\frac{z-1}{z+1}=ti} \quad (t \text{ は正の実数}) \cdots\cdots\cdots ①$$

であるから両辺の偏角を求めると

$$arg\frac{z-1}{z+1}=arg(ti)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{arg(z-1)-arg(z+1)=\frac{\pi}{2}}$$



この左辺は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を測る角だから

$$\angle\mathrm{APB}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(2) (1) から、点 P(z) は AB を直径とする円周上 にあることがわかる．だから 問題は点 P の動く範囲 (限界) である．

もし点 P が実軸より下側にあるとすると、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を測る角が $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ になるので $t>0$ の条件に反する．

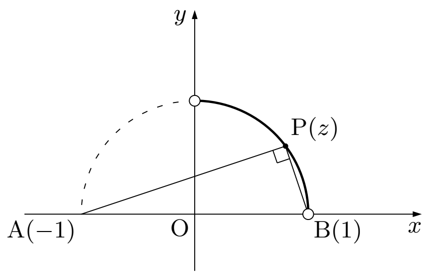
したがって、点 P は実軸より上、または実軸上ということになるが、ここで ① の絶対値をとると

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=|ti|=t\ (>0)$$

$$\therefore\ \frac{|z-1|}{|z+1|}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=t$$

与えられた条件より $0<t<1$ だから

$$0<\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}<1 \qquad \therefore\ 0<\mathrm{BP}<\mathrm{AP}$$



すなわち、虚軸 (y 軸) が線分 AB の垂直 2 等分線なのだが、それより右側ということである．

ただし、実軸上の点である点 $z=1$ は ① より $t=0$ となるので除外する．よって、点 P は右図の 4 分の 1 円 (両端を除く) を描く．

＜考察＞

上記 (1) は ①で arg (偏角) の計算から $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$、すなわち「直径に対する円周角が 90°」から求める軌跡が円である (初等幾何) ことを知ってツジツマ合わせをしたカタチだが、マジメな初学者なら迷わず計算するだろう．

つまり、① を z について解くと

$$① : \frac{z-1}{z+1}=ti \qquad \therefore\ z-1=(ti)(z+1) \qquad \therefore\ z=\frac{1+ti}{1-ti}$$

これより

$$|z|=\left|\frac{1+ti}{1-ti}\right|=\frac{\cancel{\sqrt{1+t^2}}}{\cancel{\sqrt{1+t^2}}}=1$$

で、点 P が原点Oを中心とする半径 1 の円周上の点であるところまでは一応わかる．しかし、まだ t の変化に対する **点 P の具体的な「動き」や除外点の考察にまでは至っていない**.

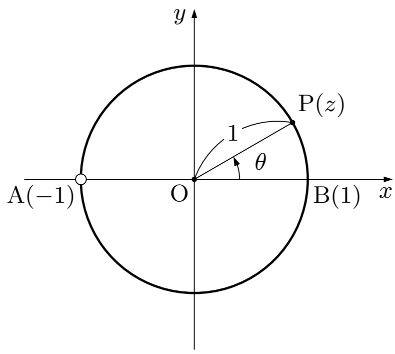
そこで、さらに追いつめられないか.

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1+ti}{1-ti} \\
&= \frac{(1+ti)^2}{(1-ti)(1+ti)} = \boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} i} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)
\end{aligned}
$$

これを見れば、手馴れた人ならハッと思うところだが、思わなくてもよろしい.

$$
\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1
$$

である———このことは何を意味するか．それは



$$
\boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta}, \quad \boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2} = \sin\theta}
$$

を満たす θ が存在するということに他ならない.

すなわち、$(*)$ の z は

$$
\boldsymbol{z = \cos\theta + i\sin\theta} \longleftarrow \text{ 点 P は単位円周上！}
$$

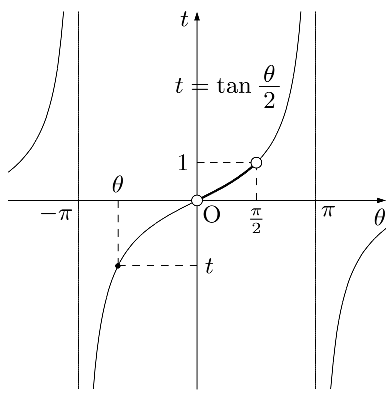
さて、その θ のことだが、三角関数の式変形から

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\cos\theta} &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \\
&= \frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - 1 = \boldsymbol{\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}} \\
\boldsymbol{\sin\theta} &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \boldsymbol{\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}
\end{aligned}
$$

このことから、$(*)$ で $\boldsymbol{t = \tan\frac{\theta}{2}}$ とおけばよいことがわかる.

ただし、t の全実数値に対して、それを与える θ は $-\pi < \theta < \pi$ である.

つまり両端は $\tan\frac{\theta}{2}$ が定義できないので、本問の条件 $0 < t < 1$ がなくとも A(-1), B(1) はすでに除外されている のである———この辺はかなり難しい.



そして、$0 < t < 1$ から $0 < \tan\frac{\theta}{2} < 1$ で

$$
0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} \qquad \therefore\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}
$$

となって、円周の範囲が確定する．本問の条件 $0 < t < 1$ は、意図的かどうかわからないが、t の全実数値に対する除外点 A(-1) の議論をしなくてすむための布石であるかに見える.

一件落着！

(2) 領域について

複素数平面における領域描画の指示は不等式で与えられる場合が多い．これもその根底に**図形**と**方程式**の基礎知識が十分でないとうまくいかない．

以下に実例をあげておくから確かめておくとよい．

＜メモ＞

■ 不等式で表された領域

＜例＞

2 つの不等式

$|z-2i| \leqq 2 \cdots\cdots\cdots\cdots$ ①　　　$|z-2i| \leqq |z| \cdots\cdots\cdots$ ②

を満たす点の集合を、それぞれ $A,\ B$ とする．

(1) 領域 $A \cap B$ を図示せよ．
(2) 領域 $A \cup B$ を図示せよ．

(解) 2 つの不等式 ①② の領域を図示する前に、領域 $A,\ B$ をキチンとわかることが先決だが、それぞれの領域は

領域 A ： $\mathrm{P}_0(2i)$ を中心とする円の**内部**

領域 B ： 線分 OP_0 の **垂直 2 等分線** を境界として点 O から近くない (遠い) 点

である———図の説明は省略する．

ただし、境界は ①② の等号を反映して太線にしてある．

(1) ①② の満たす領域 $A,\ B$ から

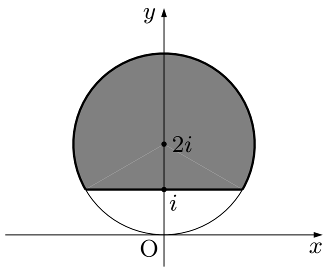
$A \cap B \longrightarrow$ ＜図 1＞

である．

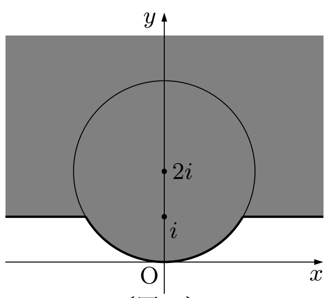
(2) 同様にして

$A \cup B \longrightarrow$ ＜図 2＞

である．



＜図 1＞



＜図 2＞

＜考察＞ 集合の領域としての図示

問題は ① ② の領域図示もさることながら、本問の主旨は、(1) (2) による集合の意味するところを読めるかどうか、という点である．要するに集合の記号を読む問題なのだ．

一件落着！

0.4　複素数平面上の変換

いきなり「**複素数平面上の変換**」と言われても、「**変換とは何か**」さえ覚束ないと思うから、ここでは思い切って基本から解説します．

ここで説明する「**変換**」や「**関数**」の概念は数学全体の背骨にあたるものだから、「知らない」ではすまされない———キッチリと習熟していなければ一歩も歩けない、と言ってもよい．むしろ、よい機会である、と思ってもらいたい．

そして読み方だが、「**変換とは何か**」がツカメたら、多少の枝は後回しにしてもよいから、一気に「**1 次分数変換**」を目指すとよい．途中に「**反転**」とか「**鏡映の反転**」とか、難しい概念も出てくるが、素材は「**円**」と「**直線**」だけだから、そんなに臆することはない．むしろ、「それなりにおもしろい」と思います．何より、「変換」というものがよくわかる———そこがありがたい．私もなるべく図版をたくさん入れて丁寧に書きましたから、大いに堪能してください．

0.4.1　変換とは何か

0.4.1.1　写像、変換、関数

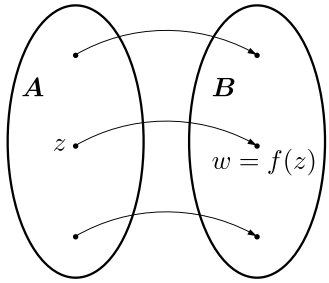
いま，2 つの集合 A と B があって，集合 A の任意の要素を 1 つキメルとき，ある対応の規則 $\boldsymbol{f}$ にしたがって集合 B の要素が 1 つキマル ものとする．

このとき，この対応の規則 $\boldsymbol{f}$ を A から B への写像 $(\boldsymbol{mapping})$ といい、記号で次のように表す．

$$\boldsymbol{f} \;:\; \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$$

このような対応関係の中で，A と B が同じ集合の場合の f を変換という のである．

たとえば、xy 平面上の点から xy 平面上の点への写像 (対応)、ここでは複素数平面上の点から複素数平面上の点への写像 (対応) がそれにあたると考えればよい．そして、ともに数の集合である場合の f を関数と言っている．



$\boldsymbol{f} \;:\; \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$

上記の変換には xy 平面上の点から同じ平面上の点への変換，または一般の空間上の点から同じ空間上の点への変換などさまざま場合が考えられるが，ここでは複素数平面上の変換にハナシを限ろう．

点 P(z) に対して点 P$'(w)$ が定まるとき，点 P$'$ をこの変換による点 P の像といい，点 P を点 P$'$ の原像という．

また，この変換は記号 f を用いて

$$f \;:\; z \longmapsto w$$ ⟵ この記号は 要素から要素への対応 の表示！

のように表すこともできるが、一般には

$$\boldsymbol{w = f(z)}$$

のように表す．

(注) 記号「$\boldsymbol{w = f(z)}$」について

本文では一応、型通りの説明をしたが、問題はこの記号「$\boldsymbol{f}(\quad)$」である．実際、この記号の意味、役割は慣れるまでは難しい．

ここでは、「対応関係」、あるいは「機能」とだけ書いておくが、そういうコトバだけではナットクしがたいものがあると思う．

以下では、なるべく具体的な例を引いて解説を試みるが、バカバカしいと思わず最後まで読み通してもらいたい．これは、数 I から微積分にいたる関数や逆関数の理解とも深く、広くかかわってくるので素通りはできない ところなのです———イッキにすべてをわかるか、すべてを失うかくらいの剣が峰と思ってください．幸運を祈ります．

end.

0.4.1.2　変換の合成と逆変換

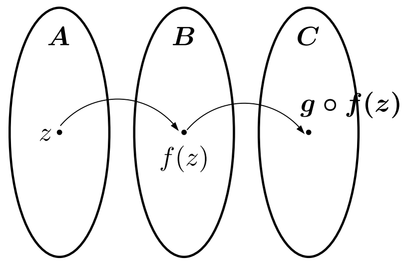
いま、2 つの変換

$$w = f(z), \qquad w = g(z)$$

が与えられているとする．このとき、この 2 つの変換の合成はどう考えればよいか．

まず、集合 A の要素 z が変換 f により集合 B の要素 z' に変換され、さらに、変換 g により集合 C の要素 z'' に変換される ならば

$$\begin{cases} z' = f(z) \\ z'' = g(z') \end{cases} \qquad \therefore \quad z'' = g(f(z))$$



$\boldsymbol{f}:\ \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{g}:\ \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{C}$

と表されるが、これを一般的に表すと

$$\boldsymbol{w = g(f(z))} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で、これが**「変換の合成」**である．

つまり、いくつかの変換の合成を実現するには変換を次々と左からかぶせていく．

ここで、変換の合成に関する新しい記号「$\boldsymbol{g \circ f}$」を導入する．すなわち ① を

$$\boldsymbol{w = g \circ f(z)} \ \longleftarrow\ \boldsymbol{f} \text{ が先}, \boldsymbol{g} \text{ が後！}$$

と表すのだ．つまり、「$\boldsymbol{g \circ f}$」をあたかも**「積の演算」**のように扱いたい．ただしこの場合、$\boldsymbol{g \circ f \fallingdotseq f \circ g}$ のときがあるので、交換則は成り立たない．

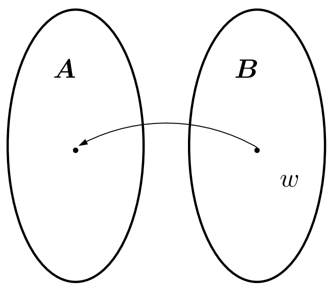
ここで、「**恒等変換**」を $e(z) = z$ として

$$\boldsymbol{g \circ f = e} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とおく．その上で ② の左から g^{-1} をカケルと

$$\underbrace{g^{-1} \circ g}_{e} \circ f = \underbrace{g^{-1} \circ e}_{g^{-1}} \qquad \therefore \quad f = g^{-1}$$

$$\therefore \quad g^{-1} = f$$



$w = f(z), \quad z = f^{-1}(w)$

また、同様に ② の右から g^{-1} をカケルと

$$g \underbrace{\circ f \circ f^{-1}}_{e} = \underbrace{e \circ f^{-1}}_{f^{-1}} \qquad \therefore \quad g = f^{-1}$$

$$\therefore \quad f^{-1} = g$$

以上の考察から、② を満たす変換 f と g は互いに**逆変換**である ことがわかる———説明は雑駁だが気分はわかってもらえると思う．これを日常語で読むと

ある **変換** に **逆変換** を合成すると **もと通り**
逆変換 に **もとの変換** を合成すると **もと通り**

ということだから，これはよく考えれば当たり前のことである．

このように **合成変換は逆変換とセット**で議論するべきだ と思う———そういうものとして理解しておくとよい．

<メモ>

■ 逆変換の存在条件

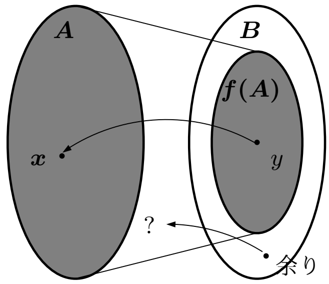
本文では，**変換の合成**と**逆変換**を，なるべく簡潔述べることを目指して解説したが，実はキチンとわかってもらうにはその**周辺の事情**についてもう少し詳しく確認しておかなければならないことがある．以下に述べるので注意深く読み進めてもらいたい．

それは，冒頭で説明した**写像の定義**，**定義域**と**値域**，**終域**，また特に**上への写像**，**1 対 1 写像**という条件が**逆写像の存在条件**と密接に関係してくるからである．

改めて写像 f の逆写像 f^{-1} の存在条件は

(i) f が **上への写像**であること

(ii) f が **1 対 1 写像**であること



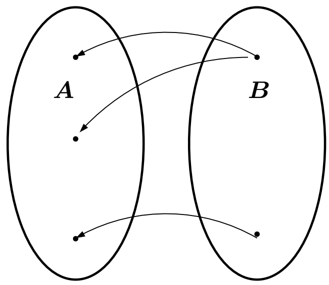
中への写像ではダメ！

と集約される———これらの**両方**が保証されなければ逆写像は存在しないのだ．

説明するまでもないが，もし f が**上への写像でない** (中への写像) とすれば終域 B の中に値域 $f(A)$ 以外の要素が存在し，しかもそれを与える**原像がない**のだから**逆対応**である f^{-1} の**たどりようがない**ではないか．

また， f が **1 対 1 写像でない**とすると f の値域 $f(A)$ には原像を 2 つ以上もつものがあることになる．

すなわち値域 $f(A)$ を**新たな定義域**としてその要素の 1 つからもとの原像をたどる対応は $f(A)$ の 1 つの要素に対して A の要素が 2 つ以上キマルことになり**写像の定義に反してしまう**ことになる．



これは写像ではない！

ちなみに、この場合の **1 対 1 対応**を記号で表すと

$$x_1 \fallingdotseq x_2 \quad\Longrightarrow\quad f(x_1) \fallingdotseq f(x_2)$$

だが，直接これを証明したりするのは難しい．

そういう場合は**対偶**をとって

$$f(x_1) = f(x_2) \quad\Longrightarrow\quad x_1 = x_2$$

を示せばよい———これならカンタンにいく．

チト難しいことを書いてしまったが，これらは**逆写像**，**逆変換**，**逆関数**を扱うときに**欠くべからざる条件**として必ず立ちはだかる**カベ**となるのであえてシツコク入念に説明した———親心とでも思ってもらいたい．

■ 変換の合成と逆変換

以上，かなりカッチリと説明した．それだけに筆者としては何か敬遠されそうな重苦しい気分になってしまった———目先を少し変えよう．

ここでひとつ**逆写像**，**逆変換**，**逆関数**を**体感**してもらうことにする．それは冒頭で，**写像**を**対応**，あるいは**対応関係**と説明した———計算の結果で得られる数値のことではない のだ．この視点は大切である．

以下，**ヘンな例**だが，まあ肩の力を抜いて読んでもらいたい．たとえば

$$\underbrace{\text{シャツを 着て}}_{f}\underbrace{\text{服を 着る}}_{g} \;\longleftarrow\; \boldsymbol{g \circ f} \text{ と読め！}$$

という文章を考えてみる———**出かけるとき**のハナシだ．それなら**帰ったとき**はどうするか．

上の**操作の手順**を**逆にたどる**ことになるから

$$\underbrace{\text{服を 脱いで}}_{g^{-1}}\underbrace{\text{シャツを 脱ぐ}}_{f^{-1}} \;\longleftarrow\; \boldsymbol{f^{-1} \circ g^{-1}} \text{ と読め！}$$

以上の説明を式でまとめると

$$\boldsymbol{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

だが，これもほとんど**あたりまえ**のことである———記号に惑わされることはない．

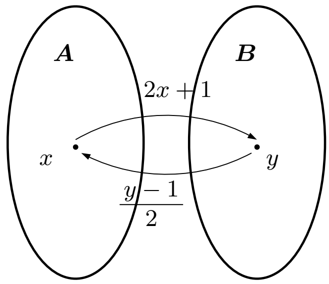
本文に述べた

$$\boldsymbol{f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = e} \ \longleftarrow\ \boldsymbol{e}\ (\text{恒等変換})\ \text{は}\ \textbf{もと通り}\ \text{ということ！}$$

なども”**着せて脱がせばもと通り**”と”**脱がせて着せればもと通り**”のことだから改めて説明するまでもなかろう．

具体的な**写像**の例として **1 次関数**で説明しておこう．

$$f(x) = 2x+1 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$



の**逆関数** $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ を求めるにはどうするか．

まず，右辺を y とおいて x について解く．

$$y = 2x+1$$

$$\therefore\ \ 2x = y-1 \qquad \therefore\ \ x = \frac{y-1}{2} \ \cdots\cdots\cdots\ ②$$

次に x と y を入れかえて

$$y = \boldsymbol{\frac{x-1}{2} = f^{-1}(x)} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

と**機械的に**やれば逆関数は求まるが，この計算の**意味**はわかっているンだろうね．説明だけはしておこう．① の f は上記にならって

x を **2** 倍 して **1** をたす

ということだからその**逆の対応**である f^{-1} は

1 を引いて $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ 倍 する

と読めば結果はおのずから明らかである．

そこで ① を x について解いた形の ② を見てもらいたい．集合 B の要素の 1 つを y として

$\boldsymbol{y}$ から **1** を引いて $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ 倍 する

その**対応の仕組み**そのものを表しているではないか．

したがって、③ は **その仕組みだけを取り出して一般的な関数の表現形式で表したもの** である．かくして**逆関数**を求めるには**いつでも**上記にならって

(i) 与えられた関数を $\boldsymbol{y}$ とおいて $\boldsymbol{x}$ **について解きなおす**
(ii) $\boldsymbol{x}$ **と** $\boldsymbol{y}$ **を入れかえる**

という 2 つの操作をすればよいことがわかる．

ダメ押しにもう 1 つ例を挙げておこう．たとえば、**対数関数**は**指数関数**の**逆関数**として定義される———これは大丈夫か．

まず，指数関数だが

$$f(x) = a^x \ (= y\ \text{とおく}),\ \ \text{ただし}\ a>0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④$$

これを $\boldsymbol{x}$ **について解きたい**がどうする———新しい記号 $\log_a(\ \ )$ を発明したのだと思われる．

④ を次のように書く．

$$x = \log_a y \ \longleftarrow\ y = a^x\ \text{と読め！}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤$$

x について解けたから $\boldsymbol{x}$ **と** $\boldsymbol{y}$ **を入れかえる**———これで一般の**関数表現**になる．

すなわち逆関数 f^{-1} は

$$y = \boldsymbol{\log_a x = f^{-1}(x)}$$

そして，よく対数関数で **(真数)** $\boldsymbol{>0}$ などが問題になるが ⑤ の y は ④ の y のことだから $a>0$ ならば $y>0$ はごくごく当然のことである．

また対数の底の条件 $\boldsymbol{a} \fallingdotseq \mathbf{1}$ は，もし $a=1$ とすると ④ で $f(x)=1$ (定数) となり，これは指数関数ではない．しかも、逆関数の存在条件である **1 対 1 対応**が崩れて逆関数が定義されなくなってしまうではないか.

以上，**写像、変換、関数**の考え方の基本を述べたが、ここでのわれわれのテーマはこのような考え方を踏まえて**複素数平面上の変換**について考察しようというわけである.

0.4.2 複素数平面上の「変換」

ここでは、X と Y がともに「複素数の集合」の場合を扱うが、それは複素数平面上の点から複素数平面上の点への対応の規則であると思ってもらえばよい.

一般に、X の要素 z を Y の要素 w に対応させる変換が f であるとき

$$\boldsymbol{w = f(z)}$$

のように表す.

このような複素数を変数とする関数で、われわれのテーブルに乗ってくるものを列挙してみると

(i) $\boldsymbol{w = \overline{z}}$ ⟵ **共役複素数！**

(ii) $\boldsymbol{w = \alpha z + \beta}$ ⟵ **1 次関数！**

(iii) $\boldsymbol{w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}}$ ⟵ **1 次分数関数！**

(iv) $\boldsymbol{w = z^2}$ **など、$\boldsymbol{z}$ の関数！**

や、これらの組合わせが考えられるが、それらは複素数平面上に与えられた図形 (たとえば三角形、直線、円など) を、それとはちがう図形に変換する効果を持っている.

しかも、実数関数やベクトルではヤッカイな変換が複素数を用いると意外に簡単に表されたりするときもある.

ここでは、今までに説明してきたことを総動員して「**上記の関数**」と「**複素数平面上の典型的な変換 (写像)**」とのかかわり、「**上記 (i)〜(iv) の読み方**」を解説する.

0.4.2.1　合同変換

「合同変換」というのは、ある図形をそれと合同な図形にうつす変換のことで、基本となるものは

　平行移動,　回転移動,　線対称移動

の 3 つである———以下にチョッとだけ説明しておく.

＜1＞ 平行移動 ——— $\boldsymbol{w = z + \beta}$

これはほとんど説明するまでもない.

$$f(z) = z + \beta \longleftarrow \text{冒頭の (ii) の } \alpha = 1 \text{ のときのハナシ！}$$

のことである.

＜2＞ 回転移動 ——— $\boldsymbol{w - \gamma = \alpha(z - \gamma)}$, $\boldsymbol{|\alpha| = 1}$

$|\alpha| = 1$ に注意して

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$$

と書けば、よりわかり易いが、このまま展開して整理すれば

$$\boldsymbol{w = \alpha z + \beta} \quad (\beta = \gamma - \alpha\gamma)$$

で、これも 冒頭の (ii) のタイプ である.

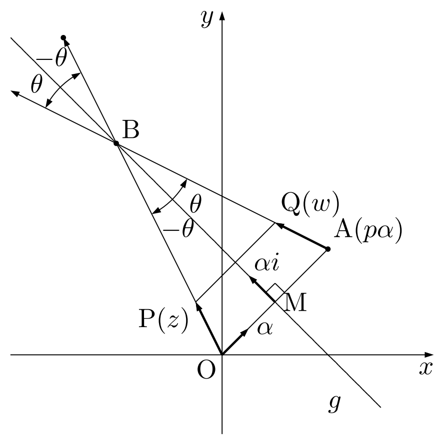
＜3＞ 線対称移動 ———$\boldsymbol{w = -\alpha^2 + p\alpha}$, $\boldsymbol{|\alpha| = 1}$

これは少し説明しないとわかりにくい．複素数平面上の 直線 g に関する線対称移動 を考える———Q(w) が g に関して P(z) に対称である条件 を求めればよい.

まず、g の法線ベクトルとして単位ベクトル $\vec{e}$ をとり、原点 O の g に対する対称点を A とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = p\,\vec{e} \quad (p \text{ は実数})$$

とおく.



このとき、複素数平面上で $\vec{e}$ にあたる複素数を α とおく と

$$\text{点 A} \longrightarrow \mathrm{A}(\boldsymbol{p\alpha})$$
$$g \text{ の方向の単位ベクトル} \longrightarrow \boldsymbol{\alpha i}$$

と簡単に表されておもしろい．この辺が「複素数」らしいところなのだ.

そうすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であることから、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を表す複素数は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \ : \ z\,, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} \ : \ w - p\alpha$$

で、「g に関する対称」というからには、これらは $\vec{e}\,(\alpha)$ に垂直なベクトル $\vec{e}\,'\,(\alpha i)$ と等角をなし、大きさは等しい．すなわち

$$arg(w-p\alpha)-arg(\alpha i)=arg\left(\frac{w-p\alpha}{\alpha i}\right)=\theta$$
$$argz-arg(\alpha i)=arg\left(\frac{z}{\alpha i}\right)=-\theta$$

だが、結果、$\boldsymbol{\dfrac{w-p\alpha}{\alpha i}}$ と $\boldsymbol{\dfrac{z}{\alpha i}}$ は「大きさが等しい」が、「偏角の符号が反対」、すなわち「共役複素数」なのです．ゆえに

$$\frac{w-p\alpha}{\alpha i}=\overline{\left(\frac{z}{\alpha i}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

だが右辺は

$$\overline{\left(\frac{z}{\alpha i}\right)}=\frac{\overline{z}}{-\overline{\alpha}i}=-\frac{\alpha^2\overline{z}}{\alpha i\cdot\alpha\overline{\alpha}}=-\frac{\alpha^2\overline{z}}{\alpha i}$$

だから、これを $(*)$ に入れて

$$\frac{w-p\alpha}{\alpha i}=-\frac{\alpha^2\overline{z}}{\alpha i}\qquad\therefore\ \boldsymbol{w=-\alpha^2\overline{z}+p\alpha}$$

これは冒頭の「**(i) ： $\boldsymbol{w=\overline{z}}$**」と「**(ii) ： $\boldsymbol{w=-\alpha^2z+p\alpha}$ ($\boldsymbol{z}$ の 1 次式)**」との合成であり、特に g が実軸のときは

$$\alpha=i,\ p=0\ \longrightarrow\ w=\overline{z}$$

で「$f(z)=\overline{z}$」そのものになるが、これは「反射」といい、(i)〜(iv) そのものとは関係がない．

<メモ>

■ 合同変換の例、変換の合成など

変換については、いくつか具体的な例で確認しなければナットクはできまい．ここにいくつかシンプルな例をあげるから、記述の仕方も含めて実験のつもりでやってみるとよい．

なお、「変換の合成」、「逆変換」などについての考え方、扱い方については、最後に「付記」としてまとめたので、そちらを読んで確認してもらいたい．

＜例＞

(1) 原点を中心にして $\dfrac{\pi}{3}$ 回転してから平行移動 α を行う変換がある．これを 1 つの回転移動で表すにはどのようにすればよいか．

(2) 変換

$$w=-i\overline{z}+3+5i$$

は、直線 g に関する対称変換と、g の方向の平行移動との合成変換に分解することができる．g の方程式を求めよ．

（解） (1) これは合成変換だから、それぞれの変換を $f_1,\ f_2$ とすると

$\boldsymbol{f_1(z)=\lambda z}$

ただし、$\lambda=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\quad\left(=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$\boldsymbol{f_2(z)=z+\alpha}$

である．そこで、題意の f_1 に f_2 を合成する合成変換 $f_2\circ f_1$ は

$$\boldsymbol{f_2 \circ f_1(z) = f_2(f_1(z))} \longleftarrow \ f_2(\quad) \text{ の中に } f_1(z) \text{ が入ル！}$$
$$= \lambda z + \alpha$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{w = \lambda z + \alpha} \cdots\cdots ①$$

ここで、① の**不動点**を z_0 とおくと、「$w = z = z_0$」だから

$$\boldsymbol{z_0 = \lambda z_0} + \alpha \cdots\cdots ②$$
$$\therefore \quad (1-\lambda)z_0 = \alpha \qquad \therefore \quad z_0 = \frac{\alpha}{1-\lambda} \ (\lambda \fallingdotseq 1) \longleftarrow \ z_0 \text{は存在する！}$$

そこで「① − ②」を計算すると

$$w - z_0 = \lambda(z - z_0) \longleftarrow \text{ この手法はよく使う！}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{w = \lambda(z - z_0) + z_0}$$
$$\text{ただし、}\boldsymbol{\lambda = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} \quad \left(= \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

ゆえに、求める回転移動は上記の z_0 を中心とする $\dfrac{\pi}{3}$ の回転移動である.

(2) これはチョッと難しい．与えられた変換を表す式は

$$w = -i\overline{z} + 3 + 5i \cdots\cdots ①$$

だが、これが

$$\boldsymbol{f_1(z) = -\alpha^2\overline{z} + p\alpha} \longleftarrow \text{ 本文で導いた「線対称」を表す変換式！}$$
$$\boldsymbol{f_2(z) = z + q\alpha i} \longleftarrow \ \alpha i \text{ が } g \text{ の方向！}$$

の合成で表されるようにしたい.

まずは、f_1, f_2 を合成して準備をする． f_1 に f_2 を合成するのだから

$$w = \boldsymbol{f_2 \circ f_1(z)}$$
$$= \boldsymbol{f_2(f_1(z))} \longleftarrow \ f_2(\quad) \text{ の中に } f_1(z) \text{ が入ル！}$$
$$= (-\alpha^2\overline{z} + p\alpha) + q\alpha i = \boldsymbol{-\alpha^2\overline{z} + p\alpha + q\alpha i} \cdots\cdots ②$$

①② の係数部分を比較して

$$\begin{cases} -\alpha^2 = -i \quad \therefore \ \boldsymbol{\alpha^2 = i} & \cdots\cdots ③ \\ \boldsymbol{p\alpha + q\alpha i = 3 + 5i} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

まず、③ から α を求めて ④ に代入する.

$$③ : |\alpha^2| = |i| \qquad \therefore \ |\alpha|^2 = 1 \qquad \therefore \ \boldsymbol{|\alpha| = 1}$$

これより $\cos\theta + i\sin\theta$ とおけるから、これを ② に入れて

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = i \qquad \therefore \quad \cos 2\theta + i\sin 2\theta = 0 + 1 \cdot i$$
$$\therefore \quad \cos 2\theta = 0, \quad \sin 2\theta = 1 \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \ \frac{5\pi}{4}$$

α は 1 つあればよいから

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

これを ④ に入れると

$$\alpha(p + qi) = 3 + 5i$$
$$\therefore \quad p + qi = \frac{3+5i}{\alpha}$$
$$= \frac{\sqrt{2}(3+5i)}{1+i} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

ここで両辺の実部同士、虚部同士は等しいから

$$\boldsymbol{p = 4\sqrt{2},\ \ q = \sqrt{2}}$$

ゆえに、求める直線 g は原点Oと点 $\mathrm{P}(p\alpha)$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線で

$$|z| = |z - p\alpha| \quad \therefore \quad |z|^2 = |z - p\alpha|^2$$
$$\therefore \quad z\overline{z} = (z - p\alpha)(\overline{z} - \overline{p\alpha}) \quad \therefore \quad \cancel{z\overline{z}} = \cancel{z\overline{z}} - p\overline{\alpha}z - p\alpha\overline{z} + p^2\alpha\overline{\alpha} \quad \therefore \quad \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = p$$

ここで、$p,\ \alpha$ の値を入れて

$$\boldsymbol{g\ :\ \ (1-i)z + (1+i)\overline{z} = 8}$$

である———かなり**ムズカシイ！**

＜考察＞ 変換の合成とその記号、 線対称

(1) では「**変換の合成**」で実際に記号を用いるのだが、一般に「$\boldsymbol{f_1}$**に** $\boldsymbol{f_2}$**を合成する**」というのは、記号でいうと、合成の記号「 $\circ$ 」を使って「$\boldsymbol{f_2}$**を** $\boldsymbol{f_1}$**に左からカケル**」カンジで使うようです———逆にしないこと！ つまり

$$f_2 \circ f_1(z) = \overbrace{f_2}^{\text{あと}}\,\underbrace{(f_1(z))}_{\text{先}} \quad \longleftarrow \quad \text{まず } f_1 \text{を固めておいて、その結果に } f_2 \text{を実行！}$$

今のところは、記号の使い方の約束事 と思えばよいです.

また、条件を満たすような「回転移動」が存在すれば、この回転の中心は先の回転で動かないから「**不動点** $\boldsymbol{z_0}$」に注目するのがポイント です．かくして

$$z_0 = \frac{\alpha}{1-\lambda}$$

が得られたが、これを計算すれば

$$\begin{aligned} 1-\lambda &= 1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \therefore \quad z_0 &= \frac{\alpha}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \alpha\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \lambda\alpha \end{aligned}$$

だが本文ではそのままにしておいた.

また (2) では「**線対称移動の変換**」を表す変換式

$$\boldsymbol{f(z) = -\alpha^2\overline{z} + p\alpha}$$

を、ちょうど本文で説明したので公式のようにそのまま用いたが、実際の入試でこれをいきなり使わせることはないと思う．心配しなくてよい.

一件落着！

0.4.2.2　等形変換

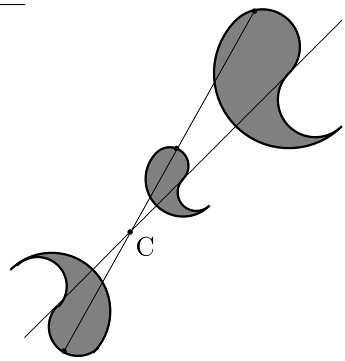
「**等形変換**」というのは線分の長さを一定の割合で伸縮し、角の大きさを変えない変換である．この変換によってある図形は、それと相似 (等形) な図形にうつるが、この変換の基本となるのは 1 つの点を中心とする**相似変換**である．

定点 C(γ) と任意の点 P(z) を通る直線上に点 Q(w) をとり、k を実数として

$$\overrightarrow{\mathbf{CQ}} = \boldsymbol{k}\overrightarrow{\mathbf{CP}} \ (k \neq 0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となるようにするとき、P を Q に対応させる変換を**相似変換**といい、点 C を**相似の中心**、k を**相似比**という．

このとき「$k > 0$」ならば P と Q は点 C の関して同じ側にあり、「$k < 0$」ならば反対側にある．



＜1＞相似変換——$\boldsymbol{w = kz + \beta}$ ($\boldsymbol{k}$ は実数, $\boldsymbol{k \neq 0}$)

上記 ① を複素数で表すと

$$w - \gamma = k(z - \gamma) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
$$\therefore \quad w = kz + \gamma(1 - k)$$

ここで「$\boldsymbol{\gamma(1 - k) = \beta}$」とおくと

$$\boldsymbol{w = kz + \beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

これは、$k = -1$ のときは、**点 $\boldsymbol{\beta}$ に関する対称移動**、そのなかでも特に $\beta = 0$ のときは**原点対称**になり、それらをすでに含み込んでいるところがおもしろい．

逆に ③ で与えられる変換が、ある点を中心とする**相似変換**であることをいうには、③ による不動点を z_0 として

$$\boldsymbol{z_0 = kz_0 + \beta \ (k \neq 0)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

そこで、「③ − ④」を作ることにより

$$\boldsymbol{w - z_0 = k(z - z_0)} \ \longleftarrow \ z_0 \text{を中心として相似比が } k \text{ なのだ！}$$

このとき z_0 は ④ より、$k \neq 1$ として

$$z_0(1 - k) = \beta \qquad \therefore \ z_0 = \frac{\beta}{1 - k} \ \ (\ = ② \text{の } \gamma \text{ のこと！})$$

として求められる．そして、特に $k = 1$ のときは ③ より β の平行移動 (すでに述べた) となり、③ のカタチにすでに含み込まれているのです．

＜1＞ 相似回転

　ここからはチョッと難しい．それは、相似変換と合同変換、そしてそれらの変換の合成のハナシが入ってくるからです．

(i) $\boldsymbol{w = \alpha z + \beta,\ \ \alpha \fallingdotseq 0}$

　次の相似変換

$$g(z) = kz + \beta_1 \ (k \text{ は 0 でない実定数})$$

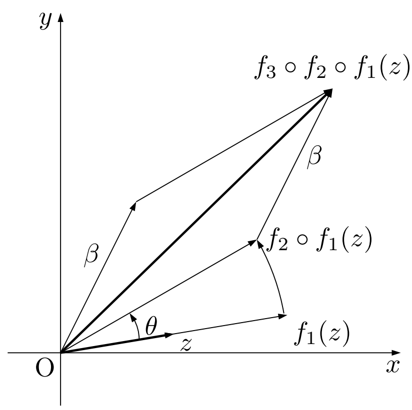
に合同変換

$$h(z) = \lambda z + \beta_2 \ (|\lambda| = 1)$$

を合成すると

$$\begin{aligned} h \circ g(z) &= h(g(z)) \\ &= \lambda(kz + \beta_1) + \beta_2 = \boldsymbol{k\lambda z + (\lambda\beta_1 + \beta_2)} \end{aligned}$$

ここで



$$h \circ g = f, \quad k\lambda = \alpha, \quad \lambda\beta_1 + \beta_2 = \beta$$

とおくと

$$\boldsymbol{w = f(z) = \alpha z + \beta}$$

が得られる．そして、逆にこの変換を

$$f(z) = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot |\alpha| z + \beta$$

$$\longleftarrow \ \frac{\alpha}{|\alpha|} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ ということ！}$$

と書き換えてみると

　$\boldsymbol{f_1}$ ：原点を中心に $\boldsymbol{|\alpha|}$ 倍に伸縮する相似変換
　$\boldsymbol{f_2}$ ：原点を中心とする「角 $\boldsymbol{arg\ \alpha = \theta}$」の回転
　$\boldsymbol{f_3}$ ：$\boldsymbol{\beta}$ の平行移動

の合成されたものであり、合成変換「$\boldsymbol{f = f_3 \circ f_2 \circ f_1}$」と読むこともできる．このような変換を相似回転という．

(注)「相似回転」は $\boldsymbol{\alpha,\ \beta}$ で確定する

　この相似回転

$$\boldsymbol{w = \alpha z + \beta,\ \ \alpha \fallingdotseq 0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

は冒頭で述べた「基本形 (ii)」そのものであるが、これは α と β がわかればキマル――この 2 つの数値によってこの変換は確定する．

　たとえば、異なる 2 点 z_1, z_2 がそれぞれ $w_1,\ w_2$ に変換されるとすると

$$w_1 = \alpha z_1 + \beta, \quad w_2 = \alpha z_2 + \beta$$

だが、これを $\alpha,\ \beta$ について解くと

$$\alpha = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \fallingdotseq 0, \quad \beta = \frac{w_1 z_2 - w_2 z_1}{z_2 - z_1}$$

だから、① に入れると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{f(z)} \\ &= \frac{\boldsymbol{w_2 - w_1}}{\boldsymbol{z_2 - z_1}}\boldsymbol{z} + \frac{\boldsymbol{w_1 z_2 - w_2 z_1}}{\boldsymbol{z_2 - z_1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

となる．あるいは ① を最初から

$$f(z) = \alpha(z - z_0) + \beta(z - z_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

とおいておくと

$$w_1 = f(z_1) = \alpha(z_1 - z_2), \quad w_2 = f(z_2) = \beta(z_2 - z_1)$$

そこで、求めた $\alpha,\ \beta$ を入れると

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}w_1 + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}w_2$$

これは ② を書き換えた式になっていて、この形を「ラグランジェの公式」ともいう．こういうハナシは当面は関係なさそうだが、知っておくとよいことがあるかも知れない．

しかし、ここでは「α と β がわかれば変換がキマル」という事実を確認してナットクできればそれでよい．

end.

(ii) $\boldsymbol{w = \alpha\overline{z} + \beta,\ \ \alpha \neq 0}$

これは上に述べた相似変換とよく似ている———ほとんど**ファミリー**である．それもそのはずで、これは冒頭に述べた (i) の「$\boldsymbol{x}$ **軸対称**」に上記の**相似変換**を合成したものである．つまり

$$w = f(z) = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot |\alpha|\overline{z} + \beta$$

と変形してみると

$$f_0 \ :\ \ x \text{ 軸に関する対称移動 } (\ w = \overline{z}\ )$$

に上記の「$\boldsymbol{w = \alpha z + \beta}$」を合成すればよい．すなわち

$$\boldsymbol{f \circ f_0 = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0 \ \longrightarrow\ w = \alpha\overline{z} + \beta}$$

ということになる———相似回転がわかっていれば、さしてむずかしいハナシではない．

(注) 相似には「正の相似」と「負の相似」がある

「相似」について、少し説明しておかなければならないことがある．たとえば上記の

$$\textbf{(i)} \ :\ \boldsymbol{w = \alpha z + \beta} \qquad \textbf{(ii)} \ :\ \boldsymbol{w = \alpha\overline{z} + \beta}$$

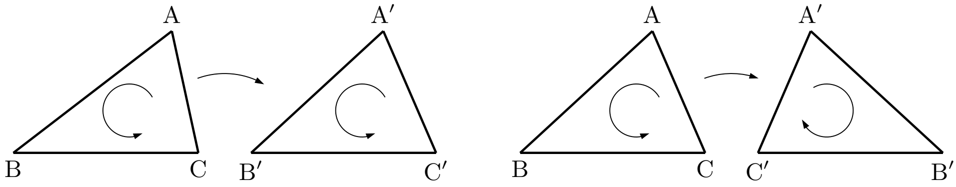
は、数式の上ではよく似たカタチをしているが、(ii) は (i) の z のところに $\overline{z}$ が入るので、その分として「$\boldsymbol{x}$ **軸に関する対称変換**」が加わることになる———図形的には「**ひっくり返る**」要素が加算される．

そのため、この要素が入ると、たとえ合同な図形 (相似比が 1) であってもそのまま重なることはない．そこで

(i) $\longrightarrow$ **正 (あるいは表向き)** の等形変換！

(ii) $\longrightarrow$ **負 (あるいは裏向き)** の等形変換！

タメシに、実際にどんな按配かを合同な三角形で図示しておく———大きさがちがっては比較がしにくいのです．



(1) 正 (あるいは表向き)　　　(2) 負 (あるいは裏向き)

いま、△ABC と △A′B′C′ が同一平面上にあるとして

(1) $\longrightarrow$ 平面内で適当に動かして重ねることができる．

(2) $\longrightarrow$ 1 度ひっくり返さないと重ねられない．

という特徴がある．そして (1) の場合が「**正の合同**」で、(2) の場合が「**負の合同**」である．等形変換の場合も同様に考えればよい．

また、「負の等形変換」を 2 回合成すれば「正の等形変換」になることも説明するまでもなくトウゼンのことである．

end.

<メモ>

■ 「等形変換」のまとめ

ナンダカンダと言っても、実際に問題をやってみないとわからないところもある．例題をあげておくからチョッと遊んでみてもらいたい．

＜例＞

(1) 中心と半径が $\mathrm{C}_1,\ r_1$ である円を、中心と半径が $\mathrm{C}_2,\ r_2$ の円にうつす等形変換を求めよ．また、この変換が不動点をもつとき、その点の軌跡を求めよ．

(2) 負の等形変換 $T(z)=\alpha\bar{z}+\beta$ がある．このとき、線対称移動 $R(z)$ と、原点に関する相似回転 $S(z)$ を適当にとって $SR=T$ となるようにしたい．$R(z),\ S(z)$ をどのようにとればよいか．

(解) (1) まずは「**等形変換の決定**」の問題である．

円の等形変換では中心が中心に対応するので．もう 1 組の対応点を円周上にとれば等形変換は確定 する．

そこで、2 円 $\mathrm{C}_1(\alpha_1),\ \mathrm{C}_2(\alpha_2)$ の、それぞれの上の 2 点を $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ とすると

$$\mathrm{P}_1\ :\ z_1=\alpha_1+r_1t_1\quad(|\,t_1\,|=1)\ ,\qquad \mathrm{P}_2\ :\ z_2=\alpha_2+r_2t_2\quad(|\,t_2\,|=1)$$

が対応するものとし、等形変換を

$$\boldsymbol{S(z)=\lambda z+\omega}$$

とおいて条件を整理すると

中心が中心にうつる $\longrightarrow$ $\alpha_2=\lambda\alpha_1+\omega$ ……………………………①

P_1が P_2にうつる $\longrightarrow$ $\alpha_2+r_2t_2=\lambda(\alpha_1+r_1t_1)+\omega$ ………………②

が成り立つ――等形変換がキマルとは、上記で $\lambda,\ \omega$ がキマルということ！

ω を消去するために ② − ① を計算すると

$$r_2t_2=\lambda r_1t_1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\lambda=\frac{r_2t_2}{r_1t_1}=\frac{r_2}{r_1}T}\quad\left(\longleftarrow\ T=\frac{t_2}{t_1},\ \ |\,T\,|=\frac{|\,t_2\,|}{|\,t_1\,|}=1\right)$$

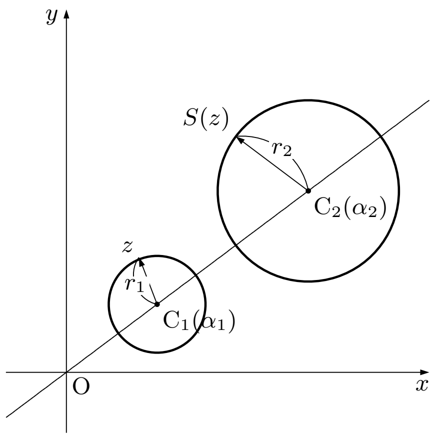
だから、これを改めて ① に入れて

$$\boldsymbol{\omega=\alpha_2-\frac{r_2}{r_1}T\alpha_1}$$

ともかく、$\lambda,\ \omega$ が求まって等形変換が確定した．

すなわち

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S(z)}&=\boldsymbol{\frac{r_2}{r_1}T\,z+\left(\alpha_2-\frac{r_2}{r_1}T\alpha_1\right)}\\&=\boldsymbol{\frac{r_2}{r_1}T(z-\alpha_1)+\alpha_2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$



次に不動点だが、③ を見て場合を分けて考える．

(i) $\boldsymbol{\frac{r_2}{r_1}T=1}$ のとき

$|\,T\,|=1$ だから

$$r_1=r_2\qquad\therefore\quad T=1\qquad\therefore\quad t_1=t_2$$

このとき ③ は

$$S(z)=z+(\alpha_2-\alpha_1)\ \longleftarrow\ \text{平行移動！}$$

一般に $\alpha\neq 0$ だから「**不動点ナシ！**」である．

(ii) $\boldsymbol{\dfrac{r_2}{r_1}T \fallingdotseq 1}$ **のとき**

③ は相似回転であり、回転の中心 z_0 が不動点 である．すなわち z_0 は

$$z_0 = \frac{r_2}{r_1}T(z_0-\alpha_1)+\alpha_2 \qquad \therefore\quad z_0-\alpha_2 = \frac{r_2}{r_1}T(z_0-\alpha_1)$$

$$\therefore\quad \frac{z_0-\alpha_1}{z_0-\alpha_2} = \frac{r_1}{r_2T}$$

$$\therefore\quad \left|\boldsymbol{\frac{z_0-\alpha_1}{z_0-\alpha_2}}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2T}\right| = \frac{r_1}{r_2|T|} = \boldsymbol{\frac{r_1}{r_2}} \ \longleftarrow\ |T|=1$$

すなわち、点 z_0 は 2 点 $\alpha_1,\ \alpha_2$ からの距離の比が $r_1:r_2$ の点である．

よって

$r_1 \fallingdotseq r_2$ のとき $\longrightarrow$ z_0は **アポロニウスの円** を描く．

$r_1 = r_2$ のとき $\longrightarrow$ z_0は$\alpha_1,\ \alpha_2$を結ぶ線分の**垂直 2 等分線**を描く．

(2) 与えられた等形変換の式は

$$T(z) = \alpha\overline{z}+\beta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

このとき

$\boldsymbol{R(z) = -t^2\overline{z}+pt}$ （$|t|,\ p$ は実数） $\longleftarrow$ **線対称移動！**

$\boldsymbol{S(z) = \lambda z}$ $\longleftarrow$ **原点に関する相似回転！**

だから、S に R を合成すると

$$\begin{aligned} S\circ R(z) &= S(R(z)) \\ &= \lambda(-t^2\overline{z}+pt) = -\lambda t^2\overline{z}+p\lambda t \end{aligned}$$

これが、与えられた等形変換 ① と等しいから、比較して $p,\ t,\ \lambda$ を求める．つまり、$\alpha,\ \beta$ で表すことを考える———恒等式の係数比較の要領 でやればよい．そうすると

$$-\lambda t^2 = \alpha,\quad p\lambda t = \beta \ \longrightarrow\ \lambda = -\frac{\alpha}{t^2},\quad p = \frac{\beta}{\lambda t} = -\frac{\beta}{\alpha}t$$

また、p は実数で $|t|=1$ ($t\overline{t}=1$) であるから

$$\left(-\frac{\beta}{\alpha}t\right) = \overline{\left(-\frac{\beta}{\alpha}t\right)} \qquad \therefore\quad \overline{\alpha}\beta t = \alpha\overline{\beta t} \qquad \therefore\quad t^2 = \frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}$$

$$\therefore\quad \lambda = -\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}},\quad pt = -\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$$

ゆえに、求める $R(z),\ S(z)$ は

$$\boldsymbol{R(z) = -\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\overline{z}-\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}},\quad S(z) = -\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}}z}$$

とすればよい．

＜考察＞ 「**数を表す文字は複素数**」と思え！

(1) は相似変換

$$\boldsymbol{S(z) = \lambda z+\omega}$$

の $\lambda,\ \omega$ をキメル問題である———2 点でキマルのだ．

そのうちの 1 組が $\mathrm{C}_1(\alpha_1),\ \mathrm{C}_2(\alpha_2)$ であることが、いくらかの救い になっている．とはいうものの、あとの 1 組をどうすればよいか．

円 C_1上の点 P_1から C_2上の点 P_2にうつる とするのだが、これをどう表示するか．まずベクトルにもどって考えてみる———たいていのことは何とかなってきたではないか．

図のように円 C_1 上の 1 点 P を位置ベクトルで表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1P}\\ &= \overrightarrow{OC_1} + r_1\overrightarrow{e} \quad (\overrightarrow{e}\text{ は単位ベクトル})\end{aligned}$$

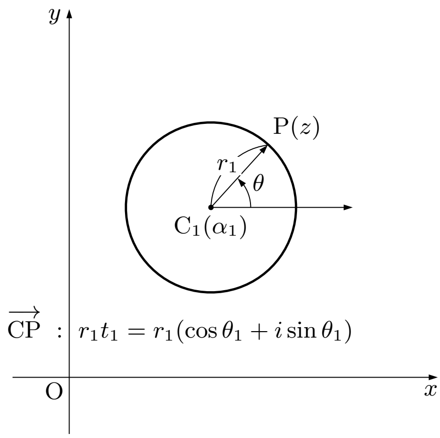
であった．これにならって複素数で表すことを考える．すなわち、上記では円 C_1 上の点を

$$\boldsymbol{\alpha_1 + r_1 t_1 \ (|t_1| = 1)}$$

と表したが、この場合の t_1 はタダの数字 (実数) ではない．実は

$$t_1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\longleftarrow$ **単位ベクトル** に当たる **複素数！**



なっているのである．したがって、θ を変化させれば端点が円 C_1 上をグルグル回るというケッコウなことなのである．

同様にして、円 C_2 上の点を

$$\boldsymbol{\alpha_2 + r_2 t_2 \ (|t_2| = 1)}$$

と表すと、円 C_1 が円 C_2 にうつる、ということから

$$② \ : \ \alpha_2 + r_2t_2 = \lambda(\alpha_1 + r_1t_1) + \omega$$

という関係式が得られる．

結局、ハッキリしておかなければならないことは、α_1, α_2, r_1, r_2, t_1, t_2 が定数、そして λ, ω が変数で、この λ, ω を求めるために 2 本の等式 (連立方程式) が構成されていると見抜くことがポイントである．

円周上の点を表すのにパラメーター t_1, t_2 (しかも複素数) を導入したところなどは難しいかも知れないが、よい経験になると思う．

しかし、すぐに心の中で

$$t_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, \quad t_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

などと読めるようになります．まあ、よい体験でした．

(2) も ① で

$$① \ : \ T(z) = \alpha\bar{z} + \beta$$

とおいた α, β をキメル問題である．これを

$$② \ : \ S \circ R(z) = -\lambda t^2 + p\lambda t$$

と比較して、p, t, λ を α, β で表したが、そのように表せる p, t, λ があれば、つまり、α, β で表せれば「$SR = T$」となる S と R が存在することの保証ということである．

それから、恒等式の係数比較のように係数を調整したところも見逃さないでもらいたい．実際、「任意の複素数について成り立つ」条件なのだから、あたりまえのことである．

一件落着！

0.4.2.3　1 次分数変換

(1)「1 次分数変換」の構造

分母と分子が共に変数 z の 1 次式で与えられる変換

$$\boldsymbol{f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}}\ (= w)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

は **1 次分数変換** といわれ、複素数平面上の変換の中でも**典型的な変換** である．

ただし、この場合、一般に $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ も複素数 $(\alpha\delta - \beta\gamma \fallingdotseq 0)$ で、これらは係数と呼ばれている．

そして、この変換を理解するためには**「それなりの手順」**がある———与えられた分数式 ① を割り落として (文字計算と同じにやる)**「合成変換」**としてながめてみるとその本質が見えてくる．

まず、**1 次分数変換** ① を割り落として次のように変形する．ただし、この場合も $A,\ B,$ C は一般に複素数である．

$$\boldsymbol{w = B + \frac{C}{z + A}} \longleftarrow \text{この計算はよろしいか？}$$

そうしておいて、**1 次分数変換の構造** を z から出発して上記の w まで追いかけると

$$z \longrightarrow z + A \longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{z + A}} \longrightarrow \frac{1}{z + A} \cdot C \longrightarrow B + \frac{1}{z + A} \cdot C$$

(平行移動)　**(逆数をトル)**　(相似＋回転)　(平行移動)

のように分解することができる．そして、この 2 番目の**「逆数をトル」**という変換が大問題 なのです．つまり単独では

$$\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{z}} \longleftarrow \text{鏡映の反転 という！}$$

だが1 次分数変換でカタチが最もシンプルであるにもかかわらず、**最も本質的な意味を**持っていて扱うにもヤッカイなシロモノ なのです．

(注) 「**1 次分数変換**」へのアクセスの手順

上に述べた「**逆数をトル**」という変換が「**1 次分数変換**」のキモになるのだが困ったことに、いきなりこのハナシに入るわけには行かないのです．それは、その根底となる「**反転**」という変換が、複素数を用いた変換の式では

$$\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{z}} \longleftarrow w = \frac{1}{z}\ \text{に}\ w = \bar{z}\ \text{が合成されている！}$$

で定義されるものだから、この共役の分 (実軸対称) を乗り越えなければならない という問題が起こってくる．そこで本稿では、この変換を上記の「**鏡映の反転**」と区別して「**通常の反転**」と呼び、混乱を避けるとともに 前もって「**通常の反転**」を徹底的に解説 するところから入ることにした．したがって、まずは「**通常の反転**」、そして「**鏡映の反転**」を十分に理解し、その上で「**1 次分数変換**」へと進むのがよいと思う．多少はむずかしいかも知れないが、なかなか興味深いところもあるのできっとおもしろいと思います．

end.

(2)「反転」とは何か

＜1＞まずは「通常の反転」から入ル

平面上の1つの定点をCとする．この平面上のC以外の1点をPとするとき、直線CP上に、Cに関してPと同じ側に

$$\mathbf{CP \cdot CQ} = \boldsymbol{r^2}\ (\boldsymbol{r} > \mathbf{0}) \cdots\cdots ①$$

となるように点Qをとり、PにQを対応させる変換を考えるとき、これを「反転」という———誤解を避けるために、これを特に「通常の反転」と名前をつけておく．

また、Cを**反転の中心**、rを**反転の半径**、Cを中心とする半径rの円を「**この反転の円**」という．このとき、「**定義の式①**」からもわかるように、Pに反転を行ってQにうつるとすれば、Qに反転を行えばPにもどる．したがって反転は「**互換的な変換**」であることがわかる．

また、Pが曲線l上を運動するとき、Pにある反転を行った点Qもまた1つの曲線mを描く．このmをlの**反形**という．

反転は互換的だから、mがlの反形ならばlはmの反形である．特に、lが1点のときはmも1点で、このときmをlの**反点**ともいう．

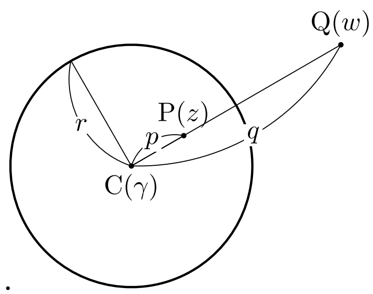
さて、反転を表す「**変換の式(写像)**」を実際に導いておこう．3点C, P, Qを表す複素数を $\gamma,\ z,\ w$ とし

$$\mathrm{CP} = p,\ \mathrm{CQ} = q$$

とすると

$$\boldsymbol{pq} = \boldsymbol{r^2} \cdots\cdots ②$$

であるが、このとき



$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\ :\ z - \gamma, \quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}}\ :\ w - \gamma$$

であるから、$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$の偏角を$\theta$とすると

$$z - \gamma = p(\cos\theta + i\sin\theta) \cdots\cdots ③$$
$$w - \gamma = q(\cos\theta + i\sin\theta) \cdots\cdots ④$$

が成り立つ———②③④ から $p,\ q,\ \theta$ を消去する．

③ の**共役方程式**(両辺の共役をとる)は

$$\overline{z} - \overline{\gamma} = p(\cos\theta - i\sin\theta)$$

これと ④ を辺々カケルと

$$(w-\gamma)(\overline{z} - \overline{\gamma}) = pq(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = pq$$

② を用いて

$$(w-\gamma)(\overline{z} - \overline{\gamma}) = r^2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{r^2}}{\overline{\boldsymbol{z}} - \overline{\boldsymbol{\gamma}}} + \boldsymbol{\gamma} \cdots\cdots ⑤$$

が得られる．特に、原点を中心とする単位円に関する反転は $\gamma = 0,\ r = 1$ として

$$\boldsymbol{w} = \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{z}}} \cdots\cdots ⑥$$

という簡単な形になる．

変換の式は ⑥ に示されたが、その具体的な内容がサッパリわからない．そこで、慣れるまでは、困ったらいつものように「$\boldsymbol{a+bi}$」のカタチにもどればよい．

つまり ⑥ の $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ を成分で表して

$$\boldsymbol{w = X + Yi,\quad z = x + yi \quad (\overline{z} = x - yi)}$$

として ⑥ に代入して強引に z と w の関係を引き出せばよい．

$$\begin{aligned}X + Yi &= \frac{1}{x - yi}\\ &= \frac{x+yi}{(x-yi)(x+yi)} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}i\\ \therefore\quad X &= \frac{x}{x^2+y^2},\quad Y = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦\end{aligned}$$

すなわち、この変換 f は

$$\boldsymbol{f\ :\quad (x,\ y)\ \longrightarrow\ \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となり、図形と方程式でタマに見かけるが、いわゆる「通常の反転」であることがわかる．ちなみに、⑦ を x, y について解きなおしてみると

$$\begin{aligned}X^2 + Y^2 &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\\ &= \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

だが、これを ⑦ に用いると

$$x = \frac{X}{X^2+Y^2},\quad y = \frac{Y}{X^2+Y^2}$$

で、これは $(*)$ と同じスタイルである――これが反転と呼ばれる所以なのだろう．

このことを一般のカタチで表すと

$$\boldsymbol{f^{-1}\ :\quad (x,\ y)\ \longrightarrow\ \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)}$$

となる――先に述べた「互換的変換」の意味を確認することができた．

さて、「どこを見ればよいか」も書いておかねばなるまい．

(i) $\boldsymbol{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$ $\longleftarrow$ **$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$は$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$と同方向！**

(ii) $\boldsymbol{\sqrt{X^2+Y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = 1}$ $\longleftarrow$ **長さの積が 1 です！**

に注意して図を描けばよいのです．このあと円と直線の図がたくさん出てくるが、いつもこれが基本です．

(注)「 $|z| \to \infty$ 」の意味

本文 ⑤ を見てもらいたい.

$$⑤\ :\ \boldsymbol{w = \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{\gamma}} + \gamma} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

だが、この式の分母が限りなく 0 に近づくとき、w をどう扱うか という問題が残っている.

一般に実数の場合、r は円の半径だから $r^2 > 0$ の実数としてよいだろう. そうすると

$$\frac{r^2}{x} \ \to\ \infty\ \ (x \to +0)\ ,\quad あるいは\ \frac{r^2}{x}\ \to\ -\infty\ \ (x \to -0)$$

という**約束**が決められている. しかし、複素数の場合は $z = x + yi$ という 2 元数 であるがゆえに、そう簡単には行かないのです.

そこで、複素数平面上で $|z| \to \infty$ としたとき、z が近づく点を考えて、これを**「無限遠点」**とし、これを複素数という実数とはちがう立場で**「無限大 ： ∞」**とキメル のである.

ただし、この場合は実数のように「$+\infty$」とか「$-\infty$」という区別はせず、「∞ 」はただ 1 つと約束するのである. またその上で、複素数平面にこの「無限遠点」を加えた平面を**「広義の複素数平面」**と呼ぶときもある.

そうしておいて、改めて上記の $(*)$ をながめると、$z = \gamma$ のときは $\overline{z} - \overline{\gamma} = 0$ であるが、このとき w は「$w = \infty$ (無限遠点)」に対応すると考えればよい.

このように考えると

$$|z| \to \infty \text{ のとき、} |\overline{z}| = |z| \to \infty$$

であるから、これを $(*)$ に用いて $z \to \infty$ とすれば

$$\begin{aligned}
|w - \gamma| &= \frac{r^2}{|\overline{z} - \overline{\gamma}|} \\
&\qquad \longleftarrow \Big|\,|\overline{z}| - |-\overline{\gamma}|\,\Big| \leqq |\overline{z} - \overline{\gamma}| \leqq |\overline{z}| + |-\overline{\gamma}| \quad (\ \longleftarrow\quad \text{三角不等式！})\\
&\leqq \frac{r^2}{\big|\,|\overline{z}| - |-\overline{\gamma}|\,\big|} \to 0\ (\ |\overline{z}| \to \infty\ )\ \longleftarrow\ \ |-\overline{\gamma}|\ \text{は定数！}
\end{aligned}$$

となり、「$z \to \infty$」には「$w = \gamma$」が対応するとしておけば「反転」は**「広義の複素数平面」**では**「1 対 1 に対応する変換」**と見ることができる.

なお、この場合の「 ∞ 」は普通の複素数とはちがうのでその計算には新しい約束を決めておかなければならない.

それには、複素数の連続性と考えあわせて

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, \qquad \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty, \qquad \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = \infty, \qquad \frac{\infty}{\alpha} = 0$$

のようにとりきめておく.

end.

<メモ>

■「通常の反転」における円と直線

結論からいうと、「通常の反転」により 円が直線にうつる とか、直線が円にうつる、とかチョッと意外な結果になるところがおもしろい.

それと、ここでは 代入の都合上、「複素数平面上の図形と方程式」で説明した

直線の方程式 ： $\boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0}$ ($\boldsymbol{\alpha \fallingdotseq 0,\ k}$ は実数)

円の方程式 ： $\boldsymbol{z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0}$ ($\boldsymbol{\alpha \fallingdotseq 0,\ k}$ は実数)

を使うのが便利である——やっと出番がきた！

＜例 **1**＞

複素数平面上の変換 $w=\dfrac{1}{z}$ により

(1) 複素数平面上の直線はどのような図形に変換されるか.

(2) 複素数平面上の円はどのような図形に変換されるか.

（解）(1) 直線の方程式は標準形で

$\boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0}$ **($\boldsymbol{\alpha \fallingdotseq 0,\ k}$ は実数)**$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$①

で表された．これに、「通常の反転」を実行する.

$$\boldsymbol{w=\frac{1}{\overline{z}}} \qquad \therefore\ \overline{z}=\frac{1}{w} \qquad \therefore\ z=\frac{1}{\overline{w}}$$

であるから、これらを ① に入れると

$$\overline{\alpha}\cdot\frac{1}{\overline{w}}+\alpha\cdot\frac{1}{w}+k=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{kw\overline{w}+\alpha\overline{w}+\overline{\alpha}w=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

ここで、$k=0,\ k\fallingdotseq 0$ でハナシがちがう から、場合を分けて考える.

$\boldsymbol{k=0}$ のとき——① ： $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=0$

② ： $\alpha\overline{w}+\overline{\alpha}w=0 \quad \therefore\ \boldsymbol{\overline{\alpha}w+\alpha\overline{w}=0}$ ⟵ ①と「同じ直線」のカタチになる！

$\boldsymbol{k\fallingdotseq 0}$ のとき——②の両辺は k で割れる！

$$\text{②} ： w\overline{w}+\frac{\overline{\alpha}}{k}w+\frac{\alpha}{k}\overline{w}=0 \qquad \therefore\ \left(w+\frac{\alpha}{k}\right)\left(\overline{w}+\frac{\overline{\alpha}}{k}\right)=\frac{\alpha\overline{\alpha}}{k^2}$$

$$\therefore\ \left|w+\frac{\alpha}{k}\right|^2=\frac{|\alpha|^2}{k^2} \qquad \therefore\ \left|w+\frac{\alpha}{k}\right|=\left|\frac{\alpha}{k}\right|$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\left|w-\left(-\frac{\alpha}{k}\right)\right|=\left|\frac{\alpha}{k}\right|} \longleftarrow \boldsymbol{|w-\gamma|=r\ \ (\,|\gamma|=r\,)}$$

となり、このハナシをまとめると、**直線 ① が原点を通らないとき ($k\fallingdotseq 0$) は、「通常の反転」によって得られる ② は原点を通る円である** ことがわかる.

(2) 円の方程式を

$\boldsymbol{z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0}$ **($\boldsymbol{\alpha \fallingdotseq 0,\ k}$ は実数)**$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$③

とし、これに

$$\boldsymbol{w=\frac{1}{\overline{z}}} \qquad \therefore\ \overline{z}=\frac{1}{w} \qquad \therefore\ z=\frac{1}{\overline{w}}$$

を入れると

$$\frac{1}{\overline{w}}\cdot\frac{1}{w}+\overline{\alpha}\cdot\frac{1}{\overline{w}}+\alpha\cdot\frac{1}{w}+k=0 \qquad kw\overline{w}+\overline{w}\alpha+\alpha\overline{w}+1=0\cdots\cdots\text{④}$$

ここでも、$k=0,\ k\neq 0$ で場合を分けて考える．

$k=0$ のとき

　④ ： $\alpha\overline{w}+\overline{\alpha}w+1=0$ 　$\therefore$ 　$\boldsymbol{\overline{\alpha}w+\alpha\overline{w}=1}$ $\longleftarrow$ **原点を通らない直線！**

$k\neq 0$ のとき

$$w\overline{w}+\frac{\overline{\alpha}}{k}w+\frac{\alpha}{k}\overline{w}+\frac{1}{k}=0 \quad \therefore \quad \left(w+\frac{\alpha}{k}\right)\left(\overline{w}+\frac{\overline{\alpha}}{k}\right)=\frac{\alpha\overline{\alpha}-k}{k^2}$$

$$\therefore \quad \left|w+\frac{\alpha}{k}\right|^2=\frac{|\alpha|^2-k}{k^2} \quad \therefore \quad \left|w+\frac{\alpha}{k}\right|=\frac{\sqrt{|\alpha|^2-k}}{|k|}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\left|w-\left(-\frac{\alpha}{k}\right)\right|=\frac{\sqrt{|\alpha|^2-k}}{|k|}} \quad (\boldsymbol{|\alpha|^2>k})$$

すなわち、$\boldsymbol{|\alpha|^2>k}$ のときは**原点を通らない円**になる．そして $|\alpha|^2\leqq k$ のときは実円にならない ことがわかる．そして、以上の結果は

(i) 直線をその上の 1 点で「通常の反転」をすると、その直線自身になる．
(ii) 直線をその上にない点を中心に「通常の反転」をすると、その中心を通る円になる．
(iii) 円周上の 1 点を中心に「通常の反転」をすると、その中心を通らない直線になる．
(iv) 円周上にない点を中心に「通常の反転」をすると、その中心を通らない円になる．

とまとめられる———この手の問題を扱うときはよいメヤスになる から、上記をよく理解して覚えておくとよい．

(注 1)「$\boldsymbol{\alpha=0}$ のとき」について

　ここまでは $\alpha\neq 0$ として説明してきたが、$\alpha=0$ 直線の場合は

　① ： $k=0$ のときのみ等号が成り立つが、z は任意となって論外！

　③ ： $z\overline{z}+k=0$ 　$\therefore$ 　$|z|^2=r^2(=-k)$ 　$\therefore$ 　$|z|=r\ (>0)$

で ③ は原点中心の円を表す．このときは $|w|=\dfrac{1}{r}$ となり、③ の同心円が対応する．

end.

(注 2) 円は円にうつる $\longleftarrow$「円 $\longleftrightarrow$ 円」の対応！

　一般に円と直線は

$$\boldsymbol{az\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+b=0} \quad (\boldsymbol{a,b}\ \text{は実数、}\boldsymbol{\alpha\neq 0})$$

と表される———$a\neq 0$ のときは円、$a=0$ ならば直線ということ！そこで、これを変形し

$$\left|x-\left(-\frac{\alpha}{a}\right)\right|=\frac{\sqrt{|\alpha|^2-ab}}{|a|} \longleftarrow \text{中心 ： }-\frac{\alpha}{a},\ \text{半径 ： }\frac{\sqrt{|\alpha|^2-ab}}{|a|}$$

と書いてみると

$$a\to 0\ \text{のとき} \quad \left|-\frac{\alpha}{a}\right|\to\infty,\quad \frac{\sqrt{|\alpha|^2-ab}}{|a|}\to\infty$$

であるから、中心が「無限遠点」で半径が「無限大」の円 に近づくと考えることができる．そこで、このような円を仮想し、これを直線と同じものと認めることにすれば、直線を円の中に含めて考えることができる だろう．つまり、「通常の反転」によって

　円は円にうつる $\longleftarrow$「円 $\longleftrightarrow$ 円」の対応！

とまとめてしまうことができる———なかなかよくデキタ話ではある．

end.

＜考察 **1** ＞ 実際に図を描いて「イメージ」を確かめる

本文のように、(i)〜(iv) をイッキに説明されても困るという人もいるだろう．というより計算式を見せられただけでは、実際にはどこがどうなってそういう結果になるのかわからない．

これは何ともキモチが悪いハナシなのだ．しかし、答が出ればよい、というものではないから、大マジメに図を描いて説明をしてみます．

改めて、原点 O をその中心とする「**通常の反転**」という変換は次のようなものであった．

$$\boldsymbol{f\ :\ (x,\ y)\ \longrightarrow\ (X,\ Y),}\quad \text{ただし、}\boldsymbol{X=\frac{x}{x^2+y^2},\ \ Y=\frac{y}{x^2+y^2}}$$

これをベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad \therefore\ \ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ \ (k>0)}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

つまり、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と**同方向**である．しかも

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2&=X^2+Y^2\\&=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=1\qquad\therefore\ \ \boldsymbol{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

$\longleftarrow$ **定義だからトウゼン！**

ともかく、図を描くには 2 つの条件

① **:** $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}$ と $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}$**の向きが同じ！**

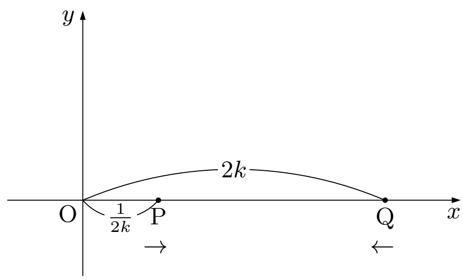
② **:** $\boldsymbol{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$ と $\boldsymbol{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$ **の積が 1！**

だけが**頼り**なのです．

そこで、順次調べていきます．

(i) について いえば

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\frac{1}{2k}\cdot(2k)=1$$



だから、向きについていえば、右図のように x 軸上を点 P が右 (矢印方向) に動けば点 Q は x 軸上を左 (矢印方向) に動く．

要するに、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が増加すれば $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ が減少し、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が減少すれば $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ が増加する、という関係にあることに気がつけばよい．そして結局、直線 $y=0$ (x 軸) は自分自身にうつる．

(ii)(iii) について は 1 つの図でよいだろう．

たとえば (iii) だが、「**通常の反転**」による変換で得られる直線が $\boldsymbol{y=2}$ であったとする と

$$Y=\frac{y}{x^2+y^2}=2\qquad\therefore\ \ x^2+y^2-\frac{y}{2}=0$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

で、もとの図形はこの円である ことがわかる．

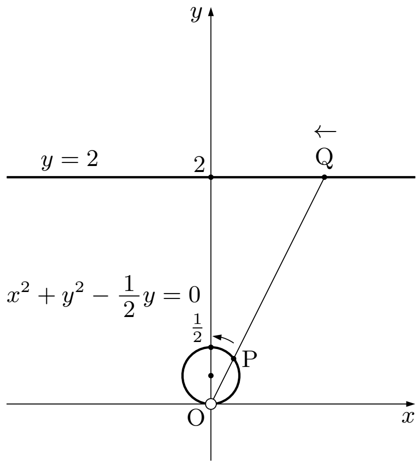
つまり、点 P がこの円周上を図のように矢印の方向に回転するとき、点 Q も図の矢印の方向に動き、P が逆まわりのときは Q も逆向きに動く．

　このとき、2 点 P, Q が y 軸上を通過するときをにらんで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

を確認しておいてもらいたい．

　そして、この計算はこの移動中つねに保全されるのである．また、y 軸を通過するときをその数値を求めるメヤスにするとよい．



　さて、最後の (iv) だが、これも Q(X, Y) から行くか———「反転」は「互換的変換」だからどちらから手をつけてもよいが、なるべく計算がラクの方がよい．たとえば、Q(X, Y) が

$$\boldsymbol{x^2+(y-3)^2=1}$$

上を動くとすると

$$X^2+(Y-3)^2=1$$

$$\therefore\quad \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}-3\right)^2=1$$

$$\therefore\quad x^2+y^2-6y(x^2+y^2)+8(x^2+y^2)^2=0$$

$$\therefore\quad 8(x^2+y^2)-6y+1=0$$

$$\therefore\quad x^2+y^2-\frac{3}{4}y+\frac{1}{8}=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

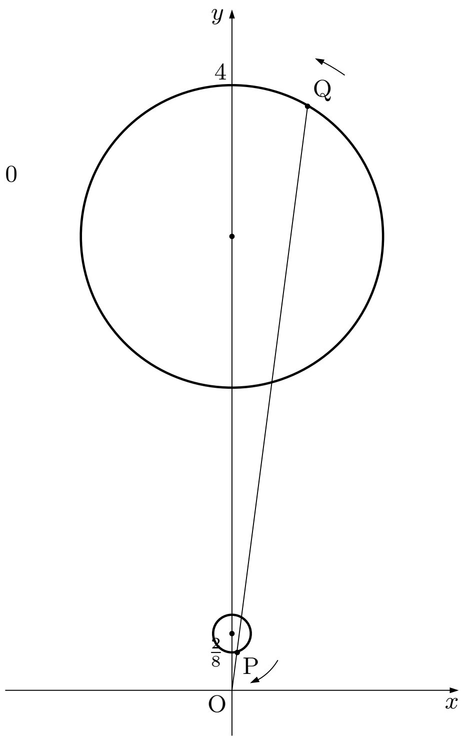
これが「**変換される円の方程式**」である．

　だから、2 つの円を同じ平面上に図示して考えると都合がよい．

　このとき、点 P が矢印のように動くならば点 Q も矢印のように動く．その「**見きわめ**」は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1$$

で、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が減少 (増加) するなら $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ が増加 (減少) することに注目すればよい．



　そして、2 つの円と y 軸との交点のうち、それらしい値である 4 と $\dfrac{2}{8}$ を見つければ

$$4\cdot\frac{2}{8}=1$$

として「反転」の条件の確認とともに、P と Q が y 軸を通過していく状況を、より正確につかまえることができる．数値を変えていろいろとやってみるとよい．

(注) $\boldsymbol{\alpha=0}$ のとき

　このとき

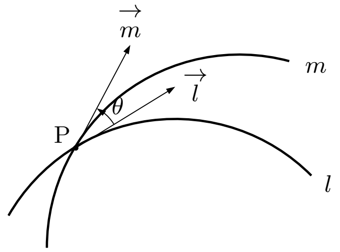
$$\boldsymbol{|z|=r\ \longleftrightarrow\ |w|=\frac{1}{r}}$$

であることはすでに述べた．いずれも原点中心の円 (同心円) である．これも、図を描いて説明したかったが、スペースがないので省略する．練習のつもりで確認しておいてもらいたい．

end.

＜考察 **2** ＞「反転」で **2** 曲線のなす角は変わらない

2 つの曲線 $l,\ m$ が、ある点 P で交わるとき、点 P における $l,\ m$ の接線の方向を表すベクトル $\vec{l},\ \vec{m}$ のなす角を点 P における 2 曲線 $l,\ m$ のなす角という.



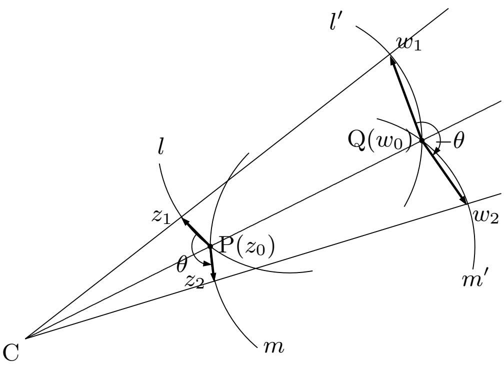
いま、点 P で交わる 2 つの曲線 $l,\ m$ に反転を行って得られた 2 曲線 $l',\ m'$ が、点 P のうつされた点 Q で交わっているものとする.

このとき、P における l と m との交角 θ と、Q における l' と m' との交角 θ' との関係を調べたい.

その反転を表す関係式を

$$\boldsymbol{w = \frac{1}{\overline{z}}} \longleftarrow \textbf{ 通常の反転！}$$

とし、変換前の交点を $\mathrm{P}(z_0)$、変換後の交点を $\mathrm{Q}(w_0)$ とおき、$l,\ m$ 上に P と異なる 2 点 $z_1,\ z_2$ をとって、それらがそれぞれ $w_1,\ w_2$ にうつるとすると



$$w_0 = \frac{1}{\overline{z_0}},\quad w_1 = \frac{1}{\overline{z_1}},\quad w_2 = \frac{1}{\overline{z_2}}$$

であるから

$$w_1 - w_0 = \frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_0}} = -\frac{\overline{z_1} - \overline{z_0}}{\overline{z_0}\,\overline{z_1}}$$

$$w_2 - w_0 = \frac{1}{\overline{z_2}} - \frac{1}{\overline{z_0}} = -\frac{\overline{z_2} - \overline{z_0}}{\overline{z_0}\,\overline{z_2}}$$

$$\therefore\quad \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = \frac{\overline{z_2 - z_0}}{\overline{z_1 - z_0}} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

この関係を $\boldsymbol{arg}$ **(偏角)** で表すと

$$arg\left(\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0}\right) = arg\left(\overline{\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}}\right) + arg\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) \quad \longleftarrow \quad \boldsymbol{arg(\overline{\alpha}) = -arg\,\alpha}$$

$$= -arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) - arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

図を見てこの関係を書き直すと

$$\angle w_1 \mathrm{Q} w_2 = -\angle z_1 \mathrm{P} z_2 - arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

ここで、「$z_1 \to z_0,\quad z_2 \to z_0$」としたときの極限を考えると

$$w_1 \to w_0,\qquad w_2 \to w_0$$

であるから、単純に視覚的に考えただけでも――とはいえ $\mathrm{P}(z_0)$ の周辺は矢印が円周に重なってしまって見えにくくなってしまった．そういうときはココロでみ見る！

$$\angle w_1 \mathrm{Q} w_2 \to \theta',\quad \angle z_1 \mathrm{P} z_2 \to \theta,\quad arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \to arg\ 1 = 0$$

ただし、$\theta,\ \theta'$ はそれぞれ 2 点 P, Q における接線方向のベクトルのなす角で、上記の極限でわかるように「$\boldsymbol{\theta' = -\theta}$」となっているところもおもしろい.

ハナシのついでに付け加えておくと、「**鏡映の反転 (後述)**」のときは、上記の共役複素数 $\overline{z_0},\ \overline{z_1},\ \overline{z_2}$ のところがナマの複素数 $z_0,\ z_1,\ z_2$ になるので「$\boldsymbol{\theta' = \theta}$」となる.

要するに「**反転**」という変換では 2 曲線のなす角の大きさは変わらないのだ．ただし、角の符号は「**通常の反転**」では異符号に変わり、「**鏡映の反転 (後述)**」では変わらない.

そして、図形の変換により 2 曲線のなす角の大きさが変わらないとき、これをまとめて「**等角写像**」といい、いま問題にしている「反転」という変換はその典型的な例である.

というわけだが、具体的な例を見せられないとナットクできないかも知れない．練習を兼ねて 1 つやっておくのもまた一興ではある．

本問の冒頭で

$$① \ : \ \boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0} \quad \longleftrightarrow \quad ② \ : \ \boldsymbol{kw\overline{w}+\alpha\overline{w}+\overline{\alpha}w=0}$$

で説明したが、ここで適当な k の値を選べば反転の具体例をつくることができる．ただし、ここでは 直線も曲線の 1 つとして扱う ことにする．

たとえば

(i) $k=-1,\ \alpha=1$ とすれば

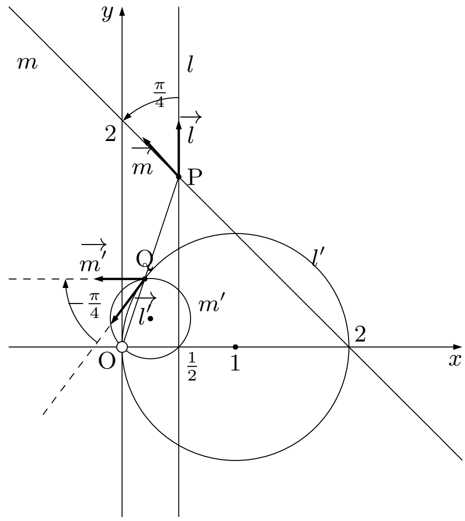
$$\boldsymbol{l\ :\ z+\overline{z}=1}$$

$$\longleftrightarrow \quad \boldsymbol{l'\ :\ |w-1|=1}$$

(ii) $k=-4,\ \alpha=1+i$ とすれば

$$\boldsymbol{m\ :\ (1-i)z+(1+i)\overline{z}-4=0}$$

$$\longleftrightarrow \quad \boldsymbol{m'\ :\ \left|w-\frac{1+i}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}}$$



という 2 組の反転の例が簡単に手に入る．

上記で l' と m' は中心と半径が見えているからすぐにわかるだろう．

l と m が見えにくいとしても

$$z=x+yi,\quad \overline{z}=x-yi$$

を代入すれば

$$l \ \longrightarrow \ x=\frac{1}{2}, \qquad m \ \longrightarrow \ x+y=2$$

はすぐに計算できる．

かくして、l と m は点 P で l から m に測る角 $\frac{\pi}{4}$ で交わり、l' と m' は点 Q で l' から m' の接線方向にに測る角 $-\frac{\pi}{4}$ 交わることがわかる．

一件落着！

＜ 例 **2** ＞

原点を中心とするある反転による任意の 1 組の対応点を P, Q とする．このとき、2 点 P, Q を通る任意の円は、反転の円に直交し、かつその円はこの反転によって不変であることを示せ．

（解）こうなると「古典」というか、まあ、懐かしい「定理」です．

まず、2 つの円が直交するということは、その交点においてそれぞれの円に引いた接線が直交するということ である．

さて、「この反転の円」というのはどの円のことかわかりますか———忘れた人は最初の「反転の定義」にもどってください．

ここでは「反転の中心」を原点 O にとっているから、反転の円 O の半径を r とするとき、点 P と点 Q が反転の対応点として

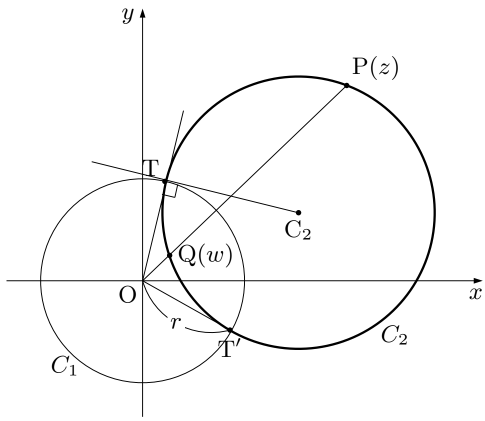
$$\mathbf{OP\cdot OQ}=\boldsymbol{r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ———普通は $r=1$ にとるから、図を描いたり問題を解いたりする上では表面に現れてこなかったが、正式には ① の表現になる．

そこで改めて、反転の円 $\mathrm{C_1}$ (中心 O, 半径 r) と反転の対応関係にある 2 点 **P, Q** を通る任意の円 $\mathrm{C_2}$ との交点を図のように T, T′ とすると「$\mathrm{OT}=r$」であるから ① の r に代入すると

$$\mathbf{OP}\cdot\mathbf{OQ}=\mathbf{OT^2} \longleftarrow \text{「方べきの定理」そのもの！}$$

が成り立つ. つまり、直線 OT が T で円 C_2 に接していることがわかる.



このとき、説明するまでもないが

$$\angle \mathrm{OTC_2}=\frac{\pi}{2}$$

から 円 C_1 も直線 $\mathrm{C_2T}$ に接している のだ.

また、これは点 T′ においても同様であるので、結局 2 つの円 C_1, C_2 が直交するわけである——2 円の直交とはこういうことをいうのです.

また、この反転によって P は Q にうつり、Q は P にうつるのだが

$$\mathrm{OT}=\mathrm{OT'}=r$$

であるから、円 C_2 上で P が T に一致するときは Q も T に一致する. すなわち、T と T′ はこの反転による**不動点**である.

したがって、3 点 P, Q, T により決定される円は 3 点 P, Q, T により決定される円にうつる. すなわち、円 QPT は不変である——ウマイ！

＜考察＞ 計算でやってみる

それにしてもスゴイなあ. 昔の人はこんな具合にやったんでしょう. 何か懐かしくないですか.「反転」の図形的性質をうまく使って簡潔で、しかもキレイだ. チョッと感動しましたよ.

前半の「2 円の直交」も**「方べきの定理」**を見せられてしまうと、さすがに「恐れ入りました」というしかない. 計算に乗せるとすれば**「円 QTP が不変」**というところか. とはいうものの、何を言えば言ったことになるのか、難しい問題ではあります.

そこでまず、反転による「1 組の対応点 P, Q」が乗る円の方程式

$$\boldsymbol{z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0} \cdots\cdots ②$$

を設定しておき、実際にこの反転による「任意の 1 組の対応点 $\mathrm{P}(z_0)$, $\mathrm{Q}(w_0)$」がその円に乗っているとすればどうでなければならないか (**必要条件**) を求める——おそらく k, α の条件として求まるだろう.

逆にこのとき、この反転による「1 組の対応点 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$」がその円周上の 2 点として存在する (**十分条件**) ことを言えばよい.

そうと決まれば早速とりかかろう. まずは前提条件だが、$\mathrm{P}(z_0)$ が ② 上だから

$$z_0\overline{z_0}+\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}+k=0 \cdots\cdots ③$$

このとき、$\mathrm{Q}(w_0)$ が ② 上にあるとすれば

$$w_0\overline{w_0}+\overline{\alpha}w_0+\alpha\overline{w_0}+k=0 \cdots\cdots ④$$

そして、この「反転」は、原点がその中心だから

$$\boldsymbol{w=\frac{r^2}{\overline{z}}} \longleftarrow z \text{ から } w \text{ を得る「反転」の関係式！}$$

と表せるから、$\mathrm{P}(z_0)$ が $\mathrm{Q}(w_0)$ にうつるとすれば

$$w_0=\frac{r^2}{\overline{z_0}} \qquad \therefore\ \overline{w_0}=\frac{r^2}{z_0}$$

の関係がある．そこで、 $w_0,\ \overline{w_0}$ を ④ に入れて $z_0,\ \overline{z_0}$ の関係式を作ると

$$\frac{r^2}{\overline{z_0}}\cdot\frac{r^2}{z_0}+\overline{\alpha}\cdot\frac{r^2}{\overline{z_0}}+\alpha\cdot\frac{r^2}{z_0}+k=0 \qquad \therefore\quad kz_0\overline{z_0}+r^2(\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0})+r^4=0$$

$$\therefore\quad z_0\overline{z_0}+\frac{r^2}{k}(\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0})+\frac{r^4}{k}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここまでで z_0 について ③⑤ の 2 本の等式が得られたことになる．しかも、この z_0 は上図で言うと円 C_2 上を動く任意の点 なのである．動くものはまとめて処理するのがよい．

つまり ③ から

$$\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}=-(z_0\overline{z_0}+k)$$

だから、これを ⑤ に代入して

$$z_0\overline{z_0}-\frac{r^2}{k}(z_0\overline{z_0}+k)+\frac{r^4}{k}=0 \qquad \therefore\quad \left(1-\frac{r^2}{k}\right)(z_0\overline{z_0}-r^2)=0\cdots\cdots⑥$$

ここで、 $z_0\overline{z_0}=\mathrm{OP}^2$ だから、これは一般には r^2 に等しくはない——等しいのは $\mathrm{P}(z_0)$ が先に述べたこの変換の不動点と一致するときらしい．

そういうことで、⑥ が任意の z_0 に対して成立するためには

$$1-\frac{r^2}{k}=0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{k=r^2}$$

でなくてはならない (**必要条件**)．また、このとき

$$w=\frac{r^2}{\overline{z}}\ \longrightarrow\ \overline{z}=\frac{r^2}{w},\quad z=\frac{r^2}{\overline{w}}$$

であるから

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+r^2=0$$

を満たす z に対する w は

$$\frac{r^4}{w\overline{w}}+\overline{\alpha}\frac{r^2}{\overline{w}}+\alpha\frac{r^2}{w}+r^2=0 \qquad \therefore\quad w\overline{w}+\overline{\alpha}w+\alpha\overline{w}+k=0\ \ (k=r^2)$$

で、これは ② が w を満たすことを意味している．すなわち、「円 **QTP** が不変」であることが示された．

一件落着！

＜**2**＞「鏡映の反転」

クドイがチョッとだけ説明させてもらいたい．入り口では「反転」の例としてとして「通常の反転」、すなわち

$$\boldsymbol{f(z)=\frac{1}{z}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

あるいは、xy 平面では

$$\boldsymbol{f\ :\ (x,\ y)\ \longrightarrow\ \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)}$$

で表される変換を解説した．一般に「反転」といえばこれをさす――ここがまぎらわしい．

しかし、ここのテーマの「1 次分数変換」で最も重要なカナメになる「鏡映の反転」はチョッと様子がちがう から混乱してはならない．

それは「1次分数変換」を分解して見せたときに説明したが、単純に「分数をトル」という操作だけ なのである．すなわち

$$\boldsymbol{f(z)=\frac{1}{z}}\ \longleftarrow\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}$$

と表され、これを xy 平面上の変換として表すには

$$\begin{aligned} X+Yi &= \frac{1}{x+yi} \quad \left(=\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i \end{aligned}$$

だが、第 **2** 成分の符号 が変わって

$$\boldsymbol{f\ :\ (x,\ y)\ \longrightarrow\ \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)}$$

となっている．これは 複素数的には $(*)$ の共役複素数をとること であり、図形的には $(*)$ の変換に「$\boldsymbol{x}$ 軸対称」という変換がさらに合成されたもの である．

つまり、式変形のカタチとしては単純だが、操作の上ではワンステップだけ手数がかかっている．ちなみに、「鏡映の反転」も「互換的変換」、すなわち

$$\boldsymbol{f^{-1}\ :\ (x,\ y)\ \longrightarrow\ \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)}$$

である．

＜注＞「鏡映の反転」は曲線のなす「角の大きさ」を変えない

これは、すでに「通常の反転」で述べたので、ここでは触れない．ただし、「通常の反転」では角の符号が逆転してマイナスになるが「鏡映の反転」では、それはない．

複素数平面ではベクトルとちがって、角の正負についての概念がキビシクついてまわるので、混乱しないように注意しなければならない．

end.

<メモ>

■ 「鏡映の反転」について

以下に「鏡映の反転」を簡潔にまとめた例を 1 つあげておく

＜例＞

複素数平面上で、α を中心とする半径 r の円周上の動点を z とする．
このとき、$w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ を満たす点は、円周上、または直線上を動くことを証明せよ．

（解） z は α を中心とする半径 r の円周上にあるから

$$|z-\alpha|=r \cdots\cdots ①$$

このとき w は

$$\boldsymbol{w=\frac{1}{\bar{z}}} \qquad \therefore\ \ z=\frac{1}{\bar{w}}$$

これを ① に入れて

$$\left|\frac{1}{\bar{w}}-\alpha\right|=r \qquad \therefore\ \ \frac{|1-\alpha\bar{w}|}{|\bar{w}|}=r \qquad \therefore\ \ |1-\alpha\bar{w}|=r|\bar{w}|\cdots\cdots ②$$

ここで、左辺を $|\alpha|$ で括りたいたいが、それには次の「場合分け」をする．

(i) $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ のとき

$$② \ :\ |\alpha|\cdot\left|\frac{1}{\alpha}-\bar{w}\right|=r|\bar{w}| \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{|w-0|:\left|w-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right|=|\alpha|:r}$$

すなわち、w は 2 点 0, $\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ からの比が「 $|\alpha|:r$ 」であるような点である．よってその軌跡は

$\boldsymbol{|\alpha|=r}$ ならば、円 ① は原点を通っていて

$|\alpha|:r=1:1 \ \longrightarrow$ **$\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{\dfrac{1}{\bar{\alpha}}}$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線！**

$\boldsymbol{|\alpha|\neq r}$ ならば、0 と $\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ についてのアポロニウスの円！

(ii) $\boldsymbol{\alpha=0}$ のとき

$$\left|\frac{1}{\bar{w}}\right|=r \qquad \therefore\ \ |w|=\frac{1}{r} \ \longleftarrow \ \text{原点中心、半径}\,\boldsymbol{\frac{1}{r}}\,\text{の円！}$$

となる．

<考察>「鏡映の反転」――そのイメージの確認

上記の解説は複素数の計算で説明した．しかし、この「**字ヅラ**」を追いかけてもピンとこないだろう．そこで、実際に数値を入れて図を描いて説明しておく 方がよさそうだ．

それと作図にあたっては、いきなり「**鏡映の反転** $\left(\boldsymbol{w=\dfrac{1}{\bar{z}}}\right)$ 」に持ち込むより、その前段階として先に「**通常の反転** $\left(\boldsymbol{w=\dfrac{1}{z}}\right)$ 」で大体の様子をつかみ、そのあとで $\boldsymbol{x}$ **軸対称** を実行して「**鏡映**」を実現する方が現実的である――ただし、この順序はどちらが先でもよい．

(i) $\boldsymbol{|\alpha|=r}$ のとき

円の中心 α は定数だから、これを先に決めておく．これは何でもよいが, なるべく簡単な数値がよいだろう――一般には $\alpha\neq 0$ である．たとえば、 $\boldsymbol{\alpha=1+i}$ とすると $\boldsymbol{|\alpha|=\sqrt{2}}$ であるから、**円の方程式は**

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=2} \qquad \therefore\ \ x^2+y^2=2x+2y$$

このとき、点 $\mathrm{Q}(X, Y)$ が、この円周上にあるとすれば

$$X^2 + Y^2 = 2X + 2Y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

で、変換の関係式は

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2},\ Y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

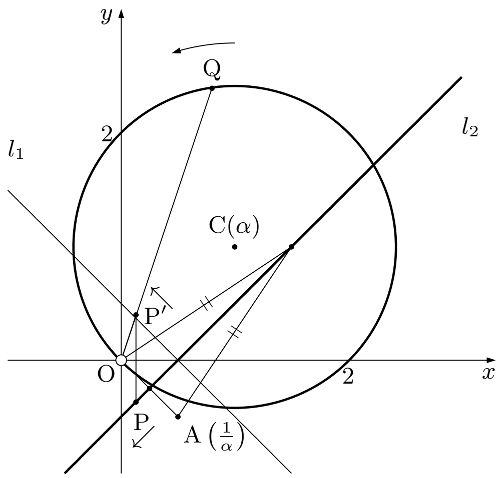
だから、これを $(*)$ に入れて

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + 2\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\therefore \quad 2x - 2y = 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x - y = \frac{1}{2}} \ \longleftarrow \ \text{直線！}$$

これでいくらか具体的にはなったが、まだ「**見えた！**」というカンジではない.

そこで、さらに追いつめるわけだが、それにはまず、上記の円周上の点 $\mathrm{Q}(X, Y)$ の「**通常の反転**」による対応点 P' を捉え、その x 軸に関する対称点を「**鏡映の反転**」の対応点として捉えればよい. また、① の円が原点を通ることも上記から簡単に確認される.



さて、改めて右図で説明すると、点 Q が円周上を矢印のように回転するとき、「**通常の反転**」でこの点 Q を与える点 P' は直線 l_1 上を矢印の方向に移動している.

そして、「**x 軸に関する対称変換**」で P' を与える点 P は、P' の移動に対応して直線 l_2 上を矢印の方向に移動している.

そして、この場合は「**x 軸に関する対称変換**」を先に実行し、そのあとで「**通常の反転**」を行った立場で説明しているが、この順序を逆にしても同じ結果になる.

結局、点 P は点 Q に変換され、直線 l_2 が円 C に変換される.

このとき、「**鏡映の反転**」が「**相互的変換**」であることから、全く同様にして円 C が直線 l_2 に変換されるのである.

直線が円に変換されたり、円が直線に変換されたりするので戸惑うかも知れないが、これが $\boldsymbol{|\alpha| = r}$ の場合の「**鏡映の反転**」なのである.

また、ここで

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1 + i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

より、2 点 $\mathrm{O}(0),\ \mathrm{A}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ をとると、直線 l_2 が線分 OA の **垂直 2 等分線** になる.

これも図から視覚的にも了解されるであろうが、**2 等分**、**垂直** など、計算で確認してナットクしてもらいたい.

(ii) $\boldsymbol{|\alpha| > r}$ のとき

こういう実験は、数値を選ばないと、肝心の説明したいところが込み入ってよく見えない.

$$\alpha = 2 + 2i$$

としてみよう.

$$|\alpha| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

だから、$\boldsymbol{r = 1}$ とする.

そうすると、円 C の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2=1^2}$$

で、点 Q(X,Y) がこの上にあるとすれば

$$(X-2)^2+(Y-2)^2=1^2$$

だから、変換の関係式

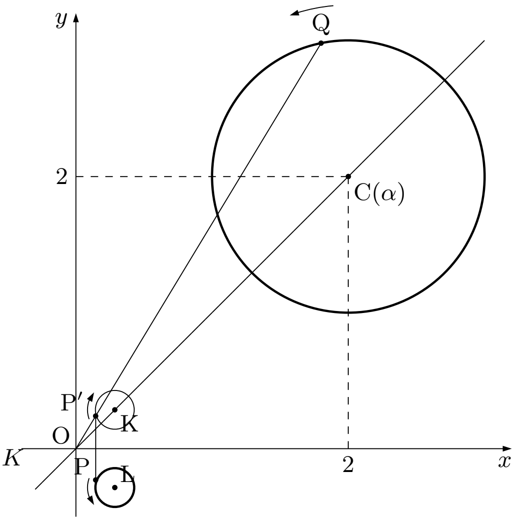
$$X=\frac{x}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

を代入すると「**通常の反転**」で円 C にうつる円 K の方程式

$$\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{2}{7}\right)^2=\left(\frac{1}{7}\right)^2$$

が得られる．

さらに「$\boldsymbol{x}$ **軸に関する対称変換**」でこの円 K にうつる円 L の方程式は



$$\boldsymbol{\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\left(y+\frac{2}{7}\right)^2=\left(\frac{1}{7}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

つまり、円 L が「**鏡映の反転**」によって円 C にうつっていることがわかる．

そして、点 Q が円 C 上を矢印の方向に回転するとき、「**通常の反転**」によりこの点に対応する点 P$'$ は円 K 上を矢印の方向に回転している．そして、x 軸対称により点 P$'$ に対応する点 P は円 L 上を矢印の方向に回転しているのである．

その結果、「**鏡映の反転**」として円 L 上の P の矢印の方向の回転に対応して、円 C 上の点 Q が矢印の方向に回転する のである．

このとき、この「**鏡映の反転**」の場合も「**相互的変換**」で、円 L が円 C に変換され、円 C が円 L に変換されることはいうまでもない．

★ ＜アポロニウスの円についての検証＞

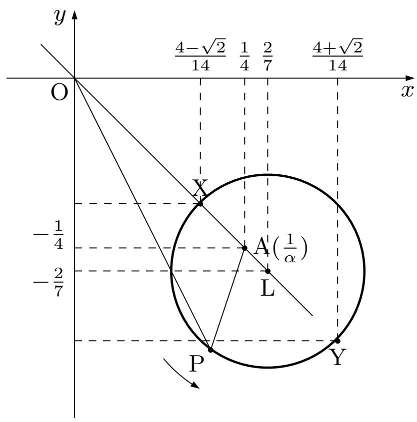
さて、「(解)」ではこの場合、その軌跡は「O(0) と A$(\frac{1}{\alpha})$ についての**アポロニウスの円を描く**」と書いたが、そのことについて説明をしておく．

それについては上図を用いたいが、説明したい部分が小さくなりすぎるのでその部分を切り取って 拡大した図 を用意した．

右図を見てもらいたい．

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2+2i}$$

$$=\frac{2-2i}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$



である．

そして、確認の計算は、いろいろやってみたが、円 L の方程式 $(*)$ と $y=-x$ を解いて、「**平行線と比例**」の関係を利用するのが単純でよい．

つまり、右図で

$$\mathrm{OX}:\mathrm{XA}=\frac{4-\sqrt{2}}{14}:\left(\frac{1}{4}-\frac{4-\sqrt{2}}{14}\right)$$

$$=2\sqrt{2}:1=\boldsymbol{=|\alpha|:r}$$

また、同様にして

$$\mathrm{OY}:\mathrm{YA}=\frac{4+\sqrt{2}}{14}:\left(\frac{4+\sqrt{2}}{14}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{2}:1=\boldsymbol{=|\alpha|:r}$$

これは、点 X が線分 OA の「$|\boldsymbol{\alpha}|:\boldsymbol{r}$」の**内分点**、点 Y が線分 OA の同比の**外分点** となり、円 L が線分 XY を直径とする**アポロニウスの円**である ことを意味している.

(iii) $|\boldsymbol{\alpha}| < \boldsymbol{r}$ のとき

もう図の描き方の要領はツカめたと思うから、以下は要点のみを説明する.

$$\alpha = 1 + i \ \longleftarrow\ |\alpha| = \sqrt{2}$$

だから、$r = 2$ とすれば条件を満たす.

そうすると、右図の円 C の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2}$$

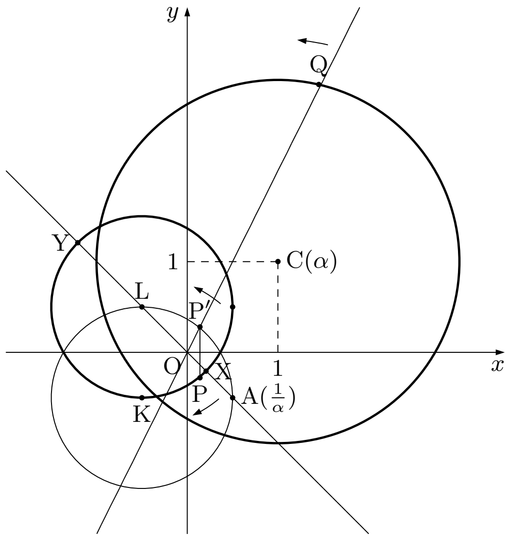
である. そして、「**通常の反転**」で円 C を与える円 K の方程式は

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

これと x 軸対称になる円Lの方程式は

$$\boldsymbol{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2}$$

で、これが「**鏡映の反転**」で円 C に変換される円の方程式である.



つまり、円 L 上の点 P が矢印の方向に回転するとき、円 K 上の点 P′ が矢印の方向に回転し、それに対応して円 C 上の点 Q が矢印の方向に回転する.

★ ＜**アポロニウスの円についての検証**＞

オッと、これを忘れるとことであった. ここで

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

を先に求めて、これを点 A$(\frac{1}{\alpha})$ としておく. その上で、円 L と直線 $y = -x$ との交点の x 座標を求めて、「**平行線と比例**」の関係を用いる.

まず、交点の x 座標は

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \qquad \therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

だから

$$\begin{aligned}
\mathrm{OX} : \mathrm{XA} &= \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2} - 0\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1 : \sqrt{2} = |\alpha| : r \\
\mathrm{OY} : \mathrm{YA} &= \left(0 - \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1 : \sqrt{2} = |\alpha| : r
\end{aligned}$$

すなわち、2 点 X, Y がそれぞれ線分 OA の「$|\boldsymbol{\alpha}|:\boldsymbol{r}$」の**内分点**、**外分点**になっている——円 L は線分 XY を直径とする円、すなわち**アポロニウスの円**である.

一件落着！

(3) 改めて「**1** 次分数変換」

さて、「**1** 次分数変換の構造」に始まり、その中核となる「鏡映の反転」、そしてそれを裏付けるための「通常の反転」、その周辺の諸問題など、キッチリ解説してきた.

もう実際の問題にあたってもよいだろう．せいぜい「**1** 次分数変換」を楽しんでください———不思議な感動がありますよ.

＜メモ＞

■「1 次分数変換」とはナンダ！

「ナンダ？」と言われても、実際にやってみないと実感としては捉えにくいものである．以下、実演ということだ．シッカリ読んでください．

＜例＞

複素数 z が

$$|z| \leqq 1, \quad (1-i)z+(1+i)\overline{z} \geqq 2$$

を同時に満たすとき、次の点の存在する範囲を図示せよ．

(1) $\mathrm{P}(z)$ 　　(2) $w = \dfrac{2i}{z+1}$ のときの $\mathrm{Q}(w)$

（解） (1) 2 つの不等式は

$$|z| \leqq 1 \cdots\cdots ①$$

$$(1-i)z+(1+i)\overline{z} \geqq 2 \cdots\cdots ②$$

だが、① については説明するほどのこともあるまい——原点を中心とする半径 1 の円の周、または内部である．

② については、素朴に

$$z = x+yi,\ \overline{z} = x-yi$$

とおく方がわかり易いだろう．すなわち

$$(1-i)(x+yi)+(1+i)(x-yi) \geqq 2$$

$$\therefore \quad x+y \geqq 1$$

として領域が確定する．

しかし、この左辺で $1+i = \alpha$ とおけば

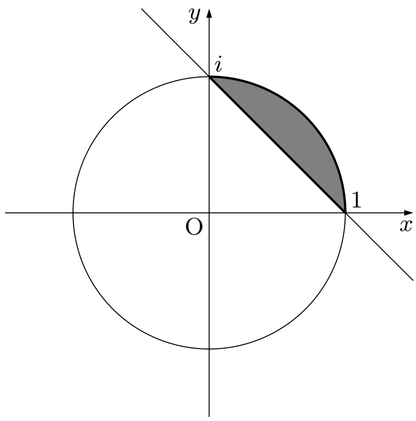
$$l \ : \ f(z) = \boldsymbol{\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-2=0}$$

は**「直線の標準形」**になっている．

そこでチョッとイキがってみるか．

$$f(1) = \overline{\alpha}\cdot 1+\alpha\cdot 1-2$$
$$= (1-i)+(1+i)-2 = 0 \ \longleftarrow \ 満たす！$$

$$f(i) = \overline{\alpha}\cdot i+\alpha\cdot(-i)-2$$
$$= (1-i)i+(1+i)(-i)-2 = 0 \ \longleftarrow \ 満たす！$$



すなわち、境界線である直線 l は 2 点 $1,\ i$ を通ることがわかる．

また

$$f(0) = \overline{\alpha}\cdot 0+\alpha\cdot 0-2 = -2 < 0 \ \longleftarrow \ \textbf{O は } \boldsymbol{f(z)} \textbf{ の負領域！}$$

だから、求める ② の領域は $f(z)$ の**境界線を含む「正領域」**である——これもいいなあ．

ともあれ、以上の考察から、**求める領域は図のアミカケ (ただし、境界は含む) の部分** である．

(2) 変換の式は

$$w = \frac{2i}{z+1} \ \longleftarrow \ z \text{ を与えるとこの約束で } w \text{ がキマル！}$$

$$\therefore \quad z+1 = \frac{2i}{w} \qquad \therefore \quad z = \frac{2i}{w}-1 \cdots\cdots ③$$

であるから、これらを ①② に入れて w の関係式を図に表し、その共通部分を採用することになる．

(i) ①が変換される領域

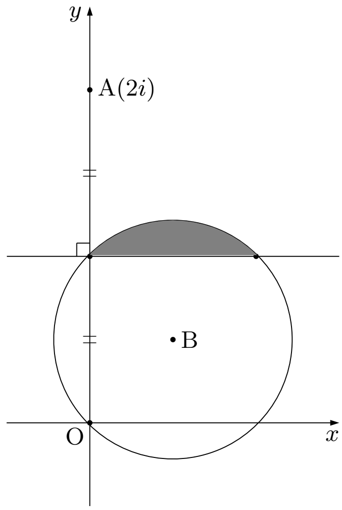
③ を ① に入れると

$$\left|\frac{2i}{w}-1\right| \leqq 1 \qquad \therefore\ |w-2i| \leqq |w| \qquad \therefore\ \boldsymbol{|w-2i| \leqq |w-0|}$$

つまり、Q(w) は、点 A($2i$) をとるとき、原点を O として線分 OA の垂直 2 等分線の上側の領域の点である.

(ii) ②が変換される領域

③ を ② に入れると



$$(1-i)\left(\frac{2i}{w}-1\right)+(1+i)\left(\frac{-2i}{\overline{w}}-1\right) \geqq 2$$

$$\therefore\ (1-i)\frac{2i-w}{w}+(1+i)\frac{-2i-\overline{w}}{\overline{w}} \geqq 2$$

$$\therefore\ (1-i)(w-2i)\overline{w}+(1+i)(\overline{w}+2i)w \leqq -2w\overline{w}$$

$$\therefore\ (1-i)(w\overline{w}-2i\overline{w})+(1+i)(w\overline{w}+2iw) \leqq -2w\overline{w}$$

$$\therefore\ 4w\overline{w}-2(1+i)\overline{w}+2(1-i)w \leqq 0$$

$$\therefore\ w\overline{w}-\frac{1+i}{2}\overline{w}-\frac{1-i}{2}w \leqq 0$$

$$\therefore\ \left(w-\frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1-i}{2}\right)-\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2} \leqq 0$$

$$\therefore\ \left(w-\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(w-\frac{1+i}{2}\right)} \leqq \left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(\frac{1+i}{2}\right)}$$

$$\therefore\ \left|w-\frac{1+i}{2}\right|^2 \leqq \left|\frac{1+i}{2}\right|^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\left|w-\frac{1+i}{2}\right| \leqq \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

したがって、Q(w) の存在する領域は B$\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の周または内部であることがわかる.

(i)(ii) より、求める領域は図の**アミカケの部分** である. ただし、境界を含む.

＜考察 1 ＞ (2) を成分で扱ってみる

上記を 2 成分で扱うだけのハナシで、結局はこの方がヤッカイ なのだが、複素数の計算に慣れるまでは仕方のない経緯ではある———説明だけはしておこう. $z,\ w$ を

$$z=x+yi,\quad w=X+Yi$$

とすると、与えられた条件は

$$① \ :\ x^2+y^2 \leqq 1\ ,\qquad ② \ :\ x+y \geqq 1$$

このとき、変換の関係式は

$$\boldsymbol{③\ :\ z=\frac{2i}{w}-1}$$

であったから

$$\begin{aligned} x+yi &= \frac{2i}{X+Yi}-1 \\ &= \frac{2i(X-Yi)}{X^2+Y^2}-1=\left(\frac{2Y}{X^2+Y^2}-1\right)+\frac{2X}{X^2+Y^2}i \end{aligned}$$

すなわち

$$\boldsymbol{x = \frac{2Y}{X^2+Y^2} - 1,\ \ y = \frac{2X}{X^2+Y^2}}$$

これらを先の 2 条件に入れると

$$① :\ \left(\frac{2Y}{X^2+Y^2}-1\right)^2 + \left(\frac{2X}{X^2+Y^2}\right)^2 \leqq 1$$

$$\therefore\ \ \frac{4}{X^2+Y^2} - \frac{4Y}{X^2+Y^2} + 1 \leqq 1 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{Y \geqq 1}$$

$$② :\ \left(\frac{2Y}{X^2+Y^2}-1\right) + \left(\frac{2X}{X^2+Y^2}\right) \geqq 1 \qquad \therefore\ \ X^2+Y^2 \leqq X+Y$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{2}}$$

となり、当然ながら同じ結果となる．しかし、複素数らしく扱うということなら断然「(解)」に述べた書き方の方が光る と思う．だが、苦しいときはすべて許される．

＜考察 2＞「1 次分数変換」の「構造」を見る

さて、本題に入ろう．つまり、いまから、与えられた変換の式の構造を分解して検証する作業に入る．———実は、ここが最もヤッカイなのだ．

誤解のないように、前もって言っておくが、何も答案にこのように書け、と言っているわけではない．少なくとも、こういう見識がないと先に述べたような答案がキッチリとは書けない．そのイメージを焼き付けるための「手立て」 と思ってもらえばよい．

与えられた変換の関係式は

$$\boldsymbol{w = \frac{2i}{z+1}}$$

だが、これを分解してみると

$$z \quad \longrightarrow \quad z+1 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{z+1}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{z+1}\cdot 2i$$

(i) 平行移動　　(ii) 鏡映の反転　　(iii) 90°回転 ＋ 2 倍の相似変換)

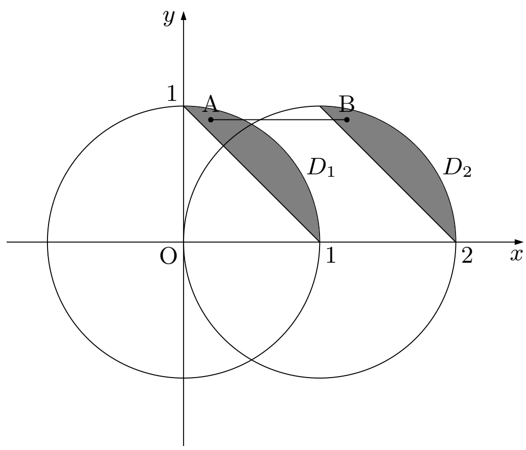
で、中でも「鏡映の反転」がやはり圧巻である．

以下、(1) で求めた領域のある 1 点 A に注目して、この点がどのように変換されて行くかを追跡することにする．わかりにくければ、図形の特徴的な所をねらって (対称線上などは避ける)「● 印」なんかをつけてみるとよい．

(i) まずは、「平行移動」

変換の関係式は

$$w = z+1$$



右図で (1) で得られた弓形の領域 D_1 の中の 1 点 A が右に (+1) だけ平行移動して点 B にうつる．

同様にして、領域 D_1 のすべての点が右に (+1) だけ平行移動するから、弓形 D_1 全体が右に (+1) だけ平行移動して弓形の領域 D_2 にうつることは、ほとんど直感的にわかるだろう．

次は、得られた点 B、あるいは弓形の領域 D_2 がどう変換されるか———次の図を見てもらいたい．

(ii) さらに、「**鏡映の反転**」

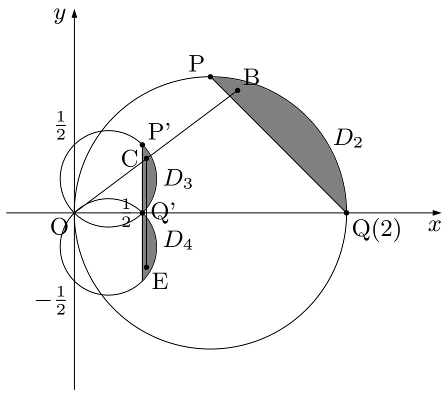
変換の式は

$$\boldsymbol{w=\frac{1}{z+1}}\ \longleftarrow\ \text{逆数をトル！}$$

である．

さて、(1) で得られた点 B は、まず「**通常の反転**」によって点 C にうつる．

このとき、原点を通る円 の 1 部分である「弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$」が、原点を通らない直線 の 1 部分である「線分 $\overline{\mathrm{P'Q'}}$ 」にうつり、原点を通らない直線 の 1 部分である「線分 $\overline{\mathrm{PQ}}$」が、原点を通る円 の 1 部分である「弧 $\overset{\frown}{\mathrm{P'Q'}}$ 」にうつることもわかり、なかなか興味深い．



そして、弓形の領域 D_2 のすべての点も同様の変換を受けるから、弓形の領域 D_2 は「**通常の反転**」によって弓形の領域 D_3 にうつる．

さらに、こうして得られた点Cは「$\boldsymbol{x}$ **軸対称**」によって点 E にうつり、弓形の領域 D_3 も「$\boldsymbol{x}$ **軸対称**」によって弓形の領域 D_4 にうつる．これで「**鏡映の反転**」が完結する．そして、さらに次を読んでもらいたい．

(iii) 最後に、「**90°回転 ＋ 2 倍の相似変換**」

ここまで来ればあと一息だ．変換の式

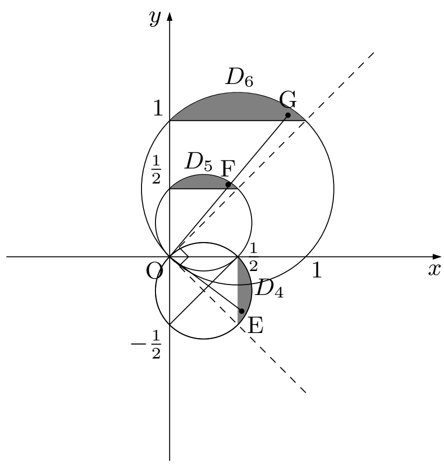
$$\boldsymbol{w=\frac{1}{z+1}\cdot 2i}$$

の「$\boldsymbol{2i}$」が「**90°回転 ＋ 2 倍の相似変換**」、つまり、i が「90° 回転」で「係数 2」が「Oを中心とする 2 倍の相似変換」である．

右図でいうと、(ii) で得られた点Eが O を中心に 90° 回転 (左まわり) して点Fにうつり、さらにこの点 F が

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=2\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

にしたがって点Gにうつる．



領域でいうと、(ii) で得られた弓形の領域 D_4 が O を中心に 90° 回転 (左まわり) して弓形の領域 D_5 にうつり、さらに「Oを中心とする 2 倍の相似変換」として弓形の領域 D_6 にうつることをイメージとして了解されると思う．

最初の弓形の領域 D_1 は合成変換ししたがって D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 と変換されるのだが、その途中で大きさは変わるがカタチは変わらない．そうすると、図形を構成している 2 直線がある角をなしている場合、1 次分数変換でその角が変わらない ことも予見できる——これはあとで複素数的に説明するつもりであるが、それほど大仰なことではなく、ごく「あたりまえ」のことなのである．

＜考察 3 ＞「1 次分数変換」は「等角変換」である

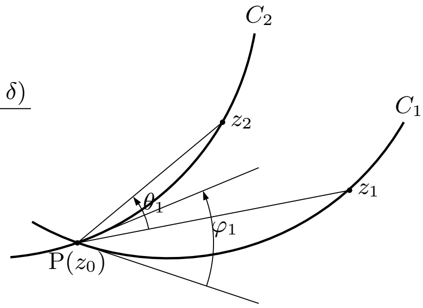
「1 次分数変換」を構成している合成変換の 1 つ 1 つの図形的意味を追いかけて、「反転の等角性」が確認できれば、これはほとんどあたりまえのことだが、ここでは実際に「どうやるのか」、「どうなるのか」を実験してみよう——イメージを体感してください.

点 $\mathrm{P}(z_0)$ で交わる 2 曲線を $C_1,\ C_2$ とし、変換

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\ (\alpha\delta-\beta\gamma\fallingdotseq 0)$$

によって $C_1,\ C_2$ がうつる曲線を $S_1,\ S_2$ そして、$\mathrm{P}(z_0)$ がうつる点を $\mathrm{Q}(w_0)$ とする.

そうすると



$$\begin{aligned} w_1-w_0&=\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}-\frac{\alpha z_0+\beta}{\gamma z_0+\delta}\\ &=\frac{(\alpha z_1+\beta)(\gamma z_0+\delta)-(\alpha z_0+\beta)(\gamma z_1+\delta)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_0+\delta)}\\ &=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma z_1+\delta}\cdot\frac{z_1-z_0}{\gamma z_0+\delta}\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} w_2-w_0&=\frac{\alpha z_2+\beta}{\gamma z_2+\delta}-\frac{\alpha z_0+\beta}{\gamma z_0+\delta}\\ &=\frac{(\alpha z_2+\beta)(\gamma z_0+\delta)-(\alpha z_0+\beta)(\gamma z_2+\delta)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_0+\delta)}\\ &=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma z_2+\delta}\cdot\frac{z_2-z_0}{\gamma z_0+\delta}\end{aligned}$$

ゆえに、辺々で割り算をすると

$$\frac{w_2-w_0}{w_1-w_0}=\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\cdot\frac{\gamma z_1+\delta}{\gamma z_2+\delta}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

だが、ここで点 z_1 を曲線 C_1 に沿って「$z_1\to z_0$」とするとき、直線 z_0z_1 は点 $\mathrm{P}(z_0)$ における接線に限りなく近づく.

そして、これに対応して「$w_1\to w_0$」となり、直線 w_0w_1 は点 $\mathrm{Q}(w_0)$ における接線に限りなく近づく——これらは $z_2,\ w_2$ についても同様です.

このとき ① で

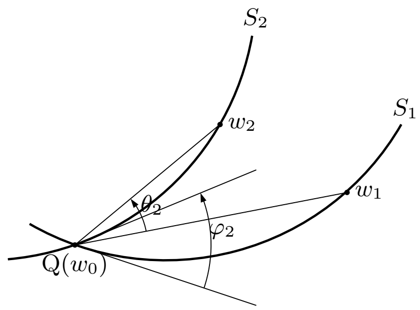
$$\lim_{\substack{z_1\to z_0\\ z_2\to z_0}}\frac{\gamma z_1+\delta}{\gamma z_2+\delta}=1$$

であり

$z_1\to z_0$ のとき $w_1\to w_0$

また, $z_2\to z_0$ のとき $w_2\to w_0$

であるから、結局 ① は



$$\lim_{\substack{w_1\to w_0\\ w_2\to w_0}}\frac{w_2-w_0}{w_1-w_0}=\lim_{\substack{z_1\to z_0\\ z_2\to z_0}}\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

である. そして、いま

$$\angle z_1\mathrm{P}z_2=\theta_1,\ \ \angle w_1\mathrm{Q}w_2=\theta_2$$

とおくと、「$z_1\to z_0,\ z_2\to z_0$」のときは θ_1 は $\mathrm{P}(z_0)$ における $C_1,\ C_2$ の接線のなす角 φ_1 に、θ_2 は $\mathrm{Q}(w_0)$ における $S_1,\ S_2$ の接線のなす角 φ_2 に限りなく近づく.

すなわち ② は

$\boldsymbol{\varphi_1=\varphi_2}$ (この場合、符号も含めて一致 !)

となるから、「1 次分数変換」は「**等角変換 (曲線のなす角を変えない)**」である ことがわかる.

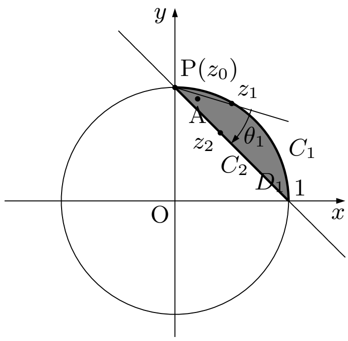
本問を例に説明しておこう．これは、D_1 として与えられた領域 (＜図 1 ＞の D_1) が 1 次分数変換

$$w = \frac{2i}{z+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

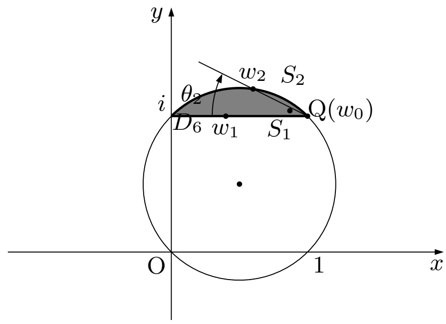
によって変換された結果の領域 (＜図 2 ＞の D_6) である．

途中、いくつかの変換の合成により変換されていく経緯については＜**考察 2** ＞で詳しく説明したからそちらで確認してもらいたい．

ここで知りたいのは、「 **D_1と D_6(始めと終わり)** 」、しかも、「 **曲線のなす角** 」の関係を知ること が目的である．



＜図 1 ＞



＜図 2 ＞

まず、P(i) が ($*$) で変換されて Q($1+i$) にうつるから、これらを $C_1,\ C_2$ の交点を P(z_0) とし、$S_1,\ S_2$ の交点を Q(w_0) にとる——これが説明するのに都合がよさそうだ．

ここで、チョッと注意しておくが、1 次分数変換 ($*$) には合成変換の一部を構成している「 **鏡映の反転** 」の中の「 **通常の反転** 」における、「 **原点を通る円の変換** 」と「 **原点を通らない直線の変換** 」による結果が効いている——実際はケッコウ複雑に絡んでいるのです．

そのために、D_1 の弓形の**円弧の部分**が D_6 の弓形の**線分の部分**にうつり、D_1 の弓形の**線分の部分**が D_6 の弓形の**円弧の部分**にうつっている のである——こんなことに気がつくだろうか．

そういうことで、z_0 に対する $z_1,\ z_2$ と、w_0 に対する $w_1,\ w_2$ は上図＜ 1 ＞、＜ 2 ＞のようにとることになる．その場合、曲線とはいいながら、C_2 と S_1 は実は直線になっているが、これはそういう問題だから仕方がない．

そうすると

$$\angle z_1 \mathrm{P} z_2 = \theta_1, \quad \angle w_1 \mathrm{Q} w_2 = \theta_2$$

だが、$z_1,\ z_2$ が限りなく z_0 に近づくとき、$w_1,\ w_2$ が限りなく w_0 に近づき、接線のなす角、すなわち 2 曲線のなす角は

$$\boldsymbol{\theta_1,\ \theta_2 \ \rightarrow\ -\frac{\pi}{4}\ (z_1,\ z_2 \rightarrow z_0)}$$

で、「 **符号込み** 」で 2 曲線のなす角が不変である ことがわかる．これは 1 次分数変換 ($*$) を構成している合成変換の「 **鏡映の反転** 」によるものであることはすでに説明した．

一件落着！

■「1 次分数変換」の応用

「応用」などと書いてはみたが、ここのテーマはチョッと難しい．実際の入試に出たとしても、何らかの誘導がついている はずだから、それに乗って思考を進めればよい．

＜例＞

ある z_0 を与えるとき

$$z_{n+1} = \frac{3z_n+1}{z_n+3}\ (n \geqq 0)$$

で数列 z_n を定める．

(1) 1 次分数変換 $w = \dfrac{3z+1}{z+3}$ による不動点を $\alpha, \beta,\ (\alpha > \beta)$ とすると

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta}\quad (k \text{ は定数})$$

に変形されることを示せ．

(2) この数列 z_n はこの複素数平面上にどのように分布しているか．

（解） (1) 不動点を z とすると $w = z$ だから

$$z = \frac{3z+1}{z+3} \qquad \therefore\ \ z(z+3) = 3z+1 \qquad \therefore\ \ z = \pm 1$$

$\alpha = 1,\ \beta = -1$ とおいて左辺を計算すると

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{\dfrac{3z+1}{z+3}-1}{\dfrac{3z+1}{z+3}+1} = \frac{2z-2}{4z+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{z-1}{z+1}$$

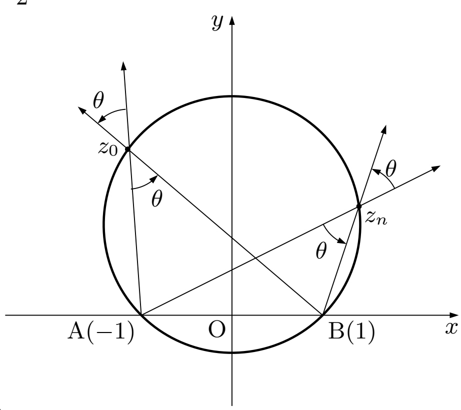
(2) これを与えられた漸化式に用いると

$$\frac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{z_n-1}{z_n+1}$$

これより、数列 $\left\{\dfrac{z_n-1}{z_n+1}\right\}$ は、初項 $\dfrac{z_0-1}{z_0+1}$, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

ゆえに

$$\frac{z_n-1}{z_n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{z_0-1}{z_0+1} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



さらに、① の両辺の偏角を調べてみる．

$$arg\left(\frac{z_n-1}{z_n+1}\right) = \underbrace{arg\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0} + arg\frac{z_0-1}{z_0+1}$$

$$= arg\frac{z_0-1}{z_0+1}\quad (=\theta)$$

つまり、z_n は **円周角の定理** から 3 点 A, B, z_0 で定まる円周上の点であり、

$$\left|\frac{z_n-1}{z_n+1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| \to 0\ (n\to\infty)$$

$$\therefore\ \ z_n \to 0$$

から、その円周上を点 B(1) に近づくことがわかる．

＜考察＞ **1 次分数変換の標準化**

本問 (1) で得られた変形、すなわち k を定数として

$$\boldsymbol{\frac{w-\alpha}{w-\beta}=K\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}\quad (K\neq 0,\ K\neq 1,\ \alpha\neq\beta)}$$

のような形を **1 次分数変換の標準形** という．ここでは、このように変形できる根拠とその意味を探ってみたい．

(1)「複比不変」から得られるもの――標準化への準備

4 点 $\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta),\ \mathrm{C}(\gamma),\ \mathrm{D}(\delta)$ が**同一円周上**、または**同一直線上**にある条件は

$$\boldsymbol{\frac{\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}{\dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}}=k\ (\text{実数})\qquad \therefore\quad \frac{\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}{\dfrac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}}=k\ (\text{実数})}$$

であった．特に**同一直線上**というのは分母と分子のどちらか一方が実数なら他方も実数となる場合のことである．そして、この「**比**」、「**(分子) : (分母)**」のことを「**複比**」というのだが、**1 次分数変換** ではこの**複比**が**不変**である ことが知られている――調べておこう．

いま、異なる 4 つの複素数を $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ とするとき

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\ :\ \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$

が 4 点 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ の「複比」、または「非調和比」である．

このとき、1 次分数変換

$$\boldsymbol{w=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0)}$$

において、4 点 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ が 4 点 $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ に変換されるとする．ただし、ここでは係数に $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ を使うとまぎらわしいので $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて表したが、一般には複素数である．

$$\begin{aligned}
w_3-w_1&=\frac{az_3+b}{cz_3+d}-\frac{az_1+b}{cz_1+d}\\
&=\frac{(az_3+b)(cz_1+d)-(az_1+b)(cz_3+d)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}\\
&=\frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}\\
w_3-w_2&=\frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}\quad \longleftarrow \text{「}w_3-w_1\text{」と同様！}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}}&=\frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}\cdot\frac{(cz_3+d)(cz_2+d)}{(ad-bc)(z_3-z_2)}\\
&=\frac{cz_2+d}{cz_1+d}\cdot\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

同様にして

$$\boldsymbol{\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}}=\frac{cz_2+d}{cz_1+d}\cdot\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ゆえに、これらの比をとると

$$\boldsymbol{\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}\ :\ \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\ :\ \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である――「**複比**」は **1 次分数変換** で**不変**であることが示された．

そして、この「**比の値**」を k とすると

$$\frac{\dfrac{w_4-w_1}{w_4-w_2}}{\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}}=\frac{\dfrac{z_4-z_1}{z_4-z_2}}{\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}=k\ (\text{実数})$$

のように**実数**であるならば

$$\begin{cases}4\text{ 点 } z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \text{ が同一円周上、または同一直線上！}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\\ 4\text{ 点 } w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4 \text{ が同一円周上、または同一直線上！}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\end{cases}$$

であることも簡単にいえる.

このとき $(*)$ でいうと 3 点 $z_1,\ z_2,\ z_3$ が定点ならば、上記の「円周、または直線」はこの 3 点でキマル．そして z_4 はこの「円周、または直線」のどこかにいる.

だから、いっそこの z_4 を**変数 $\boldsymbol{z}$** に置き換えるとこの「円周、または直線」の任意の点を表すことができる.

同様の理由で w_4 を**変数 $\boldsymbol{w}$** に置き換えると ① に示した複比の関係は

$$\boldsymbol{\frac{w-w_1}{w-w_2}\ :\ \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\ :\ \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

と表され、「(**内項の積**)=(**外項の積**)」であることから

$$\boldsymbol{\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$\therefore\quad \frac{w-w_1}{w-w_2}=\left(\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\cdot\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\right)\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}\quad\longleftarrow\quad (\cdots)\text{ 内を } K \text{ とおく！}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{w-w_1}{w-w_2}=K\frac{z-z_1}{z-z_2}},\ \text{ただし } K=\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\cdot\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

のように表されることがわかる——これが「**標準化への準備**」なのです.

このとき、z から w への変換の関係式は、上記の分母を払って

$$(w-w_1)(z-z_2)=K(w-w_2)(z-z_1)$$

$$\therefore\quad \underbrace{(1-K)}_{c}wz+\underbrace{(Kz_1-z_2)}_{d}w-\underbrace{(w_1-Kw_2)}_{a}z-\underbrace{(-w_1z_2+Kw_2z_1)}_{b}=0$$

$$\therefore\quad cwz+dw-az-b=0$$

$$\therefore\quad w(cz+d)=az+b\qquad\therefore\quad \boldsymbol{w=\frac{az+b}{cz+d}}\quad\longleftarrow\quad 1\text{ 次分数変換になった！}$$

も確認される．要するに、**1 次分数変換** では、3 点 $z_1,\ z_2,\ z_3$ の行方である 3 点 $w_1,\ w_2,\ w_3$ が決まれば確定し、④ のカタチへの変形が可能である、ということである.

(2) 不動点と標準化

1 次分数変換

$$\boldsymbol{w=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)}$$

の変換による**不動点**は $\boldsymbol{w=z}$ とおいて得られる方程式、すなわち

$$z=\frac{az+b}{cz+d}\qquad\therefore\quad z(cz+d)=az+b$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{cz^2-(a-d)z-b=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

の解として得られる——ここでも係数は一般に複素数である.

これは 2 次方程式 (見かけ上) であるから、**1 次分数変換** の不動点が 2 個以下である．以下、不動点の個数により 1 次分数変換の性質を分類することができる.

(i) 不動点が 2 個のとき

これは 2 次方程式 ⑦ が異なる 2 つの解をもつ場合のハナシであるから、$c \fallingdotseq 0$ である．ただし、この 2 つの解は実数解とは限らない———この方程式からの条件を最初に用意しておこう．

α, β とすると**解と係数の関係**により

$$\alpha + \beta = \frac{a-d}{c}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{c}$$

である．そこで改めて、用意しておいた「**(1)** の ⑥」をながめてみると

$$⑥ \ : \ \boldsymbol{\frac{w-w_1}{w-w_2} = K\frac{z-z_1}{z-z_2}}, \quad \text{ただし } \boldsymbol{K = \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \cdot \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}}$$

だが、これは一般の **1 次分数変換** で成り立つ関係式だから、$\boldsymbol{\alpha, \beta}$ **が不動点**であることに注目して

$$\boldsymbol{w_1 = z_1 = \alpha}, \quad \boldsymbol{w_2 = z_2 = \beta}$$

としてもさしつかえはない．すなわち、上記の ⑥ は

$$\boldsymbol{\frac{w-\alpha}{w-\beta} = K\frac{z-\alpha}{z-\beta}} \ \longleftarrow \ \text{本問のテーマ！}$$

ここで、K を具体的な数値として求めなければならないが

$$\begin{aligned} K &= \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \cdot \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} \ \longleftarrow \ ①\text{を代入！} \\ &= \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \cdot \left(\frac{cz_2+d}{cz_1+d} \cdot \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right) \\ &= \frac{cz_2+d}{cz_1+d} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \cdots\cdots ⑧ \end{aligned}$$

本問では「$a = 3, \ b = 1, \ c = 1, \ d = 3$」だから ⑦ の方程式は

$$z^2 - 1 = 0 \qquad \therefore \ \ z = \pm 1 \ \longleftarrow \ \text{これが}\alpha, \ \beta\text{です！}$$

「$\alpha = 1, \ \beta = -1$」と「$\alpha = -1, \ \beta = 1$」で K の値がちがうから ⑧ より

$$K_{\alpha=1} \frac{1 \cdot (-1) + 3}{1 \cdot 1 + 3} = \frac{1}{2}$$

$$K_{\alpha=-1} \frac{1 \cdot 1 + 3}{1 \cdot (-1) + 3} = 2$$

である．したがって、与えられた **1 次分数変換** は次の 2 通りに**標準化**される．

すなわち

$$\boldsymbol{\frac{w+1}{w-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}}, \quad \text{あるいは } \boldsymbol{\frac{w-1}{w+1} = 2 \cdot \frac{z-1}{z+1}}$$

で、本問はこの第 1 の変形にしたがって設問が展開しているわけである．

(ii) 不動点が 1 個のとき

この解説は「不動点の個数」に注目して、まず 2 個の場合を説明したが、1 個の場合といってもそれを与える方程式 ⑦ が 1 次方程式の場合は全く事情がちがう．

そこで、次のようにハナシを進めることにする．

(ア) $c = 0$ のとき ： 変換の式は z の「タダの 1 次式」になるから分数式の議論ではない．

$$w = \frac{az+b}{d} \ \longleftarrow \ z \text{ の分数式ではない！}$$

$$\alpha = \frac{a\alpha+b}{d} \ \longleftarrow \ \text{不動点を}\alpha\text{とおいた！}$$

$$\therefore \ \ \boldsymbol{w - \alpha = \frac{a}{d}(z-\alpha)}, \quad \boldsymbol{\alpha = \frac{b}{d-\alpha}} (\text{第 2 式の分母を払って}\alpha\text{について解いた！})$$

となり、この場合の標準形が得られる．

ただし、$a=d$ のときは

$$w = z + \frac{b}{d} \longleftarrow \ b \fallingdotseq 0 \text{ のときは不動点ナシ. } b=0 \text{ のときは恒等変換！}$$

(イ) $c \fallingdotseq 0$ のとき ： 2 次方程式 ⑦ は**重解**をもつ (実数とは限らない) から

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{a-d}{2c}, \ \ (a-d)^2 + 4bc = 0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

このとき α を不動点とすると

$$\begin{aligned} w-\alpha &= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} \\ &= \frac{(az+b)(c\alpha+d)-(a\alpha+b)(c\alpha+d)}{(cz+d)(c\alpha+d)} \\ &= \frac{(ad-bc)(z-\alpha)}{(c\alpha+d)(cz+d)} \end{aligned}$$

ここで、左辺の $w-\alpha$、右辺の $z-\alpha$ に注目して両辺の逆数をとる——これは**数列の漸化式**に学んだことです.

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-\alpha} &= \frac{c\alpha+d}{ad-bc} \cdot \frac{cz+d}{z-\alpha} \ \longleftarrow \ cz+d \text{ を } z-\alpha \text{ で割り落とす！} \\ &= \frac{c\alpha+d}{ad-bc} \cdot \left(c + \frac{c\alpha+d}{z-\alpha}\right) \end{aligned}$$

ここで ⑨ を用いて

$$c\alpha = \frac{a-d}{2} \qquad \therefore \ \ c\alpha + d = \frac{a+d}{2}$$

$$ad-bc = ad + \frac{(a-d)^2}{4} = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2$$

これらを代入して

$$\boldsymbol{\frac{1}{w-\alpha} = \frac{2c}{a+d} + \frac{1}{z-\alpha}}$$

すなわち、**標準化**が達成された.

(3) 標準化から 1 次分数変換 の「図形的意味」を考える

改めて「図形的意味」なんて言われると「どんなにオイシイ話か」などと思ってしまうが、何のためにこんなことをやってきたのかがチョッとだけわかるというほどのことです.

まず、「**1 次分数変換の標準化**」で述べた「**不動点が 2 個の場合**」というのは

$$\boldsymbol{w=\frac{az+b}{cz+d} \longrightarrow \frac{w-\alpha}{w-\beta}=k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

であった———まとめに、この使い方の例を 1 つ示しておきたいのです.

しかし、その前に確認しておかなければならないことがある．それは、複素数平面上に 2 定点 $\alpha,\ \beta$ を与えるとき、それにもう 1 つの条件を与えてその円を確定することができるということである．もちろん、それは 複素数平面上という特殊事情による使い勝手 の中でのハナシだが

(i) 2 定点からの距離の比が一定 である点の集合———**アポロにウスの円！**

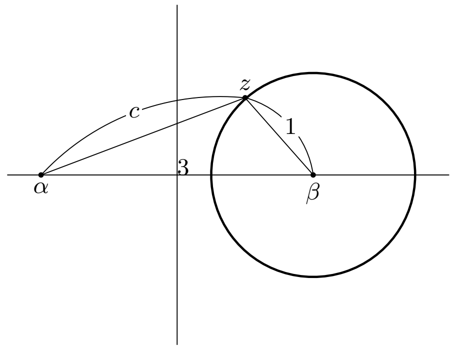
(ii) 2 定点からの含む角 (円周角) が一定 である点の集合.

が考えられる．しかも、これら (i)(ii) の円が互いに「**直交する**」というのである———誰が発見したのかわからないが興味深いテーマではないか.

そこで「条件 (i)」だが (∗) で

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=c\ (>0)$$

を満たす点 z の軌跡は、2 点 $\alpha,\ \beta$ からの距離の比が一定の点の軌跡だから、それは円 (アポロ二ウスの円) か、または直線 (垂直 2 等分線) である———その全体を集合の記号で $\{K\}$ と表すことにする.



このとき w は

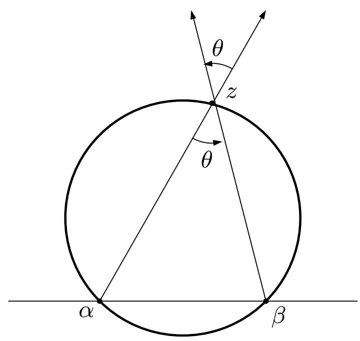
$$\left|\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right|=\left|k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right|$$
$$=|k|\cdot\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=|k|\cdot c$$

であるから、w も 円 (アポロ二ウスの円) か、または直線 (垂直 2 等分線) で、これも $\{K\}$ である.

わかることは、1 次分数変換では「**円 (アポロニウスの円) か、または直線 (垂直 2 等分線)**」は「**円 (アポロニウスの円) か、または直線 (垂直 2 等分線)**」にうつる.

次に、「条件 (i)」は

$$arg\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)=arg(z-\alpha)-arg(z-\beta)$$
$$=\theta\ (\text{一定}) \longleftarrow \text{円周角がキマル！}$$



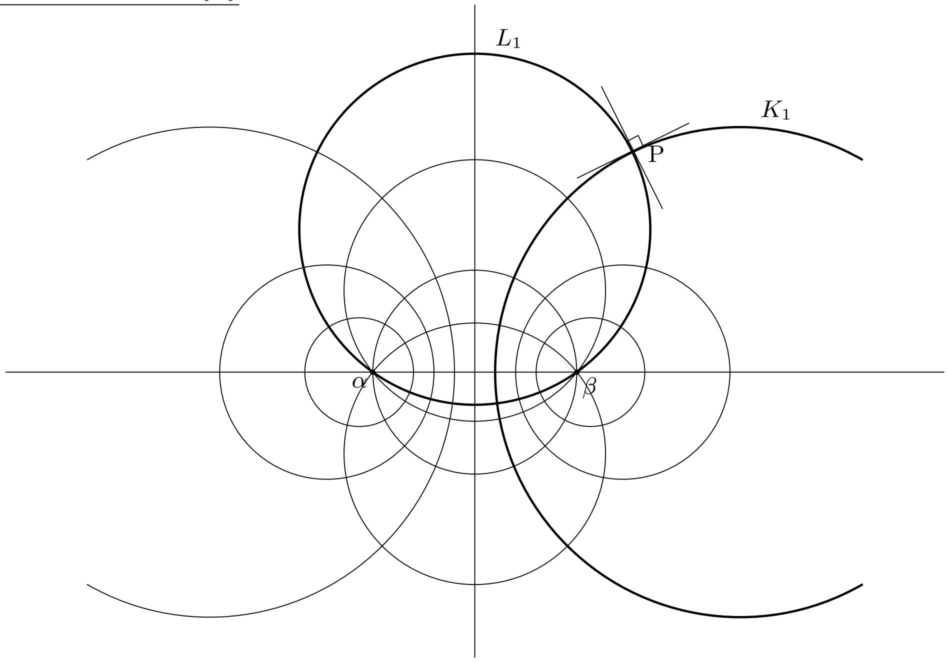
となる点 z の軌跡は 2 点 $\alpha,\ \beta$ を通る円、または直線で、その全体を $\{L\}$ とすると、これに対応する w は

$$arg\left(\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right)=arg\left(k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)$$
$$=\underbrace{arg\ k}_{\varphi}+\underbrace{arg(z-\alpha)-arg(z-\beta)}_{\theta}$$
$$=\varphi+\theta\ (\text{一定})$$

であるから、同じ $\{L\}$ の円、または直線を描く.

つまり、「**$\boldsymbol{\alpha,\ \beta}$ を通る円、または直線**」は「**$\boldsymbol{\alpha,\ \beta}$ を通る円、または直線**」にうつる.

すなわち、次の図の 直線 $\alpha\beta$ 上に中心を置く円の集合が $\{K\}$、線分 $\alpha\beta$ の垂直 2 等分線上に中心を置く円の集合が $\{L\}$ である———なかなかキレイな図が描けた.



さて、ここからが**本論** だ———このとき与えられた c_1 に対して $\{K\}$ の円の 1 つ K_1 と $\{L\}$ の円の 1 つ L_1 とがどのように交わるか———実は**直交する**. これはチョッと感動モノですぞ.

どうやら見た目にはそのように見える. しかし、それをどうやって確かめればよいか———ここでやっと「**(∗) の変形**」とその「**お仕事**」が登場する.

そのために、新規に 1 次分数変換

$$\boldsymbol{z' = \frac{z-\alpha}{z-\beta}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

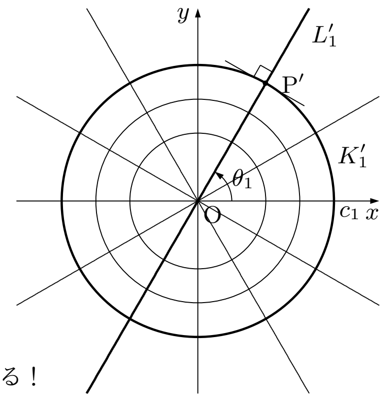
を導入する. そうすると (∗) から

$$|\boldsymbol{z'}| = \left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \boldsymbol{c_1} \ (>0)$$

$\longleftarrow$ $\{K\}$ の 1 つ K_1は原点中心、半径 c_1の円 K_1'にうつる！

$$\boldsymbol{arg\ z'} = arg\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) = \boldsymbol{\theta_1} \text{ (一定)}$$

$\longleftarrow$ $\{L\}$ の 1 つ L_1は原点を通る直線 L_1'にうつる！



このとき、円 K_1' と直線 L_1' が直交することは明らかである.

そして 1 次分数変換ではその**等角性**により曲線のなす角は保存されている はずだから、結局、円 K_1 と円 L_1 とは直交、つまり、円の集合 $\{K\}$ と円の集合 $\{L\}$ とが直交している. なかなかおもしろいハナシではないか.

一件落着！

0.4.2.4　いろいろな変換

何だかあいまいな名前のタイトルだが、これは

$$w = (\text{いろいろな関数})$$

ということである．それも、たくさんあるわけでもない．

むしろ「一般的にはどう扱うか」という意味にとってもらえばよいかと思う．それだけ 1 次分数変換の汎用性が高いということかも知れない．

■ いろいろな変換

こういう場合は、与えられた関数によって扱い方がちがうので、ここでは複素数平面上の変換の一般的な扱い方に慣れてもらえばよい と思う．以下、実例を挙げて説明する．

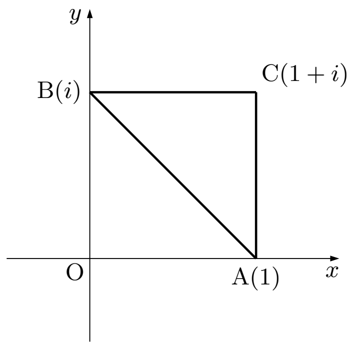
＜ 例 **1** ＞

複素数 z が 3 点 A(1), B(i), C($1+i$) を結ぶ三角形の周上にあるとき

$$w = z^2$$

で定められる点 w はどのような図形を描くか．図示せよ．

（解） まずは素朴に考える．



z と w を $z = x + yi$, $w = X + Yi$ とおくと、$w = z^2$ だから

$$\begin{aligned} X + Yi &= (x+yi)^2 \\ &= x^2 + 2xyi + y^2i^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \\ \therefore\ & \boldsymbol{X = x^2 - y^2,\ \ Y = 2xy} \end{aligned}$$

このとき、条件にしたがって X, Y の関係式を求めればよい．

(i) z が BC 上のとき： $y = 1,\ 0 \leqq x \leqq 1$ より

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = x^2 - 1^2 = \boldsymbol{x^2 - 1} \\ \boldsymbol{Y} = 2x \cdot 1 = \boldsymbol{2x} \qquad \therefore\ x = \dfrac{Y}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ X = \left(\frac{Y}{2}\right)^2 - 1 \ \longleftarrow\ \boldsymbol{x} \text{ がパラメーター！}$$

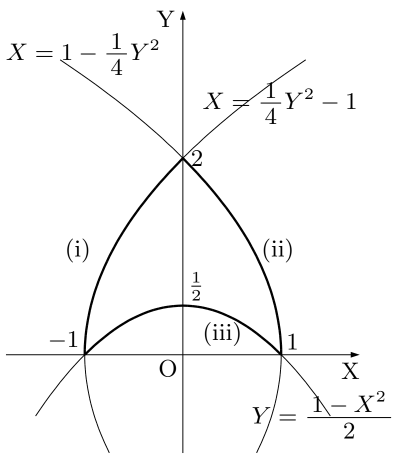
$$= \frac{1}{4}Y^2 - 1 \ \ (\ 0 \leqq Y \leqq 2\ )$$

(ii) z が CA 上のとき： $x = 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ より

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = 1^2 - y^2 = \boldsymbol{1 - y^2} \\ \boldsymbol{Y} = 2 \cdot 1 \cdot y = \boldsymbol{2y} \qquad \therefore\ y = \dfrac{Y}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ X = 1 - \left(\frac{Y}{2}\right)^2 \ \longleftarrow\ \boldsymbol{y} \text{ がパラメーター！}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}Y^2 \ \ (\ 0 \leqq Y \leqq 2\ )$$



(iii) z が AB 上のとき： $x + y = 1,\ 0 \leqq x \leqq 1$ より

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = x^2 - (1-x)^2 = \boldsymbol{2x - 1} \qquad \therefore\ x = \dfrac{X+1}{2} \\ \boldsymbol{Y = 2x(1-x)} \end{cases}$$

$$\therefore\ Y = 2 \cdot \frac{X+1}{2}\left(1 - \frac{X+1}{2}\right)$$

$$= (X+1)\frac{1-X}{2} \ \longleftarrow\ \boldsymbol{x} \text{ がパラメーター！}$$

$$= \frac{1-X^2}{2} \ \ (-1 \leqq X \leqq 1)$$

以上の考察より、求める図形は右図の太線部分である．

一件落着！

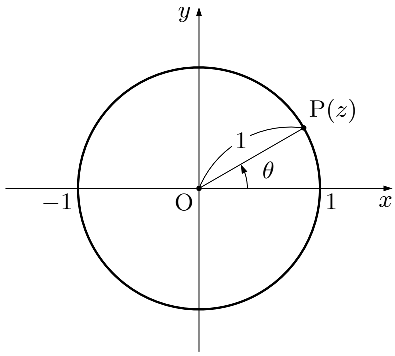
＜例 2＞

複素数平面上で、点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、次の点 w はどんな図形を描くか.

(1) $w = \dfrac{2}{(z+1)^2}$　　　　(2) $w = 3z^2 + \dfrac{1}{z^2}$

(解) もとの点 z は、原点を中心とする半径 1 の円周上を動くから

$$|\boldsymbol{z}| = \mathbf{1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$



を保っている.

まず、これが基本である.

(1) 変換の関係式は

$$\boldsymbol{w} = \frac{\mathbf{2}}{(\boldsymbol{z}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

この手の問題は、本来なら「**1 次分数変換**」のときのように、これを z について解いて

$z = (w$ の式$)$

としたものを ① に入れると w の関係式が得られて、その前後に多少の配慮が必要であったとしても基本的には「**一件落着！**」となる. しかし、この問題はそうは行かない.

それは、この本の前半にすでに書いたことだが、$\sqrt{(\text{虚数})}$ というものが定義されていない からである――したがって、この方法は「却下！」である.

そうすると、いきおい ① にもどって「**アタマからやる**」しかない. すなわち、① を満たす z は変数 θ を導入して

$$\boldsymbol{z} = \cos\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\theta}$$

と表すことができる. すると ② の分母は

$$\begin{aligned}(z+1)^2 &= (\cos\theta + i\sin\theta + 1)^2 \\ &= \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ &= 4\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)\end{aligned}$$

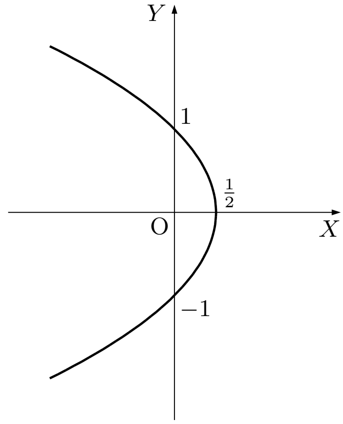
これを ② に入れると

$$\begin{aligned}w &= \frac{2}{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\cos\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}\cos^{\mathbf{2}}\dfrac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}} - \boldsymbol{i}\frac{\sin\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}\cos^{\mathbf{2}}\dfrac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}}\end{aligned}$$

そこで $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{i}$ とおくと**実数部分** $\boldsymbol{X}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \frac{\cos\theta}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}) \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1} - \tan^{\mathbf{2}}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}\end{aligned}$$

となり、**虚数部分 $\boldsymbol{Y}$** は



$$\boldsymbol{Y} = \frac{-\sin\theta}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③④ から $\tan\theta$ を消去して X, Y の関係式を導けばよい．

すなわち ④ より

$$\tan\frac{\theta}{2} = -Y$$

だから、これを ③ に入れて

$$X = \frac{1}{2}(1 - Y^2) \qquad \therefore \ \boldsymbol{x = \frac{1}{2}(1 - y^2)} \ \textbf{(放物線)}$$

が求める図形の方程式である．

(2) これも同じ理由で「**アタマから**」やる．すなわち

$$\boldsymbol{z = \cos\theta + i\sin\theta}$$

とおいて変換の式に代入すると

$$w = 3z^2 + \frac{1}{z^2}$$

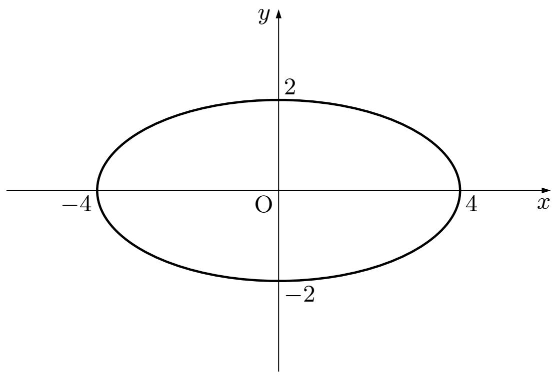
$$= 3(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^2}$$

$$= 3\{\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\} + \{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}$$

$$\boldsymbol{= 4\cos(2\theta) + 2i\sin(2\theta)}$$

そこで $\boldsymbol{w = X + Yi}$ とおくと

$$X = 4\cos(2\theta), \quad Y = 2\sin(2\theta)$$



そこで θ を消去すると

$$\left(\frac{X}{4}\right)^2 + \left(\frac{Y}{2}\right)^2$$

$$= \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) = 1$$

$$\therefore \quad \frac{X^2}{4^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1} \ \textbf{(楕円)}$$

が得られる．これが求める図形の方程式である．

一件落着！
